arXiv:2603.14205v1 [math.DS] 15 Mar 2026

基于动态模态分解的数据驱动的实验模态分析

Akira Saito[a], *, Tomohiro Kuno[a]

[a]日本神奈川县川崎市 *214-8571* 明治大学

摘要

本文探讨了将动态模态分解（DMD）应用于线性机械系统模态特性提取，即实验模态分析（EMA）。首先，简要回顾 DMD 的理论背景，并讨论其与 Ibrahim 时域法的相关性。其次，将 DMD 应用于单自由度系统和多自由度离散系统，以探讨 DMD 作为实验模态分析方法的适用性及其解释方式。此外，还讨论了测量误差对 DMD 结果的影响。研究表明，测量误差较小时，DMD 能够准确提取模态参数；然而，测量误差较大时，DMD 则无法提取模态参数。最后，将 DMD 应用于实验获得的悬臂梁位移场，并提取其模态参数。研究表明，DMD 提取的模态参数与现有模态参数提取方法得到的结果同样准确。

关键词： 动态模态分解、实验模态分析、Ibrahim 时域法

1. 引言

迄今为止，人们已进行了许多尝试，以揭示承受动态载荷的工程结构的模态特性。当结构的动力学处于线性动力学范围内时，其动力学特性可以通过模态的线性组合得到良好描述，因此结构的模态特性具有重要意义。这使人们能够准确、恰当地设计、控制和优化结构的动力学特性。

模态特性通常从实验获得的频率响应函数（FRFs）或时域响应中提取。这一过程称为实验模态分析（EMA），是结构动力学中的关键技术之一。模态参数提取方法大致可分为两类：基于频域信号的方法和基于时域信号的方法。如今，与时域方法相比，频域方法的应用更为普遍。特别是，基于最小二乘复频率（LSCF）域方法的一类频域方法 [1, 2] 因其能够出色地提取各种结构的模态特性而得到广泛应用。时域方法的应用仅限于特定场景，尤其是在固有频率非常低的结构中，获取数个周期数据所需的时间可能成为实际问题 [3]。

在流体力学领域，为了从流场中提取相干结构，人们提出了一种称为本征正交分解（POD）的降维方法 [4]。随后，POD 被应用于非线性机械系统，并广泛用于结构动力学领域 [5, 6]。尽管可以根据相应特征值的大小来判断 POD 提取的模态（称为 POD 模态）的重要性，但这些特征值有时也称为 POD 值；而它们的时间信息，即频率和阻尼比，却完全丢失了。最近，为了克服 POD 的这一缺点，动态

*本文为已录用版本，原文发表于：A. Saito 和 T. Kuno，《基于动态模态分解的数据驱动实验模态分析》，《声学与振动杂志》481，115434（2020）。https://doi.org/10.1016/j.jsv.2020.115434 © 2020 作者。由爱思唯尔有限公司出版。本稿件版本依据 CC-BY-NC-ND 4.0 许可证（https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/）提供。

*通讯作者。电话：+81 44 934 7370。电子邮箱：asaito@meiji.ac.jp（Akira Saito）

模态分解 （DMD）由 Schmid 提出 [7]，作为 POD 的一种扩展，非常适用于未知控制方程的数据驱动场景。与 POD 不同，DMD 不仅能够提取模态，还能提取其时间特性，即频率和衰减率。凭借这一特性，DMD 得到了积极发展，并被应用于涉及非线性过程的各种数值或实验研究，例如三维腔体中的声学模态识别 [8], 旋流问题 [9], 燃烧 [10], 以及压力敏感漆数据 [11],等诸多领域。

由于 DMD 能够从数据中提取空间相干结构及其时间特性，因此，如果数据来自结构的振动试验，这些量就对应于结构的模态参数，即振型、固有频率和阻尼比。然而，迄今为止，尝试将 DMD 应用于结构动力学的研究还很少，这可能是因为在结构动力学中，无论是数值获得的数据还是实验获得的数据，测量振动数据中的相干结构都可以直接用振动模态来表示。从 EMA 的角度来看，由于 DMD 基于时域数据，因此该方法被归类为时域方法。由于该方法一直被积极开发用于提取流场等超大规模系统的模态，因此它有望应用于具有大量测量点的数据驱动结构动力学问题。随着人们越来越需要利用众多传感器捕捉结构上精确结构响应的分布，DMD 的这一能力将十分有益。本文将 DMD 应用于提取机械系统的模态特性，并讨论其作为一种 EMA 方法的能力和潜力。

本文其余部分安排如下：第2节简要回顾动态模态分解的数学背景。第3节使用离散质量-弹簧-阻尼器系统给出数值示例。第4节将动态模态分解应用于对冲击载荷作用下振动悬臂梁的实验测得位移场，并将结果与传统实验模态分析方法所得结果进行比较。第5节给出结论。

2. 理论

本节从结构动力学的角度简要回顾动态模态分解的数学背景。具体而言，重点关注动态模态分解与 Ibrahim 时域法（ITD） [3]的关联；后者是一种经典的时域模态提取方法。

