arXiv:2603.14142v1 [math.RA] 14 Mar 2026

一类结构化矩阵的核 EP、对偶核 EP 及复合广义逆

FAUSTINO MACIALA、C. MENDES ARA´UJO 和 PEDRO PATR´ICIO

Abstract. 我们研究与双星有向图相关的矩阵的广义逆。针对核逆、对偶核逆、核 EP 逆和对偶核 EP 逆，我们给出了显式分块公式和存在性判据，这些公式和判据以根据底层分块结构推导出的显式代数判据表示。我们还推导了其他组合外伪逆，即 Moore–Penrose 逆与核型逆的组合，并给出了相应的存在性判据。

1. 引言

广义逆是处理线性系统和网络系统中的奇异动力系统、约束最小二乘问题以及谱分解的标准工具。Drazin逆 A^D 将求逆推广到任意指数，而 Moore–Penrose 逆 $A^\dagger$ 则提供 $*$-正交投影和最优性性质。关于复数域上广义逆的结果，读者可参阅 [5, 6] ；关于广义逆代数理论的较新进展，可参阅 [9] 。

在图矩阵理论中，组合学与线性代数的相互作用促成了对若干图族（树、轮图、二部图和基于路径的类）相关矩阵的逆和广义逆的显式公式，通常通过满秩分解和舒尔补得到（[2, 3, 4, 7, 8, 15, 23, 22]）。

文献中已提出多种广义逆，作为 Moore–Penrose 逆和 Drazin 逆的扩展。这些推广通常通过修改某些定义方程或刻画条件，同时有选择地保留、放宽或省略其他条件而得到。核型广义逆及其变体已在带对合环以及矩阵/算子领域得到广泛研究，包括伪核版本、 2×2矩阵及某些乘积的核逆，以及近期提出的若干改进（[10, 14, 17, 18, 25, 27, 28, 30, 31, 32]）。Malik 和 Thome 提出了 DMP 逆和 MPD 逆，并对其进行了分析（[21]）。

我们研究一类与双星有向图相关的分块结构矩阵，其中两个枢纽—外围分量通过其中心顶点相耦合。尽管这些矩阵形式简单，却具有丰富的可逆性结构，从而能够借助舒尔补和满秩分解技术，对若干广义逆给出明确刻画和闭式表达式。

本文研究与双星有向图相关矩阵的广义可逆性，具体包括：(i) 基于 Moore–Penrose 逆和群逆存在性的核型逆；(ii) 利用 (1,3)–逆和 (1,4)–逆判据及满秩分解研究核 EP 逆和对偶核 EP 逆，并给出明确的分块公式；以及 (iii) 复合外逆，即 Moore–Penrose–核 EP 逆（MPCEP）、
*核 EP–Moore–Penrose 逆（*CEPMP）、广义对偶 core（GDC）逆和广义 core（GC）逆，并推导这些复合逆的分块公式和存在条件。

本文结构安排如下。第2 节介绍预备知识：双星有向图及相关矩阵、Drazin 逆和 Moore–Penrose 逆、(1,3)–逆和 (1,4)–逆，以及 Gram/Schur 框架。第3节讨论核逆和对偶核逆，并给出

Date：2026年3月17日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 15A09, 05C20, 05C50。
Key words and phrases. Drazin逆、Moore–Penrose 逆、核型逆、核 EP 型逆、MPCEP 逆、 * CEPMP 逆、GDC 逆、GC 逆、有向图。

存在条件和分块公式。第4 节研究核 EP 逆和对偶核 EP 逆，给出分类的存在性判据和分块表达式。第5 节推导 Moore–Penrose 逆与 core 型逆的复合 MPCEP 和 * CEPMP，而第6 节介绍广义核逆和广义对偶核逆，两者均包含存在条件和分块公式。最后，第7 节提供一张汇总表，列出本文所讨论的所有广义逆的存在条件，并将范围限定于群逆不存在且 Drazin 逆非零的非平凡情形。

2. Preliminaries

我们的所有矩阵都定义在带有对合 $\cdot$ 的一般域 $\mathbb{F}$ 上。该对合在$\mathbb{F}$ 上诱导出有限矩阵集合上的对合 $*$，其定义如下：若$A = [a_{ij}]$，则 $A^* = [a_{ij}]^* = [a_{ji}]$。此外，$A = [a_{ij}] = [a_{ij}]$.

设 $K_{1,m}$ 和 $K_{1,n}$ 是两个完全二部有向图，其中心顶点分别为 u 和 v，顶点集分别为 $\{u\} \cup U, U = \{u_1, \ldots, u_m\}$ 和 $\{v\} \cup V, V = \{v_1, \ldots, v_n\}$。双星有向图 $S_{(m+1),(n+1)}$ 定义为通过两条方向相反的有向边连接中心顶点 u 和 v 所得到的有向图。等价地，$S_{(m+1),(n+1)}$ 的顶点集为 $U \cup V \cup \{u, v\}$，并包含 $K_{1,m}$ 和 $K_{1,n}$ 的所有有向边；也就是说，包含从 u 到每个 u_i 的边、从每个 u_i 到 u 的边，以及从 v 到每个 v_j 的边、从每个 v_j 到 v 的边。此外，还包含边 $u \to v$ 和 $v \to u$，从而构成双星有向图的完整结构。图 1 展示了一个双星有向图的示例。

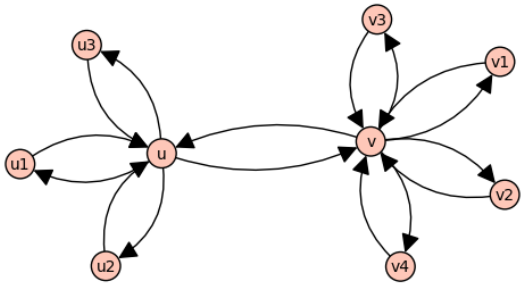


Figure 1. 双星有向图 $S_{(m+1),\ (n+1)}$ 第一颗星有 $m = 3$ 个叶节点（中心为 u），第二颗星有 $n = 4$ 个叶节点（中心为 v）。

给定一个 $A = [a_{ij}]$ 阶为 n的方阵，$D(A) = (V, E)$ 的关联有向图 定义为顶点集 $V = \{w_1, \ldots, w_n\}$ 和边集 E，其中 $(w_i, w_j) \in E$ 当且仅当 $a_{ij} \neq 0$。元素 a_{ij} 可视为从w_i 到 w_j的有向边的权重，当且仅当不存在这样的边时，它等于零。

与双星有向图关联的任意矩阵的分块结构反映了该有向图分解为两个星形分量：每个星形分量都对应一个对角块，表示其中心顶点与悬挂顶点之间的相互作用，而连接两个中心顶点的两条有向边则表现为连接这两个分量的非对角块。

此外，当由双星有向图构造出不同的矩阵时，其元素既取决于顶点的选定顺序，也取决于赋予其边的权重。然而，只要两个这样的矩阵对应于同一个带权双星有向图——也就是说，边的权重保持不变——它们就置换相似。具体而言，若 A和 B 来自两种不同的顶点排序，但表示同一个带权有向图，则存在一个置换矩阵 P使得 $A = P^{-1}BP$。我们将这种关系记为 $A \underset{\text{perm.}}{\approx} B$。由于 $P^* = P^{-1}$，这是酉相似的一个特例。因此，诸如 Drazin逆、群逆、Moore–Penrose 逆以及本研究讨论的其他广义逆是否存在等性质，均与所选的顶点顺序无关。

设 x 和 y 为长度为 m的向量， z 和 w 为长度为 n的向量，且所有元素均非零。考虑由下式定义的 $m+n+2$ 阶方阵

$$M=\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & x^T & a & 0 \\ y & 0 & 0 & 0 \\ \hline b & 0 & 0 & z^T \\ 0 & 0 & w & 0 \end{array}\right], \tag{2.1}$$

其中 a 和 b 为非零元素。则有向图 $D(M)$对应于一个双星有向图$S_{(m+1),\ (n+1)}$ 且任意具有 A 关联有向图 $D(A)=S_{(m+1)的矩阵(n+1)}$均与形如（2.1）的矩阵置换相似。

为后文使用，我们引入标量

$$\begin{aligned} &s:=x^*x, \quad t:=z^*z, \quad u:=y^*y, \quad v:=w^*w, \quad r:=a\bar{a}+w^*w, \\ &h:=b\bar{b}+y^*y, \quad p:=b\bar{b}+z^*z, \quad q:=a\bar{a}+x^*x, \quad \zeta:=x^Ty+ab, \\ &\beta:=\zeta\overline{\zeta}+b\bar{b}\,w^*w, \quad \alpha:=\zeta\overline{\zeta}+a\bar{a}\,z^*z. \end{aligned} \tag{2.2}$$

这些参数在舒尔补和 Gram 型约化中发挥着核心作用，而这两者决定了与双星有向图相关矩阵的秩行为和奇异性模式。特别地，特殊情形 $\zeta=0$ 会产生结构奇异的构型，在这些构型中，若干广义逆公式可大幅简化。

如上所述，与给定双星有向图相关的任意矩阵$S_{(m+1),\ (n+1)}$都与典范分块形式（2.1）中的某个矩阵酉相似。因此，仅对这种形式的矩阵进行分析并不会失去一般性。特别是，与 Moore–Penrose、Drazin、（1，3）–以及（1，4）–可逆性相关的所有问题，都可以在这一典范表示下处理。

