arXiv:2603.14024v1 [q-fin.MF] 14 Mar 2026

通过倒向随机微分方程和广义短缺捕捉现金非可加性与期限风险

Giulia Di Nunno*† Emanuela Rosazza Gianin‡

2026年3月13日

摘要

在处理不同时间尺度的期限时，如文献 [11]所述，损失的风险评估可能同时面临利率不确定性和期限风险。为捕捉这两种影响，我们采用现金次可加的全动态风险度量。本文考察通过倒向随机微分方程和短缺方法构造的此类度量。我们强调，所考虑的倒向随机微分方程既包括利普希茨驱动项，也包括二次驱动项。随后，我们将损失的 hq-熵风险度量作为一种有效实例引入，以满足全动态风险度量的需求。我们扩展短缺风险度量，以捕捉现金非可加性。对于新引入的 h-广义短缺风险度量，我们给出其对偶表示，并将其与全动态确定性等价联系起来。最后可以看到，损失的 hq-熵风险度量属于 h-广义短缺这一类，但不属于确定性等价型。我们指出，经典熵风险度量除了由倒向随机微分方程生成外，同时也是一种短缺风险度量和确定性等价物。

关键词： 期限风险、相对熵、现金非可加性、利率不确定性、动态风险度量、利普希茨和二次反向随机微分方程

MSC2020： 60H10, 60H20, 91B70, 91G70

1 引言

期限风险是指在评估短期投资时，使用为长期头寸设计的风险度量，反之亦然。在养老金和健康保险等领域，这种风险尤为关键，因为预计会产生长期索赔，并需要对其进行对冲。在此背景下，例如，我们知道，使用过时的死亡率，或选择错误的队列，可能会导致保费评估错误，

*奥斯陆大学数学系，P.O. Box 1053 Blindern，0316 Oslo，挪威。电子邮箱：giulian@math.uio.no；挪威经济学院，Helleveien 30，5045 Bergen，挪威。

†本研究在挪威研究委员会资助的 SURE-AI中心项目框架内开展，项目编号为 357482。

‡米兰比可卡大学统计与定量方法系，via Bicocca degli Arcimboldi 8，20126 Milano，意大利。电子邮箱：emanuela.rosazza1@unimib.it。该作者是意大利 GNAMPA-INdAM 的成员。

进而影响资本要求。在 [11], 中，期限风险已通过完全动态风险度量加以识别，并引入了时域持久性或h-长寿性的概念，简言之，将其作为量化指标。事实上，全动态风险度量是由两个时间参数索引的一族风险度量$(\rho_{tu})_{t,\ u} \triangleq (\rho_{tu})_{0\le t\le u\le T}$，能够以显式形式自然地考虑期限，见 [7]。要理解期限风险，我们必须回顾限制性质（见 [7]）：

$$\rho_{tu}(X) = \rho_{tv}(X), \qquad \text{for } v \geq u, \text{ and } X \ \mathcal{F}_u\text{-measurable}, \tag{1}$$

关于信息流 $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$。粗略地说，这意味着，短期范围 u内的风险头寸 X 会按照其发生在较长期限 v内的情形进行评估。相反，一旦解除限制，我们便有可能对期限风险进行量化。为此， [11] 提出了h-长寿性这一概念，并通过修正项来定义：

$$\gamma(t,u,v,X) \triangleq \rho_{tv}(X) - \rho_{tu}(X) \geq 0, \quad t \leq u \leq v. \tag{2}$$

在处理短期与长期等不同时间尺度时，我们必须通过利率考虑货币的价值，而利率可能是不确定的，参见例如 [16, 14] 以及 [15]中的讨论。正如 [14]所指出的，明确使用利率会直接引出现金次可加风险度量的概念。我们回顾一下，现金可加性（也称为 $\mathcal{F}_t$-平移不变性）是指：

$$\rho_{tu}(X+m) = \rho_{tu}(X) - m, \tag{3}$$

对于 $\mathcal{F}_u$-可测的 X 和 $\mathcal{F}_t$-可测的 m。当（3）不成立时，该风险度量称为现金非可加。特别地，当以下条件成立时，它称为现金次可加（见 [14] ，另见 [25, 19]）：

$$\rho_{tu}(X+m) \geq \rho_{tu}(X) - m, \qquad m \geq 0.$$

为解释其与利率不确定性的相互作用，我们必须明确以货币单位表示的各项数量。因此，我们将 $\in_u$ 称为时刻 u的货币单位。于是，在 u 可用的金融投资记为 $X \in_u$，其中 X 表示投资规模。此外，设 $(D_{tu})_{t,u}$ 为时间区间 $(t,u]$上的贴现因子族。于是，D_{tu}的计量单位为 $1/\in_u$。进一步假设 $0 < d_{tu} \leq D_{tu} \in_u \leq 1$，其中 d_{tu}为某个（随机）下界。于是，对于任意现金可加完全动态风险度量 $(\phi_{tu})_{t,u}$，我们定义

$$\rho_{tu}(X) \triangleq \phi_{tu}(D_{tu} X \in_u), \qquad X \ \mathcal{F}_u\text{-measurable},$$

这是现金次可加的。事实上，由于 $D_{tu} \in_u \leq 1$，根据 ϕ_{tu}的单调性和现金可加性，我们有

$$\begin{aligned} \rho_{tu}(X+m) &= \phi_{tu}(D_{tu}(X+m)\in_u) \\ &\geq \phi_{tu}(D_{tu}X\in_u + m) = \phi_{tu}(D_{tu}X\in_u) - m = \rho_{tu}(X) - m, \end{aligned}$$

对于任意 X $\mathcal{F}_u$-可测和 $m \geq 0$ $\mathcal{F}_t$-可测的变量。这个观察引发了人们对现金次可加风险度量，以及更一般的现金非可加风险度量的兴趣。本文将对此进行探讨，旨在提供一族同时满足时域持久性和现金非可加性的全动态风险度量。

在我们先前的工作 [11], 中，我们将经典熵风险度量扩展为 h-熵版本，以刻画期限风险。事实上，熵风险度量$\rho_{tu}(X)$由以下类型的倒向随机微分方程生成:

$$-dY_t = \frac{b}{2}|Z_t|^2 dt - Z_t dB_t, \quad Y_u = -X,$$

with $(B_t)_{t\geq 0}$ 维布朗运动，风险厌恶程度为 $b > 0$，从而得到

$$\rho_{tu}(X) = Y_t = \frac{1}{b} \ln E\left[\exp(-bX) \middle| \mathcal{F}_t\right]. \tag{4}$$

在 [11], 中，我们引入了由驱动项为以下形式的倒向随机微分方程生成的h-熵风险度量

$$g^h(t, y, z) = \frac{b}{2}|z|^2 + a(t), \quad t \leq u, z \in \mathbb{R},$$

其中， a 是一个非负实值函数。于是，该风险度量定义为

$$\rho^h_{tu}(X) = Y_t = \frac{1}{b} \ln E\left[\exp\Big(-bX + \int_t^u ba(s)\, ds\Big) \middle| \mathcal{F}_t\right]. \tag{5}$$

为简化记号，后文中我们令 $b = 1$ 。

此时，度量 (4) 和 (5) 均为现金可加。受 [23, 29], 的研究启发，我们旨在定义一类熵型风险度量，使其既具有现金非可加性，又能够刻画期限风险。具体而言，我们关注对超过给定严重程度水平 $\beta \geq 0$的损失进行评估。为此，我们引入由以下倒向随机微分方程诱导的损失的 hq-熵风险度量

$$-dY_t = \Big[\frac{q}{2}\,\frac{|Z_t|^2}{1 + (1-q)Y_t} + a(t)\Big]dt - Z_t dB_t, \qquad Y_u = (X + \beta)^- + \alpha_q,$$

对于某个 $q \in (0, 1)$ 和 $\alpha_q \geq \frac{1}{q-1}$，表示风险态度。该风险度量具有以下显式表达式

$$\rho^{hq}_{tu}(X) = Y_t = \ln_q E\left[\exp_q\Big((X + \beta)^- + \alpha_q + \int_t^u a(s)\, ds\Big) \middle| \mathcal{F}_t\right], \tag{6}$$

用广义对数和指数函数（$\ln_q$ 和 $\exp_q$）[1]表示。参见 Tsallis相对熵 [30, 31]。

[1]根据 [30], 可知，对于 $q \to 1$, $\ln_q(x) \to \ln x$ 以及 $\exp_q(x) \to \exp(x)$，其中 $\exp_q(X) \triangleq [1 + (1-q)x]^{\frac{1}{1-q}}_{+} \begin{cases} \text{对于 } x \geq -\frac{1}{q-1},\ q \in (0,\ 1) \\ \text{对于 } x < -\frac{1}{q-1}, q > 1 \end{cases}$； $\ln_q(x) \triangleq \frac{x^{1-q} - 1}{1-q} \begin{cases} \text{当 } x \geq 0, q \in (0, 1) \\ \text{当 } x > 0, q > 1 \end{cases}$

本文的第一部分致力于形式化上述概念。我们在具有利普希茨驱动项和二次驱动项的BSDE方法中，详细阐述h-长寿性和现金非可加性的性质，以适应我们将要引入的熵风险度量的扩展。

经典熵风险度量也可以视为短缺风险度量，即

$$\rho_{tu}(X) = \operatorname{ess.inf}\left\{m_t \ \mathcal{F}_t - \text{measurable}: \ E\big[U(X+m_t)|\mathcal{F}_t\big] \geq B\right\}$$

对于 X $\mathcal{F}_u$-可测的情形，其中 U 为效用函数， B 为固定的目标水平。参见 [17]。受这一联系的启发，我们研究了短缺风险度量的扩展，以同时刻画现金非可加性和期限风险。这引出了*h*-广义短缺风险度量 的概念，其定义为

$$\rho_{tu}^{U,f,B}(X) = \operatorname{ess.inf}\left\{m_t \ \mathcal{F}_t - \text{measurable}: \ E\big[U_u(f_u(X,m_t))|\mathcal{F}_t\big] \geq B_{tu}\right\}$$

通过凹效用函数族 $(U_u)_u$、实值聚合函数族 $(f_u)_u$以及确定性目标水平 $(B_{tu})_{t,\ u}$。此外，我们还研究了 h-广义短缺与所谓的确定性等价风险度量之间的关系，并给出其完全动态版本：

$$\tilde{U}_u(-\rho_{tu}^{\tilde{U}_u}(X)) = E[\tilde{U}_u(X)|\mathcal{F}_t],$$

˜对于由 $(U_u)_u$ 构成的凹函数族。事实上，我们的结果表明，在参数 $(U_u,\ \ f_u,\ \ B_{tu})_{t,\ u}$ 与 $(\tilde{U}_u)_u$满足特定关系时，h-广义短缺就是一个确定性等价物。

回到我们的 hq-熵风险度量（6），我们考察它是否确实是一个 h-广义短缺和完全动态确定性等价风险度量。我们看到，虽然通过巧妙地选择参数，确实可以将（6）表示为 h-广义短缺，但它属于确定性等价型这一点并不成立。

本文结构安排如下。第 2 节介绍利用 BSDE 方法构造全动态风险度量。我们考虑利普希茨和二次驱动项，同时着眼于熵风险度量。我们重点研究现金非可加性，并刻画 h-长寿性。在利普希茨情形下，我们得到 h-长寿性指数的显式公式。作为补充，我们还建议通过 BSDE 族而非单个 BSDE 来构造全动态风险度量。这种方法进一步凸显了期限风险的作用。第 3 节介绍并研究损失上的 hq-熵风险度量。第 4 节提出广义短缺表示（静态和动态），以涵盖现金非可加性和 h-长寿性。这些度量是拟凸的。我们研究其对偶表示。第 5 节探讨 h-广义短缺与全动态确定性等价风险度量之间的关系。最后一节中，我们将损失上的 hq-熵风险度量认定为一种广义短缺。不过，我们指出，它并非全动态确定性等价物。

