arXiv:2603.14119v1 [math.MG] 14 Mar 2026

通过分析师旅行商算法求解最大距离问题的极小化器

ENRIQUE ALVARADO、SILVIA GHINASSI 和 LISA NAPLES

摘要。我们以有限尺度几何平方和为依据，给出了最大距离问题极小化子的长度上界和下界。

1. 引言

设 $E \subset \mathbb{R}^2$ 为一个集合。尽管欧几里得空间中有许多集合无法包含在任何有限长度的曲线 Γ 内，但对于任意 $r > 0$，都存在许多有限长度曲线，其闭邻域 r- $\mathcal{N}(\Gamma, r) := \cup_{x\in\Gamma} B(x, r)$ 包含 E 中的每个点。

最大距离问题的最大距离问题 (MDP) 是寻找此类最短曲线的问题：

$$\begin{cases} \text{minimize } \mathcal{H}^1(\Gamma) \\ \text{among curves of finite length } \Gamma \subset \mathbb{R}^2 \text{ such that } \mathcal{N}(\Gamma, r) \supset E. \end{cases}$$

在本文中及下文中，我们将有限长度曲线定义为具有有限一维豪斯多夫测度的连通集 $\mathcal{H}^1$。由于事先并不知道极小化子是否存在，我们定义

$$\Lambda(E, r) := \inf\{\mathcal{H}^1(\Gamma) : \Gamma \subset \mathbb{R}^2 \text{ is a curve of finite length and } \mathcal{N}(\Gamma, r) \supset E\}.$$

然而，当 E 是紧集时，标准的紧性论证可证明极小化器的存在（参见 [AKV，定理 2。15]）。该问题最初由 Buttazzo、Oudet 和 Stepanov [BOS] 提出，旨在研究城市中的最优城市交通网络。

Alvarado、Catalano、Merchán 和 Naples [ACMN]证明，若 E 包含在一个有限 $\mathcal{H}^1$测度的紧连通集中，也就是说，是一条具有有限 $\mathcal{H}^1$的曲线，那么 r最大距离极小化子会在豪斯多夫距离和 $\mathcal{H}^1$测度意义下都收敛到一条包含原集合且测度最小的曲线。这让人想起调和分析中的一个经典结果，即所谓的分析学家旅行商定理。20 世纪 90 年代初，Jones [J]

2020 数学主题分类。 49Q20, 28A75,28A78.关键词和短语。 长度、平方函数、最大距离问题、极小化器、贝塔数。美国爱荷华州立大学数学系，Ames，IA，enrique3@iastate.edu。意大利罗马，silvia.ghinassi@gmail.com。美国康涅狄格州费尔菲尔德，费尔菲尔德大学数学系，lisa.naples@fairfield.edu。

和 Okikiolu [O] 凭借著名的分析学家旅行商定理（ATST）取得了重要突破。他们给出了集合包含于 $\mathbb{R}^n$中的充要几何条件；这个集合可视作一份无限城市列表，而定理说明它可包含在一条有限长度的曲线（或城市间路径）中。此后，Jones 所发展的工具引起了几何测度理论学家的极大兴趣，许多关于定性和定量可整性的研究成果都依赖于 ATST 背后的思想。

在介绍分析学家旅行商定理之前，我们需要先给出一些定义。对于 E $\mathbb{R}^2$ 的子集，我们将 $|E|$ 定义为 E 的直径，即 $|E| = \sup_{x,\ y\in E} \operatorname{dist}(x,\ y)$。

定义 1.1（二进立方体）。我们用 $\mathcal{D}$ 表示二进立方体的集合；也就是说 s,

$$\mathcal{D} = \left\{[k2^{-n}, (k+1)2^{-n}) \times [j2^{-n}, (j+1)2^{-n}) : k, j, n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

所有边长为 $= 2^{-n}$ 的二进立方体 Q 的集合记作

$$\mathcal{D}_n = \left\{[k2^{-n}, (k+1)2^{-n}) \times [j2^{-n}, (j+1)2^{-n}) : k, j \in \mathbb{Z}\right\}.$$

*Defi*定义 1.2（豪斯多夫测度）。对于任意 $E \subset \mathbb{R}^2$、$\delta > 0$ 和 $s \geq 0$，定义

$$\mathcal{H}^s_\delta(E) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i, |U_i| < \delta\right\}.$$

可测集 $E \subset \mathbb{R}^2$ 的 s 维豪斯多夫测度定义为

$$\mathcal{H}^s(E) = \lim_{\delta \downarrow 0} \mathcal{H}^s_\delta(E).$$

定义 1.3（β-数）。给定 $E \subset \mathbb{R}^2$ 和 $Q \in \mathcal{D}$，定义

$$\beta_E(Q) := \begin{cases} \inf\limits_{\ell \text{ line}} \sup\limits_{x \in E \cap Q} |Q|^{-1} \operatorname{dist}(x, \ell) & \text{if } E \cap Q \neq \varnothing, \\ 0 & \text{if } E \cap Q = \varnothing. \end{cases}$$

定理 1.4（分析学家的旅行商定理 [J，定理 1]）。有界集 $E \subset \mathbb{R}^2$ 包含在一条有限长度曲线中，当且仅当

$$\sum_{Q \in \mathcal{D}} \beta_E^2(3Q)|Q| < \infty.$$

更确切地说，若 $\sum_{Q\in\mathcal{D}} \beta_E^2\ (3Q)\ |Q| < \infty$，则存在一条有限长度曲线 I 和一个普适常数 $c_1 > 0$，使得 $I \supset E$ 且 $\mathcal{H}^1\ (I)\ \leq c_1 \left(|E| + \sum_{Q\in\mathcal{D}} \beta_E^2\ (3Q)\ |Q|\right)$。若 I 是包含 E的任意有限长度曲线，则存在一个普适常数 $c_2 > 0$，使得$|E| + \sum_{Q\in\mathcal{D}} \beta_E^2\ (3Q)\ |Q| \leq c_2\mathcal{H}^1\ (I)$。

受 MDP 极小化子渐近行为与充分正则集合的 ATST 型结果之间联系的启发 E （该结果见 [ACMN], ），本文研究有限尺度平方函数与 MDP 之间的联系。

定理 1.5（主要定理）。给定一个紧集 $E \subset \mathbb{R}^2$,

$$|E| - 2r + \sum_{Q \in \mathcal{D}} \max\{\beta_E(Q) - r/|Q|, 0\}^2 |Q| \lesssim \Lambda(E, r) \lesssim |E| + \sum_{Q \in \mathcal{D}} \max\{\beta_E(Q) - r/|Q|, 0\}^2 |Q|.$$

本文中及下文中，我们称 $A \lesssim B$，如果存在常数 $c > 1$ 使得$A \leq cB$。注意，在上述定理中，对于所有满足 $|Q| < r$的 Q，都有 $\beta_E(Q) - r/|Q| \leq 0$。因此，此处出现的和仅在有限多个代中非零（至多为 $\lceil -\log(r)/\log(2) \rceil$代）。

注 1.6。下界和上界相差一个加性项 $-2r$。我们无法通过去掉这一项来改进下界。事实上，考虑 E 由两个点组成，且两点间距离为 $d > 2r$ 的情形。位于经过这两个点的直线上的一条线段，长度为 $d - 2r$，其端点到 E中的两个点的距离均为 r，是 MDP 的一个极小化子，且长度恰为 $|E| - 2r$。

我们的方法并不依赖 Jones 最初的证明，而是主要基于 Bishop 和 Peres 提出的一种截然不同的证明，[BP]。Bishop 和 Peres 构造了一个凸集的嵌套族，这些凸集充当邻域，将 E 包含在每个固定的代中。为方便读者，我们按照本文构造所采用的记号，并补充完整细节，给出所用结果的证明。

1.1. **致谢**。 本材料所述研究工作得到了美国国家科学基金会资助编号 DMS-1928930 的支持；作者参与了由西蒙斯·劳弗数学科学研究所（原数学科学研究所）主办的 SRiM 项目，项目于 2025 年夏季在加利福尼亚州伯克利举行。

2. Lower bound

对于下界 ，只需依赖定理 1.4 (ATST)的下界 .