任意域上方阵 A 的 Drazin逆 A^D 是满足以下条件的唯一矩阵

$$A^{k+1}A^D=A^k, \qquad A^DAA^D=A^D, \qquad AA^D=A^DA,$$

其中， k 表示 Drazin 指数，记作 $i(A)$。Drazin 指数与由最小多项式确定的代数指数一致。等价地， $i(A)$ 是满足以下条件的最小非负整数 k

$$\operatorname{rank}(A^k)=\operatorname{rank}(A^{k+1}).$$

群逆 $A^{\#}$ 是指数至多为一的矩阵对应的 Drazin 逆特例，参见文献 [11, 12]。

在 [22] 中，作者给出了矩阵 (2.1) 的群逆存在的充要条件。具体而言， $M^{\#}$ 存在当且仅当$x^Ty\neq 0$ 且 $z^Tw\neq 0$。在这种情况下，群逆可显式表示为

$$M^{\sharp}=\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & (x^Ty)^{-1}x^T & 0 & 0 \\ (x^Ty)^{-1}y & 0 & 0 & -a[(x^Ty)(z^Tw)]^{-1}yz^T \\ \hline 0 & 0 & 0 & (z^Tw)^{-1}z^T \\ 0 & -b[(x^Ty)(z^Tw)]^{-1}wx^T & (z^Tw)^{-1}w & 0 \end{array}\right]. \tag{2.3}$$

当 M不具有群逆时（即当 $x^Ty=0$或 $z^Tw=0$时），必须在 Drazin可逆性的框架下进行分析，见 [13]。在这种情况下，不失一般性，研究可归结为三个互不相容且穷尽所有情形的情况（见 [20, 24]），它们构成了后续各节所论述的伪可逆性结果的结构基础。这些情形陈述如下。

情形 I: $x^Ty = 0 = z^Tw$。那么 i（M）$= 2$ 且

$$M^D = (ab)^{-1}\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & x^T & a & 0 \\ y & 0 & 0 & b^{-1}yz^T \\ \hline b & 0 & 0 & z^T \\ 0 & a^{-1}wx^T & w & 0 \end{array}\right]. \tag{2.4}$$

情形 II: $x^Ty \neq 0 = z^Tw$和 $\zeta = x^Ty + ab \neq 0$。那么 $i(M) = 3$和

$$M^D = \zeta^{-1}\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & x^T & a & 0 \\ y & 0 & 0 & \zeta^{-1}ayz^T \\ \hline b & 0 & 0 & \zeta^{-1}abz^T \\ 0 & \zeta^{-1}bwx^T & \zeta^{-1}abw & 0 \end{array}\right]. \tag{2.5}$$

情形 III: $x^Ty \neq 0 = z^Tw$和 $\zeta = x^Ty + ab = 0$。那么 $i(M) = 5$和

$$M^D = 0. \tag{2.6}$$

值得注意的是，$x^Ty = 0$和 $z^Tw \neq 0$的情形并未引入真正全新的构型：通过适当的置换相似，这种情形可归约为先前分析过的 $x^Ty \neq 0$ 和 $z^Tw = 0$情形。因此，上述三种情形对与双星有向图相关且不具有群逆的矩阵的 Drazin 可逆性，给出了完整且互斥的描述。

在本文余下部分中，任何对情形 I、情形 II 或情形 III 的引用，均应根据上述三分分类来理解。

若矩阵 A 关于 $*$Moore–Penrose可逆，则称方程组

$$(1)\ AXA = A, \quad (2)\ XAX = X, \quad (3)\ (AX)^* = AX, \quad (4)\ (XA)^* = XA.$$

有公共解。若该解存在，则它唯一，记为 $A^\dagger$。

满足方程 (1) 的矩阵称为 A 的冯·诺依曼逆，记为 A^-； A 的所有冯·诺依曼逆组成的集合记为 $A\{1\}$。方程 (1) 和 (2) 的公共解称为 A 的反身逆，记为 A^+。对于 A 的任意两个冯·诺依曼逆 A^-， $A^= \in A\{1\}$ ，乘积 $A^-AA^=$ 是 A 的反身逆。

我们用 $A\{1,3\}$ （分别用 $A\{1,4\}$）表示满足方程 (1) 和 (3)（分别满足方程 (1) 和 (4)）的矩阵集合；这类矩阵称为 A 的 (1，3) 逆（分别称为 (1，4) 逆）。只要这些集合非空，我们就用 $A^{(1,3)}$ 和 $A^{(1,4)}$ 表示其中的任意元素。

现在我们考察 (1，3)– 逆和 (1，4)– 逆的存在性判据。关于.....的经典结果 $*$-正则环的相关结果见 [16], ，而矩阵情形可通过满秩分解和列空间条件得到清晰表述，如下述命题所示 [29]。

我们采用记号 $\mathscr{R}(A)$ 表示矩阵 A 的值域。

命题 2.1。 设矩阵 $A = FG$ 有一个满秩分解，

(1) 以下条件等价：*(a)* $A\{1,3\} \neq \varnothing$ *(b)* F^*F 可逆 *(c)* $\mathscr{R}(A^*) = \mathscr{R}(A^*A)$ *(d)* A^*A的秩 $=A$的秩 在此情况下，*(* $A^*A)^-A^* \in A\{1,3\}$。*(2)* 以下条件等价：*(a)* $A\{1,4\} \neq \varnothing$*(b)* GG^* 可逆 *(c)* $\mathscr{R}(A) = \mathscr{R}(AA^*)$ *(d)* AA^*的秩 $=A$ 的秩

In this case, $A^*(AA^*)^- \in A\{1,4\}$.

证明。 我们证明 (1) 部分；(2) 部分的证明完全类似。

（$1b$） $\Rightarrow$ （$1a$）。我们可以将 F的任意一个左逆作为其反身逆，即满足 $F^+F = I$ 的矩阵 F^+。同样，我们可以选择满足 $GG^+ = I$的任意一个右逆 G^+ 作为 G的反身逆。

设 B 和 C 是维数相容的矩阵。若 $BA^*A = CA^*A$，则

$$BG^*F^*FG = CG^*F^*FG,$$

因此

$$BG^*F^*F = CG^*F^*F.$$

由于 F^*F 可逆，我们得到 $BG^* = CG^*$，因此 $BA^* = CA^*$。

类似地，若 $A^*AB = A^*AC$，则 $AB = AC$。

应用这一单侧 $*$-消去可得

$$A(A^*A)^-A^*A = A,$$

因为这可由

$$A^*A(A^*A)^-A^*A = A^*A.$$

还需证明 $A(A^*A)^-A^*$ 是对称的。为此，注意到 $((A^*A)^-)^* \in A^*A\{1\}$。

乘积 $A(A^*A)^-A^*$ 不随 A^*A 的冯·诺依曼逆的选取而改变；也就是说，

$$A(A^*A)^-A^* = A(A^*A)^=A^*$$

对任意 $(A^*A)^-$，$(A^*A)^= \in A^*A\{1\}$。由 $A^*A(A^*A)^-A^*A = A^*A(A^*A)^=A^*A$ 并应用 $*$-消去即可直接得到这一点。特别地，$A(A^*A)^-A^* = A((A^*A)^-)^*A^*$，因此 $A(A^*A)^-A^*$ 的对称性得证。

($1a$) $\Rightarrow$ ($1c$)。令 $X \in A\{1,3\}$。则 $A^* = A^*AX$，因此 $\mathscr{R}(A^*) \subseteq \mathscr{R}(A^*A)$。

（$1c$） $\Rightarrow$ （$1b$）。若 $\mathscr{R}$（A^*）$= \mathscr{R}$（A^*A），则存在矩阵 X 使得 $A = XA^*A$。给定满秩分解 $A = FG$，令 F^+，G^+ 使得 $F^+F = I$，$GG^+ = I$。恒等式 $A = XA^*A$ 变为

$$FG = XG^*F^*FG.$$

左乘 F^+ 并右乘 G^+，得到

$$I = (F^+XG^*)(F^*F),$$

因此 F^*F 可逆。

等价关系（$1c$） $\Leftrightarrow$（$1d$）由秩恒等式显然可得。 □

例如，考虑复矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$，并取矩阵转置作为对合（即 $* = T$）。由于

$\mathrm{rank}(A^*A) = 0 \neq 1 = \mathrm{rank}(A)$，矩阵 A 没有（1，3）-逆（因此它不是 Moore–Penrose可逆）。

我们将经常需要判断与双星有向图相关的矩阵的 Moore–Penrose 可逆性。以下结果摘自定理 3.5 [24], ，给出了关于参数 s、u、t、v（在2.2）中引入）的精确存在性判据和显式公式。

引理 2.1。 设 M 是一个矩阵，其对应的双星有向图 $S_{(m+1),\ (n+1)}$ 具有如下形式 (2.1)，其中 $x = [x_i]$，$y = [y_i]$，$z = [z_i]$ 且 $w = [w_i]$。那么 $M^\dagger$ 存在，当且仅当s，u，t，$v \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$，其中 $s = \sum x_i x_i$，$u = \sum y_i y_i$，$t = \sum z_i z_i$，$v = \sum w_i w_i$ 在此情况下，

$$M^\dagger = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & u^{-1}y^* & 0 & 0 \\ s^{-1}\bar{x} & 0 & 0 & -s^{-1}av^{-1}\bar{x}w^* \\ \hline 0 & 0 & 0 & v^{-1}w^* \\ 0 & -t^{-1}bu^{-1}\bar{z}y^* & t^{-1}\bar{z} & 0 \end{array}\right].$$

