arXiv:2603.14043v1 [math.AC] 14 Mar 2026

关于 LICCI 平方自由单项式理想

OM PRAKASH BHARDWAJ、TRUNG CHAU 和 OMKAR JAVADEKAR

Abstract. 我们研究由图及相关组合结构产生的若干类平方自由单项式理想的 licci 性质。我们刻画了 licci 双 Cohen–Macaulay 平方自由单项式理想、补边理想、 t-圈的路径理想以及图的 $(t-1)$-悬挂。因此，我们得到了树的 licci 路径理想的完整列表。这项工作将已知的 licci 边理想分类推广到了更广泛的路径理想族。

1. 引言

链接的概念最初由 Peskine–Szpiro 于 [32] 中正式引入。设 R 为交换诺特环， I、 $J \subseteq R$ 为理想。若存在正则序列 $x = x_1, \ldots, x_c \in I \cap J$，使得 $I = (x) : {}_R J$ 且 $J = (x) : {}_R I$，则称 I 与 J 直接相连，记作 $I \sim J$。一般而言，若存在理想序列 $I = I_0, I_1, \ldots, I_r = J$，且对每个 i， I_i 都与 I_{i+1} 直接相连，则称理想 I 与 J 相连。不难看出，链接在 R 的所有理想集合上诱导出一个等价关系：两个理想相连，当且仅当它们属于同一个等价类。我们将该关系的等价类称为链接类。若理想 I 属于某个完全交理想的链接类，则称其为 licci。链接理论是对理想和代数簇进行分类的有用工具（见 [10, 16, 20, 21, 23, 25, 26, 27, 28, 33]）。

由图和单纯复形等组合对象产生的 licci 理想分类一直备受关注（参见 [10, 25, 31]）。在 [25], Kimura–Terai–Yoshida 刻画了有限简单图的边理想中的 licci 性质；边理想是组合交换代数中研究得最广泛的一类平方自由单项式理想。本文的目标之一是将 licci 性质的刻画推广到其他研究得较为深入的平方自由单项式理想类别。对于尚未解释的概念和术语，请参阅后续章节。

需要注意的是，licci 理想是 Cohen–Macaulay 的（[32]），这构成了我们的出发点。域上的多项式环 R 中的平方自由单项式理想 I，若 R/I 和 $R/I^\vee$ 都是 Cohen–Macaulay 的，则称为 双 *Cohen–Macaulay*。这一性质源于对 Bernstein-Gel'fand-Gel'fand 对应和凝聚层的研究 [8, 14, 18]。在我们的第一个主要结果中，我们完整刻画了 licci 双 Cohen–Macaulay 无平方因子单项式理想。

定理 1.1 (定理3.1)。 设 I 是多项式环 S 中的双 *Cohen–Macaulay* 平方自由单项式理想，其中 $\mathfrak{m}$ 表示 S的齐次极大理想。则 $I_\mathfrak{m}$ 在 $S_\mathfrak{m}$ 中是 *licci*，当且仅当 $\mathrm{ht}(I) \leq 2$，或者 I 由变量生成。

尽管"补边理想"是一个新近出现的术语，但它已在交换代数学家群体中引起广泛关注，许多代数和同调不变量已得到计算，其性质也已被充分刻画 [12, 13, 19]。我们的下一个结果将完整刻画 licci 补边理想，为围绕这一概念不断增长的文献再添一笔。

定理 1.2 (定理4.3)。 设 G 是一个有限简单图，且 $I_c(G)$ 表示其补边理想。令 $S = \mathbb{k}[V(G)]$, 其中 $\mathbb{k}$ 是一个域，并令 $\mathfrak{m}$ 表示 S的齐次极大理想。那么 $I_c(G)_\mathfrak{m}$ 在 $S_\mathfrak{m}$ 中是 *licci*，当且仅当 G 是森林或三角形。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 14M06, 13C40, 13H10, 05E40.*Key words and phrases.* 单项式理想、路径理想、完全交链理想、正则性、Cohen–Macaulay环。

我们研究的最后一类理想是路径理想。Conca–De Negri 在研究 M-序列时引入了路径理想，[7]，它是图的边理想的一种自然推广。由于一个简单的事实——通常很难找出它们所有的单项式极小生成元——路径理想的代数性质和同调性质在很大程度上仍未解决。例如，关于路径理想何时具有线性分解或为 Cohen–Macaulay，已知结果仍不完整（[3, 5, 6]）。另一方面，已知对任意 $t \geq 2$，图 t的 $\Sigma_t G$ -路径理想是 Cohen–Macaulay，其中 $\Sigma_t G$ 表示长度为 $t-1$ 的悬挂，该悬挂作用于 G ([5, 定理 3.8]的证明）。这构成了一大类图（例如，映射 $G \mapsto \Sigma_t G$ 是图之间的单射）。我们指出，$\Sigma_2 G$ 更广为人知的名称是带须图。我们的最后一个主要结果是在假设图由悬挂构造且基域为无限域的条件下，对图的路径理想给出完整刻画。

定理 1.3 (定理 5.11)。 设 G 是一个有限简单图，且 $t \geq 2$ 是一个正整数。设 $\mathfrak{m}$表示 $T = \mathbb{k}[V(\Sigma_t G)]$ 的齐次极大理想。考虑以下命题。

(1) $P_t(\Sigma_t G)_{\mathfrak{m}}$ 在 $T_{\mathfrak{m}}$ 中是 *licci*。(2) G 是一个星图，可带有孤立顶点。(3) 或者 $t \leq 3$ 和 G 是一个星图，可带有孤立顶点；或者 $t > 3$ 和 G 至多有一条边。

那么 (3) $\implies$ (1) $\implies$ (2)。此外，若 $\mathbb{k}$ 是无限的，则 (1) $\Longrightarrow$(3)。

本文的结构安排如下。在第 2 节中，我们回顾与本文相关的必要定义和已知结果，并推导若干有用的推论。在第3节和4节中，我们分别刻画双 Cohen–Macaulay licci 单项式理想和 licci 补边理想。最后两节讨论 licci 路径理想。在第 5 节中，我们刻画图的悬挂的 licci 路径理想以及圈的 licci 路径理想。

Acknowledgements

O. P. Bhardwaj 获得了 ANRF 国家博士后奖学金的资助。作者感谢 Infosys 基金会提供的支持。

2. Preliminaries

设 R 是一个交换诺特环。设 I 和 J 是 R 的理想，若存在正则序列 $x = x_1, \ldots\ldots, x_c \in I \cap J$，使得$I = (x)\colon {}_R J$ 且 $J = (x)\colon {}_R I$，则称 I 和 J 直接相连，记作 $I \sim J$。一般而言，若存在一列理想 $I_0, I_1, \ldots\ldots, I_r$，使得

$$I = I_0 \sim I_1 \sim \ldots \sim I_r = J.$$

若 I 与 J 相连，则称 I 和 J 属于同一个链接类。

定义 2.1. 设 R 是一个交换诺特局部环，且 I 是 R 的理想。若理想 I 属于某个完全交理想的链接类，则称其为$licci$ 。

注 2.2. 众所周知（例如参见 [25, 引理 2.2]），若 R 是一个正则局部环，且 $I \subseteq R$是一个理想，则有如下结论。

(1) 若 I 是 Cohen–Macaulay，且 ht(I) 为 $= 2$，则 I 在 R中是 licci .