定义 2.1。 给定 $E \subset \mathbb{R}^2$ 紧且 $Q \in \mathcal{D}$，定义

$$r_E(Q) := \begin{cases} \inf_{\ell \text{ line}} \sup_{x \in E \cap Q} \operatorname{dist}(x, \ell) & \text{if } E \cap Q \neq \varnothing, \\ 0 & \text{if } E \cap Q = \varnothing. \end{cases}$$

注 2.2。注意， $r_E(Q) = \beta_E(Q)|Q|$。由于我们的证明技巧，下文会更多地用到 $\beta_E(Q)$，而非 $r_E(Q)$。不过，后者是更相关的量，因为我们研究的是尺度相关问题，而 Jones 在 [J]，中处理的问题并非如此；Jones 首先引入了 $\beta_E(Q)$。值得注意的是， $r_E(Q)$ 与 Okikiolu 在 [O] 中定义的量相同。

引理 2.3。 设 $E \subset \mathbb{R}^2$ 是一个紧集， Γ 是任意一条曲线，满足 $\mathcal{N}(\Gamma, r) \supset E$。那么 $|E| - 2r \leq |\Gamma|$。

证明。由于 E 是紧集，存在两个点 x_1，$x_2 \in E$，使得 $\operatorname{dist}(x_1, x_2) = |E|$。由于 $E \subset \mathcal{N}(\Gamma, r)$，$x_1$，$x_2 \in \mathcal{N}(\Gamma, r)$。那么

$$|E| = \operatorname{dist}(x_1, x_2) \le \operatorname{dist}(x_1, \Gamma) + |\Gamma| + \operatorname{dist}(x_2, \Gamma) \le r + |\Gamma| + r = |\Gamma| + 2r. \qquad \square$$

现在我们可以证明定理 1.5 中的下界。

定理 2.4. 给定一个紧集 E *in* $\mathbb{R}^2$,

$$|E| - 2r + \sum_{Q \in \mathcal{D}} \max\{\beta_E(Q) - r/|Q|, 0\}^2 |Q| \lesssim \Lambda(E, r).$$

证明。令 Γ 为 E的一个 r-最大距离极小化子。首先注意，对于任意立方体 $Q \in \mathcal{D}$,$r_E(Q) \le r_{\mathcal{N}(\Gamma,r)}(Q) \le r_\Gamma(Q) + r$。因此,

$$\beta_E(Q) \le \beta_{\mathcal{N}(\Gamma,r)}(Q) \le \beta_\Gamma(Q) + \frac{r}{|Q|}.$$

因此,

$$\max\left\{\beta_E(Q) - \frac{r}{|Q|}, 0\right\} \le \beta_\Gamma(Q) \quad \text{for all } Q \in \mathcal{D}.$$

因此，将分析学家旅行商定理应用于 Γ，我们得到

$$\begin{aligned} |\Gamma| + \sum_{Q \in \mathcal{D}} \max\{\beta_E(Q) - r/|Q|, 0\}^2 |Q| &\le |\Gamma| + \sum_{Q \in \mathcal{D}} \beta_\Gamma(Q)^2 |Q| \\ &\lesssim \mathcal{H}^1(\Gamma) \\ &= \Lambda(E, r). \end{aligned}$$

最后，由于 $|E| - 2r \le |\Gamma|$，根据引理 2.3，我们得到

$$|E| - 2r + \sum_{Q \in \mathcal{D}} \max\{\beta_E(Q) - r/|Q|, 0\}^2 |Q| \lesssim \Lambda(E, r). \qquad \square$$

注 2.5。若 $|E| < 2r$，则 $\max\{\beta_E(Q) - r/|Q|, 0\} = 0$ 对所有二进立方体 Q均成立，这使得定理 2.4 中的下界为负。然而，在这种情况下，MDP 的极小化曲线是一个单点，其 $\mathcal{H}^1$ 测度为 0。

3. 上界

我们为 Γ^* 构造一条 $\Lambda(E, r)$ 候选曲线，其中 $E \subset \mathbb{R}^2$ 是紧的。随后我们证明Γ^* 满足定理 1.5所需的上界估计。

3.1. 构造凸包。 回想一下，集合 F 的凸包是包含 F的最小凸集。我们用记号 $\operatorname{conv}(F)$ 表示集合 F的凸包。我们构造一个以二进制串 $\sigma \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \{0,1\}^i$为索引的凸包嵌套族 $\mathscr{C}$。

3.1.1. 构造的初始化与第一代。 初始化 $\mathscr{C}_0 = \{C_\varnothing\}$，其中 $C_\varnothing = \hat{}\,\hat{}\,\mathrm{conv}(E)$。取由 $\beta(C_\varnothing)$ 给出的直径线段 $L_\varnothing$ 。令 $a_\varnothing$ 和 $b_\varnothing$ 为 $L_\varnothing$的端点^。由于 $C_\varnothing$ 是 E的凸包，且我们取的是直径线段，因此注意到$a_\varnothing$ 和 $b_\varnothing$ 都在 E中。稍微不严谨地使用区间记号，我们可以写作^ ^ $L_\varnothing = [a_\varnothing, b_\varnothing]$。令 $\pi_\varnothing$ 为到直线 $L_\varnothing$的正交投影。由于 $E = E \cap C_\varnothing$，^ ^注意到 $\pi_\varnothing(E) \subset L_\varnothing$。将 $L_\varnothing$ 划分为三个等长区间。将中间的（开）区间标记为 $K_\varnothing$，其余的（闭）区间标记为 $I_0 \ni a_\varnothing$ 和 $I_1 \ni b_\varnothing$。

我们考虑两种情况

(P1) $\pi_\varnothing(E \cap C_\varnothing) \cap K_\varnothing \neq \varnothing$. Pick $z_\varnothing \in \pi_\varnothing(E \cap C_\varnothing) \cap K_\varnothing$ and let

$$C_0 = \mathrm{conv}(\pi_\varnothing^{-1}([a_\varnothing, z_\varnothing]) \cap (E \cap C_\varnothing)) \quad \text{and} \quad C_1 = \mathrm{conv}(\pi_\varnothing^{-1}([z_\varnothing, b_\varnothing]) \cap (E \cap C_\varnothing)).$$

(P2) $\pi_\varnothing(E \cap C_\varnothing) \cap K_\varnothing = \varnothing$。令

$$C_0 = \mathrm{conv}(\pi_\varnothing^{-1}(I_0) \cap (E \cap C_\varnothing)) \quad \text{and} \quad C_1 = \mathrm{conv}(\pi_\varnothing^{-1}(I_1) \cap (E \cap C_\varnothing)).$$