2.1. 动态模态分解

动态模态分解的数学定义如下。设$\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^m$ 表示一个广义坐标向量，或一个 m 维动力系统的状态向量，其中 t 表示时间。考虑一个快照矩阵$\mathbf{X}$，其中包含广义坐标$\mathbf{x}_j \triangleq \mathbf{x}(t_j)$在 $j = 1, \ldots, n$ 时的快照，并以这些快照作为列向量，即$\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n]$，其中$t_{j+1} = t_j + \Delta t$。尽管动态模态分解不要求 Δt 为常数，但本文假设其始终保持不变。此外，定义一个时间移位的快照矩阵$\mathbf{Y} = [\mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_{n+1}]$。接下来假设$\mathbf{x}^j$ 与$\mathbf{x}^{j+1}$之间存在线性变换，该变换由矩阵$\mathbf{A}$表示，即

$$\mathbf{x}_{j+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_j, \tag{1}$$

从而导致

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X}, \tag{2}$$

其中

$$\mathbf{A} = \mathbf{Y}\mathbf{X}^{\dagger}, \tag{3}$$

并且$\mathbf{X}^{\dagger}$ 表示$\mathbf{X}$的 Moore–Penrose 伪逆矩阵。*DMD* 模态和特征值定义为$\mathbf{A}$的特征向量和特征值。若对$\mathbf{X}$进行奇异值分解，则$\mathbf{X} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^*$ 其中$\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{m\times r}$、 $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}^{r\times r}$和$\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{n\times r}$、 r 是$\mathbf{X}$的秩，而 * 表示矩阵的厄米转置。请注意，根据定义，$\mathbf{U}$ 包含*POD* 模态。随后可按如下方式计算伪逆：

$$\mathbf{X}^{\dagger} = \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{U}^*. \tag{4}$$

然后，通过计算投影矩阵A在POD 模态上的特征值 [12]即可得到动态模态分解特征值。也就是说，将投影矩阵定义为

$$\tilde{\mathbf{A}} \triangleq \mathbf{U}^{*}\mathbf{A}\mathbf{U} = \mathbf{U}^{*}\mathbf{Y}\mathbf{V}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{U}^{*}\mathbf{U} = \mathbf{U}^{*}\mathbf{Y}\mathbf{V}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}, \tag{5}$$

˜DMD特征值是$\mathbf{A}$的特征值，即：

$$\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{w} = \mu\mathbf{w}, \tag{6}$$

其中，μ 是DMD特征值。对应于 μ 的DMD 模态定义为：

$$\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{U}\mathbf{w}. \tag{7}$$

现在，我们从线性系统理论的角度讨论如何根据DMD特征值和DMD 模态获得阻尼比和固有频率。分别将第 i个DMD特征值和模态记为 μ_i和 $\boldsymbol{\varphi}_i$，则有以下关系：

$$\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\Phi}^{*}\mathbf{A}\boldsymbol{\Phi}, \tag{8}$$

其中，$\boldsymbol{\Phi} = [\boldsymbol{\varphi}_1, \ldots, \boldsymbol{\varphi}_m]$ 和 $\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}_{i=1}^{m}(\mu_i)$。将模态坐标变换$\mathbf{x}_j = \boldsymbol{\Phi}\mathbf{q}^j$ 应用于方程（1），其中$\mathbf{q}^j$ 表示 t_j处的模态坐标向量，可得

$$\mathbf{q}_{j+1} = \boldsymbol{\Phi}^{*}\mathbf{A}\boldsymbol{\Phi}\mathbf{q}_j = \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{q}_j. \tag{9}$$

注意到，方程（9）可从 $j = k$ 到 $j = 0$重复，因此可得以下关系：

$$\mathbf{q}_k = \boldsymbol{\Lambda}^{k}\mathbf{q}_0, \tag{10}$$

其中$\mathbf{q}_0 = \boldsymbol{\Phi}^{*}\mathbf{x}_0$。因此，

$$\mathbf{x}_k = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Lambda}^{k}\mathbf{q}_0. \tag{11}$$

或者，等价地，可写为

$$\mathbf{x}_k = \sum_{i=1}^{m}\mu_i^{k}\boldsymbol{\varphi}_i q_{0,i}, \tag{12}$$

其中 $q_{0,\ i}$ 表示 i个分量中的第 $\mathbf{q}_0$。现在考虑产生式（1）所定义的离散动力系统的连续时间动力系统，即

$$\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\mathcal{A}}\mathbf{x}, \tag{13}$$

其中 $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ 是 $\mathbf{A}$的连续对应形式。对于给定初始条件，方程（12）的解 $\mathbf{x}(0)$ 可写为（例如参见 [13]）：

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^{m}\mathrm{e}^{s_i t}\boldsymbol{\phi}_i p_{0,i}, \tag{14}$$