(2) 若 I 是 Gorenstein，且 ht(I) 为 $= 3$，则 I 在 R中是 licci。

注 2.3. 设 S 是域上的多项式环， $\mathfrak{m}$ 是其齐次极大理想， I 是 S 的齐次理想。由于 S 是唯一分解整环，任何高度为 1 的素理想都是主理想。因此，若 I 是 Cohen–Macaulay 理想且 ht(I) $= 1$，那么 I 也是主理想。特别地，$I_{\mathfrak{m}}$ 在 $R_{\mathfrak{m}}$ 中是 licci。

注 2.4. 设 S 是域上的多项式环，$\mathfrak{m}$ 是其齐次极大理想，且 I 是 S 的齐次理想。设 I 是 S 的齐次理想，则 $\mathrm{ht}(I) = \mathrm{ht}(I_{\mathfrak{m}})$（例如，参见 [4,命题 1.5。15]）。我们将直接使用这一事实，不再反复说明。

注 2.5. 设 S 是域上的多项式环，$\mathfrak{m}$ 是其齐次极大理想，I 是 S 的齐次理想。若 I 是一个齐次理想，且 $I_{\mathfrak{m}}$ 是 licci，则 $I_{\mathfrak{m}}$ 是 Cohen–Macaulay [32]。根据 Nagata 猜想（定理）[29]，I 是 Cohen–Macaulay。本文将始终使用这一事实。

设 $S = \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ 是标准分次多项式环，I 是 S 的齐次理想。S/I 的投射维数记为 $\mathrm{pd}(S/I)$，它是满足 $\mathrm{Tor}_i^S(S/I, \Bbbk) \neq 0$ 的最大整数 i。S/I 关于 S 的 $(i, j)^{th}$ Betti 数，记为 $\beta_{i,j}^S(S/I)$，定义为

$$\beta_{i,j}^S(S/I) = \dim_{\Bbbk} \mathrm{Tor}_i^S(S/I, \Bbbk)_j.$$

的 *Castelnuovo–Mumford* 正则性，简称正则性，记为 $\mathrm{reg}(S/I)$，定义为

$$\mathrm{reg}(S/I) = \max\{j - i \mid \beta_{i,j}^S(S/I) \neq 0\}.$$

引理 2.6. 设 I 是多项式环 S 中的一个齐次理想，且 S/I 是 *Cohen–Macaulay* 的。那么

$$\mathrm{reg}(S/I) = \max\{j - \mathrm{pd}(S/I) \mid \beta_{\mathrm{pd}(S/I),j}(S/I) \neq 0\}.$$

换言之，正则性在最小自由分解的末端达到。

证明。由 [9, 练习 20.19] 得出。 □

注意，若 I 是 $S = \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ 中由正则序列 $f_1, \ldots, f_r$ 生成的齐次理想，且 $\deg(f_i) = d_i > 0$，则关于 $f_1, \ldots, f_r$ 的 Koszul 复形给出了 S/I 在 S 上的最小自由分解，并且有 $\mathrm{reg}(S/I) = \left(\sum_{i=1}^{r} d_i\right) - r$。Huneke 和 Ulrich 的下述结果 [22] 表明，若 $I_{\mathfrak{m}}$ 在 $S_{\mathfrak{m}}$ 中是 licci，则 $\mathrm{reg}(S/I)$ 也呈现出类似的性质。令 $\alpha(I)$ 表示 I 中非零多项式的最小次数。

引理 2.7。 设 I 是多项式环 S 中的齐次理想，且 S/I 是 *Cohen–Macaulay*，$\mathfrak{m}$ 是 S 的齐次极大理想。若有

$$\mathrm{reg}(S/I) \leq (\alpha(I) - 1)\,\mathrm{pd}(S/I) - \alpha(I),$$

则 $I_{\mathfrak{m}}$ 在 $S_{\mathfrak{m}}$ 中不是 *licci*。

证明。注意，若 S/I 不是 Cohen–Macaulay，则 I 在 S 中不是 licci。因此，我们假设 S/I 是 Cohen–Macaulay（备注 2.5）。令 $g = \mathrm{pd}(S/I)$，并令

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{b_g} S(-n_{gi}) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{b_{g-1}} S(-n_{(g-1)i}) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{b_1} S(-n_{1i}) \longrightarrow S \longrightarrow S/I \longrightarrow 0$$

为 S/I 的分次最小自由分解。注意，根据定义，$\alpha(I) = \min\{n_{1i}\}_i$；由引理 2.6，$\max\{n_{gi}\}_i = \mathrm{reg}(S/I) + g$。因此，假设中的不等式可改写如下：

$$\max\{n_{gi}\}_i - g \leq (\min\{n_{1i}\}_i - 1)g - \min\{n_{1i}\}_i.$$

等价地，我们得到

$$\max\{n_{gi}\}_i \leq (\min\{n_{1i}\}_i - 1)g - \min\{n_{1i}\}_i + g = (g-1)\min\{n_{1i}\}_i.$$

由 [22, 推论 5.13],可知，$I_{\mathfrak{m}}$ 在 $S_{\mathfrak{m}}$中不是 licci，正如所需。 □

在本节余下部分中，设 $I \subseteq S$ 是一个 $\mathfrak{m}$-原初单项式理想。我们回顾 Huneke 和 Ulrich 提出的一个判据 [24], , 用于判断 I 是否为 licci。注意，每个 $\mathfrak{m}$-原初单项式理想 I 都可以唯一地写成标准形式,

$$I = (x_1^{a_1}, x_2^{a_2}, \ldots, x_n^{a_n}) + I^{\#}$$

其中， $I^{\#}$ 由一些单项式生成，这些单项式与 $\{x_1^{a_1}, x_2^{a_2}, \ldots, x_n^{a_n}\}$ 一起最小生成 I。注意，若 I 是完全交，则 $I^{\#} = 0$。若 I 不是完全交，则 $I^{\#}$可唯一地写为 $I^{\#} = \mathbf{x}^B K$，其中 $\mathbf{x}^B = x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n}$是一个单项式，而 K 是高度至少为二的单项式理想。令 $I^{\{0\}} = I$，并定义

$$I^{\{1\}} = (x_1^{a_1 - b_1}, \ldots, x_n^{a_n - b_n}) + K$$

若 I 是完全交，令 $I^{\{1\}} = S$。对于 $k > 1$，在 $I^{\{k-1\}} \neq S$成立的前提下，归纳定义 $I^{\{k\}} = (I^{\{k-1\}})^{\{1\}}$。使用这一记号，下面的定理刻画了 $\mathfrak{m}$-初始单项式理想的 licci 性质。

定理 2.8 ([24, 定理 2.6])。 设 $S = \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ 和 $I \subseteq S$ 是 S中的一个 $\mathfrak{m}$-初始单项式理想。以下条件等价。

(i) $I_{\mathfrak{m}}$ 在 $S_{\mathfrak{m}}$中是 *licci*。(ii) $(I^{\{k\}})^{\#}$ 的高度至多为一，只要 $I^{\{k\}} \neq S$。(iii) $I^{\{k\}} = S$，其中某个 k。

例 2.9。考虑 $S = \Bbbk[x_1, x_2, x_3]$ 和 $I = (x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_1x_2, x_2x_3)$。记 $I = (x_1^2, x_2^2, x_3^2) + x_2(x_1, x_3)$。因此， $I^{\{1\}} = (x_1^2, x_2, x_3^2) + (x_1, x_3) = (x_1, x_2, x_3)$。由于 $I^{\{1\}}$是一个完全交，$I^{\{2\}} = S$。因此，根据上述定理， $I_{\mathfrak{m}}$ 在 $S_{\mathfrak{m}}$中是 licci。

3. Licci bi-Cohen–Macaulay ideals

在本文余下部分中，令 $[n]$表示任意正整数 n对应的集合 $\{1, \ldots, n\}$。

设 I 是 $S = \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$的平方自由单项式理想。对每个子集 $F \subseteq [n]$，令 $x_F := \prod_{i \in F} x_i$。设

$$I = \bigcap_{i=1}^{m} (x_j \mid j \in F_i)$$

I 的唯一主分解为，其中 F_1、……、F_m 是 $[n]$的一些子集。 I 的 *Alexander* 对偶记为 $I^\vee$，定义为

$$I^\vee := (x_{F_i} \mid i \in [m]).$$

它是 well k 已知（$I^\vee$）$^\vee = I$。根据定义，我们有 α（I）$=$ ht（$I^\vee$），且 α（$I^\vee$）$=$ht（I）。

回顾一下，若 I 的 I 和 $I^\vee$ 均为 Cohen–Macaulay，则称其为双 *Cohen–Macaulay*。我们证明第一个主要结果，即对 licci 双 Cohen–Macaulay 理想的完整刻画。

定理 3.1。设 I 是域上的多项式环 S 中的双 *Cohen–Macaulay* 平方自由单项式理想。设 $\mathfrak{m}$ 是 S 的齐次极大理想。那么，当且仅当$\operatorname{ht} I \leq 2$ 或 I 由变量生成时， $I_{\mathfrak{m}}$ 在 $S_{\mathfrak{m}}$ 中是 *licci*。