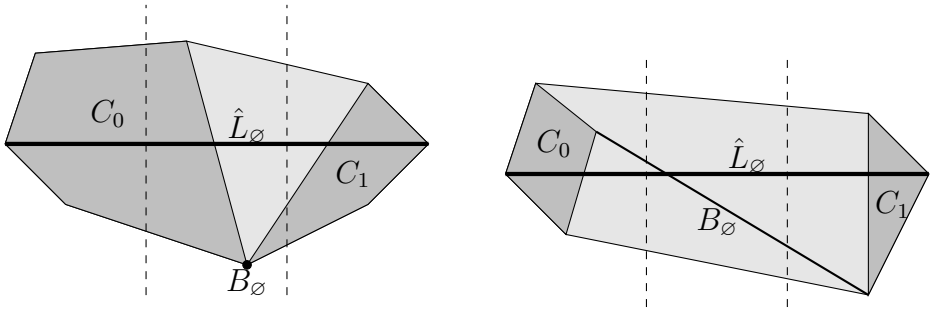


图 1. 构造在 $C_\varnothing$ 内第一代的情况 (P1) 和 (P2)。

在两种情况下，令 $\mathscr{C}_1 = \{C_0, C_1\}$。令 $B_\varnothing$ 为连接点 $e_0 \in E \cap C_0$ 和点 $e_1 \in E \cap C_1$ 的最短线段。注意，在情况 (P1) 中，$B_\varnothing$ 是一个单点，因此长度为零。在情况 (P2) 中，$\mathrm{dist}(C_0, C_1) \geq \frac{1}{3}|\hat{}L_\varnothing|$，因此 $B_\varnothing$ 长度为正。

3.1.2. 归纳构造。 假设已构造出 j 代凸包和桥。对于每个 $\sigma \in D_j$，令 L_σ 为由 $\beta(C_\sigma)$ 给出的直径线段。使用与上文相同的记号，令 $L_\sigma = [a_\sigma, b_\sigma]$。现在我们考虑到包含 L_σ 的直线上的正交投影。根据构造，$\pi_\sigma(E \cap C_\sigma) \subset L_\sigma$。将 L_σ 划分为三个区间，$I_{\sigma*0}$，K_σ，$I_{\sigma*1}$。

我们考虑两种情况

(P1) $\pi_\sigma(E \cap C_\sigma) \cap K_\sigma \neq \varnothing$。取 $z_\sigma \in \pi_\sigma(E \cap C_\sigma) \cap K_\sigma$，并令

$$C_{\sigma*0} = \mathrm{conv}(\pi_\sigma^{-1}([a_\sigma, z_\sigma]) \cap (E \cap C_\sigma)) \text{ and } C_{\sigma*1} = \mathrm{conv}(\pi_\sigma^{-1}([z_\sigma, b_\sigma]) \cap (E \cap C_\sigma)).$$

(P2) $\pi_\sigma(E \cap C_\sigma) \cap K_\sigma = \varnothing$。令

$$C_{\sigma*0} = \operatorname{conv}(\pi_\sigma^{-1}(I_{\sigma*0}) \cap (E \cap C_\sigma)) \quad \text{and} \quad C_{\sigma*1} = \operatorname{conv}(\pi_\sigma^{-1}(I_{\sigma*1}) \cap (E \cap C_\sigma)).$$

令 B_σ 为连接点 $e_{\sigma*0} \in E \cap C_{\sigma*0}$ 和点 $e_{\sigma*1} \in E \cap C_{\sigma*1}$ 的最短线段。对 $\mathscr{C}_j$ 中所有其他凸包重复相同操作。令 $\mathscr{C}_{j+1} = \{C_{\sigma*i} : \ |\sigma| = j, \ i \in \{0,1\}\}$。
按照标准术语，我们称 $C_{\sigma*i}$ 为 $i = 0$，1 对应的 C_σ 的子集。

3.2. **凸包集合的性质**。在构造候选曲线Γ^*之前，我们需要说明集合 $\mathscr{C}$ 的若干性质。

定义3.1（$\hat{}\beta$-数）。对于任意凸区域 $C \subset \mathbb{R}^2$，定义

$$\hat{\beta}(C) = \sup_{\hat{L} \text{ diameter line segment of } C} \sup_{y \in C} \operatorname{dist}(y, \hat{L}).$$

引理 3.2。*(C1)* $E \subset \bigcup_{|\sigma|=k} C_\sigma$。

(C2) 如果 $|\tau| = |\sigma|$，那么 $C_\tau \cap C_\sigma = \varnothing$。

$\hat{}$*(C3)* 如果 $C \in \mathscr{C}$，那么存在一个高为 $\beta(C)|C|$ 、底边为 $|C|$ 且包含于 C 中的三角形。

$\hat{}$*(C4)* 每个 $C \in \mathscr{C}$ 都包含于一个高为 $2\beta(C)|C|$ 、宽度为 $|C|$ 的矩形中。

(C5) $C_{\sigma*i}$，对于 $i \in \{0,1\}$，包含于一个高为 $2\hat{}\beta(C_\sigma)|C_\sigma|$、宽度为 $\frac{2}{3}|C_\sigma|$ 的矩形中。-

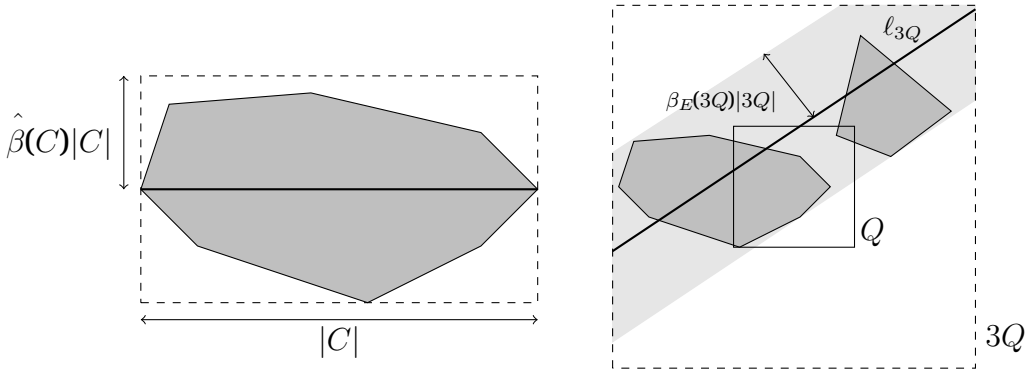
证明。(C1) 和 (C2) 可直接由集合 $\mathscr{C}$ 的构造得出。(C3) 由 $\beta(C)$ 的定义以及 C 的凸性得出。(C4) 由 $\beta(C)$ 的定义得出。为证明 (C5)，回想 $C_{\sigma*i} \subset C_\sigma$，并且在构造的两种情形下，$C_{\sigma*i}$ 投影到 $\hat{} L_\sigma$ 的一段上，该段长度至多为 $\hat{} L_\sigma$ 总长度的 $_2{}_3$。□

推论 3.3。对于 $C \in \mathscr{C}$。

$$\frac{1}{2}\hat{\beta}(C)|C|^2 \le \operatorname{area}(C) \le 2\hat{\beta}(C)|C|^2.$$

证明。该 下界由 (C3) 得出，上界由 (C4) 得出 . □

引理 3.4 ([BP，引理 10.5。3])。 存在 $M < \infty$ 使得若 $C_\sigma \in \mathscr{C}_j$ 且 $C_{\sigma*\tau} \in \mathscr{C}_{j+M}$则 $|C_{\sigma*\tau}| \le \frac{1}{2}|C_\sigma\dagger|$.