其中 s_i 和 $\boldsymbol{\phi}_i$ 分别表示$\boldsymbol{\mathcal{A}}$的第 i个特征值和特征向量，$p_{0,\ i}$ 是$\mathbf{p}_0 = \boldsymbol{\Psi}^{*}\mathbf{x}(0)$ 对应的第 i个模态坐标，其中 $\boldsymbol{\Psi} = [\boldsymbol{\phi}_1, \ldots, \boldsymbol{\phi}_m]$。比较 $t = t_k = k\Delta t$ 处的方程（12）和（14），并假设 $\boldsymbol{\phi}_i \approx \boldsymbol{\varphi}_i$ 和$p_{0,\ i} \approx q_{0,\ i}$，可知

$$\mathrm{e}^{s_i k\Delta t} = \mu_i^{k}. \tag{15}$$

由此得到

$$s_i = \log(\mu_i)/\Delta t. \tag{16}$$

如式（14）所示，特征值 s_i 包含 $\boldsymbol{\phi}_i$的时间特性，通常用固有频率和阻尼比表示，如下所示，

$$s_i = -\zeta_i\omega_i \pm \mathrm{j}\omega_i\sqrt{1-\zeta_i^2}, \tag{17}$$

其中， ω_i 表示固有频率， ζ_i 表示相应的模态阻尼比。因此，可以提取无阻尼固有频率 f_i和模态阻尼比 ζ_i，如下所示。

$$f_i = |s_i|/2\pi, \tag{18}$$

$$\zeta_i = -\mathrm{Re}(s_i)/|s_i|. \tag{19}$$

众所周知，DMD 可对关联两个数据矩阵的最佳拟合线性算子进行近似特征分解 [14], ，在此情形下，该算子就是矩阵$\mathbf{A}$。还需注意，众所周知，DMD 可以近似求得*Koopman* 算子的特征函数 [15]。此外，已知当系统为线性系统时，从系统时间序列中提取的振动系统正则模态与 Koopman 算子的特征函数相同 [16]。因此，对于振动系统，由于$\mathbf{A}$的特征值和特征向量近似于底层动力系统的特征值和特征向量，即式（***13***）中的A，DMD 模态及其特征值应分别对应于正则模态及其特征值，其中包含无阻尼固有频率及相应的阻尼比。

由于本文关注的过程是线性的，因此待求的 DMD 模态具有驻波的特性。众所周知，上述定义的 DMD程序无法捕捉驻波的行为。对于这种情况，需要重新定义快照矩阵$\mathbf{X}$和$\mathbf{Y}$，并附加经时间平移的快照，如下所示 [12],

$$\mathbf{X} \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \\ \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_{n+1} \end{pmatrix}, \tag{20}$$

$$\mathbf{Y} \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_{n+1} \\ \mathbf{x}_3, \ldots, \mathbf{x}_{n+2} \end{pmatrix}. \tag{21}$$

随后将 DMD 计算应用于方程（20）和（21）。

2.2. 与 *Ibrahim* 时域法的关系

本小节简要回顾 Ibrahim 时域法（ITD），并讨论其与 DMD 的关系。ITD 是一种时域模态参数提取方法，可从单次测量 [3]中的一组自由振动测量数据中获得一组唯一的模态参数。ITD 假设黏性阻尼多自由度系统的自由响应形式如下:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}, \tag{22}$$

其中 $\mathbf{M}$、$\mathbf{C}$和$\mathbf{K}$ 分别表示质量、阻尼和刚度矩阵，$\mathbf{u}(t)$ 是位移坐标向量，$\mathbf{M}$、$\mathbf{C}$、$\mathbf{K}$ $\in \mathbb{R}^{m\times m}$和$\mathbf{u}(t)$ $\in \mathbb{R}^m$， m是系统的自由度数。在给定时刻 $t = t_j$其中$t_j \in [t_1, t_n]$，$\mathbf{u}(t_j)$ 可表示为系统方程（22）中特征向量的线性组合，即

$$\mathbf{u}(t_j) = \sum_{i=1}^{2n} \boldsymbol{\psi}_i \mathrm{e}^{s_i t_j}, \tag{23}$$

其中， s_i 表示第 i个特征值， $\boldsymbol{\psi}_i$ 表示相应的特征向量。注意， s_i 和 $\boldsymbol{\psi}_i$ 包含 m 个共轭复数对。定义矩阵 $\mathbf{U}_{2n} = [\mathbf{u}(t_1) \ldots, \mathbf{u}(t_{2n})]$, 和 $\boldsymbol{\Phi} = [\boldsymbol{\phi}_1, \ldots, \boldsymbol{\phi}_{2n}]$，可得以下关系。

$$\mathbf{U}_{2n} = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Lambda}, \tag{24}$$

其中

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{s_1 t_1} & \cdots & \mathrm{e}^{s_1 t_{2n}} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathrm{e}^{s_{2n} t_1} & \cdots & \mathrm{e}^{s_{2n} t_{2n}} \end{pmatrix}. \tag{25}$$

请注意，$\mathbf{U}$ $\in \mathbb{R}^{n\times 2n}$、 $\boldsymbol{\Phi} \in \mathbb{C}^{n\times 2n}$ 和 $\boldsymbol{\Lambda} \in \mathbb{C}^{2n\times 2n}$。接下来考虑时间瞬间 t_{j+1}处的以下展开，其中 $t_{j+1} = t_j + \Delta t$ 对于 $j = 1$、.....、 $2n$,

$$\mathbf{u}(t_{j+1}) = \sum_{i=1}^{2n} \tilde{\boldsymbol{\phi}}_i \mathrm{e}^{s_i t_j}, \tag{26}$$