证明。 如果 I 由变量生成，那么 I 是一个完全交，因此 $I_{\mathfrak{m}}$ 是 licci，证毕。另一方面，如果 ht(I) ≤ 2, 那么 $I_{\mathfrak{m}}$ 根据备注 2.2 和 2.3是 licci，证毕。

现在假设 I 是 licci。那么由引理 2.7，可得

$$\operatorname{reg}(S/I) > (\alpha(I) - 1) \operatorname{pd}(S/I) - \alpha(I) = (\alpha(I) - 1) \operatorname{ht} I - \alpha(I),$$

其中 $\mathrm{pd}(S/I) = \mathrm{ht}(I)$，这是因为 S/I 是 Cohen–Macaulay。由 [34]，可得 $\mathrm{reg}(S/I) = \mathrm{pd}(S/I^\vee) - 1$. 因此，我们得到

$$\mathrm{pd}(S/I^\vee) - 1 > (\alpha(I) - 1)\,\mathrm{ht}(I) - \alpha(I),$$

因此 $(\alpha(I) - 1)(\mathrm{ht}(I) - 1) < \alpha(I)$。若 $\mathrm{ht}(I) \leq 2$，则结论成立。现在可以假设 $\mathrm{ht}(I) \geq 3$。于是，不等式 $(\alpha(I) - 1)(\mathrm{ht}(I) - 1) < \alpha(I)$ 蕴含 $\alpha(I) = 1$，也就是说，I 由变量生成，正如所需。□

Gitler 和 Valencia [15] 证明了：若 I 是一个无混合无平方单项式理想，且 I由次数为 2 的单项式生成，并且 S 的每个变量都出现在 I的至少一个单项式极小生成元中，那么

$$\mathrm{ht}(I) \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil.$$

这一结果推广到所有平方自由单项式理想的情形仍未解决。采用与定理证明中相似的论证3.1，我们得到关于 licci 平方自由单项式理想的以下结果，其形式类似于 Gitler-Valencia 定理。

定理 3.2. 设 I 是 $S = \mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]$的一个 *licci* 无平方单项式理想。设 $\mathfrak{m}$ 是 S的齐次极大理想。若 $I_\mathfrak{m}$ 在 $S_\mathfrak{m}$中是 *licci*，则

$$\mathrm{ht}(I) \leq \left\lfloor \frac{n}{\alpha(I)} \right\rfloor + 1.$$

证明. 由于 $I_\mathfrak{m}$ 是 licci，由引理 2.7，可得

$$\mathrm{reg}(S/I) > (\alpha(I) - 1)\,\mathrm{pd}(S/I) - \alpha(I) = (\alpha(I) - 1)\,\mathrm{ht}(I)\alpha(I).$$

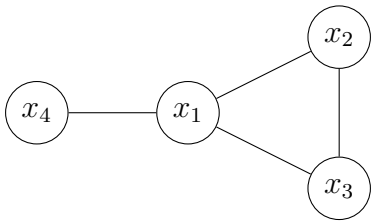
由 [34], 可知 $\mathrm{reg}(S/I) = \mathrm{pd}(S/I^\vee) - 1$。这给出 $\mathrm{pd}(S/I^\vee) - 1 > (\alpha(I) - 1)\,\mathrm{ht}(I) - \alpha(I)$。令 p 为 $S/I^\vee$的投射维数。于是，函数 $f\colon \{0, 1, \ldots, p\} \longrightarrow \mathbb{Z}$ 由$f(i) = \min\{j \mid \beta_{ij}(S/I^\vee) \neq 0\}$给出，它在 $0 \leq i \leq p$上严格递增。我们有 $f(1) = \alpha(I^\vee)$，此外 $f(p)$ 至多为 $I^\vee$的所有极小单项式生成元的最小公倍数的次数，而该次数小于或等于 n。因此，得到 $\mathrm{pd}(S/I^\vee) \leq n - \mathrm{ht}(I) + 1$。这意味着 $n - \mathrm{ht}(I) + 1 > (\mathrm{ht}(I) - 1)(\alpha(I) - 1)$，因此 $\mathrm{ht}(I) < \alpha^n I( ) + 1$。证毕。□

4. Licci complementary edge ideals

设 $G = (V(G)\ E(G))$ 是一个顶点集为 $V(G) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ 的有限简单图，其中 $n \geq 3$。G 的补边理想定义为

$$I_c(G) = (x_1 \cdots x_n / x_i x_j \mid \{i, j\} \in E(G)).$$

例 4.1. 设 G 是如下图。



对应的补边理想为

$$I_c(G) = \left(\frac{x_1x_2x_3x_4}{x_1x_2}, \frac{x_1x_2x_3x_4}{x_1x_3}, \frac{x_1x_2x_3x_4}{x_1x_4}, \frac{x_1x_2x_3x_4}{x_2x_3} \right) = (x_3x_4, x_2x_4, x_2x_3, x_1x_4).$$

回顾一下， G 称为完全，此时若对于任意$i, j \in [n]$ ，其中 $i \neq j$，都有 $\{x_i, x_j\} \in E(G)$，则将 G 记作 K_n。图 G 称为 n-圈，此时若对变量重新标号后，有 $E(G) = \{\{x_i, x_{i+1}\} \mid i \in [n]\}$，其中我们采用约定 $x_{n+1} = x_1$，则将 G 记作 C_n。如果图 G 不含圈子图，则称其为森林。连通森林称为树。

在 下文中，我们回顾补边理想的 Cohen–Macaulay性质 .

定理4.2 ([13, 定理2.8])。 设 G 是一个以 n 个顶点为顶点且没有孤立顶点的有限简单图，其中 $n \geq 3$ 是一个正整数。则 $I_c(G)$ 是 *Cohen–Macaulay* 的，当且仅当 G 是完全图或森林。

事实证明，其中大多数理想也是 licci。

定理 4.3. 设 G 是一个以 $V(G) = \{x_1, \ldots, x_n\}$为顶点的有限简单图，其中 $n \geq 3$ 是一个正整数。令 $S = \mathbb{k}[V(G)]$ ，并设 $\mathfrak{m}$ 表示其齐次极大理想。则， $I_c(G)_{\mathfrak{m}}$ 在 $S_{\mathfrak{m}}$ 中是 *licci*，当且仅当 G 是一个三角形（K_3）或森林。

证明。假设 $I_c(G)_{\mathfrak{m}}$ 是 licci。我们要证明 G 要么是 K_3 ，要么是森林。注意，根据注记 2.5， $I_c(G)$ 是 Cohen–Macaulay 的。若 G 有一个孤立顶点，例如 x_1，则 (x_1) 是 $I_c(G)$ 的一个极小素理想。由于 $I_c(G)$ 是 Cohen–Macaulay 的，根据注记 2.3，它是主理想。特别地，这意味着 G 只有一条边，因此 G 是森林，证毕。现在可以假设 G 没有孤立顶点。根据定理4.2， G 要么是 K_n ，要么是森林。因此，只需证明对任意 $n \geq 4$， $I_c(K_n)_{\mathfrak{m}}$ 不是 licci。事实上，根据推论 2.3], $\operatorname{ht}(I_c(K_n)) = 3$ ([13,)；并且根据推论 4.8], $I_c(K_n)$ 有线性分解。因此，根据引理 2.7，对任意 $n \geq 4$， $I_c(K_n)_{\mathfrak{m}}$ 都不是 licci，证毕。

反过来，假设 G 是 K_3 或森林。我们要证明 $I_c(G)_{\mathfrak{m}}$ 是 licci。事实上，若$G = K_3$，则 $I_c(G) = (x_1, x_2, x_3)$，这是一个完全交。现在可以假设 G 是森林。由于 G 不是完全的，$\operatorname{ht}(I_c(G)) = 2$ ([13, 推论 2.3])。因此，由注 2.2 可知， $I_c(G)_{\mathfrak{m}}$ 是 licci，如所求。□

5. Licci path ideals of graphs

本节将刻画其他图的（$t-1$）悬挂的 licci t-路径理想，以及圈的 licci t-路径理想。在本节中，设 $G = (V(G)\ E(G))$是一个有限简单图，其中 $V(G) = \{x_1, \ldots, x_n\}$，且 $t \geq 2$是一个正整数。回顾一下， G的一条长度为 $t-1$的路径是 G 中由 t 个互不相同的顶点组成的有序序列 x_{i_1}，……，x_{i_t}，满足对任意 $i \in [t-1]$，均有 $\{x_{i_j}, x_{i_{j+1}}\} \in E(G)$。