2 倒向随机微分方程方法

在完备概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上，令 $(B_t)_{t\in[0,T]}$ 为一个 d 维布朗运动，$(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ 为其 P 增广自然滤过。我们将讨论范围限制在 L^2 空间上。我们重点研究与以下形式的倒向随机微分方程相关联的全动态风险度量 $(\rho_{tu})_{t,\,u}$

$$Y_t = X + \int_t^u g(s, Y_s, Z_s)\, ds - \int_t^u Z_s\, dB_s \quad (u \in [0,T]), \tag{7}$$

其解 $(Y_t, Z_t)_t \triangleq (Y_t, Z_t)_{t\in[0,u]}$ 可视为一个依赖于驱动项 g 并在终端条件 $X \in L^2(\mathcal{F}_u)$ 处取值的非线性算子。关于 Lipschitz 情形，参见 [26]；关于线性二次情形，参见 [1]。此外，还可参见 [2]，以及 [21] 关于有界终端条件的开创性论文。按照彭的术语，$\mathcal{E}^g(X|\mathcal{F}_t)$ 表示上述倒向随机微分方程解 (Y_t, Z_t) 在时刻 t 的 Y 分量，称为 X 在时刻 t 的条件 g 期望。

方程 (7) 的解是否存在取决于参数 (X, g) 的性质。通常，文献将标准假设 $X \in L^2(\mathcal{F}_u)$ 以及满足以下条件的渐进可测驱动项 $g : \Omega \times [0,u] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 称为：

- 一致利普希茨，即存在常数 $C > 0$ 使得，对于 $dP \times dt$-几乎处处，
$$|g(\omega, t, y_1, z_1) - g(\omega, t, y_2, z_2)| \le C(|y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|),$$
对于任意 y_1、$y_2 \in \mathbb{R}$、z_1、$z_2 \in \mathbb{R}^d$，其中 $|\cdot|$ 表示 $\mathbb{R}^k$ 中的欧几里得范数；
- $E\left[\int_0^u |g(t, 0, 0)|^2\, dt\right] < +\infty$。

这些标准假设保证方程（7）具有唯一解（Y_t、Z_t）$_t$，其中（Y_t）$_t \in \mathbb{H}^2_{[0,u]}$（$\mathbb{R}$）以及（$Z_t$）$_t \in \mathbb{H}^2_{[0,u]}$（$\mathbb{R}^d$），其中

$$\mathbb{H}^2_{[a,b]}(\mathbb{R}^k) \triangleq \left\{\text{adapted } \mathbb{R}^k\text{-valued processes } (\eta_t)_{t\in[a,b]} : E\left[\int_a^b |\eta_t|^2\, dt\right] < \infty\right\}.$$

二次情形更为微妙。大量文献研究了 $X \in L^\infty$（$\mathcal{F}_u$）以及驱动项 g，它们关于（y、z）连续，并满足

$$|g(t, y, z)| \le a_t + b_t|y| + c_t|z| + f(y)|z|^2$$

对 a、b、c 和 f 作出不同的假设。参见 [21, 1, 2]。尽管解的存在性已得到证明，但唯一性仍是另一项挑战。$X \in L^2$（$\mathcal{F}_u$）的情形在 [1], 中进行了分析，其中证明了 g（t、y、z）$= f$（y）$|z|^2$ 的存在性和唯一性，且 f 全局可积。他们的论证可以如下轻易推广。

命题 1 对于 $X \in L^2(\mathcal{F}_u)$ 和

$$g(t, y, z) = a_t + f(y)|z|^2 \tag{8}$$

取 $a \in L^1([0,u])$ 和 $f \in L^1(\mathbb{R})$，倒向随机微分方程 (7) 在 $\mathbb{H}^2_{[0,u]}(\mathbb{R}) \times \mathbb{H}^2_{[0,u]}(\mathbb{R}^d)$ 中有唯一解。此外，对于非负的 a 和 f，该唯一解的 Y 分量非负。

证明。 定义 $\tilde{f}(x) = f(x - \int_0^t a_s ds)$、 $x \in \mathbb{R}$ 和 $\tilde{X} = X + \int_0^u a_s ds$。倒向随机微分方程

$$\eta_t = \tilde{X} + \int_t^u \tilde{f}(\eta_s)|\zeta_s|^2 \, ds - \int_t^u \zeta_s \, dB_s$$

存在唯一解（η_t， ζ_t）$_t$（参见 [1, 命题 3.1]）。我们很容易看出， $Y_t = \eta_t - \int_0^t a_s ds$和 $Z_t = \zeta_t$ 满足带有（8）的（7）。

现在假设 a 和 f 均为非负。通过立即调整 [1, 命题 3.2]中的比较定理，使其包含项 a，我们可以看出该解是非负的。

■

下文中，我们考虑具有 $X \in L^2$（$\mathcal{F}_u$）和驱动项 g 的倒向随机微分方程，其中驱动项既满足利普希茨条件，又具有（8）型的二次形式。

关于布朗运动情形下倒向随机微分方程、非线性期望和动态风险度量之间的众所周知的关系，我们请参阅 [3, 14, 20, 22, 26, 28] （在标准假设下且处于布朗运动情形）以及 [3]（针对非利普希茨情形）。特别地，

$$\rho_{tu}(X) = \mathcal{E}^g\left(-X|\mathcal{F}_t\right), \quad X \in L^2(\mathcal{F}_u),$$

是一个全动态风险度量；如果 g 在 (y, z) 上是凸的，则该风险度量也是凸的。注意，根据 [14, 命题 7， g如果 t, y, z 在 (y, z) 上是凸的且关于 y 单调递减，那么相应的全动态风险度量是现金次可加的。事实上，反向结论也成立（见 [22, 命题 20]）。此外，如果 g 不依赖于 y，则该风险度量是现金可加的。

下文将讨论由上述倒向随机微分方程所诱导的全动态风险度量的限制与规范化。下文 b) 项中的二次情形由 [32, 定理 4 涵盖。

命题2

a) $(\rho_{tu})_{t,u}$ 具有限制性质 (1) 当且仅当 $g(t, y, 0) = 0$ $dP \times dt$-几乎处处成立，对任意 $y \in \mathbb{R}$。

b) 假设 g 是利普希茨的，或者是具有形式 (8) 且 f 关于 y 连续的二次函数。全动态风险度量 $(\rho_{tu})_{t,u}$ 是规范化的，当且仅当 $g(t, 0, 0) = 0$ $dP \times dt$-几乎处处成立。

证明。 a) 现在假设限制性质成立。那么，对于任意t， u， v，只要满足 $0 \le t \le u \le v \le T$，且对于任意 $X \in L^2(\mathcal{F}_u)$，关系 $Y_t^u = \rho_{tu}(X) = \rho_{tv}(X) = Y_t^v$均成立，其中

$$Y_t^u = \rho_{tu}(X) \quad = \quad -X + \int_t^u g(s, Y_s^u, Z_s^u) ds - \int_t^u Z_s^u dB_s.$$

对于 $Y_t^v = \rho_{tv}(X)$，也有类似的表示。特别地，根据限制性质，对于所有 $u \le v$ 和所有 $X \in L^2(\mathcal{F}_u)$，我们有 $Y_u^u = -X = Y_u^v$。取

差值 $Y_u^v - Y_u^u$，可得

$$\int_u^v g(s, Y_s^v, Z_s^v)ds = \int_u^v Z_s^v dB_s, \qquad \text{for all } 0 \le u \le v. \tag{9}$$

记 $M(v)(u) \triangleq \int_0^u Z_s^v dB_s$为 $u \in [0, v]$中的鞅，并记 $f^{(v)}(u) \triangleq \int_0^u g(s, Y_s^v, Z_s^v)ds$为 $u \in [0, v]$中的有限变差过程。由 [27, 第 4], 章的命题 1.2 可知，连续鞅与有限变差过程相等，当且仅当该鞅为常数。因此，(9) 意味着，对于任意 t，从 0 开始的鞅 $M^{(v)}$ 等于 0 $dP \times du$-几乎处处。因此，对于几乎所有的 $u \in [0, v]$, dP-几乎必然有 $Z_u^v = 0$。回到 (9)，我们还得到，对于所有 $u \in [0, v]$, dP-几乎必然有 $f^{(v)}(u) = f(v)(v)$。对 u 求导可得，对于几乎所有的 $u \in [0, v]$, dP-几乎必然有 $g(u, Y_u^v, 0) = 0$。特别地，对于所有 $X \in L^2(\mathcal{F}_u)$，几乎所有的 v, dP-几乎必然有 $0 = g(v, Y_v^v, 0) = g(v, -X, 0)$。最后，对于几乎所有的 $v \in [0, T]$，有 $g(v, y, 0) = 0$ $y \in \mathbb{R}$。

现金可加风险度量的逆命题已在 [11] 中得到证明。假设对几乎处处的 $t \in [0, T]$ 以及所有 $y \in \mathbb{R}$, $g(t, y, 0) = 0$。对于任意 $X \in L^2(\mathcal{F}_u)$ 和 $v \ge u$，考虑

$$\rho_{tu}(X) = -X + \int_t^u g(s, Y_s^u, Z_s^u)ds - \int_t^u Z_s^u dB_s$$

对于 $\rho_{tv}(X)$ 也可类似地得到，其中 $(Y^{X,r\ u}, Z^{X,r\ u})$（分别为 $(Y^{X,r\ v}, Z^{X,r\ v})$ ）表示在时刻 $r \le u$ 对应于 $\rho_{tu}(X)$（分别为 $\rho_{tv}(X)$）的解。由于 $(Y^{X,r\ v}, Z^{X,r\ v})$ 满足

$$Y_r^{X,v} = \begin{cases} Y_r^{X,u}; & r \le u \\ -X; & u < r \le v \end{cases} \qquad Z^{X,v}(r,s) = \begin{cases} Z_r^{X,u}; & s \le u \\ 0; & u < s \le v \end{cases}$$

当对几乎处处的 $t \in [0, T]$ 以及所有 $y \in \mathbb{R}$, $g(t, y, 0) = 0$ 时，它是 $\rho_{tv}(X)$ 的一个解；由解的唯一性可得限制性质。

b) 这里我们区分由具有利普希茨或二次驱动项的倒向随机微分方程生成的风险度量情形。我们先讨论 Lipschitz 情形。假设对于任意 $0 \le t \le u \le T$, $\rho_{tu}(0) = 0$。如逆比较定理的证明 [8,Thm. 4.1] 和 [20,Lemma 2.1],所示，我们有

$$g(t, y, z) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\rho_{t,t+\varepsilon}(-y - z \cdot (B_{t+\varepsilon} - B_t)) - y}{\varepsilon}$$

在 L^p with $p \in [1, 2)$ 中收敛，对任意 $y \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}^d$ 以及几乎处处的 $t \le u$。通过抽取子列，收敛几乎必然成立；由于 $\rho_{t,\ t+\varepsilon}$ 是归一化的，因此 $g(t, 0, 0) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\rho_{t,\ t+\varepsilon}(0)}{\varepsilon} = 0$ $dP \times dt$-几乎处处成立。反向蕴含显然成立。