其中 $\tilde{\phi}_i = \phi_i e^{s_i \Delta t}$。由于这对于 t_{j+1} 对 $i = 1$、……、$2n$均成立，因此可得到以下关系，即：

$$\mathbf{U}_{2n+1} = \tilde{\mathbf{\Phi}}\mathbf{\Lambda}, \tag{27}$$

~ ~ ~其中$\mathbf{U}_{2n+1} = [\mathbf{u}(t_2)\ldots,\mathbf{u}(t_{2n+1})]$, $\mathbf{\Phi} = [\phi_1, \ldots, \phi_{2n}]$。最后，考虑时间瞬间 t_{j+2} 对应的第三组方程，其中 $t_{j+2} = t_j + 2\Delta t$，对于 $j = 1, \ldots, 2n$,

$$\mathbf{u}(t_{j+2}) = \sum_{i=1}^{2n} \hat{\phi}_i e^{s_i t_j}, \tag{28}$$

其中 ^ $\phi_i = \phi_i e^{s_i 2\Delta t}$。

$$\mathbf{U}_{2n+2} = \hat{\mathbf{\Phi}}\mathbf{\Lambda}, \tag{29}$$

wh ^^ ^其中 $\mathbf{U}_{2n+2} = [\mathbf{u}(t_3)\ldots,\mathbf{u}(t_{2n+2})]$ 和 $\mathbf{\Phi} = [\phi_1, \ldots, \phi_{2n}]$。由方程（23）、（27）和（29），我们得到 in

$$\mathbf{X} = \mathbf{\Psi}\mathbf{\Lambda}, \tag{30}$$

$$\tilde{\mathbf{X}} = \tilde{\mathbf{\Psi}}\mathbf{\Lambda}, \tag{31}$$

其中

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{2n} \\ \mathbf{U}_{2n+1} \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{2n+1} \\ \mathbf{U}_{2n+2} \end{bmatrix}, \mathbf{\Psi} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi} \\ \tilde{\mathbf{\Phi}} \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{\Psi}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{\Phi}} \\ \hat{\mathbf{\Phi}} \end{bmatrix}.$$

由此得到

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{\Psi}} &= \tilde{\mathbf{X}}\mathbf{\Lambda}^{-1} \\ &= \tilde{\mathbf{X}}\mathbf{X}^{-1}\mathbf{\Psi}. \end{aligned} \tag{32}$$

~ ~分别将 $\mathbf{\Psi}$ 和 $\mathbf{\Psi}$ 的第 i 列记为 ψ_i 和 ψ_i，则有如下关系：

$$\tilde{\psi}_i = \psi_i e^{s_i \Delta t}. \tag{33}$$

因此，将式（33）代入式（32），可得到以下特征值问题：

$$\left(\tilde{\mathbf{X}}\mathbf{X}^{-1}\right)\psi_i = \mu_i \psi_i, \quad i = 1, \ldots, 2n, \tag{34}$$

其中 $\mu_i = e^{s_i \Delta t}$，且 $\mu_i \in \mathbb{C}$。如果快照 $\mathbf{U}$ 中的时间点数量大于系统规模 $2n$，则无法对式（**32**）中的 X 求逆，因为 $\mathbf{X}$ 是矩形矩阵。因此，逆矩阵由 Moore-Penrose 伪逆替代，如下所示：

$$\tilde{\mathbf{\Psi}} = \tilde{\mathbf{X}}\mathbf{X}^{\dagger}\mathbf{\Psi}, \tag{35}$$

其中 $\mathbf{X}^{\dagger} = \mathbf{X}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{X}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$。于是，式（34）中的特征值问题变为：

$$\left(\tilde{\mathbf{X}}\mathbf{X}^{\dagger}\right)\psi_i = \mu_i \psi_i, \quad i = 1, \ldots, 2n. \tag{36}$$

根据定义，ψ_i 中的前 n 个条目包含系统的第 i个特征向量。因此，通过根据快照矩阵 $\mathbf{X}$ 和$\mathbf{X}$计算 μ_i 和 ψ_i，即可获得系统的模态参数。

在动态模态分解（DMD）的背景下，式（35）中定义的矩阵 A 等价于 $\mathbf{X}\mathbf{X}^{\dagger}$ 的特征值和特征向量与 DMD 特征值和特征向量等价。然而，在 DMD 中，由于 $\mathbf{A}$ 的伪逆是通过奇异值分解得到的，因此可以忽略幅值较小的奇异值及其对应的左、右奇异向量。这意味着 DMD 中涉及的伪求逆在数值上比 ITD 方法所采用的伪求逆更加稳定。此外，DMD 模态可以根据奇异值的大小进行排序。

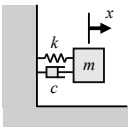


图1：单自由度振荡器模型

2.3. 最小二乘复频域法

LSCF 方法是应用最广泛的频域模态参数提取方法之一。下面简要回顾 LSCF 方法的数学公式。将对象第 o 个输出点的频响函数记为 $H_o(\omega)$，LSCF 方法假设其可表示为 [1, 2],

$$H_o(\omega) = B_o(\omega)/A(\omega), \tag{37}$$

and

$$B_o(\omega) = \sum_{p=0}^{N_p} b_{o,p} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}p\omega T_s}, \tag{38}$$

$$A(\omega) = \sum_{p=0}^{N_p} a_p \mathrm{e}^{-\mathrm{j}p\omega T_s}, \tag{39}$$