$t-1$ 的悬挂长度为 G 的有限简单图，记作 $\Sigma_t G$，其顶点集为

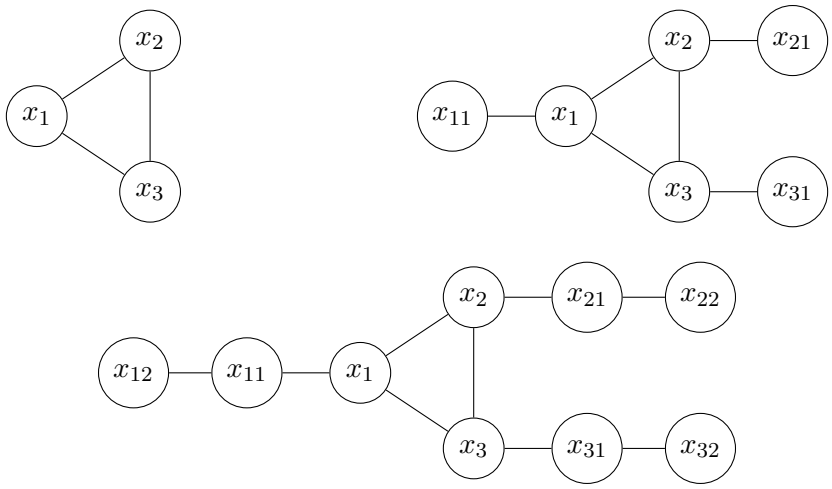
$$V(G) \sqcup \{x_{ij} \mid i \in [n], j \in [t-1]\}$$

边集为

$$E(G) \sqcup \{\{x_i, x_{i1}\},\ \{x_{ij}, x_{i,j+1}\} \mid i \in [n], j \in [t-2]\}.$$

从图示上看， $\Sigma_t G$ 是图 G ，在 G 的每个顶点上都附加了一条长度为 $t-1$ 的路径。图 G 的长度为 1 的悬挂也称为带须图 G。

例 5.1. 设 G 是一个边为 $\{\{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \{x_2, x_3\}\}$的三角形。下面依次给出 G、$\Sigma_2 G$ 和 $\Sigma_3 G$的图示。



t-路径理想 的定义如下： G的 $P_t(G)$表示由平方自由单项式 $x_{i_1}\cdots x_{i_t}$生成的理想，其中 x_{i_1}，……， x_{i_t} 是 G中的一条长度为 $t-1$ 的路径，且位于 $\Bbbk[x_i \mid i \in [n]]$中。如果 G 没有长度为 $t-1$ 的路径，则约定 $P_t(G) = (0)$。2-路径理想也称为边理想。

例 5.2. 设 G 如例 5.1所示。于是我们计算 $P_3(G)$、 $P_3(\Sigma_2 G)$，以及 $P_3(\Sigma_3 G$。这一计算等同于确定这三个图中所有长度为 2 的路径。我们有

$$P_3(G) = (x_1x_2x_3),\ P_3(\Sigma_2 G) = P_3(G) + (x_1x_2x_{11},\ x_1x_3x_{11},\ x_1x_2x_{21},\ x_1x_3x_{31},\ x_2x_3x_{21},\ x_2x_3x_{31}),\ P_3(\Sigma_3 G) = P_3(\Sigma_2 G) + (x_1x_{11}x_{12},\ x_2x_{21}x_{22},\ x_3x_{31}x_{32}).$$

专家们都知道，带须图的边理想是 Cohen–Macaulay [35], ，而对于图的 t-路径理想，这一结论对图的 $(t-1)$-悬挂同样成立。为完整起见，我们将给出详细证明（见引理 5.5、推论 5.6）。

在本节余下部分中，我们设

$$R = \Bbbk[V(G)] = \Bbbk[x_i \mid i \in [n]],$$
$$T = \Bbbk[V(\Sigma_t G)] = \Bbbk[x_i, x_{ij} \mid i \in [n], j \in [t-1]].$$

假设 $P_t(\Sigma_t G)$ 由平方自由单项式 $m_1, \ldots, m_q$ 在 T 中生成。对每个 i，将 $\{x_{ij} \mid j \in [t-1]\}$ 中的变量设为 x_i，即可得到 R 中相应的单项式 $m_1', \ldots, m_q'$，分别记作 $\operatorname{depol}(m_1)\ldots,\operatorname{depol}(m_q)$。单项式理想

$$(\operatorname{depol}(m_1), \ldots, \operatorname{depol}(m_q)) \subseteq R$$

称为 $P_t(\Sigma_t G)$ 的去极化 ， 记作 $\operatorname{depol}(P_t(\Sigma_t G))$。此名称源于一种称为极化 的运算（例如参见 [30, 第 3.2] 节）， 以及 $P_t(\Sigma_t G)$ 是 $\operatorname{depol}(P_t(\Sigma_t G))$ 的极化这一事实（[5, 定理 3.8] 的证明）。

Ex例 5.3. 设 G 如例 5.1所述。回顾例 5.2 中我们有 e

$$P_3(\Sigma_3 G) = (x_1x_2x_3) + (x_1x_2x_{11},\ x_1x_3x_{11},\ x_1x_2x_{21},\ x_1x_3x_{31},\ x_2x_3x_{21},\ x_2x_3x_{31}) + (x_1x_{11}x_{12}, x_2x_{21}x_{22}, x_3x_{31}x_{32}).$$

根据我们的定义，我们有

$$\operatorname{depol}(P_3(\Sigma_3 G)) = (x_1x_2x_3) + (x_1^2x_2, x_1^2x_3, x_1x_2^2, x_1x_3^2, x_2^2x_3, x_2x_3^2) + (x_1^3, x_2^3, x_3^3).$$

我们回顾一些关于去极化的性质。

引理 5.4 ([17, 推论 1.6。3])。 设 G 是一个有限简单图， $t \geq 2$ 是一个正整数。以下结论成立。

(a) $\operatorname{pd}(R/\operatorname{depol}(P_t(\Sigma_t G))) = \operatorname{pd}(T/P_t(\Sigma_t G))$;(b) $\operatorname{reg}(R/\operatorname{depol}(P_t(\Sigma_t G))) = \operatorname{reg}(T/P_t(\Sigma_t G))$;(c) $R/\operatorname{depol}(P_t(\Sigma_t G))$ 是 *Cohen–Macaulay*，当且仅当 $T/P_t(\Sigma_t G)$。

我们回顾如下结果。

引理 5.5 ([5, 定理 3 的证明。8])。 设 G 是一个具有 $V(G) = \{x_1, \ldots, x_n\}$的有限简单图，其中 $n \geq 1$，且 $t \geq 2$ 是一个正整数。那么$x_i^t \in \operatorname{depol}(P_t(\Sigma_t G))$ 对任意 $i \in [n]$都成立。特别地， $R/\operatorname{depol}(P_t(\Sigma_t G))$ 是阿廷环，因此是 *Cohen–Macaulay*。

证明。 由于对每个 $i \in [n]$，单项式 $x_i \prod_{j=1}^{t-1} x_{ij}$ 是 $P_t(\Sigma_t G)$中的一个单项式生成元，因此它的去极化

$$\operatorname{depol}\left(x_i \prod_{j=1}^{t-1} x_{ij}\right) = x_i^t$$

属于 $\operatorname{depol}(P_t(\Sigma_t G))$。因此 $\sqrt{\operatorname{depol}(P_t(\Sigma_t G))} = (x_1, \ldots, x_n)$。证毕。 □

以下结论可由引理 5.4 和 5.5立即得到。

推论 5.6。 设 G 是一个有限简单图， $t \geq 2$ 是一个正整数。那么 $T/P_t(\Sigma_t G)$ 是 *Cohen–Macaulay*。 □

因此，图的 $(t-1)$-悬挂构成了一大类图，其 t-路径理想是 Cohen–Macaulay。

我们回顾阿廷单项式理想的正则性公式。

引理 5.7 ([9, 习题 20。18])。 设 I 是多项式环 S 中的一个阿廷单项式理想，其齐次极大理想为 $\mathfrak{m}$。那么 $\operatorname{reg}(S/I) = \max\{\deg(f) \mid f \text{ 是} (I :_S \mathfrak{m})/I\}$中的一个单项式。