由 [32, 定理 4.2] 涵盖了 f 在 y 中连续的二次情形 (8)。 ■

我们强调，在 Lipschitz 情形下， $g(t, y, 0) = 0$ 与 g关于 (y, z) 的凸性共同意味着 g 与 y无关。参见 [8] 引理 4.5 后的注释。换言之，具有限制性质（因而包括所有动态风险度量）且由 Lipschitz 驱动项对应的 BSDE 所诱导的全动态风险度量必然是现金可加的。因此，为了研究期限风险，我们考虑非限制且非标准化的全动态风险度量。

2.1 现金非可加性与 h-长寿性

现在，我们考察驱动项满足哪些条件时才具有 h-长寿性。请注意，我们实际上改进了 [11] 中针对现金可加情形得出的相应结果：事实上，我们证明了一个充要条件，而不仅仅是充分条件。

设 $t \le u \le v$ 和 $X \in L^p(\mathcal{F}_u)$。那么

$$\rho_{tu}(X) \;=\; -X + \int_t^u g(s, Y_s^u, Z_s^u)dv - \int_t^u Z_s^u dB_s$$

对于 $\rho_{tv}(X)$，同理可得。现在定义如下过程

$$\bar{Y}_s^u = \begin{cases} Y_s^u; & s \le u \\ -X; & u < s \le v \end{cases}; \quad \bar{Z}_s^u = \begin{cases} Z_s^u; & s \le u \\ 0; & u < s \le v \end{cases}. \tag{10}$$

定理 3 假设 g 关于(y, z)满足利普希茨条件。当且仅当$g(s, y, 0) \ge 0$对任意 $s \in [0, T], y \in \mathbb{R}$成立时，$h$-长寿性成立。此外，在此情况下，对于任意满足 $t \le v$的 $t, v \in [0, T]$，式 (2)中的 h-长寿性 γ

$$\gamma(t, u, v, X) = E_{\widetilde{Q}_X}\left[e^{\int_t^v \Delta_y g(s)ds} \int_u^v g(s, -X, 0)ds|\mathcal{F}_t\right], \quad t \le u \le v, X \in L^p(\mathcal{F}_u),$$

其中 $\sim Q_X$ 是定义在 $\mathcal{Q}_{tv}$ 上的概率测度，依赖于 X，且与 P等价，其密度为

$$\frac{d\widetilde{Q}_X}{dP} = \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_t^v |\Delta_z g(s)|^2 ds + \int_t^v \Delta_z g(s) dB_s\right\},$$

其中 $\Delta_z g(s) = (\Delta_z^i g(s))_{i=1,\dots,d}$ 定义为

$$\Delta_z^i g(s) \triangleq \frac{g(s, \bar{Y}_s^u, Z_s^v) - g(s, \bar{Y}_s^u, \bar{Z}_s^u)}{d(Z_s^{v,i} - \bar{Z}_s^{u,i})} 1_{\{Z_s^{v,i} \ne \bar{Z}_s^{u,i}\}}, \tag{11}$$

而

$$\Delta_y g(s) \triangleq \frac{g(s, Y_s^v, Z_s^v) - g(s, \bar{Y}_s^u, Z_s^v)}{Y_s^v - \bar{Y}_s^u} 1_{\{Y_s^v \ne \bar{Y}_s^u\}}. \tag{12}$$

$\widetilde{}$概率 Q_X 可解释为一种h-长寿溢价测度 （见 [11]）。

证明。 假设对于任意 $s \in [0, T]$ 和 $y \in \mathbb{R}$， $g(s, y, 0) \ge 0$。我们沿用 [11], 中类似的论证，但将其调整为适用于现金非可加情形。采用上述相同的记号，我们还考虑

$$\widetilde{Y}_s = Y_s^v - \bar{Y}_s^u; \quad \widetilde{Z}_s = Z_s^v - \bar{Z}_s^u.$$

Then

$$\begin{aligned}
\widetilde{Y}_t \;&= \rho_{tv}(X) - \rho_{tu}(X) \\
&= \int_t^v [g(s, Y_s^v, Z_s^v) - g(s, \bar{Y}_s^u, \bar{Z}_s^u)]ds + \int_u^v g(s, \bar{Y}_s^u, \bar{Z}_s^u)ds - \int_t^v [Z_s^v - \bar{Z}_s^u]dB_s - \int_u^v \bar{Z}_s^u dB_s \\
&= \int_t^v [g(s, Y_s^v, Z_s^v) - g(s, \bar{Y}_s^u, \bar{Z}_s^u)]ds - \int_t^v \widetilde{Z}_s dB_s + \int_u^v g(s, -X, 0)ds \\
&= \int_t^v [\Delta_y g(s) \cdot \widetilde{Y}_s + \Delta_z g(s) \cdot \widetilde{Z}_s]ds - \int_t^v \widetilde{Z}_s dB_s + \int_u^v g(s, -X, 0)ds.
\end{aligned} \tag{13}$$

应用吉尔萨诺夫定理后，(13) 变为

$$\rho_{tv}(X) - \rho_{tu}(X) = \int_t^v \Delta_y g(s) \cdot \widetilde{Y}_s ds - \int_t^v \widetilde{Z}_s dB_s^{\widetilde{Q}_X} + \int_u^v g(s, -X, 0) ds, \qquad (14)$$

~其中，$B_s^{Q_X} \triangleq B_s - B_t - \int_t^s \Delta_z g(r)\, dr$, $s \in [t, v]$ 是一个 $\widetilde{Q}_X$-布朗运动。众所周知（例如，参见 [14, 练习 7.2]），

$$\gamma(t, u, v, X) = \rho_{tv}(X) - \rho_{tu}(X) \quad = \quad E_{\widetilde{Q}_X}\left[e^{\int_t^v \Delta_y g(s) ds} \int_u^v g(s, -X, 0) ds \middle| \mathcal{F}_t \right].$$

根据对 $g(\cdot, y, 0)$ 的假设，可得 $\gamma(t, u, v, X) \geq 0$。

现在假设 h-长寿性成立。像之前一样推导（见（14））,

$$\widetilde{Y}_t = \int_u^v g(s, -X, 0) ds + \int_t^v \Delta_y g(s) \cdot \widetilde{Y}_s ds - \int_t^v \widetilde{Z}_s dB_s^{\widetilde{Q}_X},$$

因此，由长寿性可得,

$$\widetilde{Y}_t = E_{\widetilde{Q}_X}\left[e^{\int_t^v \Delta_y g(s) ds} \cdot \int_u^v g(s, -X, 0) ds \middle| \mathcal{F}_t \right] \geq 0$$

对任意 $t \leq u \leq v$ 和 $X \in L^p(\mathcal{F}_u)$。现在令

$$\begin{aligned} \eta_t^F &= F + \int_t^v \left[g(s, -X, 0) 1_{[u,v]} + \Delta_y g(s) \cdot \eta_s^F \right] ds - \int_t^v Z_s^\eta dB_s^{\widetilde{Q}_X} \\ R_t^F &= F + \int_t^v \Delta_y g(s) \cdot R_s^F ds - \int_t^v Z_s^R dB_s^{\widetilde{Q}_X} \end{aligned}$$

对 $t \leq u \leq v$ 和 $F \in L^p(\mathcal{F}_u)$。因此,

$$\begin{aligned} \eta_t^F &= E_{\widetilde{Q}_X}\left[e^{\int_t^v \Delta_y g(s) ds} \left(F + \int_u^v g(s, -X, 0) ds \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ R_t^F &= E_{\widetilde{Q}_X}\left[e^{\int_t^v \Delta_y g(s) ds} \cdot F \middle| \mathcal{F}_t \right] \end{aligned}$$

并且，根据长寿性，$\eta_t^F = \widetilde{Y}_t + R_t^F \geq R_t^F$，对于任意 $F \in L^p(\mathcal{F}_u)$。由 BSDE 逆比较定理（见 [8, 20]），我们有

$$\begin{aligned} &g(s, -X, 0) 1_{[u,v]} + \Delta_y g(s) \cdot \eta_s^F \geq \Delta_y g(s) \cdot \eta_s^F \\ &g(s, -X, 0) 1_{[u,v]} \geq 0 \end{aligned}$$

对于任意 η_t, X 和 $s \leq u \leq v$。因此，$g(s, y, 0) \geq 0$ 对于任意 $s \in [0, T]$ 和 $y \in \mathbb{R}$。 ■

前述结果推广了 [11, 命题 3。3], 该命题处理驱动项 g 不依赖于 y的现金可加情形。

例4 考虑驱动项

$$g(t,y,z)=r_t y^- + z, \quad t\in[0,T], y\in\mathbb{R}, z\in\mathbb{R}^d,$$

其中， r_t 可解释为依赖于时间 t的正利率。显然， $g(,y,z)$ 关于 y递减，且关于(y,z)为凸函数并满足利普希茨条件。相应的全动态风险度量满足现金次可加性、规范化（因为$g(t,0,0)=0$，见命题*2*中的*b*）项）以及*h*-长寿性（对任意t,y，由 $g(t,y,0)\geq 0$可得，见定理 *3*）。

相反，对于 $\bar{g}(t,y,z)=r_t y^- + z+1$，其中 $y\in\mathbb{R}$, $z\in\mathbb{R}^d$，我们得到的全动态风险度量既不满足规范化，也不受限制。

命题5 假设 g 为(8) 型二次函数，且 f 关于 y连续。*h*-长寿性意味着，对几乎所有 $t\in[0,T]$以及所有 $y\in\mathbb{R}$， $g(t,y,0)\geq 0$。

证明。 由 [32, 推论 3.7],可得

$$g(t,y,0)=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\rho_{t,t+\varepsilon}(-y)-y}{\varepsilon}\geq 0, \qquad dP\times dt\text{-a.s.},$$

其中用到了 h-长寿性$\rho_{t,\ t+\varepsilon}(-y)\ \geq \rho_{tt}(-y)$以及 $\rho_{tt}(-y)=y$。 ■

备注6 上述证明中的论证也可用于定理 *3* 的相应利普希茨情形，只需根据命题*2*中 *b)* 点第一部分的证明作相应调整。

2.2 由 BSDE族生成的风险度量

现在考虑由一族驱动项为 $\mathcal{G}=(g_u)_{u\in[0,T]}$ 、依赖于 ρ_{tu} 的时间范围 u 且关于$(y,\ z)$凸的 (7) 型倒向随机微分方程所诱导的一般完全动态风险度量。更准确地说，假设对任意 $t\leq u$,

$$\rho_{tu}(X)=\rho^{\mathcal{G}}_{tu}(X)\triangleq\mathcal{E}^{g_u}(-X|\mathcal{F}_t),\ \text{for any } X\in L^2(\mathcal{F}_u). \tag{15}$$

则$(\rho^{\mathcal{G}}_{tu})_{t,\ u}$满足单调性、凸性以及从上方/下方连续性。与现金可加情形一样（见 [11]），若对任意 $v\leq u\leq T$都有 $g_u(v,\ 0,\ 0)=0$，则对任意 $t\leq u$都有$\rho^{\mathcal{G}}_{tu}(0)=0$。然而，一般而言，这并不能保证限制性质。下面的结果刻画了限制性质成立的条件。

命题7 设 g_u 关于 u 为常数，且 g_u（t、 y、0） $=0$ 对几乎处处的 $t\leq u$ 以及所有$y\in\mathbb{R}$均成立，则全动态风险度量（ρ_{tu}）$_{t,\ u}$ 满足限制性质。反之，设（ρ_{tu}）$_{t,\ u}$ 由具有*Lipschitz*驱动项或二次驱动项（8）且 f连续的倒向随机微分方程生成。若其满足限制性质，则 g_u 关于u为常数，且 g_u（t、 y、0） $=0$对几乎处处的 $t\leq u$以及所有 $y\in\mathbb{R}$均成立。