其中，N_p 表示所考虑的最大多项式阶数，$b_{o,\ p}$ 和 a_p 表示待确定的未知系数，T_s 为采样周期。采用加权线性最小二乘法估计这些未知系数。将未知系数组合为 $\boldsymbol{\theta} = [b_{o,0}, \cdots, b_{o,N_p}, a_0, \cdots, a_{N_p}]$后，加权线性最小二乘法定义为

$$\underset{\boldsymbol{\theta}}{\text{minimize}}\, A(\omega_k)\varepsilon_o(\omega_k, \boldsymbol{\theta}), \quad \text{for } k = 1, \ldots, N_f \tag{40}$$

其中，N_f 表示频率线的数量，ε_o 定义为测量的ˆ频响函数 H_o 与其近似值（由式（37）表示）之间的加权差值，即:

$$\varepsilon_o(\omega_k, \boldsymbol{\theta}) = w(\omega_k)\left[H_o(\omega_f, \boldsymbol{\theta}) - \hat{H}_o(\omega_f)\right], \quad \text{for } k = 1, \ldots, N_f, \tag{41}$$

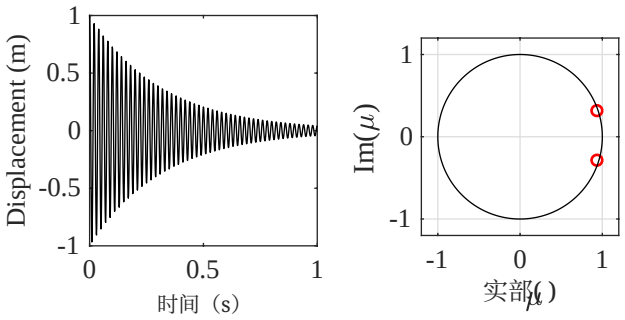
其中，$w(\omega_k)$是随频率变化的权重，例如可以是相干函数的函数。对于给定的 N_p值，求解该方程，并将特征多项式的特征值识别为系统的极点，其中包含结构的固有频率及其对应阻尼比的信息。该过程的缺点是会产生不代表物理振动模态的数学极点。为解决这一问题，随着 N_p逐渐增大，重复此过程，并绘制稳定图，其中无论 N_p 如何变化均出现的极点都被识别为稳定极点，即物理振动模态。

3. 数值示例

本节通过数值示例，介绍如何应用动态模态分解识别机械结构的模态特性。

3.1. 单自由度系统

考虑图中所示的单自由度阻尼振子。 1，其中 $m = 1$千克， $c = 6.2832$牛·秒/米，以及 $k = 9.8696 \times 10^4$牛/米。对于这个示例，所选参数值对应的固有频率为 $f_n = \omega_n/(2\pi) = 50$赫兹，



(a) 时间历程　　(b) DMD特征值

图 2：质量块的时间历程及提取的DMD特征值

表 1：通过动态模态分解提取的固有频率和阻尼比

	f_n	ζ
精确值	5.00×10^1赫兹	1.00×10^{-2}
DMD	4.99×10^1赫兹	1.00×10^{-2}
相对误差	1.13×10^{-13}%	2.41×10^{-12}%

$\zeta = 0.01$，阻尼固有频率为 $f_d = 49.9997$赫兹。由于这是一个欠阻尼单自由度振子，在给定一组初始条件下，质量块的时域响应 $x(0) = x_0$ 和 $\dot{x}(0) = v_0$ 可写为 [17]，

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\zeta\omega_n t}\left(x_0\cos(\omega_d t) + \frac{v_0 + \zeta\omega_n x_0}{\omega_d}\sin(\omega_d t)\right), \tag{42}$$

其中 $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ 为阻尼固有频率，$\omega_n = \sqrt{k/m}$ 为无阻尼固有频率，且$\zeta = c/2\sqrt{mk}$ 为阻尼比。根据初始条件 $x_0 = 1$ 和 $v_0 = 0$，使用式（42）计算质量块的位移 $0 \leqslant t \leqslant 1$，并在 $n = 1024$ 个离散时刻采样。位移的时域响应如图 2（a）所示。正如预期，位移呈现阻尼振荡。随后，按照第 2节所述的步骤，对获得的快照应用动态模态分解。在图 2（b）中，获得的 DMD特征值 μ显示在带有单位圆的复平面上。如图所示，DMD特征值呈现为一对共轭复数，其中

$$\mu = 0.9503 \pm 0.3014\mathrm{j}. \tag{43}$$

由于阻尼的作用，它们略微位于单位圆内，即 $|\mu| = 0.9969$。应用方程（18）和（19）可得f_n 以及 ζ。所得结果如表1所示。可以看出，f_n 和 ζ 通过动态模态分解算法提取得到的结果与精确值吻合得非常好。