接下来我们研究 $\operatorname{depol}(P_t(\Sigma_t G))$ 的正则性。回想一下， G 称为 n-星图，若对顶点重新标号后，有 $E(G) = \{\{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \ldots, \{x_1, x_n\}\}$。

定理 5.8。 设 G 是一个有限简单图，满足 $V(G) = \{x_1, \ldots, x_n\}$，其中 $n \geq 1$，且$t \geq 2$ 为正整数。那么，当且仅当下式成立时， G 是一个可能含有孤立顶点的星图

$$\operatorname{reg}\left(T/P_t(\Sigma_t G)\right) > (t-1)n - t.$$

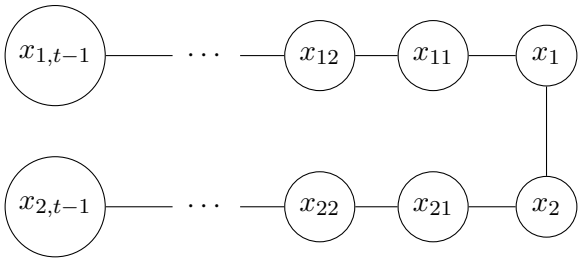
证明。 根据引理 5.4，我们可以将 $P_t(\Sigma_t G)$ 替换为其去极化。回想一下，理想 $\operatorname{depol}(P_t(\Sigma_t G))$ 是 Cohen–Macaulay 且阿廷的（引理 5.5），因此

$$\operatorname{pd}\left(R/\operatorname{depol}(P_t(\Sigma_t G)\right) = \operatorname{ht}(\operatorname{depol}(P_t(\Sigma_t G))) = n.$$

接下来我们分析正则性。由引理 5.7 可知，对于某个单项式 Fin $\operatorname{depol}(P_t(\Sigma_t G))$: $_R(x_i \mid i \in [n])$ but not in $\operatorname{depol}(P_t(\Sigma_t G))$，有 $\operatorname{reg}\left(T/\operatorname{depol}(P_t(\Sigma_t G))\right) = \deg(F)$。令 $F = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$。对于每个 $i \in [n]$，由于 $x_i^t \in \operatorname{depol}(P_t(\Sigma_t G))$（见引理 5.5 的证明），我们有 $a_i \leq t-1$。下面给出一个断言。

断言 5.9. 如果 $\{x_1, x_2\}$ 是 G的一条边，那么 $(x_1, x_2)^t \subseteq \operatorname{depol}(P_t(\Sigma_t G))$。因此，我们有$a_1 + a_2 \leq t-1$。

断言的证明 *5.9* . 由于 $\{x_1, x_2\}$ 是 G 的一条边，图 $\Sigma_t G$ 包含以下子图



特别地，单项式

$$x_1\left(\prod_{j=1}^{t-1}x_{1j}\right),\quad x_2\left(\prod_{j=1}^{t-1}x_{2j}\right),\quad x_1x_2\left(\prod_{j=1}^{k}x_{1j}\right)\left(\prod_{j=1}^{t-2-k}x_{2j}\right),$$

其中 $k\in[t-2]\cup\{\ 0\}$ 是 $P_t(\Sigma_tG)$ 的极小单项式生成元。因此，它们的去极化

$$x_1^t,\quad x_2^t,\quad x_1^{k+1}x_2^{t-1-k},$$

其中 $k\in[t-2]\cup\{0\}$ 是 $\operatorname{depol}(P_t(\Sigma_tG))$ 的极小单项式生成元。换言之，$(x_1,\ x_2)^t\subseteq\operatorname{depol}(P_t(\Sigma_tG))$。因此 $f\notin\operatorname{depol}(P_t(\Sigma_tG))$ 蕴含 $a_1+a_2\leq t-1$，如所要求的。□

回到主要证明，假设 G<style id='4'>不是带有若干可能的孤立顶点的星图。等价地（这一直接的练习留给读者），G 作为子图包含两条不相交边或一个三角形。假设 G 包含两条不相交边。不妨设 $\{x_1,x_2\}$，$\{x_3,x_4\}$ 是 G的边。根据命题 5.9，我们有 $a_1+a_2\leq t-1$以及 $a_3+a_4\leq t-1$。因此，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}a_i=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\sum_{i=5}^{n}a_i&\leq(t-1)+(t-1)+\sum_{i=5}^{n}(t-1)\\&=(t-1)(n-2)\\&=(t-1)n-t-(t-2)\\&\leq(t-1)n-t,\end{aligned}$$

正如所需。现在我们可以假设 G包含一个三角形。不失一般性，假设$\{x_1,x_2\}$，$\{x_2,x_3\}$，$\{x_1,x_3\}$ 是 G 的边。

根据命题5.9，我们有以下三个不等式：

$$a_1+a_2\leq t-1,\quad a_2+a_3\leq t-1,\quad a_1+a_3\leq t-1.$$

因此 $a_1+a_2+a_3\leq\frac{3}{2}(t-1)$。于是我们有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}a_i=(a_1+a_2+a_3)+\sum_{i=4}^{n}a_i&\leq\frac{3}{2}(t-1)+\sum_{i=4}^{n}(t-1)\\&=(t-1)(n-\frac{3}{2})\\&=(t-1)n-t-\frac{1}{2}(t-3)\end{aligned}$$

若 $t\geq3$，则有 $\sum_{i=1}^{n}a_i\leq(t-1)n-t$。若 $t=2$，则有 $\sum_{i=1}^{n}a_i\leq(t-1)n-t+\frac{1}{2}$。由于$\sum_{i=1}^{n}a_i$和 $(t-1)n-t$ 均为整数，因此得到 $\sum_{i=1}^{n}a_i\leq(t-1)n-t$，如所求。无论哪种情况，我们都有

$$\operatorname{reg}\left(R/\operatorname{depol}(P_t(\Sigma_tG))\right)\leq(t-1)n-t,$$

如所求。

反过来，假设 G 是一张可能含有孤立顶点的星图。不失一般性，假设

$$E(G) = \{x_i x_k \mid i \in [k-1]\}$$

对于某个 $k \in [n]$。若 $k = 1$ 或 $n = 1$，即 G 是 n 个孤立顶点，则显然有

$$\operatorname{reg}(R/\operatorname{depol}(P_t(\Sigma_t G))) = \operatorname{reg}\left(\Bbbk[x_i \mid i \in [n]]/(x_i^t \mid i \in [n])\right) = tn - n > (t-1)n - t,$$

如所需。现在假设 k， $n \geq 2$。我们有以下命题。

命题 5.10. 我们有

$$(x_1 \cdots \widehat{x_k} \cdots x_n)^{t-1} \in (\operatorname{depol}(P_t(\Sigma_t G)) \colon_R (x_i \mid i \in [n])) \setminus \operatorname{depol}(P_t(\Sigma_t G)).$$

特别地，$\operatorname{reg}(R/\operatorname{depol}(P_t(\Sigma_t G))) \geq (t-1)(n-1)$。

断言的证明 *5.10.* 第二个结论由第一个结论和引理 5.7可得。我们有

$$x_i(x_1 \cdots \widehat{x_k} \cdots x_n)^{t-1} = x_i^t(\cdots) \in \operatorname{depol}(P_t(\Sigma_t G))$$

对任意 $i \in [n] \setminus \{k\}$，由引理 5.5 可得。另一方面，由于 x_k， x_1， x_{11}，$\ldots$，$x_{1,\,t-2}$ 在 $\Sigma_t G$ 中构成一条长度为 $t-1$ 的路径，我们有

$$x_1^{t-1} x_k = \operatorname{depol}(x_k x_1 x_{11} \cdots x_{1,t-2}) \in \operatorname{depol}(P_t(\Sigma_t G)),$$

这意味着

$$x_k(x_1 \cdots \widehat{x_k} \cdots x_n)^{t-1} = x_1^{t-1} x_k(\cdots) \in \operatorname{depol}(P_t(\Sigma_t G)).$$

因此，我们有

$$(x_1 \cdots \widehat{x_k} \cdots x_n)^{t-1} \in (\operatorname{depol}(P_t(\Sigma_t G)) \colon_R (x_i \mid i \in [n])).$$