核逆的概念 核逆 由 Baksalary 和 Trenkler 于 [1] 提出，作为群逆的一种改进。对于方阵 A， A 的核逆是满足以下条件的唯一矩阵 $A^{\sharp}$

$$AA^{\textcircled{\sharp}} = P_A \qquad \text{and} \qquad \mathscr{R}(A^{\textcircled{\sharp}}) \subseteq \mathscr{R}(A),$$

其中， P_A 表示投影到 $\mathscr{R}(A)$上的正交投影算子。具有 Moore-Penrose 逆的矩阵 A 是核可逆的，当且仅当 $i(A) \leq 1$；此时，核逆存在，且可表示为

$$A^{\textcircled{\sharp}} = A^{\sharp}AA^{\dagger}. \tag{2.7}$$

对偶概念——对偶核逆——是在 [1]中以类似方式引入的。它定义为满足以下条件的唯一矩阵$A^{\textcircled{\sharp}}$

$$A^{\textcircled{\sharp}}A = P_{A^*} \qquad \text{and} \qquad \mathscr{R}(A^{\textcircled{\sharp}}) \subseteq \mathscr{R}(A^*),$$

其中， P_{A^*} 投影到 $\mathscr{R}(A^*)$上。只要 A 是 Moore-Penrose 可逆的，且 $i(A) \leq 1$，对偶核逆也存在，并可表示为

$$A^{\textcircled{\sharp}} = A^{\dagger}AA^{\sharp}. \tag{2.8}$$

在研究与双星有向图相关的矩阵时，已有的群可逆性和 Moore–Penrose 可逆性的显式判据，使得可以直接应用公式（2.7）和（2.8）。

现在，我们介绍核 *EP* 可逆性的概念，也称为伪核可逆性，如 [14]中所述。若存在矩阵解 X 满足以下条件，则称矩阵 A 为核 EP 可逆：

$$\begin{aligned} &\text{(i) } XA^{m+1} = A^m, \text{ for some nonnegative integer } m, \\ &\text{(ii) } AX^2 = X, \\ &\text{(iii) } (AX)^* = AX. \end{aligned}$$

如果解存在，则该解唯一，称为 A 的核 EP 逆，记作 A^{d}。

对偶地，如果存在矩阵 X 使得，则称 A 为对偶核 EP 可逆。

$$\begin{aligned} &\text{(i')} A^{m+1}X = A^m, \text{ for some nonnegative integer } m, \\ &\text{(ii')} X^2A = X, \\ &\text{(iii')} (XA)^* = XA. \end{aligned}$$

in 在这种情况下，该矩阵是唯一的，称为 A 的对偶核 EP 逆，记作 A^{d}。

当 $m = 1$ 时，（对偶）核 EP 逆与（对偶）核逆重合。关于这类逆及其推广的刻画可见于 [17, 18, 19,31, 32]。例如，核可逆性和核 EP 可逆性的推广与扩展可见于 [26, 27, 28, 33]。

我们将使用下面的引理，该引理特别说明了核 EP 性（分别为对偶核 EP 性）与 Drazin 逆以及 (1,3)–逆（分别为 (1,4)–逆）之间的关系。

引理 2.2 （[14],定理 2.3）。设 A 为一个 *Drazin* 指数为 i（A） 的方阵，

(1) A^{d} 存在，当且仅当 A^D 存在且 $(A^m)\{1,3\} \neq \varnothing$，其中 $m \geq i(A)$。在这种情况下，对于任意 $(A^m)^{(1,3)} \in (A^m)\{1,3\}$.， $A^{d} = A^D A^m (A^m)^{(1,3)}$。*(2)* A^{d} 存在，当且仅当 A^D 存在且 $(A^m)\{1,4\} \neq \varnothing$，其中 $m \geq i(A)$。在这种情况下，对于任意 $(A^m)^{(1,4)} \in (A^m)\{1,4\}$， $A^{d} = (A^m)^{(1,4)} A^m A^D$。

我们注意到，核 EP 可逆性在矩阵酉相似下保持不变。也就是说，若 $B = UAU^*$ 且 $U^* = U^{-1}$，则 A核 EP 可逆，当且仅当 B核 EP 可逆。对偶核 EP 也有类似结果。

通过依次应用两个广义逆而得到的复合广义逆的概念，最近在 [10]，中得到了研究，作者在其中引入了

Moore–Penrose–core EP（MPCEP）逆和 *core EP–Moore–Penrose（*CEPMP）逆。

设 A 为 n 阶方阵，并假设核 EP 逆 $A^{\mathrm{d}}_{\bigcirc}$ 和 Moore–Penrose 逆 $A^{\dagger}$ 存在。 A 的 *Moore–Penrose– 核 EP 逆* 是满足以下方程组的唯一矩阵 X：

$$XAX = X, \qquad AX = AA^{\textcircled{d}}, \qquad XA = A^{\dagger}AA^{\textcircled{d}}A.$$

当 $A^{\dagger}$ 和 $A^{\mathrm{d}}_{\bigcirc}$ 存在时，该方程组相容，其唯一解显式表示为

$$A^{\dagger,\textcircled{d}} = A^{\dagger}\,A\,A^{\textcircled{d}}, \tag{2.9}$$

称为 A 的 *MPCEP 逆* 。

现在假设核 EP 逆的对偶形式 $A_{\mathrm{d}\bigcirc}$ 存在，同时 Moore–Penrose 逆 $A^{\dagger}$ 也存在。 A 的 *核 *EP–Moore–Penrose 逆* 是满足以下条件的唯一矩阵 X ：

$$XAX = X, \qquad AX = AA_{\textcircled{d}}AA^{\dagger}, \qquad XA = A_{\textcircled{d}}A.$$

当 $A^{\dagger}$ 和 $A_{\mathrm{d}\bigcirc}$ 存在时，该方程组相容，其唯一解为

$$A_{\textcircled{d},\dagger} = A_{\textcircled{d}}\,A\,A^{\dagger}, \tag{2.10}$$

称为 *CEPMP 逆。

类比于 MPCEP 和 *CEPMP 逆，可以通过将 Moore–Penrose 逆与核 EP 逆或对偶核 EP 逆结合，构造其他复合广义逆。 广义对偶核（GDC）逆和广义核（GC）逆由 [25]引入。在一般的带对合的域上，这些复合逆中的每一种存在，都要求相应的 core 型逆和 Moore–Penrose 逆同时存在。

设 A 为方阵，并假设核 EP 逆 $A^{\mathrm{d}}_{\bigcirc}$ 和 Moore– Penrose 逆 $A^{\dagger}$ 存在。 A的广义对偶核逆记为 A^{GDC}，它是满足下列条件的唯一矩阵 X

$$XAX = X, \qquad AX = A^{\textcircled{d}}A, \qquad XA = A^{\dagger}A^{\textcircled{d}}A^{2}.$$

在这些假设下，该方程组相容，其唯一解可明确写为

$$A^{\mathrm{GDC}} = A^{\dagger}\,A^{\textcircled{d}}\,A. \tag{2.11}$$

现在假设 A 使得对偶核 EP 逆 $A_{\mathrm{d}\bigcirc}$ 和 Moore–Penrose 逆 $A^{\dagger}$ 存在。 A的广义核逆记为 A^{GC}，它是满足下列条件的唯一矩阵 X

$$XAX = X, \qquad AX = A^{2}A_{\textcircled{d}}A^{\dagger}, \qquad XA = AA_{\textcircled{d}}.$$

每当这些条件成立时，该系统相容，且其唯一解为 s

$$A^{\mathrm{GC}} = A\,A_{\textcircled{d}}\,A^{\dagger}. \tag{2.12}$$

3. 核与对偶核可逆性

矩阵存在核逆和对偶核逆，当且仅当它同时存在 Moore–Penrose 逆和群逆。对于与双星有向图相关、形式为 (2.1) 的矩阵，我们已经看到，这等价于要求所有格拉姆标量 s、u、t、v 以及两个耦合项 $x^{T}y$和 $z^{T}w$ 均非零。在这些假设下，引理 2.1和 (2.3) 中给出的 $M^{\dagger}$和 $M^{\sharp}$的显式公式，可直接用于计算 $M^{\sharp}_{\bigcirc}$和 $M_{\sharp\bigcirc}$。正交投影算子

$M^{\dagger}M$和 $MM^{\dagger}$具有如下显式分块形式

$$M^{\dagger}M=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&s^{-1}\,\bar{x}x^{T}&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&t^{-1}\,\bar{z}z^{T}\end{bmatrix},\qquad MM^{\dagger}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&u^{-1}\,yy^{*}&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&v^{-1}\,ww^{*}\end{bmatrix}. \tag{3.1}$$

Th这些恒等式用于计算 M 的核逆与对偶核逆。

命题 3.1。 设 M 是一个矩阵，其关联的双星有向图为 $S_{(m+1),\ (n+1)}$ 具有如下形式 (2.1)，其中 $x=[x_i]$，$y=[y_i]$，$z=[z_i]$ 且 $w=[w_i]$。假设 $x^{T}y\neq 0$，$z^{T}w\neq 0$且 s，u，t，$v\in\mathbb{F}\setminus\{0\}$，其中 $s=\sum x_i\overline{x_i}$，$u=\sum y_i\overline{y_i}$，$t=\sum z_i\overline{z_i}$，$v=\sum w_i\overline{w_i}$。则，