ˆ 图 2. 对于 $C \in \mathscr{C}(Q)$， $\beta(C)$ 与 $\beta_E(3Q)$ 的比较。

证明。 考虑引理 3.2 (C3) 给出的三角形。该三角形投影ˆ到 $I_{\sigma*1}$ 的部分，其底边长度至少为 $|C_\sigma|/3$ 且高度至少为 $\beta(C_\sigma)|C_\sigma|/3$。因此，三角形投影到 $I_{\sigma*1}$ 的部分面积至少为

$$\frac{1}{2}\left(\frac{|C_\sigma|}{3}\right)\left(\frac{\hat{\beta}(C_\sigma)|C_\sigma|}{3}\right) = \frac{\hat{\beta}(C_\sigma)|C_\sigma|^2}{18} \geq \frac{\text{area}(C_\sigma)}{36},$$

其中最后一个不等式用到了推论 3.3。由于 $C_{\sigma*2}$ 不包含 C_σ 中投影到 $I_{\sigma*1}$上的任何部分，

$$\text{area}(C_{\sigma*2}) \leq \frac{35}{36}\text{area}(C_\sigma).$$

可以用类似的论证证明

$$\text{area}(C_{\sigma*1}) \leq \frac{35}{36}\text{area}(C_\sigma).$$

注意到，对于 $|\tau| = m$,

$$\text{area}(C_{\sigma*\tau}) \leq \left(\frac{35}{36}\right)^m \text{area}(C_\sigma).$$

由此可得

$$\frac{1}{2}\hat{\beta}(C_{\sigma*\tau})|C_{\sigma*\tau}|^2 \leq \text{area}(C_{\sigma*\tau}) \leq \left(\frac{35}{36}\right)^m \text{area}(C_\sigma) \leq \left(\frac{35}{36}\right)^m 2\hat{\beta}(C_\sigma)|C_\sigma|^2.$$

若 $|C_{\sigma*\tau}| > \frac{1}{2}|C_\sigma|$，则

$$\frac{1}{8}\hat{\beta}(C_{\sigma*\tau})|C_\sigma|^2 \leq 2\left(\frac{35}{36}\right)^m \hat{\beta}(C_\sigma)|C_\sigma|^2,$$

so

$$\hat{\beta}(C_{\sigma*\tau}) \leq 16\left(\frac{35}{36}\right)^m \hat{\beta}(C_\sigma) \leq 16\left(\frac{35}{36}\right)^m.$$

ˆ然而，当 $\beta(C_{\sigma*\tau})$ 足够小时，必有

$$|C_{\sigma*\tau*i}| < \frac{3}{4}|C_{\sigma*\tau}|.$$

注意到，根据引理 3.2 (C5)，$C_{\sigma*\tau*i}$ 包含在一个宽度小于或等于 $\frac{2}{3}|C_{\sigma*\tau}|$ 且高度小于或等于 $2\hat{}\beta(C_{\sigma*\tau})|C_{\sigma*\tau}|$的矩形中，即可得出此结论。我们有

$$|C_{\sigma*\tau*i}| \le \sqrt{\left(2\hat{\beta}(C_{\sigma*\tau})|C_{\sigma*\tau}|\right)^2 + \left(\frac{2}{3}|C_{\sigma*\tau}|\right)^2} = \sqrt{\left(2\hat{\beta}(C_{\sigma*\tau})\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2}\,|C_{\sigma*\tau}|.$$

因此，只需选择一个 m，使得

$$\sqrt{\left(2\hat{\beta}(C_{\sigma*\tau})\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} \le \sqrt{4\left(16^2\left(\frac{35}{36}\right)^{2m}\right) + \frac{4}{9}} \le \frac{3}{4}.$$

相应地，我们设 $m_0 = \log\left(\frac{1}{1024}\sqrt{\frac{17}{576}}\right)/\log(35/36)$。由于 $\left(\frac{3}{4}\right)^3 < \frac{1}{2}$，经过 $M = 3(m_0+1)$ 次构造迭代后，直径必然缩小到原来的 $\frac{1}{2}$。□

推论 3.5。固定一个二进立方体 Q。对于任意 $x \in E \cap Q$，至多存在 M 个凸包 C，使得 $C \in \mathcal{C}(Q)$ 且 $x \in C$。

证明。这一结果可由 (C1)、(C2) 和引理3.4直接推出。□

3.3. **将凸包标记为好或坏**。为了构造一条曲线 Γ^*，我们需要找出足够平坦（就 r 而言）的凸包。为此，我们将凸包与二进立方体联系起来，并考察 $r_E(Q)$ 与 r 之间的关系。

定义 3.6。对于每个二进立方体 Q，若凸包 C 满足$C \cap Q \neq \varnothing$ 且边长$(Q)/2 < |C| \le$ 边长(Q)，则称其与 Q 相关联。对于任意立方体 $Q \in \mathcal{D}$，我们称 $\mathscr{C}(Q)$ 为与 Q 相关联的凸包集合。

定义 3.7（好立方体与坏立方体）。若二进立方体 $Q \in \mathcal{D}$ 满足 $r_E(3Q) < 2r$，则称其为好立方体，记作 $Q \in \mathcal{D}_{\text{good}}$。若 Q 不是好立方体，则称其为坏立方体，记作 $Q \in \mathcal{D}_{\text{bad}}$。令 $\mathscr{G} = \bigcup_{Q\in\mathcal{D}_{\text{good}}} \mathscr{C}(Q)$，并令 $\mathscr{B} = \bigcup_{Q\in\mathcal{D}_{\text{bad}}} \mathscr{C}(Q)$。

定义 3.8（好凸包与坏凸包）。如果存在一个好立方体 Q，使得 $C \in \mathscr{C}(Q)$，我们就称凸包 C 是好的。如果 C 不是好的，我们就称 C 是坏的。

对于一个好凸包 C_σ，固定一个满足 $C_\sigma \in \mathscr{C}(Q)$ 的好立方体 Q。令 $L_\sigma = C_\sigma \cap \ell_\sigma$，其中$\ell_\sigma$ 是一条满足 $\sup_{y\in E\cap 3Q} \operatorname{dist}(y, \ell_\sigma) \le 2r$ 的直线；根据$\beta_E(3Q) < 2r$，可以保证这样的直线存在。

3.4. 构造候选曲线。我们迭代地构造有限多个子集 $\Gamma_0, \ldots, \Gamma_N$，它们均为线段与凸包的并。构造完成后，令 $\Gamma^* = \Gamma_N$，其中 Γ_N 仅为有限多个线段的并。我们证明，Γ^* 是属于 E的极小化对象类的一个候选对象。

3.4.1. 初始化与第一代构造。若 $C_\varnothing$ 是好的，令 $\mathscr{G}_0 = \{C_\varnothing\}$、$\mathscr{B}_0 = \varnothing$，并令 $\Gamma_0 = \partial C_\varnothing \cup L_\varnothing$。此时，我们设定 $\Gamma^* = \Gamma_0$，候选曲线的构造即告完成。

若 $C_\varnothing$ 是不好的，令 $\mathscr{G}_0 = \varnothing$ 和 $\mathscr{B}_0 = \{C_\varnothing\}$，并令 $\Gamma_0 = C_{\varnothing\circ}$