3.2. 六自由度系统

接下来，考虑图中所示的六自由度质量-弹簧-阻尼器系统，作为多自由度机械系统的一个代表性示例。3 该系统的运动方程可写成如下矩阵-向量表示形式：

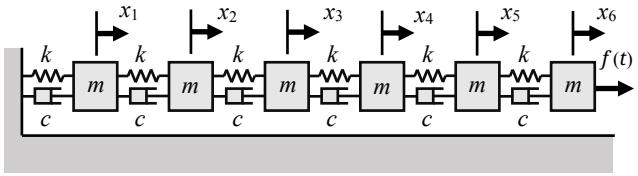


图3：六自由度系统

表 2：六自由度系统的模态阻尼比和无阻尼固有频率

i	$f_{n,\,i}$ (赫兹)	ζ_i
1	0.0384	1.2054×10^{-3}
2	0.1129	3.5460×10^{-3}
3	0.1808	5.6806×10^{-3}
4	0.2383	7.4851×10^{-3}
5	0.2818	8.8546×10^{-3}
6	0.3091	9.7094×10^{-3}

形式：

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t), \tag{44}$$

其中 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6]^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{K}$ 分别为质量、阻尼和刚度矩阵，其定义如下

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m \end{pmatrix}, \tag{45}$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 2k & -k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k & 2k & -k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k & 2k & -k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k & 2k & -k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k & 2k & -k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k & k \end{pmatrix}, \tag{46}$$

且 $\mathbf{C} = (c/k)\mathbf{K}$。$\mathbf{f}(t)$ 是外部激励向量，其中 $\mathbf{f}(t) = [0, 0, 0, 0, 0, f(t)]^{\mathrm{T}}$。根据标准模态叠加法，给定质量归一化模态矩阵 $\mathbf{\Phi} = [\boldsymbol{\phi}_1, \ldots, \boldsymbol{\phi}_6]$，运动方程（式 44）可改写为：

$$\ddot{z}_i(t) + 2\zeta_i\omega_i\dot{z}_i(t) + \omega_i^2 z_i(t) = g_i(t), \tag{47}$$

其中 $z_i(t)$ 是第 i 个模态坐标，满足

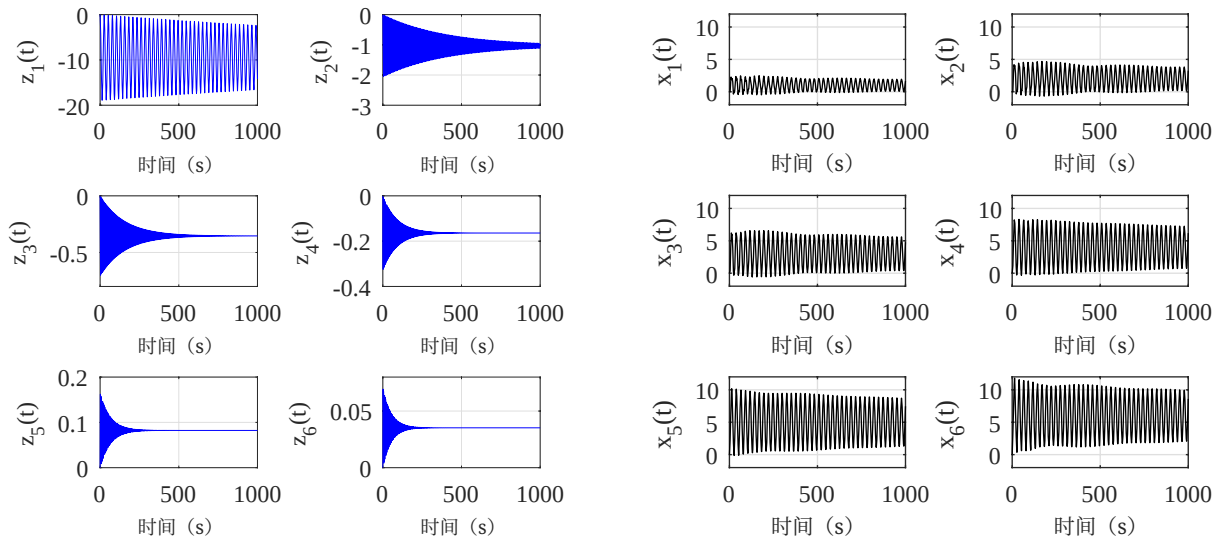
$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}\mathbf{z}(t), \tag{48}$$

其中 $\mathbf{z}(t) = [z_1(t) \ldots\ldots, z_6(t)]^{\mathrm{T}}$，$\omega_i$ 是第 i 阶（无阻尼）固有频率，ζ_i 是第 i 阶模态阻尼比，$g_i(t)$ 是第 i 阶模态激励，定义为 $g_i(t) = \boldsymbol{\phi}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{f}(t)$。在此数值算例中，考虑对第六自由度施加单位阶跃激励的情况，即 $f(t) = 1$，其中 $t \geqslant 0$。此外，数值算例的生成采用了 $m = 1$、$c = 0.01$ 和 $k = 1$。由此得到的固有频率及相应的模态阻尼比如表 2 所示。如表 2 所示，所有模态坐标均为欠阻尼。因此，可以轻松求得 $z_i(t)$ 的解析解，如下所示。

$$z_i(t) = \frac{g_i}{\omega_i^2}\left[1 - \mathrm{e}^{-\zeta_i\omega_i t}\left(\cos\omega_{di}t + \frac{\zeta_i}{\sqrt{1-\zeta_i^2}}\sin\omega_{di}t\right)\right], \tag{49}$$