(1) M 核可逆，且

$$M^{\textcircled{\#}}=\left[\begin{array}{cc|cc}0&u^{-1}y^{*}&0&0\\(x^{T}y)^{-1}y&0&0&-av^{-1}(x^{T}y)^{-1}yw^{*}\\\hline 0&0&0&v^{-1}w^{*}\\0&-bu^{-1}(z^{T}w)^{-1}wy^{*}&(z^{T}w)^{-1}w&0\end{array}\right];$$

(2) M 对偶核可逆，且

$$M_{\textcircled{\#}}=\left[\begin{array}{cc|cc}0&(x^{T}y)^{-1}x^{T}&0&0\\s^{-1}\overline{x}&0&0&-as^{-1}(z^{T}w)^{-1}\overline{x}z^{T}\\\hline 0&0&0&(z^{T}w)^{-1}z^{T}\\0&-bt^{-1}(x^{T}y)^{-1}\overline{z}x^{T}&t^{-1}\overline{z}&0\end{array}\right].$$

本节完成了对与双星有向图相关矩阵的核可逆性和对偶核可逆性的分析。在这一背景下，核型可逆性完全取决于 Moore–Penrose 逆和群逆是否同时存在。下一节我们将转向高指标矩阵；对于这类矩阵，群逆不再存在，而核 EP 型逆则提供了适当的理论框架。

4. Core EP and dual core EP invertibility

现在我们转而研究与双星有向图相关的矩阵的核 EP 和对偶核 EP 可逆性。在本节中，M 假设具有规范形 (2.1)，并满足 $i(M)>1$。

我们分别分析预备知识中描述的三个互斥情形 I、II 和 III。在每种情形下，Drazin逆 M^{D} 的分块形式都是已知的。

首先，考虑情形 I，其中 $x^{T}y=z^{T}w=0$。在这种情形下，$i(M)=2$，且 M 的 Drazin 逆由式 (2.4) 显式给出。通过直接分块乘法可得

$$M^{2}=\left[\begin{array}{cc|cc}ab&0&0&az^{T}\\0&yx^{T}&ay&0\\\hline 0&bx^{T}&ab&0\\bw&0&0&wz^{T}\end{array}\right],$$

因此

$$\left(M^{2}\right)^{*}=\left[\begin{array}{cc|cc}\overline{a}\overline{b}&0&0&\overline{b}w^{*}\\0&\overline{x}y^{*}&\overline{b}\overline{x}&0\\\hline 0&\overline{a}y^{*}&\overline{a}\overline{b}&0\\\overline{a}\overline{z}&0&0&\overline{z}w^{*}\end{array}\right].$$

由命题 2.1可知， M的核 EP 和对偶核 EP 逆 存在，分别取决于 M^2的 (1, 3)–逆和 (1, 4)– 逆是否存在。我们分别分析这两种情况。

为研究 M^2 的 (1, 3)–逆是否存在，我们考虑 Gram 型乘积 $(M^2)^* M^2$。直接计算可得

$$\left(M^2\right)^* M^2 = \left[\begin{array}{cc|cc} b\bar{b}r & 0 & 0 & \bar{b}rz^T \\ 0 & \overline{x}hx^T & a\overline{x}h & 0 \\ \hline 0 & \overline{a}hx^T & a\overline{a}h & 0 \\ b\overline{z}r & 0 & 0 & \overline{z}rz^T \end{array}\right],$$

其中，与 (2.2) 中一样， $r = aa + w^*w$ 和 $h = bb + y^*y$。经过置换相似变换后，该矩阵可分解为一个分块对角矩阵，

$$\left(M^2\right)^* M^2 \underset{\text{perm.}}{\approx} \left[\begin{array}{cc} rA & 0 \\ 0 & hB \end{array}\right],$$

其中 $A = \left[\begin{array}{cc} bb & bz^T \\ b\overline{z} & zz^T \end{array}\right]$ 和 $B = \left[\begin{array}{cc} aa & ax^T \\ a\overline{x} & xx^T \end{array}\right]$.

现在，命题 2.1 断言，矩阵 M^2 的 (1, 3)–逆存在，当且仅当秩 $\left(\left(M^2\right)^* M^2\right) = \operatorname{rank}(M^2) = 2$，这又意味着 $r,\ h \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$. 假设这些条件成立， $\left(\left(M^2\right)^* M^2\right)^- \left(M^2\right)^* \in M^2\{1,3\}$。因此，我们要寻找 $\left(M^2\right)^* M^2$的冯·诺依曼逆。我们可以取

$$\left[\left(M^2\right)^* \left(M^2\right)\right]^- \underset{\text{perm.}}{\approx} \left[\begin{array}{cc} r^{-1}A^- & 0 \\ 0 & h^{-1}B^- \end{array}\right].$$

接下来，我们为 A和 B构造显式的冯·诺依曼逆。考虑满秩分解

$$A = \left[\begin{array}{c} \overline{b} \\ \overline{z} \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} b & z^T \end{array}\right] = F_A G_A$$

and

$$B = \left[\begin{array}{c} \overline{a} \\ \overline{x} \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} a & x^T \end{array}\right] = F_B G_B,$$

并选择冯·诺依曼逆

$$F_A^- = \left[\begin{array}{cc} \overline{b}^{-1} & 0 \end{array}\right], \quad G_A^- = \left[\begin{array}{c} b^{-1} \\ 0 \end{array}\right], \quad F_B^- = \left[\begin{array}{cc} \overline{a}^{-1} & 0 \end{array}\right], \quad \text{and} \quad G_B^- = \left[\begin{array}{c} a^{-1} \\ 0 \end{array}\right],$$

分别满足 F_A、G_A、F_B和 G_B 的 $F_A^- F_A = I$、$G_A G_A^- = I$，同样对于B，我们得到

$$A^- = G_A^- F_A^- = \left[\begin{array}{cc} (b\bar{b})^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right]$$

and

$$B^- = G_B^- F_B^- = \left[\begin{array}{cc} (a\overline{a})^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right].$$

因此，

$$\left[\left(M^2\right)^*\left(M^2\right)\right]^-\left(M^2\right)^* \underset{\text{perm.}}{\approx} \left[\begin{array}{cc} r^{-1}\begin{bmatrix}(b\bar{b})^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} & 0\\ 0 & h^{-1}\begin{bmatrix}(a\bar{a})^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc|cc} \bar{a}\bar{b} & \bar{b}w^* & 0 & 0\\ \bar{a}\bar{z} & \bar{z}w^* & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & \bar{a}\bar{b} & \bar{a}y^*\\ 0 & 0 & \bar{b}\bar{x} & \bar{x}y^*\end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{cc} r^{-1}\begin{bmatrix}\bar{a}b^{-1} & b^{-1}w^*\\ 0 & 0\end{bmatrix} & 0\\ 0 & h^{-1}\begin{bmatrix}a^{-1}\bar{b} & a^{-1}y^*\\ 0 & 0\end{bmatrix}\end{array}\right],$$

which implies $\left[\begin{array}{cc|cc} (br)^{-1}\bar{a} & 0 & 0 & (br)^{-1}w^*\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ \hline 0 & (ah)^{-1}y^* & (ah)^{-1}\bar{b} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right] \in M^2\{1,3\}.$

现在可以使用引理 M 计算核 EP 逆，因为 2.2，因为 $M^{\textcircled{d}}=M^DM^2\left(M^2\right)^{(1,3)}$。利用 M^D在（2.4）中给出的显式表达式、 M^2的显式表达式，以及 $\left(M^2\right)^{(1,3)}$的显式表达式，当 $x^Ty=0=z^Tw$和 r时， $h\neq 0$,

$$M^{\textcircled{d}} = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & h^{-1}y^* & \bar{b}h^{-1} & 0\\ \bar{a}(br)^{-1}y & 0 & 0 & (br)^{-1}yw^*\\ \hline \bar{a}r^{-1} & 0 & 0 & r^{-1}w^*\\ 0 & (ah)^{-1}wy^* & \bar{b}(ah)^{-1}w & 0\end{array}\right].$$

对偶核 EP 逆的计算也可采用类似的论证，该逆是通过分析 M 的 (1，4)–可逆性得到的。为此，我们考虑乘积

$$M^2\left(M^2\right)^* = \left[\begin{array}{cc|cc} a\bar{a}p & 0 & 0 & apw^*\\ 0 & qyy^* & \bar{b}qy & 0\\ \hline 0 & qby^* & b\bar{b}q & 0\\ \bar{a}pw & 0 & 0 & pww^*\end{array}\right],$$

其中，与（2.2）中一样，标量由 $p=bb+z^*z$ 和 $q=aa+x^*x$给出。

和之前一样，该矩阵经过置换相似变换后可表示为便于处理的分块对角形式。更准确地说，

$$M^2\left(M^2\right)^* \underset{\text{perm.}}{\approx} \begin{bmatrix} pC & 0\\ 0 & qD\end{bmatrix},$$

其中

$$C=\begin{bmatrix} a\bar{a} & aw^*\\ \bar{a}w & ww^*\end{bmatrix}$$

and

$$D=\begin{bmatrix} b\bar{b} & by^*\\ \bar{b}y & yy^*\end{bmatrix}.$$

根据命题 2.1，条件 $M^2\{1,4\}\neq\varnothing$等价于秩 $\left(M^2(M^2)^*\right)$ =秩$(M^2)=2$，而后者成立当且仅当 p， $q\in\mathbb{F}\backslash\{0\}$。在这些假设下，可得 $\left(M^2\right)^*\left[M^2\left(M^2\right)^*\right]^-\in M^2\{1,4\}$。