此外，由于 $\Sigma_t G$ 的结构，其中任何长度为 $t-1$ 的路径必定要么是

$$\{x_j, x_{j,1}, \ldots, x_{j,t-1}\}$$

对于某个 $j \in [n] \setminus \{k\}$，要么包含 x_k。换言之，我们有

$$(x_1 \cdots \widehat{x_k} \cdots x_n)^{t-1} \notin \operatorname{depol}(P_t(\Sigma_t G)),$$

如所需。 □

所需的不等式随即由命题 5.10 得出。证明至此完成。 □

现在我们可以证明本节的主要定理，即在图是（某些其他图的）$(t-1)$-悬挂的假设下，对 licci t-路径理想作部分刻画。

定理 5.11。设 G 为有限简单图， $t \geq 2$ 为正整数。令 $\mathfrak{m}$ 表示 $T = \Bbbk[V(\Sigma_t G)]$ 的齐次极大理想。考虑以下命题。

(1) $P_t(\Sigma_t G)_{\mathfrak{m}}$ 在 $T_{\mathfrak{m}}$ 中是 *licci*。(2) G 是一个可能带有孤立顶点的星图。(3) $t = 2$ 和 G 要么是一个可能带有孤立顶点的星图，要么 $t > 2$ 和 G 至多有一条边。

那么(3) $\Longrightarrow$ (1) $\Longrightarrow$(2)。此外，如果 $\Bbbk$ 是无限的，那么(1) $\Longrightarrow$ (3)。

证明。 令 $V(G) = \{x_1, \ldots, x_n\}$，其中 $n \geq 1$。

(1) $\Longrightarrow$ (2). 这由引理 2.7 和定理 5.8得出。

(3) $\Longrightarrow$ (1). 情形 $t = 2$ 由 [25, 定理 3.7]得出。现在可以假设 $t \geq 3$ 和G 至多有一条边。如果 G 没有边，那么 $P_t(\Sigma_t G)$是一个完全交，因此结论成立。现在不妨假设 $E(G) = \{x_1, x_2\}$。对每个 $i \in [n]$，令 $x_{i0} := x_i$。显然

$$P_t(\Sigma_t G) = \left(\left(\prod_{j=0}^{l-1} x_{1j} \right) \left(\prod_{j=0}^{t-1-l} x_{2j} \right) \,\middle|\, l \in [t] \cup \{0\} \right) + \left(\prod_{j=0}^{t-1} x_{ij} \,\middle|\, i \in [n] \setminus [2] \right).$$

Set

$$\begin{aligned}
I &:= P_t(\Sigma_t G), \\
J &:= \left(\prod_{j=0}^{t-1} x_{ij} \,\middle|\, i \in [n] \right), \\
I' &:= \left(\left(\prod_{j=1}^{l-1} x_{1j} \right) \left(\prod_{j=1}^{t-1-l} x_{2j} \right) \,\middle|\, l \in [t-1] \right) + \left(\prod_{j=0}^{t-1} x_{ij} \,\middle|\, i \in [n] \setminus [2] \right), \\
J' &:= \left(\prod_{j=1}^{t-1} x_{ij} \,\middle|\, i \in [2] \right) + \left(\prod_{j=0}^{t-1} x_{ij} \,\middle|\, i \in [n] \setminus [2] \right).
\end{aligned}$$

我们有如下断言。

断言 5.12. 两个理想 I 和 I' 相连。

断言的证明 *5.12.* 显然， J （分别地， J'）是 I （分别地， I'）中的一个完全交，且高度相同。现在只需证明 $J\colon I = J'\colon I'$。注意，对任意两个理想$\mathbf{a}:\mathbf{b} = \mathbf{a}:(\mathbf{b}\ f)$，$\mathbf{a}$ 和$\mathbf{b}$ 以及任意元素 $f \in \mathbf{a}$，有

$$\begin{aligned}
J\colon I &= \left(\prod_{j=0}^{t-1} x_{ij} \,\middle|\, i \in [n] \right) : \left(\left(\prod_{j=0}^{l-1} x_{1j} \right) \left(\prod_{j=0}^{t-1-l} x_{2j} \right) \,\middle|\, l \in [t-1] \right) \\
&= \left(\prod_{j=0}^{t-1} x_{ij} \,\middle|\, i \in [n] \right) : x_{10}x_{20} \left(\left(\prod_{j=1}^{l-1} x_{1j} \right) \left(\prod_{j=1}^{t-1-l} x_{2j} \right) \,\middle|\, l \in [t-1] \right) \\
&= \left(\left(\prod_{j=1}^{t-1} x_{ij} \,\middle|\, i \in [2] \right) + \left(\prod_{j=0}^{t-1} x_{ij} \,\middle|\, i \in [n] \setminus [2] \right) \right) : \left(\left(\prod_{j=1}^{l-1} x_{1j} \right) \left(\prod_{j=1}^{t-1-l} x_{2j} \right) \,\middle|\, l \in [t-1] \right) \\
&= J'\colon I',
\end{aligned}$$

如所希望的那样。 □

对于每个 $k \in [t]$，令

$$I_k := \left(\left(\prod_{j=0}^{l-1} x_{1j} \right) \left(\prod_{j=0}^{k-1-l} x_{2j} \right) \,\middle|\, l \in [k] \cup \{0\} \right) + \left(\prod_{j=0}^{t-1} x_{ij} \,\middle|\, i \in [n] \setminus [2] \right).$$

注意到 $I_t = I$，并且 I_{t-2} 经过变量变换后恰好是 I'。因此，命题5.12 表明，$(I_t)_{\mathfrak{m}}$ 是 licci，当且仅当 $(I_{t-2})_{\mathfrak{m}}$也是 licci。事实上，使用类似的论证可以说明

$$(I_k)_{\mathfrak{m}} \text{ is licci if and only if so is } (I_{k-2})_{\mathfrak{m}}$$

对任意 $k \in [t] \setminus [2]$。因此，只需证明 $(I_1)_{\mathfrak{m}}$ 和 $(I_2)_{\mathfrak{m}}$ 是 licci。事实上，I_1 本身是一个完全交，而我们有

$$\begin{aligned}
&\left((x_{10}x_{11},\ x_{20}x_{21}) + \left(\prod_{j=0}^{t-1} x_{ij} \;\middle|\; i \in [n] \setminus [2]\right)\right) : I_2 \\
&= \left((x_{10}x_{11},\ x_{20}x_{21}) + \left(\prod_{j=0}^{t-1} x_{ij} \;\middle|\; i \in [n] \setminus [2]\right)\right) : (x_{10}x_{20}) \\
&= (x_{11},\ x_{21}) + \left(\prod_{j=0}^{t-1} x_{ij} \;\middle|\; i \in [n] \setminus [2]\right),
\end{aligned}$$

一个完全交，正如所求。

(3) $\Longleftarrow$ ***(1)***，假设 $\Bbbk$ 是无限的。由于 (1) 蕴含 (2)，G 是一个可能带有孤立顶点的星图。因此，只需证明：若 $t > 2$，且 G 是一个至少有两条边、可能带有孤立顶点的星图，则 $P_t(\Sigma_t G)_{\mathfrak{n}}$ 在 $T_{\mathfrak{n}}$ 中不是 licci。设 $E(G) = \{x_1x_r, \ldots, x_{r-1}x_r\}$，其中某个 $3 \le r \le n$，并且对每个 $i \in [n]$，有 $x_{i0} := x_i$。