为构造 Γ_1，我们考察 C_0，$C_1 \subset C_{\varnothing\circ}$。我们定义 $\mathscr{G}_1 = \{C_{\varnothing * i} | C_{\varnothing * i}$ 为好的$\}$，并定义 $\mathscr{B}_1 = \{C_{\varnothing * i} | C_{\varnothing * i}$ 为不好的$\}$。然后我们定义

$$\Gamma_1 = \left(\bigcup_{C_\tau \in \mathscr{G}_1} \partial C_\tau \cup L_\tau \right) \cup \left(\bigcup_{C_\sigma \in \mathscr{B}_1} C_\sigma \right) \cup B_\varnothing.$$

3.4.2. 归纳构造。设 $j \geq 1$。假设 $\mathscr{G}_j$ 和 $\mathscr{B}_j$ 已确定，且Γ_j 定义为

$$\Gamma_j = \left(\bigcup_{k=1}^{j} \bigcup_{C_\tau \in \mathscr{G}_k} \partial C_\tau \cup L_\tau \right) \cup \left(\bigcup_{C_\sigma \in \mathscr{B}_j} C_\sigma \right) \cup \left(\bigcup_{k=0}^{j-1} \bigcup_{\tau : C_\tau \in \mathscr{B}_k} B_\tau \right).$$

对于每个 $C_\sigma \in \mathscr{B}_j$，我们定义 $\mathscr{G}_{j+1} = \{C_{\sigma * i} \mid C_{\sigma * i}$ 为好$\}$，并定义 $\mathscr{B}_{j+1} = \{C_{\sigma * i} \mid C_{\sigma * i}$ 为坏$\}$。直观地说，$\mathscr{G}_{j+1}$（分别为 $\mathscr{B}_{j+1}$）包含“坏凸父对象的好（分别为坏）凸子对象”。请注意，我们不会在 $\mathscr{G}_j$ 的凸包内继续构造，因此 $C_\sigma \in \mathscr{G}_j$ 的子节点既不包含在 $\mathscr{G}_{j+1}$ 中，也不包含在 $\mathscr{B}_{j+1}$ 中。

我们定义

$$\begin{aligned}\Gamma_{j+1} &= \left(\bigcup_{k=1}^{j} \bigcup_{C_\tau \in \mathscr{G}_k} \partial C_\tau \cup L_\tau \right) \cup \left(\bigcup_{C_\tau \in \mathscr{G}_{j+1}} \partial C_\tau \cup L_\tau \right) \cup \left(\bigcup_{C_\sigma \in \mathscr{B}_{j+1}} C_\sigma \right) \cup \left(\bigcup_{k=0}^{j-1} \bigcup_{\tau : C_\tau \in \mathscr{B}_k} B_\tau \right) \cup \bigcup_{C_\tau \in \mathscr{B}_j} B_\tau \\ &= \left(\bigcup_{k=1}^{j+1} \bigcup_{C_\tau \in \mathscr{G}_k} \partial C_\tau \cup L_\tau \right) \cup \left(\bigcup_{C_\sigma \in \mathscr{B}_{j+1}} C_\sigma \right) \cup \left(\bigcup_{k=0}^{j} \bigcup_{\tau : C_\tau \in \mathscr{B}_k} B_\tau \right).\end{aligned}$$

3.4.3. **构造的终止。**根据引理 3.4，经过有限次 N（其中 N 由 r给出上界）的构造迭代，$|C_\sigma| \leq \frac{r}{3}$ 对于所有凸包 C_σ，$\sigma \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \{0,1\}^i$。于是存在 Q 使得 $C_\sigma \cap Q \neq \varnothing$ 且

$$\operatorname{side}(Q)/2 \leq |C_\sigma| < \operatorname{side}(Q).$$

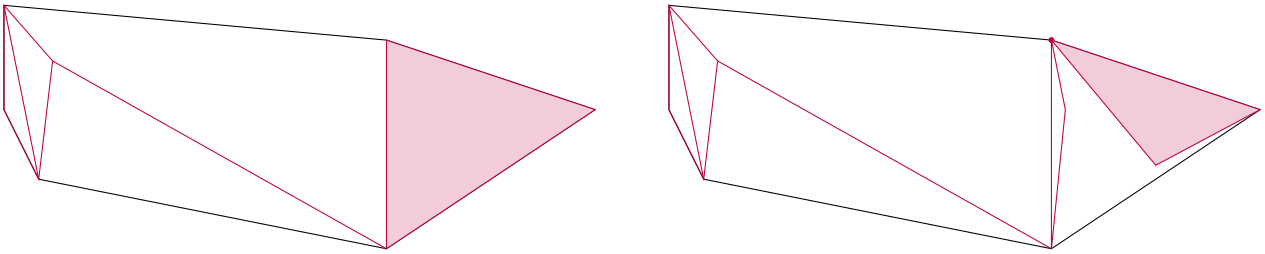


图3。 Γ_j的构造的两个步骤（以紫色显示）。

由于边长$(Q) \leq \frac{r}{3}$，因此必然有 $r_E(3Q) \leq r$，因为 $r_E(3Q)$ 受边长$(3Q)$限制。因此 $\mathscr{B}_N = \varnothing$。然后我们定义

$$\Gamma^* = \Gamma_N = \left(\bigcup_{k=1}^{N} \bigcup_{C_\tau \in \mathscr{G}_k} \partial C_\tau \cup L_\tau \right) \cup \left(\bigcup_{k=0}^{N-1} \bigcup_{\tau : C_\tau \in \mathscr{B}_k} B_\tau \right).$$

3.5. 验证 Γ^* 是候选曲线。 MDP 所极小化的对象类是有限长度曲线，其 r-邻域覆盖 E。根据构造，Γ^* 具有有限长度，因为它是有限条线段的并集。要证明它确实是一条曲线，我们必须证明它是连通的。

引理3.9。 *Γ^* 是连通的。*

证明。 为证明 Γ^* 是连通的，假设 $C_\sigma \in \mathscr{B}_j$ 和 B_τ 是一座桥，且其一个端点e_τ位于 $E \cap C_\sigma$中。要从 Γ_j构造 Γ_{j+1}，我们首先移除 C_σ并将其替换为 $C_{\sigma*0} \cup B_\sigma \cup C_{\sigma*1}$，使得 $C_{\sigma*0}$ 通过 B_σ与 $C_{\sigma*1}$ 连通。由于 $e_\tau \in C_{\sigma*0} \cup C_{\sigma*1}$，我们得到$(\Gamma_j \setminus C_\sigma) \cup C_{\sigma*0} \cup B_\sigma \cup C_{\sigma*1}$ 是连通的。

如果 C_σ 的两个子节点都是坏的，那么我们继续处理下一个坏凸包。如果一个子节点（比如 $C_{\sigma*0}$）是好的，那么我们移除 $C_{\sigma*0}$ 并用 $\partial C_{\sigma*0} \cup L_{\sigma*0}$替换它。对于任何具有端点 $e_\tau \in E \cap C_{\sigma*0}$的桥 B_τ，桥 B_τ 都会与 $\partial C_{\sigma*0}$相交。因此，由于 $\partial C_{\sigma*0} \cup L_{\sigma*0}$ 是连通的，替换后的 $(\Gamma_j \setminus C_{\sigma**0}) \cup (\partial C_{\sigma*0} \cup L_{\sigma*0})$ 也是连通的。□

引理3.10。 *设 C 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一个凸集，ℓ 是 $\mathbb{R}^2$中的一条直线。*