为了构造 $M^2(M^2)^*$ 的显式冯·诺依曼逆，我们注意到，经过置换相似变换后，该逆可取为如下分块对角形式

$$\left[M^2(M^2)^*\right]^- \underset{\text{perm.}}{\approx} \begin{bmatrix} p^{-1}C^- & 0 \\ 0 & q^{-1}D^- \end{bmatrix},$$

其中， C^- 和 D^- 分别是 C 和 D的冯·诺依曼逆。因此，我们接下来为这两个矩阵构造合适的冯·诺依曼逆。

注意到， C 具有如下秩一分解

$$C = \begin{bmatrix} a \\ w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{a} & w^* \end{bmatrix} = F_C G_C.$$

我们可以选取冯·诺依曼逆

$$F_C^- = \begin{bmatrix} a^{-1} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad G_C^- = \begin{bmatrix} \overline{a}^{-1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

F_C和 G_C的冯·诺依曼逆，使其分别满足$F_C^- F_C = I$和$G_C G_C^- = I$。由此可得

$$C^- = G_C^- F_C^- = \begin{bmatrix} (a\overline{a})^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

是 C的冯·诺依曼逆。

对矩阵 D，完全类似的论证同样适用。事实上， D 具有如下满秩分解

$$D = \begin{bmatrix} b \\ y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{b} & y^* \end{bmatrix} = F_D G_D.$$

我们可以选取

$$F_D^- = \begin{bmatrix} b^{-1} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad G_D^- = \begin{bmatrix} \overline{b}^{-1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

分别作为 F_D和G_D的冯·诺依曼逆，并满足 $F_D^- F_D = I$和 $G_D G_D^- = I$。因此，

$$D^- = G_D^- F_D^- = \begin{bmatrix} (b\overline{b})^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

是 D的冯·诺依曼逆。 f

因此，

$$\begin{aligned} \left(M^2\right)^* \left[\left(M^2\right)\left(M^2\right)^*\right]^- &\underset{\text{perm.}}{\approx} \left[\begin{array}{cc|cc} \overline{a}\overline{b} & \overline{b}w^* & 0 & 0 \\ \overline{a}\overline{z} & \overline{z}w^* & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \overline{a}\overline{b} & \overline{a}y^* \\ 0 & 0 & \overline{b}\overline{x} & \overline{x}y^* \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} p^{-1}\begin{bmatrix} (a\overline{a})^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & q^{-1}\begin{bmatrix} (b\overline{b})^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}\right] \\ &= \begin{bmatrix} p^{-1}\begin{bmatrix} a^{-1}\overline{b} & 0 \\ a^{-1}\overline{z} & 0 \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & q^{-1}\begin{bmatrix} b^{-1}\overline{a} & 0 \\ b^{-1}\overline{x} & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

这意味着

$$\left[\begin{array}{cc|cc} (ap)^{-1}\overline{b} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (bq)^{-1}\overline{x} & 0 \\ \hline 0 & 0 & (bq)^{-1}\overline{a} & 0 \\ (ap)^{-1}\overline{z} & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \in M^2\{1,4\}.$$

现在我们可以计算 M 的对偶核 EP 逆。根据引理 2.2，由于 $i(M) = 2$， $M_{d\bigcirc} = (M^2)^{(1,4)} M^2 M^D$。

利用 $(M^2)^{(1,4)}$、 M^2、 M^D 在 (2.4) 中给出的显式表达式，当 $x^Ty = z^Tw = 0$ 且 p 时， $q \neq 0$ 通过直接进行分块乘法可得

$$M_{\textcircled{d}} = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & \overline{b}(ap)^{-1}x^T & \overline{b}p^{-1} & 0 \\ q^{-1}\overline{x} & 0 & 0 & (bq)^{-1}\overline{x}z^T \\ \hline \overline{a}q^{-1} & 0 & 0 & \overline{a}(bq)^{-1}z^T \\ 0 & (ap)^{-1}\overline{z}x^T & p^{-1}\overline{z} & 0 \end{array}\right].$$

综上所述，我们得到以下结果。

定理 4.1。 设 M 是一个关联双星有向图 $S_{(m+1),\ (n+1)}$ 其形式为 （2.1） ， 且 $x^Ty = z^Tw = 0$。则

(1) M 是核 *EP* 可逆的，当且仅当

$$r = a\overline{a} + w^*w \neq 0 \ and \ h = b\overline{b} + y^*y \neq 0.$$

在这种情况下，

$$M^{\textcircled{d}} = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & h^{-1}y^* & \overline{b}h^{-1} & 0 \\ \overline{a}(br)^{-1}y & 0 & 0 & (br)^{-1}yw^* \\ \hline \overline{a}r^{-1} & 0 & 0 & r^{-1}w^* \\ 0 & (ah)^{-1}wy^* & \overline{b}(ah)^{-1}w & 0 \end{array}\right].$$

(2) M 是对偶核 *EP* 可逆的，当且仅当

$$p = b\overline{b} + z^*z \neq 0 \ and \ q = a\overline{a} + x^*x \neq 0.$$

在这种情况下，

$$M_{\textcircled{d}} = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & \overline{b}(ap)^{-1}x^T & \overline{b}p^{-1} & 0 \\ q^{-1}\overline{x} & 0 & 0 & (bq)^{-1}\overline{x}z^T \\ \hline \overline{a}q^{-1} & 0 & 0 & \overline{a}(bq)^{-1}z^T \\ 0 & (ap)^{-1}\overline{z}x^T & p^{-1}\overline{z} & 0 \end{array}\right].$$

现在我们转而分析情形 II，其中 $x^Ty \neq 0 = z^Tw$ 且 $\zeta = x^Ty + ab \neq 0$。在这种情况下， $i(M) = 3$ 以及 M 的 Drazin 逆可由（2.5）明确给出。

为了计算 M的核 EP 逆，引理 2.2 要求 存在 (1, 3) 阶的 M^3逆。因此，我们先计算 M^3和（M^3）*。通过直接分块乘法可得

$$M^3 = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & \zeta x^T & a\zeta & 0 \\ \zeta y & 0 & 0 & ayz^T \\ \hline \zeta b & 0 & 0 & abz^T \\ 0 & bwx^T & abw & 0 \end{array}\right]$$

and

$$(M^3)^* = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & \overline{\zeta}y^* & \overline{\zeta b} & 0 \\ \overline{\zeta}\overline{x} & 0 & 0 & \overline{b}\overline{x}w^* \\ \hline \overline{a}\overline{\zeta} & 0 & 0 & \overline{a}\overline{b}w^* \\ 0 & \overline{a}\overline{z}y^* & \overline{a}\overline{b}\overline{z} & 0 \end{array}\right].$$

根据命题 2.1，存在 （1，3）逆 M^3 等价于条件 秩$\left(（M^3）^*M^3\right)$ =秩（M^3） = 2。因此，我们接下来分析 Gram 型乘积（M^3）$^*M^3$。直接计算可得

$$(M^3)^*M^3 = \left[\begin{array}{cc|cc} \overline{\zeta}\zeta h & 0 & 0 & a\overline{\zeta}hz^T \\ 0 & \beta\overline{x}x^T & a\beta\overline{x} & 0 \\ \hline 0 & \overline{a}\beta x^T & a\overline{a}\beta & 0 \\ \overline{a}\zeta h\overline{z} & 0 & 0 & a\overline{a}h\overline{z}z^T \end{array}\right],$$

其中，与（2.2）中一样，$h=bb+y^*y$ 和 $\beta=\bar{\zeta}\bar{\zeta}+b\bar{b}w^*w$。

在置换相似意义下，$(M^3)^*M^3$可分解为一个分块对角矩阵 x,

$$(M^3)^*M^3 \underset{\text{perm.}}{\approx} \begin{bmatrix} hA & 0 \\ 0 & \beta B \end{bmatrix},$$

其中

$$A=\begin{bmatrix} \zeta\bar{\zeta} & a\bar{\zeta}z^T \\ \bar{a}\zeta\bar{z} & a\bar{a}\,\bar{z}z^T \end{bmatrix}, \qquad B=\begin{bmatrix} a\bar{a} & \bar{a}x^T \\ a\bar{x} & \bar{x}x^T \end{bmatrix}.$$

由于秩$(M^3)=2$，命题 2.1 表明 $M^3\{1,3\}\neq\varnothing$当且仅当 $h,\ \beta\in\mathbb{F}\setminus\{0\}$。假设这些条件成立，我们可以选择 $(M^3)^*M^3$的一个冯·诺依曼逆，其形式为

$$\left[(M^3)^*M^3\right]^- \underset{\text{perm.}}{\approx} \begin{bmatrix} h^{-1}A^- & 0 \\ 0 & \beta^{-1}B^- \end{bmatrix}.$$

现在我们为 A 和 B构造显式的冯·诺依曼逆。考虑满秩分解

$$A=\begin{bmatrix} \bar{\zeta} \\ \bar{a}\bar{z} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \zeta & az^T \end{bmatrix}=F_AG_A, \qquad B=\begin{bmatrix} \bar{a} \\ \bar{x} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & x \end{bmatrix}=F_BG_B.$$