证明。 如果 g_u 关于 u为常数，则根据命题2$a)$可直接推出限制性质。

反之，假设限制性质成立。我们分别研究利普希茨情形和二次情形。

假设 g 是利普希茨的。按照 [8, 定理 4.1]和 [20, 引理 2.1] 中逆比较定理的证明，并利用限制性质，

$$g_u(t,y,z)=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\rho_{tu}\left(-y-z\cdot(B_{t+\varepsilon}-B_t)\right)-y}{\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\rho_{t,t+\varepsilon}\left(-y-z\cdot(B_{t+\varepsilon}-B_t)\right)-y}{\varepsilon}$$

在 L^p 中以 $p\in[1,2)$ 收敛，对于任意 $y\in\mathbb{R}$， $z\in\mathbb{R}^d$，几乎处处 $t\le u$。取一个子序列，我们得到

$$\frac{\rho_{tu}\left(-y-z\cdot(B_{t+\varepsilon}-B_t)\right)-y}{\varepsilon}\longrightarrow g_u(t,y,z),\quad \varepsilon\to 0^+,\quad P-a.s.$$

我们对 g_v采取类似的处理。根据限制性质，我们有

$$\begin{aligned} g_u(t,y,z) &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\rho_{tu}\left(-y-z\cdot(B_{t+\varepsilon}-B_t)\right)-y}{\varepsilon}\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\rho_{tv}\left(-y-z\cdot(B_{t+\varepsilon}-B_t)\right)-y}{\varepsilon}=g_v(t,y,z)\end{aligned}$$

对于几乎处处 $u\le v$，具有 P-几乎处处收敛。这证明了 g_u 在 u中为常数。根据命题 2 $a)$，条件 $g_u(t,\ y,\ 0)=0$ 应对几乎处处 $t\le u\le T$和 $y\in\mathbb{R}$成立。

假设 g 是二次的且 f 连续。我们通过应用 [32, 推论 3.7] 来沿用上述相同的论证，该推论直接给出 $dP\times dt$-几乎处处收敛。 ■

与现金可加情形类似，h-长寿性与 $\mathcal{G}$的单调性有关。回顾一下，所谓递增族 $\mathcal{G}=(g_u)^{u\in[0,T]}$，是指对任意 $u\le v$,

$$g_u(s,y,z)\le g_v(s,y,z),\quad \text{for a.a. } s\in[0,u] \text{ and all } y\in\mathbb{R}, z\in\mathbb{R}^d.$$

命题 8 设$(\rho_{tu})_{t,\ u}$ 为由 *Lipschitz* 驱动项生成的全动态风险度量(15) 。 $\mathcal{G}$递增，且对任意 $u\in[0,T]$、几乎处处的 $s\in[0,u]$以及所有 $y\in\mathbb{R}$， $g_u(s,y,0)\ge 0$，当且仅当$(\rho_{tu})_{t,\ u}$ 满足 *h*-长寿性。

证明。 假设 h-长寿性成立。根据 [8,定理 4.1] 的逆比较定理以及 [20, 引理 2.1], , h-长寿性推出

$$\begin{aligned} g_v(t,y,z) &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\rho_{tv}\left(-y-z\cdot(B_{t+\varepsilon}-B_t)\right)-y}{\varepsilon}\\ &\ge \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\rho_{tu}\left(-y-z\cdot(B_{t+\varepsilon}-B_t)\right)-y}{\varepsilon}=g_u(t,y,z)\end{aligned}$$

在 L^p with $p\in[1,2)$ 中收敛，对任意 $y\in\mathbb{R}$， $z\in\mathbb{R}^d$，以及几乎处处的 $t\le u$。因此，我们可以看出 $\mathcal{G}$ 是递增的。类似地，利用 h-长寿性

$$g_u(t,y,0)=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\rho_{tu}(-y)-y}{\varepsilon}\ge\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\rho_{tt}(-y)-y}{\varepsilon}=0.$$

反过来，假设 $\mathcal{G}$是递增的，并且对任意 $u \in [0,T]$、几乎处处的$s \in [0,u]$以及所有 $y \in \mathbb{R}$，都有 $g_u(s,\ y,\ 0) \geq 0$。采用上一节的记号，我们考虑将驱动项为 g_u 的倒向随机微分方程的解从 $[0,v]$延拓而得的式 (10)。相应地，$\widetilde{\ }$ $\bar{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\bar{\ }$我们有 $Y_s = Y_s^v - Y_s^u$和 $Z_s = Z_s^v - Z_s^u$。此外，我们还考虑 g_v的式 (11)–(12)。对于 $u \leq v$和 $X \in L^2(\mathcal{F}_u)$，可写为

$$\begin{aligned}\rho_{tv}(X) - \rho_{tu}(X) \ &= \int_t^v [g_v(s, Y_s^v, Z_s^v) - g_u(s, \bar{Y}_s^u, \bar{Z}_s^u)]ds + \int_u^v g_u(s, \bar{Y}_s^u, \bar{Z}_s^u)ds \\ &\quad - \int_t^v [Z_s^v - \bar{Z}_s^u]dB_s - \int_u^v \bar{Z}_s^u dB_s \\ &\geq \int_u^v g_u(s,-X,0)ds + \int_t^v [\Delta_y g_v(s)\cdot \widetilde{Y}_s + \Delta_z g_v(s)\cdot \widetilde{Z}_s]ds - \int_t^v \widetilde{Z}_s dB_s,\end{aligned}$$

$\bar{\ }$ $\bar{\ }$ $\bar{\ }$ $\bar{\ }$由 $g_v(s,\ Y_s^u,\ Z_s^u) - g_u(s,\ Y_s^u,\ Z_s^u) \geq 0$得益于 $\mathcal{G}$递增。上面的右端是一个具有唯一解的线性倒向随机微分方程，并且

$$\widetilde{Y}_t = E_{\widetilde{Q}_X}\left[e^{\int_t^v \Delta_y g_v(s)ds}\int_u^v g_u(s,-X,0)ds|\mathcal{F}_t\right],$$

其中

$$\frac{d\widetilde{Q}_X}{dP} = \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_t^v |\Delta_z g_v(s)|^2 ds + \int_t^v \Delta_z g_v(s)dB_s\right\}.$$

$\widetilde{\ }$由于 $Y_t \geq 0$，我们得出 $\rho_{tv}(X) - \rho_{tu}(X) \geq 0$。 ■

这一结果改进了 [11, 命题 3.10], ，引入了现金非可加性，放宽了充分条件，并证明了必要性。

3 损失上的 q-熵风险度量

我们考虑 [30, 31]研究的广义熵，它基于对对数函数和指数函数的推广。该方法近期已应用于 [23, 29]中的定价和风险度量。

下面我们研究广义熵与驱动项为以下形式的倒向随机微分方程（7）之间的联系

$$g_q(t,y,z) = \frac{q}{2}\frac{|z|^2}{1+(1-q)y}, \quad \text{for } q > 0, \tag{16}$$

该驱动项属于类型（8）。注意，当 $q = 1$时，我们便回到与熵情形相关的经典倒向随机微分方程。请注意，对于 $q \in$（0，1），驱动项 g_q 关于（y，z）是凸的；对于$y > \frac{1}{q-1}$则是凹的。对于 $q > 1$，情况正好相反。

我们选择使用 $q \in$(0，1)，并针对 $y > \frac{1}{q-1}$考虑驱动项 (16)。根据命题 1，对于终端条件 $X \in L^2(\mathcal{F}_u)$，该解存在、唯一且非负。我们还可以看到，该解具有如下表示形式

$$Y_t = \ln_q E\left[\exp_q(X)\middle|\mathcal{F}_t\right]. \tag{17}$$

事实上，我们可以考虑

$$\mathcal{Y}_t = \exp_q(X) - \int_t^u \mathcal{Z}_s dB_s. \tag{18}$$

对 $d\ln_q \mathcal{Y}_t$ 应用伊藤公式，可得

$$-d\ln_q \mathcal{Y}_t = \frac{q}{2}\mathcal{Y}_t^{q-1}(\mathcal{Y}_t^{-q}\mathcal{Z}_t)^2 dt - \mathcal{Y}_t^{-q}\mathcal{Z}_t dB_t.$$

取 $Y_t = \ln_q \mathcal{Y}_t$ 和 $Z_t = \mathcal{Y}_t^{-q}\mathcal{Z}_t$，可得上式对应于

$$-dY_t = \frac{q}{2}\frac{|Z_t|^2}{1+(1-q)Y_t}dt - Z_t dB_t.$$

因此，由 (18) 可得 (17)。在更强的假设下， [23,定理 4.2]，已经给出了这一表示。

在本文中，我们关注超过给定严重程度水平 $\beta \geq 0$ 的损失的风险评估，该水平代表可接受缓冲。此外，我们考虑短期和长期期限，因此需要考虑利率不确定性。为此，我们利用 BSDE 方法，基于方程 (16) 及其解 (17)，构造一种凸且现金次可加的全动态风险度量。为此，我们定义损失的 q-熵风险度量：

$$\rho_{tu}^q(X) \triangleq \ln_q E\left[\exp_q((X+\beta)^- + \alpha_q)\middle|\mathcal{F}_t\right] \tag{19}$$

其中 $\alpha_q \geq \frac{1}{q-1}$，这确实满足所有要求的性质。

在 (19) 这一族中，我们可以通过选择 α_q 和 q 的取值，来决定风险评估应当有多保守。特别地，我们可以看到，对于固定的 q， α_q 的值越高，相应的风险度量 $\rho_{tu}^q(X)$ 就越保守。事实上，

$$\alpha_q^1 \leq \alpha_q^2 \quad \Longrightarrow \quad \ln_q E\left[\exp_q((X+\beta)^- + \alpha_q^1)\middle|\mathcal{F}_t\right] \leq \ln_q E\left[\exp_q((X+\beta)^- + \alpha_q^2)\middle|\mathcal{F}_t\right].$$

此外，相对于 $q \in (0,1)$ 的敏感性也进一步体现了 $\rho_{tu}^q(X)$ 的保守性。

命题 9 对于任意 $X \in L^2(\mathcal{F}_u)$ $\beta \in \mathbb{R}$，损失上的 q-熵风险度量 ρ_{tu}^q关于 q 递增，且满足

$$E[(X+\beta)^- + \alpha_0|\mathcal{F}_t] = \rho_{tu}^0(X) \leq \rho_{tu}^q(X) \leq \rho_{tu}^1(X) = \ln E\big[\exp((X+\beta)^- + \alpha_1)|\mathcal{F}_t\big].$$

for $-1 \leq \alpha_0 \leq \alpha_q \leq \alpha_1$.