(a) 若 $\sup_{x \in C} \operatorname{dist}(x, \ell) \leq r$ 则 $\mathcal{N}(\partial C, r) \supset C$。 *(b)* 若 $\sup_{x \in C} \operatorname{dist}(x, \ell) \leq 2r$ 则 $\mathcal{N}(\partial C \cup (C \cap \ell)\ r) \supset C$。

证明。 (a) 设 π 是 $\mathbb{R}^2$ 在 ℓ上的正交投影。对任意 $x \in \ell$，设 $\ell_x^\perp \cap C$为经过 x且垂直于 ℓ 的直线。由假设，$\sup_{y \in \ell_x^\perp \cap C} |x - y| \leq r$。若

$\ell_x^\perp \cap C \cap H^\pm$ 非空，则$(\ell_x^\perp \cap \partial C) \cap H^\pm$ 也非空。于是对任意点$b_x^\pm \in (\ell_x^\perp \cap \partial C) \cap H^\pm$，球 $B(b_x^\pm, r)$包含$(\ell_x^\perp \cap \partial C) \cap H^\pm$。因此

$$\mathcal{N}(\partial C, r) = \bigcup_{b\in\partial C} B(b,r) \supset \bigcup_{x\in\ell} B(b_x^- \cup b_x^+, r) \supset \bigcup_{x\in\ell} \ell_x^\perp \cap C = C.$$

(b) 首先，设 H^+ 和 H^- 是 $\mathbb{R}^2$ 中满足 $\partial H^\pm = \ell$的两个半空间，设 $\boldsymbol{n}$ 是指向 H^+方向、垂直于 ℓ 的单位法向量，并设 $C^\pm = C \cap H^\pm$。

那么， r-邻域 $\mathcal{N}(\ell + r\boldsymbol{n},\ r)$ 包含 C^+；类似地， r-邻域$\mathcal{N}(\ell - r\boldsymbol{n},\ r)$ 包含 C^-。由于 $C^\pm$是凸集，(a) 部分推出 $\mathcal{N}(\partial C^\pm,\ r) \supset C^\pm$。因此

$$\mathcal{N}(\partial C^+ \cup \partial C^-, r) = \mathcal{N}(\partial C^+, r) \cup \mathcal{N}(\partial C^-, r) \supset C^+ \cup C^- = C.$$

由于 $\partial C^+ \cup \partial C^- = \partial C \cup (C \cap \ell)$，结论得证。 □

命题3.11。 Γ^* 是 *MDP* 的一条候选曲线。

证明。根据引理3.9，只需证明 $\mathcal{N}(\Gamma^*, r) \supset E$。为此，设 $x \in E$。根据构造，对于每个 $k \in \mathbb{N}$，存在一个 τ_k，使得 $|\tau_k| = k$ 且 $x \in C_{\tau_k}$。此外，存在某个 k_x，使得 $C_{\tau_{k_x}} \in \mathscr{G}_{k_x}$。回顾一下，$C_{\tau_{k_x}} \in \mathscr{G}_{\tau_{k_x}}$ 意味着存在某个 Q 满足$r_E(3Q) < 2r$，且 $C_{\tau_{k_x}} \subset 3Q$。由于 $E \cap 3Q \subset \ell_{\tau_{k_x}} \times (-2r, 2r)$，同样有 $C_{\tau_{k_x}} \subset \ell_{\tau_{k_x}} \times (-2r, 2r)$。根据引理3.10，我们有 $\mathcal{N}(\partial C_{\tau_{k_x}} \cup L_{\tau_{k_x}}, r) \supset C_{\tau_{k_x}}$，由此可得 $x \in \mathcal{N}(C_{\tau_{k_x}} \cup L_{\tau_{k_x}}, r)$。注意

$$\mathcal{N}(\Gamma^*, r) = \mathcal{N}\left(\left(\bigcup_{k=1}^{N} \bigcup_{C_\tau \in \mathscr{G}_k} \partial C_\tau \cup L_\tau\right) \cup \left(\bigcup_{k=0}^{N-1} \bigcup_{\tau: C_\tau \in \mathscr{B}_k} B_\tau\right), r\right) \supset \mathcal{N}(C_{\tau_{k_x}} \cup L_{\tau_{k_x}}, r).$$

因此 $x \in \mathcal{N}(\Gamma^*,\ r)$。由于 x 是任意选取的，我们得出 $E \subset \mathcal{N}(\Gamma^*,\ r)$。 □

3.6. **候选曲线长度的估计**。 最后，我们证明曲线 Γ^* 的长度不超过定理 1.5左端的上界。

引理 3.12 （[BP，引理 10.5。2]） 。 假设 $C_{\sigma*1}$ 和 $C_{\sigma*2}$ 都是 C_σ的坏子集。若将 C_σ 替换为 $C_{\sigma*1}$，B_σ，并且 $C_{\sigma*2}$，则存在 $K > 0$ 使得

$$|C_{\sigma*0}| + \frac{1}{2}|B_\sigma| + |C_{\sigma*1}| \le |C_\sigma| + K\hat{\beta}^2(C_\sigma)|C_\sigma|.$$

证明。 (1) 首先，假设 $C_{\sigma*0}$、 $C_{\sigma*1}$ 和 B_σ 是通过情形 1 构造的，即 $|B_\sigma| = 0$ 和 $|[a_\sigma, z_\sigma]|$，$|[z_\sigma, b_\sigma]|$ 均大于或等于 $\frac{|C_\sigma|}{3}$。那么 $C_{\sigma*0}$ 包含在矩形 $[a_\sigma, z_\sigma] \times 2\beta(C_\sigma)|C_\sigma|$中。该矩形的直径为

$$\sqrt{|[a_\sigma, z_\sigma]|^2 + (2\hat{\beta}(C_\sigma)|C_\sigma|)^2}.$$

若$\frac{2\hat{}\beta(C_\sigma)|C_\sigma|}{|[a_\sigma,z_\sigma]|}<1$），我们可以使用泰勒近似得到

$$\begin{aligned}\sqrt{|[a_\sigma,z_\sigma]|^2+(2\hat{\beta}(C_\sigma)|C_\sigma|)^2}&=|[a_\sigma,z_\sigma]|\sqrt{1+\left(\frac{2\hat{\beta}(C_\sigma)|C_\sigma|}{|[a_\sigma,z_\sigma]|}\right)^2}\\&\leq|[a_\sigma,z_\sigma]|\left(1+K_1\left(\frac{2\hat{\beta}(C_\sigma)|C_\sigma|}{|[a_\sigma,z_\sigma]|}\right)^2\right)\\&\leq|[a_\sigma,z_\sigma]|+6^2K_1\hat{\beta}(C_\sigma)^2|C_\sigma|.\end{aligned}$$

如果$\frac{2\hat{}\beta(C_\sigma)|C_\sigma|}{|[a_\sigma,z_\sigma]|}>1$），那么$\hat{}\beta(C_\sigma)\geq\frac{|[a_\sigma,z_\sigma]|}{2|C_\sigma|}\geq\frac{1}{6}$，这意味着$2\hat{}\beta(C_\sigma)\leq12\hat{}\beta(C_\sigma)^2$。接着

$$\sqrt{|[a_\sigma,z_\sigma]|^2+(2\hat{\beta}(C_\sigma)|C_\sigma|)^2}\leq|[a_\sigma,z_\sigma]|+2\hat{\beta}(C_\sigma)|C_\sigma|\leq|[a_\sigma,z_\sigma]|+12\hat{\beta}^2(C_\sigma)|C_\sigma|,$$