由于 $\Bbbk$ 是无限的，根据 [11, 注 3。13]，$P_t(\Sigma_t G)_{\mathfrak{n}}$ 在 $T_{\mathfrak{n}}$ 中是 licci，当且仅当 $\mathsf{depol}(P_t(\Sigma_t G))_{\mathfrak{n}}$ 在 $R_{\mathfrak{m}}$ 中是 licci。由引理 5.5，后者是一个阿廷理想；因此根据定理 2.8，只需证明对于任意 $P_t(\Sigma_t G))^{\{s\}} \neq R$。事实上，我们有

$$\begin{aligned}
P_t(\Sigma_t G) = &\left(\left(\prod_{j=0}^{l-1} x_{ij}\right)\left(\prod_{j=0}^{t-1-l} x_{rj}\right) \;\middle|\; i \in [r-1],\ l \in [t] \cup \{0\}\right) + \\
&\left(\left(\prod_{j=0}^{l-1} x_{ij}\right)(x_{r0})\left(\prod_{j=0}^{t-2-l} x_{i'j}\right) \;\middle|\; i, i' \in [r-1] \text{ where } i < i', l \in [t-2]\right) + \left(\prod_{j=0}^{t-1} x_{ij} \;\middle|\; i \in [n] \setminus [r]\right)
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
&\mathrm{depol}(P_t(\Sigma_t G) \\
&= \left(x_i^l x_r^{t-l} \;\middle|\; i \in [r-1],\ l \in [t] \cup \{0\}\right) + \left(x_i^l x_{i'}^{t-1-l} x_r \;\middle|\; i, i' \in [r-1] \text{ where } i < i', , l \in [t-2]\right) + \\
&\qquad\qquad \left(x_i^t \;\middle|\; i \in [n] \setminus [r]\right). \\
&= \left(x_i^t \;\middle|\; i \in [n]\right) + \left(x_i^l x_r^{t-l} \;\middle|\; i \in [r-1],\ l \in [t-1]\right) + \\
&\qquad \left(x_i^l x_{i'}^{t-1-l} x_r \;\middle|\; i, i' \in [r-1] \text{ where } i < i', l \in [t-2]\right) \\
&= \left(x_i^t \;\middle|\; i \in [n]\right) + x_r\Big(\left(x_i^l x_r^{t-1-l} \;\middle|\; i \in [r-1],\ l \in [t-1]\right) + \\
&\qquad\qquad \left(x_i^l x_{i'}^{t-1-l} \;\middle|\; i, i' \in [r-1] \text{ where } i < i', l \in [t-2]\right)\Big).
\end{aligned}$$

于是我们有

$$\begin{aligned} I &:= \operatorname{depol}(P_t(\Sigma_t G)^{\{1\}}) \\ &= \left(x_i^t \;\middle|\; i \in [n] \setminus \{r\}\right) + (x_r^{t-1}) + \left(x_i^l x_r^{t-1-l} \;\middle|\; i \in [r-1],\ l \in [t-1]\right) + \\ &\qquad \left(x_i^l x_{i'}^{t-1-l} \;\middle|\; i, i' \in [r-1] \text{ where } i < i', l \in [t-2]\right) \\ &= \left(x_i^{t-1} \;\middle|\; i \in [r]\right) + \left(x_i^t \;\middle|\; i \in [n] \setminus [r]\right) + \left(x_i^l x_r^{t-1-l} \;\middle|\; i \in [r-1],\ l \in [t-2]\right) + \\ &\qquad \left(x_i^l x_{i'}^{t-1-l} \;\middle|\; i, i' \in [r-1] \text{ where } i < i', l \in [t-2]\right). \end{aligned}$$

由于 $r \geq 3$, $I^{\#}$ 的单项式极小生成元没有公因子。因此根据定义，我们有

$$\operatorname{depol}(P_t(\Sigma_t G)^{\{s\}} = I^{\{s-1\}} = I^{\{s-2\}} = \cdots = I^{\{1\}} = I \neq R$$

对任意 $s \geq 2$，结论如所愿。证明至此完成。 □

作为推论，我们得到所有路径理想为 licci 的树。

推论 5.13. 设 G 是一棵树，$t \geq 2$ 是一个正整数。令 $\mathfrak{m}$ 表示 $R = \mathbb{k}[V(G)]$ 的齐次极大理想。如果 $\mathbb{k}$ 是无限的，那么 $P_t(G)\mathfrak{m}$ 在 $R_{\mathfrak{m}}$ 中是 *licci*，当且仅当 G 是长度为 $t-1$ 或 $2t-1$ 的路径。

证明。如果 G 是长度为 $t-1$ 或 $2t-1$ 的路径，那么 $G = \Sigma_t H$，其中 H 分别是一个孤立顶点或一条边。因此，由推论 5.6, $P_t(G)$ 是 Cohen–Macaulay。另一方面，$P_t(G)\mathfrak{m}$ 为 licci 也意味着 $P_t(G)$ 是 Cohen–Macaulay。因此，我们可以首先假设 $P_t(G)$ 是 Cohen–Macaulay。根据 [5, 定理 3.8], G 必须是某个图 H 的 $\Sigma_t H$。结论由定理 5.11 得出。□

我们未能完全刻画 licci 路径理想。另一方面，已知 $P_2(G)\mathfrak{m}$为 licci 意味着 G 是单圈图（至多含有一个圈的图）（[25, 定理 3.7]）。我们预测，licci 路径理想的完整刻画将是一个类似的结果。为此，我们还刻画了圈的 licci 路径理想。在下面的注记中，我们回顾圈的路径理想的正则性和投射维数的已知结果。

注 5.14 ([1, 推论 5.5])。设 n, t, q和 d为整数，满足 $2 \leq t \leq n, n = (t+1)q + d$，其中 $q \geq 0, 0 \leq d \leq t$。则有

$$\operatorname{pd}(S/P_t(C_n)) = \begin{cases} 2q+1 & \text{if } d \neq 0 \\ 2q & \text{if } d = 0. \end{cases}$$

and

$$\operatorname{reg}(S/P_t(C_n)) = \begin{cases} (t-1)q + d - 1 & \text{if } d \neq 0 \\ (t-1)q & \text{if } d = 0. \end{cases}$$

现在我们可以刻画圈的 licci 路径理想了。

定理 5.15。设 $n \geq t \geq 2$ 为整数，且 $S = \mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]$。则理想 $P_t(C_n)\mathfrak{m}$ 在 $S_{\mathfrak{m}}$ 中是 *licci*，当且仅当 $n \in \{t+1, 2t+1\}$。

证明。如果 $n = t$，那么 $P_t(C_n) = (x_1 \cdots x_n)$ 是主理想，因此 $P_t(C_n)\mathfrak{m}$ licci，证毕。现在我们可以假设 $n \geq t+1$。我们首先证明，若 $n \notin \{t+1, 2t+1\}$，则理想 $P_t(C_n)\mathfrak{m}$ 不是

在 $S_{\mathfrak{m}}$ 中 licci。设 $n \notin \{t+1, 2t+1\}$，且 $n = (t+1)q + d$，其中 $q \geq 0$, $0 \leq d \leq t$。由于 $n \geq t+1$，我们有 $q \geq 1$。下面给出一个断言。

命题 5.16。我们有 $(t-1)q \geq d$。

命题 *5.16* 的证明。若 $q \geq 2$，则

$$(t-1)q \geq 2(t-1) \geq t \geq d,$$

如所需。现在我们可以假设 $q = 1$。由于 $n \neq 2t+1$，我们有 $d \neq t$。注意，根据假设，我们有$d \leq t$。因此 $d \leq t-1 = (t-1)q$，如所需。□

若 $d \neq 0$，则由注 5.14，可得

$$(t-1)\operatorname{pd}(S/P_t(C_n)) - t = (t-1)(2q+1) - t = (t-1)q + (t-1)q - 1 \geq (t-1)q + d - 1 = \operatorname{reg}(S/P_t(C_n)),$$

其中不等式由命题5.16得出。

如果 $d = 0$，那么 $n = (t+1)q$，并且由于 $n \neq t+1$，我们有 $q \geq 2$。因此，由注 5.14，可得

$$\begin{aligned}(t-1)\operatorname{pd}(S/P_t(C_n)) - t = (t-1)(2q) - t = (t-1)q + (t-1)q - t \geq (t-1)q + 2(t-1) - t \\ \geq (t-1)q = \operatorname{reg}(S/P_t(C_n))。\end{aligned}$$

因此，由引理 2.7，可得 $P_t(C_n)_{\mathfrak{m}}$ 在 $S_{\mathfrak{m}}$中不是 licci。

为完成证明，我们需要说明，若 $n = t+1$ 或 $2t+1$，则 $P_t(C_n)_{\mathfrak{m}}$ 在 $S_{\mathfrak{m}}$ 中是 licci。假设 $n = t+1$。那么对于任意满足 $i \neq j$ 的 $i, j \in \{1, \ldots, n\}$，我们有 $P_t(C_n) \subseteq (x_i, x_j)$ 且$P_t(C_n) \not\subseteq (x_i)$。因此，$\operatorname{ht}(P_t(C_n)) \geq 2$。此外，由注 5.14 可得，$\operatorname{pd}(S/P_t(C_n)) = 2$。因此，$S/P_t(C_n))$ 是 Cohen–Macaulay，且 $\operatorname{ht}(P_t(C_n)) = 2$。由注 2.2 可知，$P_t(C_n)_{\mathfrak{m}}$ 在 $S_{\mathfrak{m}}$ 中是 licci。