也就是说，在损失上考察时，经典熵风险度量 $\rho_{tu}^1(X)$（其中$\alpha_1 = 0$）比任何满足 $-1 \leq \alpha_0 \leq \alpha_q \leq \alpha_1 = 0$ 的 q-熵风险度量都更为保守。

证明。 容易验证

$$\frac{\partial g_q}{\partial q}(t,y,z) = \frac{1}{2}\frac{z^2(1+y)}{(1+(1-q)y)^2} \geq 0 \text{ for any } t \in [0,T], y \geq -1, z \in \mathbb{R}.$$

$\rho^q_{tu}(X)$ 关于 q 的递增单调性可由 BSDE比较定理 [1, 命题 3.2] 得出，因为 $-1 \le \alpha_0 \le \alpha_q \le \alpha_1$。 ■

我们指出，关于损失的 q-熵风险度量 ρ^q_{tu} 是归一化的，当且仅当 $\alpha_q = 0$。限制性质始终成立，见命题2 *a)*。

与前文讨论一致，我们建议对关于损失的 q-熵风险度量作出修正，以刻画期限风险。随后，我们提出完全动态的关于损失的 *hq*-熵风险度量

$$\rho^{hq}_{tu}(X) \triangleq \mathcal{E}^{g^{hq}}((X+\beta)^- + \alpha_q | \mathcal{F}_t) = \ln_q E\left[\exp_q\left((X+\beta)^- + \alpha_q + A(t,u)\right) \middle| \mathcal{F}_t\right] \quad (20)$$

其中 $A(t,u) = \int_t^u a(s)ds$，由驱动项如下的倒向随机微分方程导出:

$$g^{hq}(t,y,z) = \frac{q}{2}\frac{z^2}{1+(1-q)y} + a(t)$$

对于某个确定的 $a(t) \ge 0$，对所有 t 均成立。容易看出，(20) 满足 h-长寿性，因为对所有 t，$a(t) \ge 0$。

显然，定义 (20) 对一般的实数非负 $A(t,\ u)$、$t \le u$ 仍然成立，但在这种情况下会失去与 BSDE 方法的直接联系。

4 广义短缺方法

我们旨在提供能够刻画期限风险和现金非可加性的风险度量族。鉴于经典熵风险度量可视为一种短缺风险度量（见 [17, 例 4.114]），我们将研究这一方法，并作出必要的推广以实现这一目标。

回顾一下，对于 $t \le u$，与凹非递减效用函数 $\rho^{U,\ B}_{t}$ 相对应的动态缺口风险度量 为

$$\rho^{U,B}_t(X) = \operatorname{ess.inf}\{m_t \in L^p(\mathcal{F}_t) : E[U(X+m_t)|\,\mathcal{F}_t] \ge B_t\}, \quad X \in L^p(\mathcal{F}_u),$$

它与凹非递减效用函数 $U: [-\infty,+\infty) \longrightarrow [-\infty,+\infty)$ 以及一个 B_t $\mathcal{F}_t$-可测目标随机变量相对应。这里我们设 ess.inf $\emptyset = +\infty$ 和 ess.inf $L^p(\mathcal{F}_t) = -\infty$。注意，只要 $X \in L^p(\mathcal{F}_u)$，那么

$$-\infty \le E[U(X)|\mathcal{F}_t] \le U(E[X|\mathcal{F}_t]) < +\infty,$$

根据詹森不等式。关于实数集上的静态情形，参见 [17] ；关于实数集上的动态情形，参见 [12]（在系统性风险的背景下）。动态短缺风险度量也可以用接受集等价地表述

$$\mathcal{A}^{U,B}_t \triangleq \{X \in L^p(\mathcal{F}_u) : E[U(X)|\,\mathcal{F}_t] \ge B_t\}$$

as

$$\rho^{U,B}_t(X) = \operatorname{ess.inf}\{m_t \in L^p(\mathcal{F}_t) : X + m_t \in \mathcal{A}^{U,B}_t\}, \quad X \in L^p(\mathcal{F}_u).$$

请注意，以下我们假设目标值 B_t 先验地与U 无关，且为确定值。为处理期限风险，我们引入如下定义。

定义 10 全动态短缺风险度量是由以下各项构成的族$(\rho^{U,B}_{tu})_{t,u}$:

$$\rho^{U,B}_{tu}(X) = \text{ess.inf}\{m_t \in L^p(\mathcal{F}_t) : E[U_u(X+m_t)|\,\mathcal{F}_t] \geq B_{tu}\}, \quad X \in L^p(\mathcal{F}_u), \tag{21}$$

由实数族 $(B_{tu})_{t,u}$ 以及映射族$(U_u)_u$ 生成，其中 U_u 凹且非递减: $[-\infty,+\infty) \longrightarrow [-\infty,+\infty)$。

这里， U_u 也取决于时间范围，而确定性目标 B_{tu} 则同时取决于时间范围 u 和评估时刻 t。相应的接受集定义为

$$\mathcal{A}^{U,B}_{tu} \triangleq \{X \in L^p(\mathcal{F}_u) : E[U_u(X)|\,\mathcal{F}_t] \geq B_{tu}\} \tag{22}$$

从而得到等价表示

$$\rho^{U,B}_{tu}(X) = \text{ess.inf}\{m_t \in L^p(\mathcal{F}_t) : X + m_t \in \mathcal{A}^{U,B}_{tu}\}, \quad X \in L^p(\mathcal{F}_u). \tag{23}$$

下面，我们来看一个包含时间范围视角的式 (21) 示例。

示例 11 $U_u\ x\ =\ 1\ -$ **(完全动态 h-熵风险度量)** 考虑$e^{-x+\int_0^u a\ s\ ds}$() (), ，其中 $x \in \mathbb{R}$ 是非负可积实函数，且 a

$$B_{tu} = 1 - e^{\int_0^t a(s)ds}.$$

直接计算可得，定义 *10* 给出

$$\rho_{tu}(X) = \ln\left(\frac{E[e^{-X+\int_0^u a(s)ds}|\mathcal{F}_t]}{1-B_{tu}}\right) = \ln E[e^{-X+\int_t^u a(s)ds}|\mathcal{F}_t],$$

我们将其识别为 *h*-熵风险度量 (5) $(b=1)$。

我们注意到，在上述示例中，$(U_u - B_{tu})_{t,\ u}$ 关于 u 是非递增的。这一事实在更一般的情形下也成立。

命题12 若 $(U_u - B_{tu})_{t,\ u}$ 对所有 t都关于 u 非递增，则$(\rho_{tu})_{t,\ u}$ 具有 *h*-长寿性。当 U_u 和 B_{tu} 关于 u均为常数时，限制成立。

证明。 根据 [11, 命题 2.8 a)], ，h-长寿性等价于 $\mathcal{A}^{U,\ B}_{tu} \supseteq \mathcal{A}^{U,\ B}_{tv} \cap L^p(\mathcal{F}_u)$。接受集 (22) 的形式使我们能够得出结论。 ■

下面的例子将风险价值推广到能够刻画 h-长寿性。众所周知，风险价值是一种短缺型风险度量（例如参见 [17, 4]），尽管它并非由倒向随机微分方程诱导。

例 13（h-风险价值）风险价值的短缺表示形式在此后，对于 $\alpha \in (0,1)$，

$$VaR_\alpha(X) = \inf\{m \in \mathbb{R} : E[U^\alpha(X+m)] \geq 0\}, \tag{24}$$

其中 $B=0$ 且

$$U^{\alpha}(x)=(\alpha-1)1_{\{x<0\}}+\alpha 1_{\{x\geq 0\}},\quad x\in\mathbb{R}.$$

现在通过取以下形式，考虑以(21) 表示的(24) 的动态版本

$$U_u^{\alpha}(x)=(\alpha_u-1)1_{\{x<0\}}+\alpha_u 1_{\{x\geq 0\}},\quad x\in\mathbb{R},$$

其中， $\alpha_u\in(0,1)$ 是一个确定值，取决于时间范围 u。那么，对于任意$X\in L^p(\mathcal{F}_u)$，

$$\begin{aligned}
\rho_{tu}(X) &= \operatorname{ess.inf}\{m_t\in L^p(\mathcal{F}_t): E[U_u^{\alpha}(X+m_t)|\,\mathcal{F}_t]\geq B_{tu}\}\\
&= \operatorname{ess.inf}\{m_t\in L^p(\mathcal{F}_t): E[(\alpha_u-1)1_{\{X+m_t<0\}}+\alpha_u 1_{\{X+m_t\geq 0\}}\big|\,\mathcal{F}_t]\geq B_{tu}\}\\
&= \operatorname{ess.inf}\{m_t\in L^p(\mathcal{F}_t): E[\alpha_u-1_{\{X+m_t<0\}}\big|\,\mathcal{F}_t]\geq B_{tu}\}\\
&= \operatorname{ess.inf}\{m_t\in L^p(\mathcal{F}_t): \alpha_u-E[1_{\{X+m_t<0\}}\big|\,\mathcal{F}_t]\geq B_{tu}\}\\
&= \operatorname{ess.inf}\{m_t\in L^p(\mathcal{F}_t): \alpha_u-1+E[1_{\{X+m_t\geq 0\}}\big|\,\mathcal{F}_t]\geq B_{tu}\}\\
&= \operatorname{ess.inf}\{m_t\in L^p(\mathcal{F}_t): \alpha_u-1+P(X+m_t\geq 0|\,\mathcal{F}_t)\geq B_{tu}\}.
\end{aligned}$$

取 $B_{tu}\equiv 0$，可得

$$\rho_{tu}(X)=\operatorname{ess.inf}\{m_t\in L^p(\mathcal{F}_t): P(X+m_t\geq 0|\,\mathcal{F}_t)\geq 1-\alpha_u\}\triangleq VaR_{t,u,\alpha_u}(X),$$

与 *[10]*中引入的概念类似。根据命题*12*，当α_u 关于 u递减时，可保证 h-长寿性。

4.1 广义短缺风险度量

受与效用函数 U 及目标值 B 相关的短缺风险度量启发，这类度量具有自然的现金可加性。我们现在旨在引入一种广义短缺概念，从而得到现金非可加风险度量。随后，我们还将进一步扩展定义，将 h-长寿性纳入其中。

定义14 给定一个凹、非递减（非平凡）的效用函数 $U\colon[-\infty,+\infty)\longrightarrow[-\infty,+\infty)$、一个确定性目标 $B\in\mathbb{R}$ 以及一个函数 $f\colon\mathbb{R}^2\to[-\infty,+\infty)$，我们定义并称之为广义短缺风险度量

$$\rho^{U,f,B}(X)\triangleq\inf\{m\in\mathbb{R}: E[U(f(X,m))]\geq B\},\quad X\in L^p(\mathcal{F}_T)\quad(p\in[1,\infty]).\tag{25}$$

函数 f 可视为现金金额 m与随机变量 X之间的聚合器。这种金融解释与系统性风险度量的理念一致（例如参见 [5, 6, 12]），因为需要对不同单位进行聚合。

为了进行后续论证，我们回顾一下，现金可加风险度量可以通过接受集 $\mathcal{A}$ 表示为

$$\rho(X)=\inf\{m\in\mathbb{R}:\ X+m\in\mathcal{A}\}.$$

在 [13, 定理 1], 中，证明了现金非可加拟凸[2]风险度量可表示为

$$\rho(X) = \inf\{m \in \mathbb{R} : \ X \in \mathcal{A}^m\} \tag{26}$$

通过一个单调递增的接受集族$(\mathcal{A}^m)_{m\in\mathbb{R}}$，这些接受集是凸且单调的，即

$$X \leq Y, \ X \in \mathcal{A}^m \quad \Longrightarrow \quad Y \in \mathcal{A}^m.$$

显然，我们有

$$\mathcal{A}^m = \{X : \ \rho(X) \leq m\}. \tag{27}$$

广义短缺风险度量 (25) 也可以用接受集族 $(\mathcal{A}^{U,f,B;m})_m$表示:

$$\rho^{U,f,B}(X) = \inf\{m \in \mathbb{R} : X \in \mathcal{A}^{U,f,B;m}\}, \quad X \in L^p(\mathcal{F}_T), \tag{28}$$

with

$$\mathcal{A}^{U,f,B;m} = \{Y \in L^p(\mathcal{F}_T) : E[U(f(Y,m))] \geq B\}. \tag{29}$$

我们强调，对于 $f(x,m) = x + m$，广义短缺风险度量退化为经典短缺，参见 (21)。

命题 15 设设 f 非常数， $U : [-\infty, +\infty) \longrightarrow [-\infty, +\infty)$ 为凹的、非递减（非平凡）函数，并令$(\mathcal{A}^{U,f,B;m})_{m\in\mathbb{R}}$ 按(29)定义。