因为$\sqrt{a^2+b^2}\leq a+b$，如果$a,\ b\geq0$。

对于$C_{\sigma*1}$，使用线段$[z_\sigma,b_\sigma]$也同样成立。综合起来，我们得到

$$|C_{\sigma*0}|+|C_{\sigma*1}|\leq|C_\sigma|+2(6^2K_1+12)\hat{\beta}^2(C_\sigma)|C_\sigma|,$$

因为$|[a_\sigma,z_\sigma]|+|[z_\sigma,b_\sigma]|=|[a_\sigma,b_\sigma]|\leq|C_\sigma|$。

(2) 接下来，假设$C_{\sigma*1}$、$C_{\sigma*2}$和B_σ是通过情形2构造的。

若$\hat{}\beta(C_\sigma)\geq\frac{1}{30}$，则

$$|C_{\sigma*0}|+|C_{\sigma*1}|+\frac{1}{2}|B_\sigma|\leq\frac{5}{2}|C_\sigma|\leq|C_\sigma|+1350\hat{\beta}^2(C_\sigma)|C_\sigma|,$$

其中$1350=3/2*(30^2)$。

另一方面，若$\hat{}\beta(C_\sigma)<\frac{1}{30}$，由于$\sqrt{a^2+b^2}\leq a+b$，若$a,\ b\geq0$，则有

$$|C_{\sigma*0}|\leq|I_0|+2\hat{\beta}(C_\sigma)|C_\sigma|$$

$C_{\sigma*0}$的类似结果，以及

$$|B_\sigma|\leq|C_\sigma|-|I_0|-|I_1|+2\hat{\beta}(C_\sigma)|C_\sigma|.$$

Then

$$\begin{aligned}|C_{\sigma*0}|+|C_{\sigma*1}|+\frac{1}{2}|B_\sigma|&\leq|I_0|+|I_1|+4\hat{\beta}(C_\sigma)|C_\sigma|+\frac{1}{2}\left(|C_\sigma|-|I_0|-|I_1|+2\hat{\beta}(C_\sigma)|C_\sigma|\right)\\&=\frac{1}{2}|C_\sigma|+\frac{1}{2}|I_0|+\frac{1}{2}|I_1|+5\hat{\beta}(C_\sigma)|C_\sigma|\end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{2}|C_\sigma| + \frac{1}{6}|C_\sigma| + \frac{1}{6}|C_\sigma| + \frac{1}{6}|C_\sigma|$$
$$= |C_\sigma|.$$

选取 $K = \max\{2(36^2 K_1 + 12)\ 1350\}$，证明即完成。 □

引理 3.13。对于凸包 C_σ

$$\mathcal{H}^1(\partial C_\sigma \cup \hat{L}_\sigma) \leq 7\,|C_\sigma|.$$

证明。首先，

$$\mathcal{H}^1(\partial C_\sigma \cup \hat{L}_\sigma) \leq \mathcal{H}^1(\partial C_\sigma) + |C_\sigma|.$$

ˆ 由于 C_σ 包含在两个边长为 $|C_\sigma|$且共用一条长度为 L_σ的边的正方形中，因此我们有$\mathcal{H}^1($ $\partial C_\sigma) \leq 6\,|C_\sigma|$。 □

ˆ接下来，我们遵循 [BP] 来比较以下量 $\beta(C)$与量 $\beta(Q)$，对所有与立方体 C相关联的凸包 Q均如此。尽管下面引理的证明与 [BP],中的证明完全相同，但我们注意到，此处的凸包集合 $\mathscr{C}(Q)$ 可能严格小于 [BP] 中求和所涉及的凸包集合，因为我们将每个凸包都与单个二进立方体相关联。

引理 3.14 ([BP，引理 10.5。4])。

$$\sum_{C \in \mathscr{C}(Q)} \hat{\beta}^2(C)|C| \leq (288M)^2 \left(\beta_E(3Q)\right)^2 |Q|,$$

其中 M 与引理*3.4*中的相同。

证明。 根据 $\beta_E(3Q)$ 的定义，固定一条极小化直线 ℓ_{3Q}，使得

$$\operatorname{dist}(x, \ell_{3Q}) \leq \beta_E(3Q)|3Q| \qquad \text{for all } x \in E,$$

然后令 $W := \ell_{3Q} \times [-r_E(3Q)\ r_E(3Q)] \cap 3Q$。这就是图 2 左侧所示的条带。令 $C \in \mathscr{C}(Q)$。回顾一下，根据 $\mathscr{C}(Q)$ 的定义， $C \cap Q \neq \varnothing$ 且 $\text{side}(Q)/2 \leq |C| \leq \text{side}(Q)$，这意味着 $C \subset 3Q$。更确切地说， W 是凸的， $E \cap 3Q \subset W$，且 C 是 $E \cap 3Q, C \subset W$ 中某个点集的凸包，这意味着

$$\operatorname{area}(C) \leq \operatorname{area}(W) \leq 2r_E(3Q)|3Q| = 18\beta_E(3Q)|Q|^2.$$

另一方面，根据推论 3.3 以及 $|C| \geq$边长$(Q)/2$,

$$\operatorname{area}(C) \geq \frac{1}{2}\hat{\beta}(C)|C|^2 \geq \frac{1}{16}\hat{\beta}(C)|Q|^2.$$

根据推论 3.5 点 $x \in W$ 不属于更多的 M 凸包。因此

$$\sum_{C\in\mathscr{C}(Q)} \hat{\beta}(C)|Q|^2 \le 16 \sum_{C\in\mathscr{C}(Q)} \operatorname{area}(C) \le 16M \operatorname{area}(3Q\cap W) \le 288M\beta_E(3Q)|Q|^2.$$

将这一串不等式两边除以 $|Q|^2$，并应用柯西–施瓦茨不等式，可得

$$\sum_{C\in\mathscr{C}(Q)} \hat{\beta}(C)^2 \le \left(\sum_{C\in\mathscr{C}(Q)} \hat{\beta}(C)\right)^2 \le (288M)^2\beta_E(3Q)^2.$$

最后，由于 $C \in \mathscr{C}(Q)$ 蕴含 $|C| \le$ 边长$(Q) \le |Q|$，

$$\sum_{C\in\mathscr{C}(Q)} \hat{\beta}(C)^2|C| \le \sum_{C\in\mathscr{C}(Q)} \hat{\beta}(C)^2|Q| \le (288M)^2\beta_E(3Q)^2|Q|. \qquad \square$$

推论 3.15. 若 Q 是坏立方体，则

$$\sum_{C\in\mathscr{C}(Q)} \hat{\beta}^2(C)|C| \le (288M)^2(\beta_E(3Q) - r/|3Q|)^2|Q|.$$

证明. 回顾 $r_{3Q} = \beta_E(3Q)|3Q|$。由于 Q 是坏立方体，$r_E(3Q) > 2r$；也就是说，$r_E(3Q)/2 > r$。由此可得

$$r_E(3Q) - r > \frac{r_E(3Q)}{2}.$$

将不等式两边除以 $|3Q|$，即可用 β-数表示该不等式：

$$\beta_E(3Q) - \frac{r}{|3Q|} > \frac{\beta_E(3Q)}{2},$$

经过重新排列可得

$$\beta_E(3Q) < 2\left(\beta_E(3Q) - \frac{r}{|3Q|}\right).$$

最后，我们应用引理3.14，从而得出结论：

$$\sum_{C\in\mathscr{C}(Q)} \hat{\beta}(C)^2|C| \le (288M)^2\beta_E(3Q)^2|Q| \le (288M)^2\left(\beta_E(3Q) - \frac{r}{|3Q|}\right)^2|Q|. \qquad \square$$