其中 $\omega_{di} = \omega_i\sqrt{1-\zeta_i^2}$。物理自由度可通过公式（48）恢复。

模态坐标的时域响应根据式（49）针对 $0 \leqslant t \leqslant 1000$[s]，计算得出，并如图 4(a) 所示。如图所示，随着模态序号增加，模态坐标的频率也随之升高，且趋于更快收敛；同时，阻尼比也随模态序号增加而增大，如表 2 所示。恢复得到的 $\mathbf{x}$ 时程如图 4(b) 所示。显然，所有自由度的主导频率分量均为 $f_{n,\,1}$。由于阶跃力施加在第六个自由度上，因此第六个自由度的振荡中心和振幅在所有自由度中最大。随着自由度指标减小，或自由度逐渐靠近固定端，这些数值也随之减小。

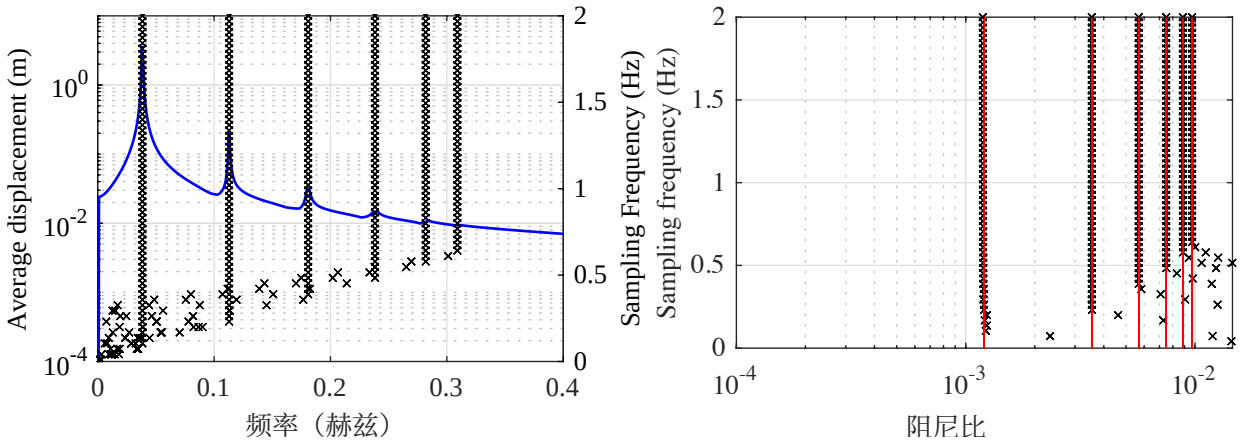


(a) 模态坐标的时域响应 ($\mathbf{z}(t)$)　　(b) 物理自由度的时域响应 ($\mathbf{x}(t)$)

图4：模态坐标和物理自由度的时域响应

随后，采用第 2 节所述的 DMD程序提取模态参数。得到的 DMD 频谱如图 5 所示。为考察采样频率对结果的影响，图中按采样频率由低到高展示结果。本文将这种以相应采样频率表示固有频率和阻尼比的图称为伪稳定图，因为它类似于现有模态参数提取方法（如 LSCF）中的固有频率表示形式。图 5a 展示了 DMD 提取的无阻尼固有频率及位移频谱。正如预期，当采样频率超过固有频率的约两倍后，即可捕捉到正确的固有频率。也就是说，DMD 能够捕捉到高于采样频率奈奎斯特频率的固有频率。图 5b 展示了采样频率逐渐增大时相应的阻尼比。图中的竖线表示精确值。如图所示，当采样频率超过相应固有频率的两倍后，通常能够捕捉到准确的阻尼比。总体而言，DMD 能够准确提取固有频率和阻尼比。需要指出的是，尽管每个频率下似乎都捕捉到了多个模态，但它们实际上代表同一个模态。本文采用的判据是：若某个极点无论采样频率如何变化都持续出现，则该极点代表一个物理模态。这一判据借鉴了 LSCF方法中稳定性图的概念。因此，只要极点落在预先设定的阈值范围内，就可以选择任意采样频率下对应的极点；例如，该阈值可根据所有采样频率下计算所得极点的平均值来设定。

为了将DMD与现有的模态参数提取方法进行比较，采用LSCF方法 [1] 对频响函数进行了分析。多项式阶数逐步增加至60，并得到了稳定性图，如图6所示。图中展示了多项式阶数从1到60时的结果。在图6中，黑色叉号表示稳定极点，即在预先设定的阈值范围内，随着多项式阶数增加仍保持为极点；本例中该阈值设为1%。灰色叉号表示未能保持在阈值范围内的极点，这意味着它们不稳定，因此被视为伪极点。首先讨论固有频率和阻尼比的准确性。如图6所示，LSCF方法也能准确识别固有频率。表3 汇总了DMD和LSCF方法得到的固有频率和阻尼比。对于所有模态，这两种方法都能较好地识别固有频率和阻尼比。与LSCF方法相比，DMD对频率的识别往往更准确。对于阻尼比，尽管二者相差约一个