选择

$$F_A^-=\begin{bmatrix} \bar{\zeta}^{-1} & 0 \end{bmatrix},\quad G_A^-=\begin{bmatrix} \zeta^{-1} \\ 0 \end{bmatrix},\quad F_B^-=\begin{bmatrix} \bar{a}^{-1} & 0 \end{bmatrix},\quad \text{and}\quad G_B^-=\begin{bmatrix} a^{-1} \\ 0 \end{bmatrix},$$

我们得到 $F_A^-F_A=I$、$G_AG_A^-=I$，对于 B 也可类似得到，从而有

$$A^-=G_A^-F_A^-=\begin{bmatrix} (\zeta\bar{\zeta})^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B^-=G_B^-F_B^-\begin{bmatrix} (a\bar{a})^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Hence,

$$\left[(M^3)^*M^3\right]^-(M^3)^* \underset{\text{perm.}}{\approx} \begin{bmatrix} h^{-1}\begin{bmatrix} (\zeta\bar{\zeta})^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & \beta^{-1}\begin{bmatrix} (a\bar{a})^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & \bar{\zeta}\bar{b} & \bar{\zeta}y^* \\ 0 & 0 & \bar{a}\bar{b}\bar{z} & \bar{a}\bar{z}y^* \\ \hline \bar{a}\bar{\zeta} & \bar{a}\bar{b}w^* & 0 & 0 \\ \bar{\zeta}\bar{x} & \bar{b}\bar{x}w^* & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & (\zeta h)^{-1}\begin{bmatrix} \bar{b} & y^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ (a\beta)^{-1}\begin{bmatrix} \bar{\zeta} & \bar{b}w^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & 0 \end{bmatrix},$$

这意味着

$$\begin{bmatrix} 0 & (\zeta h)^{-1}y^* & (\zeta h)^{-1}\bar{b} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ (a\beta)^{-1}\bar{\zeta} & 0 & 0 & (a\beta)^{-1}\bar{b}w^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\in M^3\{1,3\}.$$

现在我们可以计算 M的核 EP 逆。根据引理 2.2，由于 $i(M)=3$，$M \quad = M^DM^3\ M^3\ ^{(1,3)}$ M^D 2 5 $_{d}\bigcirc()$。利用式 (.) 中给出的显式表达式，以及 M^3和 $(M^3)^{(1,3)}$的显式表达式，当 $x^Ty\neq0,\quad z^Tw=0,\quad h\neq0$和 $\beta\neq0$时，直接

分块乘法可得

$$M^{\textcircled{d}} = \begin{bmatrix} 0 & h^{-1}y^* & h^{-1}\bar{b} & 0 \\ \beta^{-1}\bar{\zeta}y & 0 & 0 & \beta^{-1}\bar{b}yw^* \\ \beta^{-1}\bar{\zeta}b & 0 & 0 & \beta^{-1}b\bar{b}w^* \\ 0 & bh^{-1}\zeta^{-1}wy^* & b\bar{b}h^{-1}\zeta^{-1}w & 0 \end{bmatrix}.$$

现在我们采用相同的策略来确定 M 的对偶核 *EP* 逆 。在这种情况下，我们关注集合 $M^3\{1,4\}$。为此，我们首先计算乘积 $M^3(M^3)^*$。利用上文得到的 M^3 和 $(M^3)^*$ 的显式表达式，可得

$$M^3(M^3)^* = \begin{bmatrix} \zeta\bar{\zeta}q & 0 & 0 & \zeta\bar{b}qw^* \\ 0 & \alpha yy^* & \alpha\bar{b}y & 0 \\ 0 & \alpha by^* & \alpha b\bar{b} & 0 \\ b\bar{\zeta}qw & 0 & 0 & b\bar{b}qww^* \end{bmatrix},$$

其中，与 (2.2) 中一样， $q = aa + x^*x$ 和 $\alpha = \bar{\zeta}\zeta + \bar{a}az^*z$。如前所述，该矩阵经置换相似后可方便地分解为分块对角形式，

$$M^3(M^3)^* \underset{\text{perm.}}{\approx} \begin{bmatrix} qC & 0 \\ 0 & \alpha D \end{bmatrix},$$

其中

$$C = \begin{bmatrix} \zeta\bar{\zeta} & \zeta\bar{b}w^* \\ \bar{\zeta}bw & b\bar{b}ww^* \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} b\bar{b} & by^* \\ \bar{b}y & yy^* \end{bmatrix}.$$

命题2.1 表明， M^3 存在 **(1，4)–**逆，当且仅当秩$\big(M^3(M^3)^*\big) =$秩$\big((M^3)^*\big) = 2$，而这又当且仅当 q， $\alpha \in \mathbb{F}\setminus\{0\}$。在这些条件成立的前提下，我们可以选取 $M^3(M^3)^*$的一个冯·诺依曼逆，其表达式为

$$\big[M^3(M^3)^*\big]^- \underset{\text{perm.}}{\approx} \begin{bmatrix} q^{-1}C^- & 0 \\ 0 & \alpha^{-1}D^- \end{bmatrix}.$$

为了构造 C 和 D 的显式冯·诺依曼逆，我们考虑其满秩分解

$$C = \begin{bmatrix} \zeta \\ bw \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{\zeta} & \bar{b}w^* \end{bmatrix} = F_CG_C, \qquad D = \begin{bmatrix} b \\ y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{b} & y^* \end{bmatrix} = F_DG_D.$$

取

$$F_C^- = \begin{bmatrix} \zeta^{-1} & 0 \end{bmatrix}, \quad G_C^- = \begin{bmatrix} \bar{\zeta}^{-1} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad F_D^- = \begin{bmatrix} b^{-1} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad G_D^- = \begin{bmatrix} \bar{b}^{-1} \\ 0 \end{bmatrix},$$

我们得到 $F_C^-F_C = I$、 $G_CG_C^- = I$，对于 D 也可类似地得到，从而有

$$C^- = G_C^-F_C^- = \begin{bmatrix} (\zeta\bar{\zeta})^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad D^- = G_D^-F_D^- = \begin{bmatrix} (b\bar{b})^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

因此，

$$(M^3)^*\left[M^3(M^3)^*\right]^- \underset{\text{perm.}}{\approx} \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & \overline{\zeta}\overline{b} & \overline{\zeta}y^* \\ 0 & 0 & \overline{a}\overline{b}\overline{z} & \overline{a}\overline{z}y^* \\ \hline \overline{a}\overline{\zeta} & \overline{a}\overline{b}w^* & 0 & 0 \\ \overline{\zeta}\overline{x} & \overline{b}\overline{x}w^* & 0 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} q^{-1}\begin{bmatrix} (\zeta\overline{\zeta})^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & \alpha^{-1}\begin{bmatrix} (b\overline{b})^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & (\alpha b)^{-1}\overline{\zeta} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{a}(\alpha b)^{-1}\overline{z} & 0 \\ \hline (\zeta q)^{-1}\overline{a} & 0 & 0 & 0 \\ (\zeta q)^{-1}\overline{x} & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

并且我们可以断言

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & (\alpha b)^{-1}\overline{\zeta} & 0 \\ (\zeta q)^{-1}\overline{x} & 0 & 0 & 0 \\ \hline (\zeta q)^{-1}\overline{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\alpha b)^{-1}\bar{a}\overline{z} & 0 \end{array}\right] \in M^3\{1,4\}.$$

现在我们可以计算 M 的对偶核 EP 逆。根据引理 2.2，由于 $i(M)=3$， M 的对偶核 EP 逆为 $M_{d\bigcirc}=(M^3)^{(1,4)}M^3M^D$。利用式（$M^3$）$^{(1,4)}$、 M^3 以及 M^D 中给出的显式表达式（2.5），当 $x^Ty\neq 0$、$z^Tw=0$、 $q\neq 0$ 和 $\alpha\neq 0$时，经过直接分块乘法可得

$$M_{\textcircled{d}} = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & \overline{\zeta}\alpha^{-1}x^T & \overline{\zeta}\alpha^{-1}a & 0 \\ q^{-1}\overline{x} & 0 & 0 & (q\zeta)^{-1}a\overline{x}z^T \\ \hline \overline{a}q^{-1} & 0 & 0 & (q\zeta)^{-1}a\overline{a}z^T \\ 0 & \bar{a}\alpha^{-1}\overline{z}x^T & a\overline{a}\alpha^{-1}\overline{z} & 0 \end{array}\right].$$

因此，我们证明了以下结果。

定理4.2。 设 M 是域上的一个矩阵，其关联的双星有向图为$S_{(m+1),\ (n+1)}$具有如下形式 (2.1) 且 $x^Ty\neq 0$、 $z^Tw=0$和 $\zeta=x^Ty+ab\neq 0$。则(1) M 是核 *EP* 可逆的，当且仅当

$$h=b\overline{b}+y^*y\neq 0 \ \ and\ \beta=\zeta\overline{\zeta}+b\overline{b}w^*w\neq 0.$$

在这种情况下

$$M^{\textcircled{d}} = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & h^{-1}y^* & h^{-1}\overline{b} & 0 \\ \beta^{-1}\overline{\zeta}y & 0 & 0 & \beta^{-1}\overline{b}yw^* \\ \hline \beta^{-1}\overline{\zeta}b & 0 & 0 & \beta^{-1}b\overline{b}w^* \\ 0 & bh^{-1}\zeta^{-1}wy^* & b\overline{b}h^{-1}\zeta^{-1}w & 0 \end{array}\right]$$

(2) M 是对偶核 *EP* 可逆的，当且仅当

$$q=a\overline{a}+x^*x\neq 0 \ \ and\ \alpha=\zeta\overline{\zeta}+a\overline{a}z^*z\neq 0.$$