1) 接受集的性质:

1a) 若 $f(y,m)$ 关于 $m \in \mathbb{R}$ 非递减，则族 $(\mathcal{A}^{U,f,B;m})_{m\in\mathbb{R}}$ 是非递减的。

1b) 若 $f(y,m)$ 关于 $y \in \mathbb{R}$ 非递减，则对于任意 $m \in \mathbb{R}$， $\mathcal{A}^{U,f,B;m}$ 均为单调的。***1c)*** 若 $(U \circ f)(y,m)$ 关于 y 为凹，则对于任意 $m \in \mathbb{R}$， $\mathcal{A}^{U,f,B;m}$ 均为凸的。

2) 广义短缺风险度量的性质:

2a) 若 $f(y,m)$ 关于 m 和 y 均非递减，且 $(U \circ f)(y,m)$ 关于 y 为凹，则$\rho^{U,f,B}$ 为拟凸。

此外，在满足 *2a)* 中的假设时:

2b) 若 $(U \circ f)(y,m)$ 关于 (y,m) 为凹，则 $\rho^{U,f,B}$为凸。

2c) 如果对任意 y、$k \in \mathbb{R}$ 和 $m > 0$，都有 $f(y,k) \leq f(y-m, k+m)$，那么 $\rho^{U,f,B}$ 是现金次可加的。

证明。 根据定义，1a)、1b)、1c) 可轻易验证。2a) 由上述各项及 [13, 定理 1]可得。2b) 根据 [13, 命题 1(i)], ，当且仅当对任意 $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$ 和 $\alpha \in [0,1]$，满足 $\alpha\mathcal{A}^{U,f,B;m_1} + (1-\alpha)\mathcal{A}^{U,f,B;m_2} \subseteq \mathcal{A}^{U,f,B;\alpha m_1 + (1-\alpha)m_2}$，即可验证 $\rho^{U,f,B}$ 的凸性。考虑

[2]拟凸是指，对任意 $\lambda \in [0,1]$， $\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \max\{\rho(X); \rho(Y)\}$。任何凸风险度量也是拟凸的。例如，参见 [9]。

$(U \circ f)(y,m)$ 关于 (y,m) 为凹，并任取 $Y_1 \in \mathcal{A}^{U,f,B;m_1}, Y_2 \in \mathcal{A}^{U,f,B;m_2}$ 和 $\alpha \in [0,1]$。于是可得

$$\begin{aligned} & E[U(f(\alpha Y_1 + (1-\alpha)Y_2, \alpha m_1 + (1-\alpha)m_2))] \\ \geq \ & \alpha E[U(f(Y_1, m_1))] + (1-\alpha)E[U(f(Y_2, m_2))] \geq B, \end{aligned}$$

因此也有 $\alpha Y_1 + (1-\alpha) Y X_2 \in \mathcal{A}^{U,\ f,\ B;\alpha m_1 + (1-\alpha)^{m_2}}$。由此可得 $\rho^{U,\ f,\ B}$ 的凸性。2c) 根据 [13, 命题 3], , 当且仅当对任意 $m > 0$ 和 $k \in \mathbb{R}$, 都有 $\mathcal{A}^{U,\ f,\ B;k} \subseteq \mathcal{A}^{U,\ f,\ B;k+m} + m$, 现金次可加性才成立。在本例中，对任意 $m > 0$ 和 $k \in \mathbb{R}$, 我们有:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{U,f,B;k+m} + m &= \{Y \in L^p(\mathcal{F}_T) : E[U(f(Y, k+m))] \geq B\} + m \\ &= \{\bar{Y} \in L^p(\mathcal{F}_T) : E[U(f(\bar{Y} - m, k+m))] \geq B\} \\ &\supseteq \{\bar{Y} \in L^p(\mathcal{F}_T) : E[U(f(\bar{Y}, k))] \geq B\} = \mathcal{A}^{U,f,B;k}, \end{aligned}$$

其中，该包含关系源于关于 f 的假设。 ■

注释 16 容易验证，条目 *2c)* 中关于 f 的假设，等价于要求 $f(y,k)$ 在 y 和 k 中的增量之比满足以下条件:

$$\frac{\Delta_k f(y,k)}{\Delta k} \geq \frac{\Delta_y f(y,k)}{\Delta y} \quad \textit{for any } \Delta k = \Delta y = m > 0,$$

其中， $\Delta_k f(y,k) \triangleq f(y, k+\Delta k)$， $\Delta_y f(y,k)$ 也类似。

例 17

i) 函数 $f(y,m) = \beta y + m$，其中 $\beta \in (0,1]$, , 满足条目 *2c)* 中的假设。当 $\beta = 1$ 时，对应于经典短缺风险度量。

ii) 函数 $f(y,k) = 1 - \exp(-\gamma y - k)$，其中 $\gamma \in (0,1)$，关于 y 和 k 单调递增，关于 y 凹（因此 $(U \circ f)(y,m)$ 关于 y 也凹），且满足 $\frac{\partial f}{\partial y} \leq \frac{\partial f}{\partial k}$。根据上述论证,一它由此生成一个拟凸且现金次可加的广义短缺风险度量。

4.1.1 广义短缺风险度量的对偶表示

我们回顾一下，现金非加性拟凸函数 $\rho(X)$ 具有如下对偶表示

$$\rho(X) = \sup_{Q \in \mathcal{Q}} R(E_Q[-X], Q), \quad X \in L^p(\mathcal{F}_T),$$

其中 $\mathcal{Q}$ 是概率测度的集合，其 $\frac{dQ}{dP}$ 属于 $L^p(\mathcal{F}_T)$ 的对偶拓扑空间，而泛函 R 为

$$R(x,Q) = \inf\{m \in \mathbb{R} : \ x \leq c_{min}(m,Q)\}$$

with

$$c_{min}(m,Q) = \sup_{Y \in \mathcal{A}^m} E_Q[-Y]. \tag{30}$$

这些论证详见 [13,第 38-39] 页。

现在，我们给出广义短缺风险度量的对偶表示 re.

命题 18 设 f 非常数，且 $U\colon [-\infty,+\infty) \longrightarrow [-\infty,+\infty)$ 是凹的、非递减的（非平凡）函数，并设 $(\mathcal{A}^{U,f,B;m})_{m\in\mathbb{R}}$ 按(29)中的定义给出。

如果 $f(y、\ m)$ 关于 $m\in\mathbb{R}$ 和 $y\in\mathbb{R}$ 递增，且 $(U\circ f)(y、\ m)$ 关于 y 为凹函数，则 $\rho^{U、f、B}$ 是下半连续的，并具有如下对偶表示：

$$\rho^{U,f,B}(X)=\sup_{Q\in\mathcal{Q}} R\big(E_Q[-X],Q\big),\quad X\in L^p(\mathcal{F}_T), \tag{31}$$

其中，对于任意 $x\in\mathbb{R}$ 和 $Q\in\mathcal{Q}$,

$$R(x,Q)=\inf\Big\{m\in\mathbb{R}:\sup_{Y\in\mathcal{A}^{U,f,B;m}} E_Q[-Y]\geq x\Big\}. \tag{32}$$

证明。 $、f、B$ 的下半连续性。 由于 $(U\circ f)(y、\ m)$ 关于 y 为凹函数（因此关于 y 也连续），所以对于任意 $m\in\mathbb{R}$， $\rho^{U、f、B}$ 的接受集 $\mathcal{A}^{U、f、B;m}$ 都是闭集。根据 [13,Rem. 6]，可得下半连续性。

$、f、B$ 的对偶表示。 根据 $\rho^{U、f、B}$ 的下半连续性， [13, Thm. 3] 证明了式（31）成立，其中 $R(x、\ Q)$ 是 $c_{min}(m、\ Q)$ 的左逆，即

$$R(x,Q)=\inf\{m\in\mathbb{R}:x\leq c_{min}(m,Q)\}.$$

公式（32）由（30）和（29）结合得到。 ■

注 19 从一般的拟凸风险度量 ρ 及其接受集族$(\mathcal{A}^m)_{m\in\mathbb{R}}$出发，参见(26)和(27)，总可以关联到一个现金可加凸风险度量族$(\bar{\rho}_m)_{m\in\mathbb{R}}$ 。事实上，我们可以将 $\bar{\rho}_m$ 定义为由接受集（水平为0）诱导的风险度量

$$\bar{\mathcal{A}}_m^0\triangleq\mathcal{A}^m \tag{33}$$

as

$$\bar{\rho}_m(X)=\inf\{k\in\mathbb{R}:k+X\in\mathcal{A}^m\},\quad X\in L^p(\mathcal{F}_T). \tag{34}$$

该度量是凸的且现金可加（参见 *[17]*）。族$(\bar{\rho}_m)_{m\in\mathbb{R}}$ 与$(\mathcal{A}^m)_{m\in\mathbb{R}}$ 一一对应，因此也与 ρ一一对应。

由(33)可知，最小惩罚 $c_{\substack{\bar{\rho}_m\\ min}}$ 中 $\bar{\rho}_m$ 的（见 *[17]*） 与 （*30*）中的$c_{min}(m,\cdot)$ 一致。事实上，

$$c_{min}^{\bar{\rho}_m}(Q)\triangleq\sup_{Y\in\bar{\mathcal{A}}_m^0} E_Q[-Y]=c_{min}(m,Q),\quad Q\in\mathcal{Q},m\in\mathbb{R}.$$

根据前面的注释，我们可以推得，广义短缺风险度量与一族现金可加凸风险度量之间存在一一对应关系。也就是说，

$$\rho^{U,f,B}\quad\longleftrightarrow\quad(\mathcal{A}^{U,f,B;m})_{m\in\mathbb{R}}\quad\longleftrightarrow\quad(\bar{\rho}_m)_{m\in\mathbb{R}}.$$

命题 20 如果 ρ 是拟凸且现金次可加的风险度量，那么族 $(\bar{\rho}_m)_{m\in\mathbb{R}}$ 关于 m 单调递减，并且满足

$$\bar{\rho}_{m+\Delta}(X) \le \bar{\rho}_m(X) - \Delta \quad \textit{for any } m \in \mathbb{R}, \Delta > 0, X \in L^p(\mathcal{F}_T).$$

此外，

$$c_{min}(m, Q) \le c_{min}(m + h, Q) - h, \quad \textit{for any } Q \in \mathcal{Q}, m \in \mathbb{R}, h > 0.$$

证明。 根据 [13, 命题 3], ，若 ρ 是现金次可加的，则其接受集族满足

$$\mathcal{A}^{m+h} + h \supseteq \mathcal{A}^m, \quad \text{for any } m \in \mathbb{R}, h > 0. \tag{35}$$

因此，对于任意 $X \in L^p(\mathcal{F}_T)$、 $m \in \mathbb{R}$ 和 $h > 0$,

$$\begin{aligned}
\bar{\rho}_m(X) &= \inf\{k \in \mathbb{R} : k + X \in \mathcal{A}^m\} \\
&\ge \inf\{k \in \mathbb{R} : k + X - h \in \mathcal{A}^{m+h}\} \\
&= \inf\{k' \in \mathbb{R} : k' + X \in \mathcal{A}^{m+h}\} + h \\
&= \bar{\rho}_{m+h}(X) + h \ge \bar{\rho}_{m+h}(X).
\end{aligned}$$

此外，由（35）可得

$$\begin{aligned}
c_{min}(m, Q) &= \sup_{Y\in\mathcal{A}^m} E_Q[-Y] \\
&\le \sup_{Y\in\mathcal{A}^{m+h}+h} E_Q[-Y] \\
&= \sup_{Y'\in\mathcal{A}^{m+h}} E_Q[-Y'] - h \\
&= c_{min}(m + h, Q) - h,
\end{aligned}$$