假设 $n = 2t+1$。那么，对于任意给定的 i、$j \in \{1, \ldots, n\}$，在 $i \neq j$ 的条件下，我们有 $P_t(C_n) \not\subseteq (x_i, x_j)$。因此，$\operatorname{ht}(P_t(C_n)) \geq 3$。根据注 5.14，我们有 $\operatorname{pd}(S/P_t(C_n)) = 3$。所以，$P_t(G)$ 是高度为 3 的 Cohen–Macaulay。根据 [2, 定理 4.13], ，我们有 $\beta_3(S/P_t(C_n)) = 1$。因此，$P_t(C_n)$ 是高度为 3 的 Gorenstein。根据注 2.2，可知 $P_t(C_n)_{\mathfrak{m}}$ 在 $S_{\mathfrak{m}}$ 中是 licci。□

References

1. Ali Alilooee 和 Sara Faridi, *On the resolution of path ideals of cycles* **43** 2015 12, , 《Comm. Algebra》 5413 5433 3395713 （）, 第 – 期。MR 2., *Graded Betti numbers of path ideals of cycles and lines*, 《代数及其应用杂志》**17**（2018），第 1 期，1850011, 17。MR 3741068 3. Arindam Banerjee, *The regularity of powers of edge ideals*, 《代数组合杂志》**41**（2015），第 2 期，303–321。MR 3306074 4. Winfried Bruns 和 J¨urgen Herzog, *Cohen-Macaulay rings*, 剑桥高等数学研究丛书，第 39 卷，剑桥大学出版社，剑桥，1993 1251956 5 . MR . Daniel Campos、Ryan Gunderson、Susan Morey、Chelsey Paulsen 和 Thomas Polstra, *Macaulay properties of path ideals* **218** 2014 8, 1537 1543 , 《J. Pure Appl. *Depths and Cohen–* Algebra》 （），第 – 期。MR 3175038 6. Trung Chau、Kanoy Kumar Das、Animikha Dutta Dhar、Pranath S Karanth 和 Aniruda Suswaram, *whose path ideals have linear quotients* 2506 06209 [ ] 2025 *Trees* , arXiv: . math.AC（）。7. Aldo Conca 和 Emanuela De Negri, *M-sequences, graph ideals, and ladder ideals of linear type*, 《J. Algebra》 **211**（1999 1666661 8 2，599 624），第 – 期。MR . Marilena Crupi 和 Antonino Ficarra, *Edge ideals whose all matching powers are bi-Cohen-Macaulay*, 《Comm. Algebra》**54** 4996679 9 2026 2，661 668（），第 – 期。MR . David Eisenbud, *Commutative algebra*, 《Graduate Texts in Mathematics》，第 150 卷，Springer-Verlag，纽约，1995，1322960 10 着眼于代数几何。MR . Viviana Ene、Giancarlo Rinaldo 和 Naoki Terai, *Licci binomial edge ideals*, 《组合理论杂志》A辑**175**（2020 4102156 11 105278，23）。MR . Sara Faridi、Patricia Klein、Jenna Rajchgot 和 Alexandra Seceleanu, *Polarization and Gorenstein liaison*, 《伦敦数学会杂志》（2）**112**（2025），第 6 期，论文编号 e70319。MR 5001583

12. Antonino Ficarra, *The stable set of associated primes of a complementary edge ideal*, arXiv:2603.02358 [math.AC] （2026）。13. Antonino Ficarra 和 Somayeh Moradi, *Complementary edge ideals*, arXiv:2508.10870 [math.AC] （2025）。14. Gunnar Fløystad 和 Jon Eivind Vatne, 《 Comm. Algebra 》 （），第 – 期。MR 2175383 15. Isidoro Gitler 和 Carlos E. Valencia, 《 Comm. Algebra 》 （），第 – 期。MR 16. J¨urgen Herzog, *Deformationen von Cohen-Macaulay Algebren*, 《J. Reine Angew. Math.》**318** （1980），83–105。MR 579384 17. J¨urgen Herzog 和 Takayuki Hibi, *Monomial ideals*, 《Graduate Texts in Mathematics》，第 260 卷，Springer-Verlag London, Ltd.，伦敦，2011 2724673 。MR . Jurgen Herzog 和 Ahad Rahimi, *Bi-Cohen-Macaulay graphs* **23** 2016 1, 1 1, ，《Electron. J. Combin.》 （），第 期。MR 19. Takayuki Hibi、Ayesha Asloob Qureshi 和 Sara Saeedi Madani, *Complementary edge ideals* 2508 09837 ，arXiv: . math.AC （）。[ ] 2025
20. Craig Huneke, *Linkage and the Koszul homology of ideals*, 《Amer. J. Math.》**104** （1982），第 5 期，1043–1062。MR 67530921 *Numerical invariants of liaison classes* **75** 1984 2, 301 325 732549 。，，《Invent. Math.》（），第 – 期。MR . Craig Huneke 和 Bernd Ulrich, *The structure of linkage*, 《Ann. of Math.》 （） （），第 2 期，277–334。MR 90814923 *Algebraic linkage* **56** 1988 3, 415 429 948528 。，，《Duke Math. J.》（），第 – 期。MR ., *Liaison of monomial ideals* **39** 2007 3, 384 392 2331565 ，《 Bull. Lond. Math. Soc.》（），第 – 期。MR . Kyouko Kimura、Naoki Terai 和 Ken-ichi Yoshida, *Ideal squarefree monomial ideals generated in degree two or with deviation two* **390** 2013 264 289 ，《J. Algebra》（），–。MR 3072123 26. Andrew R. Kustin 和 Matthew Miller, *Deformation and linkage of Gorenstein algebras*, 《Trans. Amer. Math. Soc.》 **284** 743730 27 1984 2, 501 534（），第 – 期。MR ., *Tight double linkage of Gorenstein algebras* **95** 1985 2, 384 397 801274 ，《J. Algebra》（），第 – 期。MR . Andrew R. Kustin、Matthew Miller 和 Bernd Ulrich, *Linkage theory for algebras with pure resolutions*, 《J. Algebra》 **102** 853240 29 1986 1，199 228（），第 – 期。MR . Jacob Matijevic 和 Paul Roberts, *A conjecture of Nagata on graded Cohen-Macaulay rings*, 《J. Math. Kyoto Univ.》**14** 340243 30 1974 125 128（），–。MR . Ezra Miller 和 Bernd Sturmfels, *Combinatorial commutative algebra*, 《Graduate Texts in Mathematics》，第 227 卷，Springer-Verlag，纽约，2005 2110098 。MR . Uwe Nagel 和 Tim Romer, *Glicci simplicial complexes*, 《J. Pure Appl. Algebra》**212** （2008），第 10 期，2250–2258。MR 2426505 32. Christian Peskine 和 Lucien Szpiro, *Liaison des variétés algébriques. I*, 《Invent. Math.》**26**（1974），271–302。MR 364271 33 *Liaison among curves in* ^{3}, **50** 1978 79 3, 205 217 520926 。Aroor Prabhakar 34 *Alexander duality theorem and Stanley-Reisner rings* 1078, 1999, Rao, **P**《Invent. Math.》（/），第 – 期。MR . Naoki Terai, ，无。射影簇坐标环的自由分解及相关主题（日文）（京都，1998 174 184 1715588 ），第 – 页。MR . Rafael H. 35 *Cohen-Macaulay graphs* **66** 1990 3, 277 293 Villarreal, 《Manuscripta Math.》 （），第 – 期。MR 1031197

Chennai Mathematical Institute, Siruseri, Tamilnadu 603103. India
Email address: omprakash@cmi.ac.in, opbhardwaj95@gmail.com

Chennai Mathematical Institute, Siruseri, Tamilnadu 603103. India
Email address: chauchitrung1996@gmail.com

Chennai Mathematical Institute, Siruseri, Tamilnadu 603103. India
Email address: omkarj@cmi.ac.in, omkarjavadekar@gmail.com