在这种情况下，

$$M_{\textcircled{d}} = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & \overline{\zeta}\alpha^{-1}x^T & \overline{\zeta}\alpha^{-1}a & 0 \\ q^{-1}\overline{x} & 0 & 0 & (q\zeta)^{-1}a\overline{x}z^T \\ \hline \overline{a}q^{-1} & 0 & 0 & (q\zeta)^{-1}a\overline{a}z^T \\ 0 & \bar{a}\alpha^{-1}\overline{z}x^T & a\overline{a}\alpha^{-1}\overline{z} & 0 \end{array}\right].$$

最后，我们考虑情形 III，其特征条件为 $x^Ty\neq 0=z^Tw$ 和$\zeta=x^Ty+ab=0$。在这种情况下，由（2.6）可得 i（M） $=5$且 M^D =0。因此，矩阵 M 是指数为 5 的幂零矩阵。由于 $M^5=0$，我们有

秩(M^5) =秩$\big((M^5)^*M^5\big)$ =秩$\big(M^5(M^5)^*\big)$ = 0。根据命题2.1，这意味着（M^5）$\{1,3\} \neq \varnothing$和（M^5）$\{1,4\} \neq \varnothing$。因此，我们可以应用引理2.2。矩阵 M 既核 EP 可逆，也对偶核 EP 可逆。此外，在这两种情况下，相应的逆矩阵均为零矩阵。至此，情形 III 的分析告一段落，也完成了本节结果的证明。

5. MPCEP and *CEPMP Inverses

本节将推导与双星有向图相关的 Moore–Penrose–核 EP（MPCEP）逆和 *核 EP–Moore–Penrose（*CEPMP）逆的显式公式。

由于 MPCEP 和 *CEPMP 逆的存在性分别要求 Moore–Penrose 逆与核 EP 逆或对偶核 EP 逆同时存在，因此分析根据第 2 节中引入的三种结构情形展开。

回顾一下，只要 $M^\dagger$ 和 $M^{d\bigcirc}$ 存在，的 MPCEP 逆就由（2.9）给出；只要 $M^\dagger$ 和 $M^{d\bigcirc}$ 存在，CEPMP 逆就由 （2.10）给出。

以下引理的证明直接来自这些恒等式，并结合了由（3.1）给出的 $M^\dagger M$或 $MM^\dagger$ 的显式表达式，以及由定理 4.1和 4.2给出的 $M_{d\bigcirc}$或 $M_{d\bigcirc}$的显式表达式。

引理 5.1。 设 M 是一个矩阵，其对应的双星有向图为 $S_{(m+1),\ (n+1)}$ 具有形式（2.1），且 $x^Ty = z^Tw = 0$。假设 $M^\dagger$ 存在，且 M 核 *EP* 可逆（等价地， s、 u、 t、 v、 r、 h 中定义的标量 （2.2）均非零）。则 M 的 *MPCEP* 逆为

$$M^{\dagger,\textcircled{d}} = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & h^{-1}y^* & \overline{b}h^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \overline{a}r^{-1} & 0 & 0 & r^{-1}w^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

引理 5.2。 设 M 是一个矩阵，其对应的双星有向图为 $S_{(m+1),\ (n+1)}$ 具有形式（2.1），并满足 $x^Ty \neq 0$， $z^Tw = 0$且 $\zeta = x^Ty + ab \neq 0$。假设 M是 *Moore–Penrose* 且核 *EP* 可逆的（等价地， s、 u、 t、 v、 h、 β中定义的标量（2.2）均非零）。则 M 的 *MPCEP* 逆为

$$M^{\dagger,\textcircled{d}} = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & h^{-1}y^* & \overline{b}h^{-1} & 0 \\ (s\beta)^{-1}\overline{\zeta}(x^Ty)\overline{x} & 0 & 0 & (s\beta)^{-1}\overline{b}(x^Ty)\overline{x}w^* \\ \hline \beta^{-1}\overline{\zeta}b & 0 & 0 & \beta^{-1}b\overline{b}w^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

引理 5.3。 设 M 是一个关联双星有向图 $S_{(m+1),\ (n+1)}$ 其形式为（2.1），且 $x^Ty = z^Tw = 0$。假设 $M^\dagger$和 $M^{d\bigcirc}$都存在（等价地， s、 u、 t、 v、 p、 q 中定义的标量 （2.2）均非零）。则 *的 *CEPMP* 逆为 M

$$M_{\textcircled{d},\dagger} = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & \overline{b}p^{-1} & 0 \\ q^{-1}\overline{x} & 0 & 0 & 0 \\ \hline \overline{a}q^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p^{-1}\overline{z} & 0 \end{array}\right].$$

引理 5.4。 设 M 是一个矩阵，其对应的双星有向图 $S_{(m+1),\ (n+1)}$ 形式如（2.1），其中 $x^Ty \neq 0$， $z^Tw = 0$且 $\zeta = x^Ty + ab \neq 0$。假设 $M^\dagger$存在，且 M是对偶核 *EP* 可逆的（等价地，标量 s， u， t， v， q， α在 2.2

均非零）。则 *CEPMP 逆为

$$M^{\textcircled{d},\dagger}=\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & \overline{\zeta}(u\alpha)^{-1}(x^Ty)y^* & a\overline{\zeta}\alpha^{-1} & 0 \\ q^{-1}\overline{x} & 0 & 0 & 0 \\ \hline \overline{a}q^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \overline{a}(u\alpha)^{-1}(x^Ty)\overline{z}y^* & a\overline{a}\alpha^{-1}\overline{z} & 0 \end{array}\right]$$

上述四个引理给出了情形 I（引理 *CEPMP 逆和 MPCEP 逆的显式分块公式（引理 5.1 和 5.3）以及情形 II（引理 5.2 和 5.4）。在情形 III 中，我们有 $M^{\textcircled{d}}\bigcirc=0$ 和 $M^{\textcircled{d}}\bigcirc=0$，因此有 $M^{\dagger,\textcircled{d}}\bigcirc=0$ 和 $M^{\textcircled{d}}\bigcirc^{\dagger}=0$。

在情形 I 和情形 II 中，对于与双星有向图相关的矩阵，MPCEP 逆和 *CEPMP 逆从不相同。事实上，检查上述公式可知，情形 I 中这两个复合逆相等将导致所有向量 x、y、z 和 w 均为零，这与双星结构的定义相矛盾。情形 II 中也有类似结论。

6. GDC 和 GC 逆

本节推导与双星有向图相关的矩阵的广义双核（GDC）逆和广义 core（GC）逆的显式分块公式。

这些逆并非彼此独立的概念：它们是通过将 Moore–Penrose 逆与（对偶）核 EP 逆相结合而得到的复合外逆，详见 [25]。因此，它们的存在并不会引入超出 Moore–Penrose 可逆性和核 EP 可逆性所要求条件之外的新的代数约束。

以下引理的证明直接由（2.11）和（2.12）推出，再结合引理 $M^{\dagger}$ 中给出的 2.1 以及定理 $M^{\textcircled{d}}\bigcirc$ 或 $M^{\textcircled{d}}\bigcirc$ 中给出的显式公式4.1 和 4.2。

引理 6.1. 设 M 是一个矩阵，其关联的双星有向图为 $S_{(m+1),(n+1)}$ 具有形式 *(2.1)*，其中 $x^Ty=z^Tw=0$。假设 M 是 *Moore–Penrose* 矩阵且核 *EP* 可逆（等价地，定义于 s、u、t、v、r、h 中的标量 (2.2) 均非零）。则 M 的 *GDC* 逆为

$$M^{GDC}=\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & \overline{a}(br)^{-1}x^T & b^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline a^{-1} & 0 & 0 & \overline{b}(ah)^{-1}z^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

引理 6.2。 设 M 是一个具有相应双星有向图 $S_{(m+1)\text{的矩阵}(n+1)}$，其形式为（*2.1*），且满足 $x^Ty\neq 0$，$z^Tw=0$ 以及 $\zeta=x^Ty+ab\neq 0$。假设 M 是 *Moore–Penrose* 可逆的，且 $M^{\textcircled{d}}\bigcirc$ 存在（等价地，在 （2.2）中定义的标量 s、u、t、v、h和 β 均非零）。则 M 的 *GDC* 逆为

$$M^{GDC}=\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & \beta^{-1}\overline{\zeta}x^T & \beta^{-1}(a\overline{\zeta}+\overline{b}w^*w) & 0 \\ (s\zeta)^{-1}(x^Ty)\overline{x} & 0 & 0 & \overline{b}(hs\zeta)^{-1}(x^Ty)\overline{x}z^T \\ \hline b\zeta^{-1} & 0 & 0 & b\overline{b}(h\zeta)^{-1}z^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

引理 6.3。 设 M 是一个关联双星有向图 $S_{(m+1)\text{的矩阵},(n+1)}$ 其形式为 （(2.1)），其中 $x^Ty=z^Tw=0$。假设 $M^{\dagger}$ 存在，且 M 是对偶核 *EP* 可逆的（等价地，s、u、t、v、p、q 中定义的标量 (2.2) 均非零）。则

M 的 *GC* 逆为

$$M^{GC} = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & b^{-1} & 0 \\ \bar{b}(ap)^{-1}y & 0 & 0 & 0 \\ \hline a^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{a}(bq)^{-1}w & 0 \end{array}\right].$$