定理 3.16。 给定集合 E *in* $\mathbb{R}^2$,

$$\Lambda(E,R) \lesssim |E| + \sum_{Q\in\mathcal{D}} \max\{\beta_E(Q) - r/|Q|, 0\}^2|Q|.$$

证明。 引理中的估计3.12 并不取决于凸包是好是坏。这意味着

$$\sum_{C_{\sigma*i}\in\mathscr{G}_{j+1}}|C_{\sigma*i}|+\sum_{C_{\sigma*i}\in\mathscr{B}_{j+1}}|C_{\sigma*i}|+\frac{1}{2}\sum_{|\sigma|=j+1}|B_\sigma|\le\sum_{C_\sigma\in\mathscr{B}_j}|C_\sigma|+\sum_{C_\sigma\in\mathscr{B}_j}\beta^2(C_\sigma)|C_\sigma|.$$

这里我们利用了这样一个事实：只有当父凸包是坏凸包时，我们才会将凸包添加到集合 $\mathscr{G}_{j+1}$ 和 $\mathscr{B}_{j+1}$ 中。我们可以将其重新排列为

$$\sum_{C_{\sigma*i}\in\mathscr{G}_{j+1}}|C_{\sigma*i}|+\sum_{C_{\sigma*i}\in\mathscr{B}_{j+1}}|C_{\sigma*i}|+\frac{1}{2}\sum_{|\sigma|=j+1}|B_\sigma|-\sum_{C_\sigma\in\mathscr{B}_j}|C_\sigma|\le\sum_{C_\sigma\in\mathscr{B}_j}\beta^2(C_\sigma)|C_\sigma|.$$

对所有 N 代求和可得

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{C_{\sigma*i}\in\mathscr{G}_{j+1}}|C_{\sigma*i}|+\sum_{j=1}^{N}\sum_{C_{\sigma*i}\in\mathscr{B}_{j+1}}|C_{\sigma*i}|+\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{2}\sum_{|\sigma|=j+1}|B_\sigma|-\sum_{j=1}^{N}\sum_{C_\sigma\in\mathscr{B}_j}|C_\sigma|\le\sum_{j=1}^{N}\sum_{C_\sigma\in\mathscr{B}_j}\beta^2(C_\sigma)|C_\sigma|.$$

N接下来，我们对坏凸包项进行望远镜求和，从而将估计简化为 o

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{C_{\sigma*i}\in\mathscr{G}_{j+1}}|C_{\sigma*i}|+\sum_{C_{\sigma*i}\in\mathscr{B}_{N+1}}|C_{\sigma*i}|+\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{2}\sum_{|\sigma|=j+1}|B_\sigma|-|E|\le\sum_{j=1}^{N}\sum_{C_\sigma\in\mathscr{B}_j}\beta^2(C_\sigma)|C_\sigma|.$$

然而， $\mathscr{B}_{N+1}=\varnothing$。因此我们得到

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{C_{\sigma*i}\in\mathscr{G}_{j+1}}|C_{\sigma*i}|+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{|\sigma|=j+1}|B_\sigma|\le|E|+\sum_{j=1}^{N}\sum_{C_\sigma\in\mathscr{B}_j}\beta^2(C_\sigma)|C_\sigma|.$$

最后，利用引理 3.13

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^1(\Gamma^*)&=\sum_{j=1}^{N}\sum_{C_\sigma\in\mathscr{G}_k}(\mathcal{H}^1(\partial C_\sigma\cup(C_\sigma\cap L_\sigma)))+\sum_{j=1}^{N}\sum_{|\sigma|=j}|B_\sigma|\\&\le 7\left(\sum_{j}^{N}\sum_{C_\sigma\in\mathscr{G}_j}|C_\sigma|+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{|\sigma|=j+1}|B_\sigma|\right)\\&\le 7\left(|E|+\sum_{j=1}^{N}\sum_{C_\sigma\in\mathscr{B}_j}\beta^2(C_\sigma)|C_\sigma|\right)\\&=7\left(|E|+\sum_{C_\sigma\in\cup_{j=1}^{N}\mathscr{B}_j}\beta^2(C_\sigma)|C_\sigma|\right)\end{aligned}$$

$$\leq 7\left(|E|+\sum_{Q\in\mathcal{D}_{\text{bad}}}\sum_{C_\sigma\in\mathscr{C}(Q)}\beta^2(C_\sigma)|C_\sigma|\right)$$
$$\leq 14(288M)^2\left(|E|+\sum_{Q\in\mathcal{D}_{\text{bad}}}\sum_{C_\sigma\in\mathscr{C}(Q)}(\beta_E(Q)-r/|Q|)^2|Q|\right)$$
$$\leq 14(288M)^2\left(|E|+\sum_{Q\in\mathcal{D}_{\text{bad}}}\max\{\beta_E(Q)-r/|Q|,0\}^2|Q|\right).$$

注意，由于我们取 $\beta_E(Q)-r/|Q|$ 与 0 中的最大值，因此只对坏立方体求和。□

通过考察 $r\to 0$的渐近行为，我们可得出分析学家旅行商定理的经典估计 [J]。

推论 3.17。 如果 E 包含在一个有限长度的连通集中， Γ^*,

$$|E|+\sum_{Q\in\mathcal{D}}\beta_E^2(3Q)|Q|\lesssim\mathcal{H}^1(\Gamma^*)\lesssim|E|+\sum_{Q\in\mathcal{D}}\beta_E^2(3Q)|Q|.$$

注 3.18。 如果 $r=0$，我们的构造算法恰好复现了 [BP] 中用于构造分析学家旅行商定理所需曲线的算法 [J]。在这种情况下，所有凸包都是合适的，因此我们的构造不会在有限步后停止。

固定 $r>0$，令 Γ_r^* 为第 3.4节中构造的曲线。如果 Γ^* 是 [BP第 10 节中构造的曲线。5], 我们有 $\operatorname{dist}_H(\Gamma^*,\ \Gamma_r^*)\leq 2r$，其中 $\operatorname{dist}_H(\cdot,\ \cdot)$ 表示豪斯多夫距离。令 $r\to 0$，曲线 Γ_r^* 收敛到 Γ^*。

参考文献

[ACMN] E. G. Alvarado、L.Catalano、T. Merchán、L. Naples，最大距离极小化子的渐近性，arXiv 预印本 arXiv:2309.08055 （ 2023 ）。[AKV] E. G. Alvarado 、 B. Krishnamoorthy 、 K. R. Vixie，最大距离问题与最小生成树，《国际分析与应用杂志》，19（5）（2021），633–659。[BP] Bishop, Christopher J.; Peres, Yuval.《概率与分析中的分形》。剑桥高等数学研究丛书，第162卷。剑桥大学出版社，剑桥，2017。ix+402页。ISBN：978-1-107-13411-9 MR3616046[BOS] G. Buttazzo、E. Oudet 和 E. Stepanov。具有自由狄利克雷区域的最优传输问题。《不连续结构的变分方法》（2002），41–65。[J] P. W. Jones，可求长集与旅行商问题，《数学发明》102（1990），1–15。[O] K. Okikiolu，可求长曲线子集的刻画 $\mathbb{R}^n$，《伦敦数学学会杂志》（第2辑）46（1992），336-348。