对于任意 $Q \in \mathcal{Q}$、 $m \in \mathbb{R}$、 $h > 0$。 ■

4.2 H-广义短缺

从式（25）给出的广义短缺风险度量定义出发，我们现在将其扩展到如下的动态情形。

定义 21 给定一族非恒定函数$(f_u)^{u\in[0,T]}$ $f_u\colon \mathbb{R}^2 \to [-\infty, +\infty)$、一族凹的非递减（非平凡）效用函数$(U_u)^{u\in[0,T]}$ $U_u\colon [-\infty, +\infty) \longrightarrow [-\infty, +\infty)$以及一族确定性目标值$(B_{tu})_{0\le t\le u\le T}$，我们将 h-广义短缺风险度量$(\rho^{U,f\ B}_{tu},)_{t,u}$ 定义为

$$\rho^{U,f,B}_{tu}(X) = \text{ess.inf}\{m_t \in L^p(\mathcal{F}_t) : E[U_u(f_u(X, m_t))|\mathcal{F}_t] \ge B_{tu}\}, \quad X \in L^p(\mathcal{F}_u). \tag{36}$$

相应的接受集族定义如下

$$\mathcal{A}^{U,f,B;m_t}_{tu} = \{Y \in L^p(\mathcal{F}_u) : E[U_u(f_u(Y, m_t))|\mathcal{F}_t] \ge B_{tu}\}. \tag{37}$$

以下结果可通过与命题 15 类似的方法轻松验证。

命题 22
a) 如果 $(U_u \circ f_u)(y,m)$ 关于 y 和 m非递减，且关于 y凹，那么 $(\rho^{U,\ f\,B\,,)}_{t,u}$是拟凸全动态风险度量。*b)* 如果 $(U_u \circ f_u)(y,m)$ 关于 (y,m)也凹，那么 $(\rho^{U,\ {}^{tu}f\,B\,,)}_{t,u}$ 也凸。
c) 当 f_u 满足命题 *15* 第 *2c)* 项中的附加假设时，可验证其具有现金次可加性。

注 23 通过标准论证，命题 *18* 的对偶表示可轻松推广到全动态情形。

在 [11] 中，我们讨论并刻画了全动态凸风险度量的时域持久性 [11, 命题 2.8]。下文将证明，在接受集层面，拟凸情形也有类似结果，并给出 h-长寿性成立的充分条件。

我们回顾一下，拟凸 ρ_{tu} 在水平 $m_t \in L^p(\mathcal{F}_t)$ 处的接受集为

$$\mathcal{A}^{\rho,m_t}_{tu} \triangleq \{Y \in L^p(\mathcal{F}_u) : \rho_{tu}(Y) \le m_t\}. \tag{38}$$

命题 24（时域持久性）设$(\rho_{tu})_{t,u}$ 为全动态拟凸风险度量。

a）时域持久性等价于 $\mathcal{A}^{\rho,{}^{m_t}}_{,tv} \cap L^p(\mathcal{F}_u) \subseteq \mathcal{A}^{\rho,{}^{m_t}}_{,tu}$，对任意 $t \le u \le v$,$m_t \in L^p(\mathcal{F}_t)$均成立。
b) 特别地，若$(\rho_{tu})_{t,u}$ 是一个广义短缺风险度量(36)，且$(U_u \circ f_u - B_{tu})$关于 u 非递增，则时域持久性成立。

证明。 a) 对任意 $X \in \mathcal{A}^{\rho,{}^{m_t}}_{,tv} \cap L^p(\mathcal{F}_u)$，有 $\rho_{tv}(X) \le m_t$，并且根据长寿性，还有 $\rho_{tu}(X) \le m_t$。因此 $\mathcal{A}^{\rho,{}^{m_t}}_{,tv} \cap L^p(\mathcal{F}_u) \subseteq \mathcal{A}^{\rho,{}^{m_t}}_{,tu}$。反过来，对任意 $X \in L^p(\mathcal{F}_u)$ 和 $t \le u \le v$，有

$$\begin{aligned} \rho_{tv}(X) &= \operatorname{ess.inf}\{m_t \in L^p(\mathcal{F}_t) |\ X \in \mathcal{A}^{\rho,m_t}_{tv}\} \\ &\ge \operatorname{ess.inf}\{m_t \in L^p(\mathcal{F}_t) |\ X \in \mathcal{A}^{\rho,m_t}_{tu}\} = \rho_{tu}(X), \end{aligned}$$

其中这些集合由 (38) 给出。
Item b) 这是由 a) 项结合 (37) 和命题12直接得到的。 ■

5 确定性等价物作为广义短缺

回到经典熵风险度量 (4)，我们知道它可以通过 BSDE 方法、短缺方法以及确定性等价方法生成。通常，后两种方法关系密切。本节研究确定性等价风险度量与我们新引入的广义短缺之间的关系。

我们回顾一下，确定性等价风险度量定义为以下方程的解（若解存在且唯一）：

$$\tilde{U}(-\rho^{\tilde{U}}(X)) = E[\tilde{U}(X)], \quad X \in L^p(\mathcal{F}_T), \tag{39}$$

˜其中给定凹的非递减（非平凡）函数 U：$[-\infty,+\infty) \to [-\infty,+\infty)$。˜参见 [17]。因此，当 U 严格递增时，

$$\rho^{\tilde{U}}(X) \triangleq -\tilde{U}^{-1}\left(E[\tilde{U}(X)]\right), \quad X \in L^p(\mathcal{F}_T).$$

˜风险度量 ρ^U 是拟凸的，见 [9, 引理 5。2] 其中 $l(x) = -\tilde{U}(-x)$。就接受集而言，ρ^U 可改写为 (26)，其中˜

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^{\rho^{\tilde{U}},m} &\triangleq \{Y \in L^p(\mathcal{F}_T) : \rho^{\tilde{U}}(Y) \le m\} \\ &= \{Y \in L^p(\mathcal{F}_T) : \tilde{U}(-\rho^{\tilde{U}}(Y)) \ge \tilde{U}(-m)\} \\ &= \{Y \in L^p(\mathcal{F}_T) : E[\tilde{U}(Y)] \ge \tilde{U}(-m)\},\end{aligned}$$

对任意 $m \in \mathbb{R}$均成立。这里最后一个等号由 (39) 得出。

˜**命题25** 当且仅当满足以下条件时，带有 U 的确定性等价风险度量 (39) 等于带有 (U, f, B) 的广义短缺 (25)：

$$U(f(y,m)) - B = \tilde{U}(y) - \tilde{U}(-m), \quad y, m \in \mathbb{R}. \tag{40}$$

此外，当 U 可逆时，上式可化简为

$$f(y,m) = U^{-1}\left(\tilde{U}(y) - \tilde{U}(-m) + B\right), \quad y, m \in \mathbb{R}. \tag{41}$$

注意，对任意 $x \in \mathbb{R}$，取 $U(x) = x$ 后，(41) 变为

$$f(y,m) = \tilde{U}(y) - \tilde{U}(-m) + B, \quad \text{for any } y, m \in \mathbb{R}.$$

证明。 根据 (28)-(29)，当且仅当对所有 m 均有以下条件时，确定性等价风险度量与广义短缺相同，

$$\mathcal{A}^{\rho^{\tilde{U}},m} = \mathcal{A}^{U,f,B;m}, \tag{42}$$

即，

$$\{Y \in L^p(\mathcal{F}_T) : \tilde{g}(Y) \ge 0\} = \{Y \in L^p(\mathcal{F}_T) : g(Y) \ge 0\},$$

˜ ˜其中 $\tilde{g}(Y) = E[U(Y) - U(-m)]$ 且 $g(Y) = E[U(f(Y,m)) - B]$。

若（40）成立，则显然（42）成立。反之，若（42）成立，则

$$\mathcal{A}^{\rho^{\tilde{U}},m} = \mathcal{A}^{\rho^{\tilde{U}},m} \cap \mathcal{A}^{U,f,B;m} = \mathcal{A}^{U,f,B;m}.$$

Also

$$\mathcal{A}^{\rho^{\tilde{U}},m} \cap \mathcal{A}^{U,f,B;m} = \{Y \in L^p(\mathcal{F}_T) : \min(\tilde{g}(Y), g(Y)) \ge 0\}.$$

˜ ˜因此，对于 $Y \in \mathcal{A}^{\rho^U,m} \subseteq \mathcal{A}^{\rho^U,m} \cap \mathcal{A}^{U,f,B;m}$，我们有

$$\tilde{g}(Y) \ge 0 \quad \Longrightarrow \quad \min(\tilde{g}(Y), g(Y)) \ge 0,$$

于是 $\tilde{g}(Y) = \min(\tilde{g}(Y)\ g(Y))$。类似地，对于 $Y \in \mathcal{A}^{U,f,B;m}$，我们得到 $g(Y) = \min(\tilde{g}(Y)\ g(Y))$。因此 $\tilde{g}(Y) = g(Y)$。该关系对所有 Y和 m均成立，因此我们得到（40）。

■

由于关于 U 和 U的假设，显然可知

- f 关于 y 和 m非递减；
- 当 U为凹函数时，$(U \circ f)$关于 y 的凹性成立；
- 一般而言，$(U \circ f)$关于(y, m)的凹性无法保证。

从动态视角来看， [18] 引入了条件确定性等价风险度量。另请参阅 [24] ，了解跨期偏好的进一步研究。本文给出条件确定性等价风险度量的完全动态版本。

定义 26 完全动态确定性等价风险度量是一个族$(\rho_{tu}^{U_u})_{t,u}$，其中 $\rho_{tu}^{U_u}$ 是以下方程的解（如果解存在且唯一， P-几乎处处）：

$$\tilde{U}_u(-\rho_{tu}^{\tilde{U}_u}(X)) = E[\tilde{U}_u(X)|\mathcal{F}_t], \quad X \in L^p(\mathcal{F}_u), 0 \le t \le u, \tag{43}$$

对于由凹的非递减（非平凡）函数构成的 u U_u： $[-\infty, +\infty) \to [-\infty, +\infty)$，因此，

$$\rho_{tu}^{\tilde{U}_u}(X) \triangleq -\tilde{U}_u^{-1}\left(E[\tilde{U}_u(X)|\mathcal{F}_t]\right), \quad \textit{for any } X \in L^p(\mathcal{F}_u), 0 \le t \le u, \tag{44}$$

当 $U_u(\cdot)$ 严格递增时。

与命题25一样，我们可以研究条件确定性等价物与广义短缺风险度量之间的关系。

命题 27 具有$(U_u)_u$的完全动态确定性等价风险度量(43)，等于具有 $(U_u, f_u, B_{tu})_t$ 的 h-广义短缺(36)，u 当且仅当

$$B_{tu} = B_{0u}, \quad t \in [0, u], \tag{45}$$

and

$$U_u(f_u(y, m)) - B_{0u} = \tilde{U}_u(y) - \tilde{U}_u(-m), \quad y, m \in \mathbb{R}, u \in [0, T]. \tag{46}$$

此外，当 U_u 可逆时，这可简化为

$$f_u(y, m) = U_u^{-1}\left(\tilde{U}_u(y) - \tilde{U}_u(-m) + B_{0u}\right), \quad y, m \in \mathbb{R}.$$

证明。论证与命题25类似，只需针对动态情形作相应调整。此外，我们还可以得到以下等式

$$U_u(f_u(y, m)) - B_{tu} = \tilde{U}_u(y) - \tilde{U}_u(-m),$$

这必须对任意 $t \le u$ 成立。因此，（45）与（46）随之成立。 ■

˜**命题28（时域持久性）**给定一族凹且严格递增的函数 $U_u(\cdot)$，其对应的全动态确定性等价风险度量在(U_u)关于 u 非递增时满足时域持久性。