引理6.4。 设 M 是一个矩阵，其关联的双星有向图 $S_{(m+1),\ (n+1)}$ 具有形式（2.1），其中 $x^Ty \neq 0,\ \ z^Tw = 0$ 且 $\zeta = x^Ty + ab \neq 0$。假设 M 具有 *Moore–Penrose* 逆且对偶核 *EP* 可逆（等价地，标量 $s,\ u,\ t,\ v,\ q,\ \alpha$ 在 2.2中定义的均非零）。那么， M 的 *GC* 逆为

$$M^{GC} = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & (u\zeta)^{-1}(x^Ty)y^* & a\zeta^{-1} & 0 \\ \alpha^{-1}\bar{\zeta}y & 0 & 0 & 0 \\ \hline \alpha^{-1}(b\bar{\zeta} + \bar{a}z^*z) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{a}(uq\zeta)^{-1}(x^Ty)wy^* & a\bar{a}(q\zeta)^{-1}w & 0 \end{array}\right].$$

上述四个引理给出了情形 I（引理6.1 和6.3）及情形 II（引理6.2和6.4）中广义对偶核逆和广义核逆的显式分块公式。与前述情况一样，情形 III 对应于退化构型，因此可立即得出，在此情形下， $M^{\mathrm{GDC}} = 0$和 $M_{\mathrm{GC}} = 0$。

与 MPCEP 和 *CEPMP 逆的分析一样，与双星有向图相关的矩阵的 GDC 逆和 GC 逆在情形 I 和情形 II 中均不相同。事实上，直接比较情形 I 中的显式公式可知，恒等式$M_{\mathrm{GDC}} = M^{\mathrm{GC}}$将迫使 $x = y = z = w = 0$，这与双星有向图的定义结构相矛盾。在情形 II 中，假设 $M^{\mathrm{GDC}} = M^{\mathrm{GC}}$ 也会导致类似的矛盾。

7. Summary of existence conditions

为方便读者，表1 总结了本文所研究的与双星有向图相关的矩阵的各种广义逆的存在条件，范围限于群逆不存在且 Drazin逆非零的非平凡情形。该表汇总了第4–6 节针对情形 I 和 II 得出的条件，并突出显示各广义逆对式（2.2）中定义的结构参数的依赖关系。

Table 1. 非群可逆情形 I 和 II 中与双星有向图相关的矩阵的广义逆存在条件，以 (2.2) 中定义的结构参数表示。

逆	情形 I	情形 II
$M^{\dagger}$	$s,\ u,\ t,\ v \neq 0$	$s,\ u,\ t,\ v \neq 0$
$M^{\textcircled{d}}$	$r,\ \ h \neq 0$	$h,\ \ \beta \neq 0$
$M_{\textcircled{d}}$	$p,\ \ q \neq 0$	$q,\ \ \alpha \neq 0$
$M^{\dagger,\ \textcircled{d}}$	$s,\ u,\ t,\ v,\ r,\ h \neq 0$	$s,\ u,\ t,\ v,\ h,\ \beta \neq 0$
$M_{\textcircled{d}}$	$s,\ u,\ t,\ v,\ p,\ q \neq 0$	$s,\ u,\ t,\ v,\ q,\ \alpha \neq 0$
M_{GDC}	$s, u, t, v, r, h \neq 0$	$s, u, t, v, h, \beta \neq 0$
M^{GC}	$s, u, t, v, p, q \neq 0$	$s, u, t, v, q, \alpha \neq 0$

Acknowledgements

本研究部分由葡萄牙基金通过 FCT（Fundaˆc˜ao para a Ciˆencia ea Tecnologia）资助，项目编号为 UID/00013/2025。

Data Availability

本研究未生成或分析任何数据集。所有结果均为理论结果，并完整包含在本文中。

Conflict of interest

作者声明不存在任何利益冲突。

References

[1] O. M. Baksalary 和 G. Trenkler。矩阵的核逆。线性与多重线性代数，58(6):681–697，2010。[2] R. Balaji、R. B. Bapat 和 S. Goel。偶数个顶点的轮图距离矩阵的一个逆公式。线性代数及其应用，610:274–292，2021。[3] R. B. Bapat。图与矩阵。Universitext丛书。Springer，伦敦，2014。[4] R. B. Bapat 和 E. Ghorbani。三角矩阵的逆与二部图。线性代数及其应用，447:68–73，2014。[5] A. Ben-Israel 和 N. E. Greville。广义逆：理论与应用。Springer-Verlag，纽约，第2版，2003。[6] S. L. Campbell 和 C. D. Jr. Meyer。线性变换的广义逆。Pitman，伦敦，1979。[7] M. Catral、D. D. Olesky 和 P. van den Driessche。具有路径图的矩阵的群逆。电子线性代数杂志，17:219–233，2008。[8] M. Catral、D. D. Olesky 和 P. van den Driessche。二部矩阵的 Drazin 逆的块表示。电子线性代数杂志，18:98–107，2009。[9] J. Chen 和 X. Zhang。广义逆的代数理论。科学出版社和 Springer，北京和新加坡，2024。[10] J. L. Chen、D. Mosi´c 和 S. Z. Xu。关于希尔伯特空间算子的一种新的广义逆。数学问题，43(9):1331–1348，2020。[11] R. E. Cline。表示在矩阵广义逆中的一个应用。技术报告第592号，威斯康星大学麦迪逊分校数学研究中心，麦迪逊，威斯康星州，1965。[12]R. E. Cline。矩阵的秩不变幂的逆。SIAM数值分析杂志，5:182–197，1968。[13] D. S. Cvetkovi´c-Ili´c、O. M. Baksalary 和 H. Zou。拟幂零性与 Drazin 可逆性在矩阵及其元素之间的传递。西班牙皇家精确、物理与自然科学院杂志 A 辑：数学，118(3):第82号论文，2024。[14] Y. Gao 和 J. Chen。带对合环中的伪核逆。代数通讯，46(1):38–50，2018。[15] C. D. Godsil。树的逆。组合数学，5(1):33–39，1985。[16] R. E. Hartwig。块广义逆。有理力学与分析档案，61(3):197–251，1976。[17] J. Ji 和 Y. Wei。矩阵的核-EP逆、加权核-EP逆及约束线性方程组。数学研究通讯，37(1):86–112，2021。[18] Y. Ke、L. Wang 和 J. Chen。乘积的核逆与 2×2 矩阵。马来西亚数学科学学会通报，42:51–66，2019。

[19] T. T. Li 和 J. L. Chen。带对合环中核逆与对偶核逆的刻画。线性与多重线性代数，66:717–730，2018。[20] F. A. Maciala、C. Mendes Ara´ujo 和 Pedro Patr´ıcio。双星有向图矩阵的 Drazin 指数刻画。载于2025年第七届国际应用数学、建模与仿真会议（AMMS 2025）论文集，第5页，希腊雅典，2025年9月。ACM。[21] S. B. Malik 和 N. Thome。关于任意指数矩阵的一种新的广义逆。应用数学与计算，226:575–580，2014。[22] J. J. McDonald、R. Nandi 和 K. C. Sivakumar。与某些图类相关的矩阵的群逆。电子线性代数杂志，38:204–220，2022。[23] C. McLeman 和 A. McNicholas。图的可逆性。图与组合，30:977–1002，2014。[24] C. Mendes Ara´ujo、F. A. Maciala 和 P. Patr´ıcio。关于与某些图类相关的矩阵的广义逆。地中海数学杂志，23:58，2026。[25] D. Mosi´c。核逆与对偶核逆的新推广。德布勒森数学出版物，105(1-2):119–140，2024。[26] D. Mosi´c 和 D. E. Ferreyra。核逆的一种新扩展。计算与应用数学杂志，457:第116305号论文，2025。[27] D. Mosi´c 和 J. Marovt。加权广义核-EP逆。线性与多重线性代数，73(6):1040–1061，2024。[28] D. Mosi´c、P. S. Stanimirovi´c 和 H. Ma。矩形矩阵的核-EP逆推广。数学分析与应用杂志，500(1):125101，2021。[29] R. Puystjens 和 D. W. Robinson。具有分解的态射的 Moore-Penrose逆。线性代数及其应用，40:129–141，1981。[30] P. S. Stanimirovi´c、D. Mosi´c 和 Y. Wei。复合广义逆综述。载于《广义逆：算法与应用》，数学研究进展丛书，第1章。Nova Science Publishers，纽约，2022。[31] L. Wang、D. Mosi´c 和 Y. Gao。右核逆及相关广义逆。代数通讯，47(11):4749–4762，2019。[32] H. Wu、H. Wei、H. Wang 和 H. Jin。m-核-EP逆的刻画与表示。Filomat，38(14):4893–4910，2024。[33] H. Zhu、L. Wu 和 J. Chen。半群与带对合环中的一类新广义逆。代数通讯，51(5):2098–2113，2023。

Faustino Maciala, CMAT – Centro de Matemática Universidade do Minho 4710-057 Braga Portugal, Departamento de Ciências da Natureza e Ciências Exatas do Instituto Superior de Ciências da Educação de Cabinda – ISCED-Cabinda Angola. *Email address*: fausmacialamath@hotmail.com

C. Mendes Araújo, CMAT – Centro de Matemática and Departamento de Matemática Universidade do Minho 4710-057 Braga Portugal*Email address*: clmendes@math.uminho.pt

Pedro Patrício, CMAT – Centro de Matemática and Departamento de Matemática Universidade do Minho 4710-057 Braga Portugal*Email address*: pedro@math.uminho.pt