证明。 由（44）可得

$$\begin{aligned}\rho_{tu}^{\tilde{U}_u}(X) &= -\tilde{U}_u^{-1}\left(E[\tilde{U}_u(X)|\mathcal{F}_t]\right)\\ &\leq -\tilde{U}_u^{-1}\left(E[\tilde{U}_v(X)|\mathcal{F}_t]\right)\\ &\leq -\tilde{U}_v^{-1}\left(E[\tilde{U}_v(X)|\mathcal{F}_t]\right)\\ &= \rho_{tv}^{\tilde{U}_v}(X),\end{aligned}$$

对于 $X \in L^p(\mathcal{F}_u)$ 和 $0 \leq t \leq u \leq v$。因此，时域持久性得以验证。 ■

6 损失上的 Hq-熵风险度量作为 h-广义短缺

作为本文的结论，自然要研究损失上的 hq-熵风险度量是否与 h-广义短缺和完全动态确定性等价风险度量存在关联。我们回顾一下:

$$\rho_{tu}^{hq}(X) = \ln_q E\left[\exp_q\left((X+\beta)^- + \alpha_q + A(t,u)\right)\middle|\mathcal{F}_t\right],$$

对于所有 $t \leq u$，随着 u 增大而增大，见（20）。其中 $A(t,\ u) \geq 0$,

定理29 损失上的 *hq*-熵风险度量是一种 *h*-广义短缺，其表示形式为（U_u, f_u, B_{tu}）$_{t,\ u}$ 满足:

$$U_u(f_u(y,m)) - B_{tu} = \exp_q(m) - \exp_q\left((y+\beta)^- + \alpha_q + A(t,u)\right), \qquad y,m \in \mathbb{R}. \quad (47)$$

特别地，我们可以选择 $U_u(x) = x$ 和

$$\begin{aligned} f_u(y,m) &= B_{tu} + \exp_q(m) - \exp_q((y+\beta)^- + \alpha_q + A(t,u)) \qquad (48)\\ &= B_{tu} + \exp_q(m)\left[1 - \exp_q\left(\frac{(y+\beta)^- + \alpha_q + A(t,u) - m}{1+(1-q)m}\right)\right] \qquad y,m \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

对于某个目标值 $(B_{tu})_{t,\ u}$。

证明。 我们考虑现金非可加风险度量 (38) 的接受集。我们比较

$$\mathcal{A}_{tu}^{\rho^{hq},m_t} = \left\{Y\ : \rho_{tu}^{hq}(Y) \leq m_t\right\}.$$

and

$$\mathcal{A}_{tu}^{U,f,B;m_t} = \{Y \in L^p(\mathcal{F}_u) : E[U_u(f_u(Y,m_t))|\mathcal{F}_t] \geq B_{tu}\}.$$

注意到，关系式 $\rho_{tu}^{hq}(Y) \leq m_t$ 实际上是

$$\ln_q E\left[\exp_q\left((Y+\beta)^- + \alpha_q + A(t,u)\right)\middle|\mathcal{F}_t\right] \leq m_t = \ln_q \tilde{m}_t \quad (\tilde{m}_t \geq 0),$$

这对应于

$$E\left[\exp_q\left((Y+\beta)^- + \alpha_q + A(t,u)\right)\middle|\mathcal{F}_t\right] \le \tilde{m}_t.$$

满足以下条件的一个充分条件是

$$\mathcal{A}_{tu}^{\rho^{hq},\tilde{m}_t} = \left\{Y : E\left[\exp_q\left((Y+\beta)^- + \alpha_q + A(t,u)\right)\middle|\mathcal{F}_t\right] \le \tilde{m}_t\right\} = \mathcal{A}_{tu}^{U,f,B;\tilde{m}_t}$$

那么，对于某个 $(U_u,\ f_u,\ B_{tu})_{t,\ u}$，关系

$$U_u(f_u(y,m)) - B_{tu} = \exp_q(m) - \exp_q\left((y+\beta)^- + \alpha_q + A(t,u)\right)$$

成立。 ■

注意，$(U_u \circ f_u - B_{tu})_u$ 关于 u 单调非递增，这与具有 h-长寿性的短缺风险度量的表示一致，参见命题 15。

注 30 作用于损失的 *hq*-熵风险度量并非完全动态确定性等价风险度量。关于这一点，请参见命题 *27*。我们可以看到，即使在$\beta = 0$、 $\alpha_q = 0$和 $A \equiv 0$的情形下，对于所有 y、$m \in \mathbb{R}$，两个关系 (47) 和(46) 也不可能相同。

下文将讨论作用于损失的 hq-熵风险度量的对偶表示，以及由 (34) 定义的相关族 $(\bar{\rho}_m)_{m\in\mathbb{R}}$。

注 31 现在，为简单起见，考虑静态情形，其中 $t = 0$ 和 $u = T$。满足 $U(x) = x$且 f 如(48)所示的(U, f)符合命题 *18* 的假设，因此对偶表示(31)-(32) 也适用于损失的 *hq*-熵风险度量。注意，由(48)可知，

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^{U,f,B;m} &= \{Y \in L^p(\mathcal{F}_T) : E[\exp_q(m) - \exp_q\left((Y+\beta)^- + \alpha_q + A(0,T)\right)] \ge 0\}\\ &= \{Y \in L^p(\mathcal{F}_T) : E[\exp_q\left((Y+\beta)^- + \alpha_q + A(0,T)\right)] \le \exp_q(m)\}\\ &= \{Y \in L^p(\mathcal{F}_T) : \ln_q E[\exp_q\left((Y+\beta)^- + \alpha_q + A(0,T)\right)] \le m\}.\end{aligned}$$

按照注 *19* 中的方法，我们可以将一族$(\bar{\rho}_m)_m$ 凸现金可加风险度量与损失的 *hq*-熵风险度量 ρ^{hq}联系起来。在当前情形下，对于任意 $X \in L^p(\mathcal{F}_T)$，该族可简化为

$$\begin{aligned}\bar{\rho}_m(X) &= \inf\{k \in \mathbb{R} : k + X \in \mathcal{A}^{U,f,B;m}\}\\ &= \inf\{k \in \mathbb{R} : \ln_q E[\exp_q\left((X+k+\beta)^- + \alpha_q + A(0,T)\right)] \le m\}.\end{aligned}$$

在其他研究中，这一新型风险度量族依赖于目标值经过“优化”的 *hq*-熵风险度量，而非简单目标值 β；也就是说，它通过对平移参数 k 进行最小化来实现。

参考文献

[1] Bahlali K.、Eddahbi M.H. 和 Ouknine Y. 带有 L^2终端数据的二次倒向随机微分方程：Krylov估计、Itˆo-Krylov公式及存在性结果。应用概率年刊，2017年，45，2377–2397。[2] Bahlali, K. 和 Tangpi, L. 由 $|z|^2/y$ 驱动的倒向随机微分方程及其在偏微分方程和决策理论中的应用。arXiv:1810.05664。[3] Barrieu P. 和 El Karoui N. 通过最小化风险度量进行衍生品定价、对冲及最优设计。载于：无差异定价，R. Carmona 编，2009年（普林斯顿大学出版社）。[4] Bellini, F.、Laeven, R. J. 和 Rosazza Gianin, E. 稳健收益风险度量。数学金融经济学，2018，12，5–32。[5] Biagini, F.、Fouque, J. P.、Frittelli, M. 和 Meyer-Brandis, T. 通过接受集统一研究系统性风险度量。数学金融，2019年，29，329–367。[6] Biagini, F.、Fouque, J. P.、Frittelli, M. 和 Meyer-Brandis, T. 关于系统性风险度量的公平性。金融与随机，2020年，24，513–564。[7] Bion-Nadal J. 和 Di Nunno G. 全动态风险无差异定价与无良机交易界限。*SIAM*金融数学期刊，2020年，11，620–658。[8] Briand P.、Coquet F.、Hu Y.、M´emin J. 和 Peng S. 关于倒向随机微分方程的逆比较定理及 g-期望的相关性质。电子概率通信，2000年，5，101–117。[9] Cerreia-Vioglio, S.、Maccheroni, F.、Marinacci, M. 和 Montrucchio, L. 风险度量：理性与多元化。数学金融，2011年，21，743–774。[10] Cheridito, P. 和 Stadje, M. VaR的时间不一致性及时间一致的替代方案。金融研究快报，2009年，6，40–46。[11] Di Nunno G. 和 Rosazza Gianin E. 全动态风险度量：期限风险、时间一致性及其与倒向随机微分方程和反向随机Volterra积分方程的关系。*SIAM*金融数学期刊，2024年，15，399–435。[12] Doldi, A. 和 Frittelli, M. 条件系统性风险度量。*SIAM*金融数学期刊，2021年，12，1459–1507。[13] Drapeau, S. 和 Kupper, M. 风险偏好及其稳健表示。数学运筹研究，2013年，38，28–62。[14] El Karoui N. 和 Ravanelli C. 现金次可加风险度量与利率模糊性。数学金融2009年，19，561–590。

[15] Farkas W.、Koch-Medina P. 和 Munari C. 超越现金可加风险度量：改变计价单位何时会失效。金融与随机，2014年，18，145–173。[16] Filipovic D. 风险度量的最优计价单位。数学金融，2008年，18，333–336。[17] F¨ollmer, H. 和 Schied, A. 随机金融，第三版，2011年（De Gruyter：柏林）。[18] Frittelli, M. 和 Maggis, M. 条件确定性等价物。理论与应用金融国际期刊，2011年，14，41–59。[19] Han X.、Wang Q.、Wang R. 和 Xia J. 不具有拟凸性的现金次可加风险度量。arXiv:2110.12198。[20] Jiang L. g-期望及相关风险度量的凸性、平移不变性与次可加性。应用概率年刊，2008年，18，245–258。[21] Kobylanski M. 具有二次增长的倒向随机微分方程与偏微分方程。概率年刊，2000年，28，558–602。[22] Laeven R.J.、Rosazza Gianin E. 和 Zullino M. 通过倒向随机微分方程实现的动态收益与星形风险度量。即将在金融与随机刊出，2023年。[23] Ma H. 和 Tian D. 广义熵风险度量及相关倒向随机微分方程。统计与概率通讯，2021年，174，109110。[24] Maggis, M. 和 Maran, A. 随机动态效用与跨期偏好。数学金融经济学，2021年，15，611–638。[25] Mastrogiacomo E. 和 Rosazza Gianin E. 现金次可加风险度量的时间一致性。arXiv:1512.03641。[26] 彭 S. 倒向随机微分方程及相关g-期望。载于*Pitman*数学丛书研究札记，N. El Karoui 和 L. Mazliak 编，1997年，364，141–159。[27] Revuz D. 和 Yor, M. 连续鞅与布朗运动，2013年（Springer：柏林）。[28] Rosazza Gianin E. 通过g-期望的风险度量。保险数学与经济学，2006年，39，19–34。[29] Tian, D. 不完备市场中基于Tsallis相对熵的定价原则。*SIAM*金融数学期刊，2023年，14，250–278。[30] Tsallis C. 玻尔兹曼-吉布斯统计的可能推广。统计物理学杂志，1988年，52，479–487。[31] Tsallis C. 非广延统计力学导论：探寻复杂世界，2009年（Springer：纽约）。

[32] Zheng, S.Q. 和 Li, S.M. 二次反向随机微分方程生成元的表示定理。《应用数学学报》（英文版），2018，34，622–635。