(a) DMD 和位移谱： ×，DMD，—，位移　　(b) DMD 阻尼比： ×，DMD，—，精确值

图 5：使用 DMD 计算的六自由度系统伪稳定图

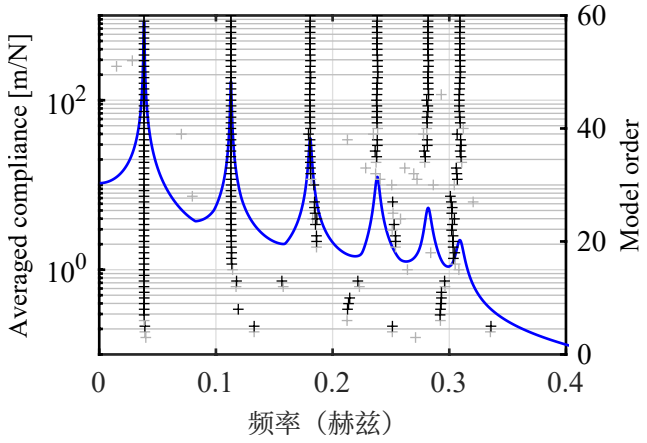


图6：通过LSCF方法计算的稳定性图： +，具有负实部的稳定极点， +：不稳定极点，—，平均柔度

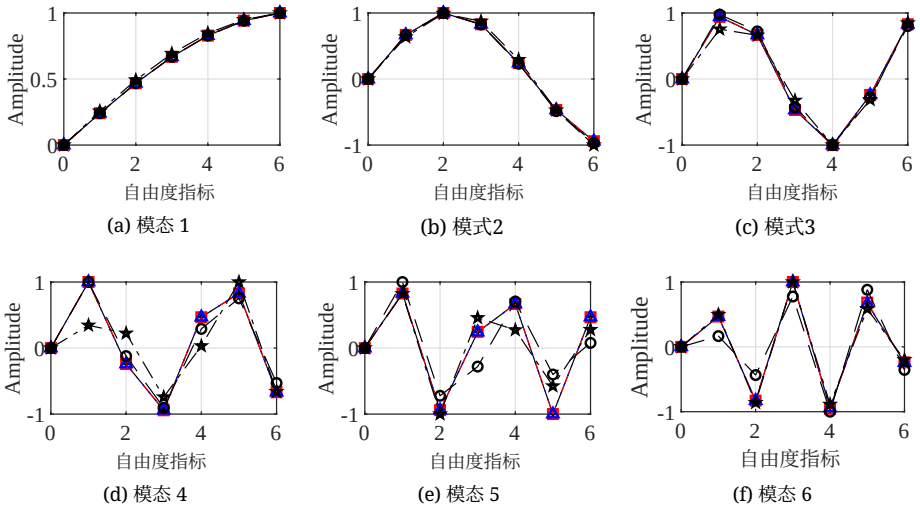
数量级，DMD似乎仍比LSCF更准确。在实验模态分析中，对于低阻尼系统（$\zeta < 1\%$），通常更倾向于采用时域方法；而对于高阻尼系统，则更倾向于采用频域方法，例如LSCF。这主要是因为低阻尼系统的频响函数数据中的大部分能量集中在数量非常有限的频率线上，而时域数据则包含大量时间采样点 [18]。这些结果表明，DMD方法提取固有频率和阻尼比的能力不逊于现有的频域模态参数提取方法。

需要注意的是，LSCF方法通常需要更多数据，因为计算频响函数需要输入信息，在本例中，输入是施加到系统上的力。另一方面，动态模态分解不需要输入信息。

接下来讨论通过动态模态分解方法提取的振型的精度。DMD振型 φ 由式（7）计算得出，并如图7所示。DMD 模态呈现为共轭复数对。因此，图7 仅显示 DMD 模态的实部（因为 DMD 模态的虚部与其实部成正比）。图7还展示了解析解中的振型、LSCF 提取的振型（下文称为 LSCF 模态）以及 POD 模态，以供比较。每个线性振动模态都对应两个相似的 POD 模态。因此，这两个 POD 模态分别标记为 POD#1 和 #2，其中与 POD#1 对应的奇异值

表3：百分比误　　差：固有频率和阻尼比。DMD 使用 $f_s = 2$ 赫兹计算。LSCF 使用阶数为 60 的模型计算

	频率		阻尼比	
i	DMD	LSCF	DMD	LSCF
1	8.079×10^{-5}	1.671×10^{-3}	1.500	2.530
2	1.771×10^{-5}	6.193×10^{-3}	1.216×10^{-2}	6.965×10^{-1}
3	5.530×10^{-6}	1.456×10^{-2}	3.128×10^{-3}	4.376×10^{-1}
4	1.259×10^{-5}	2.783×10^{-2}	3.295×10^{-3}	8.399×10^{-1}
5	2.128×10^{-5}	2.937×10^{-2}	3.384×10^{-3}	7.145×10^{-1}
6	9.706×10^{-6}	2.110×10^{-2}	3.965×10^{-3}	7.876×10^{-2}



(a) 模态 1　(b) 模式2　(c) 模式3

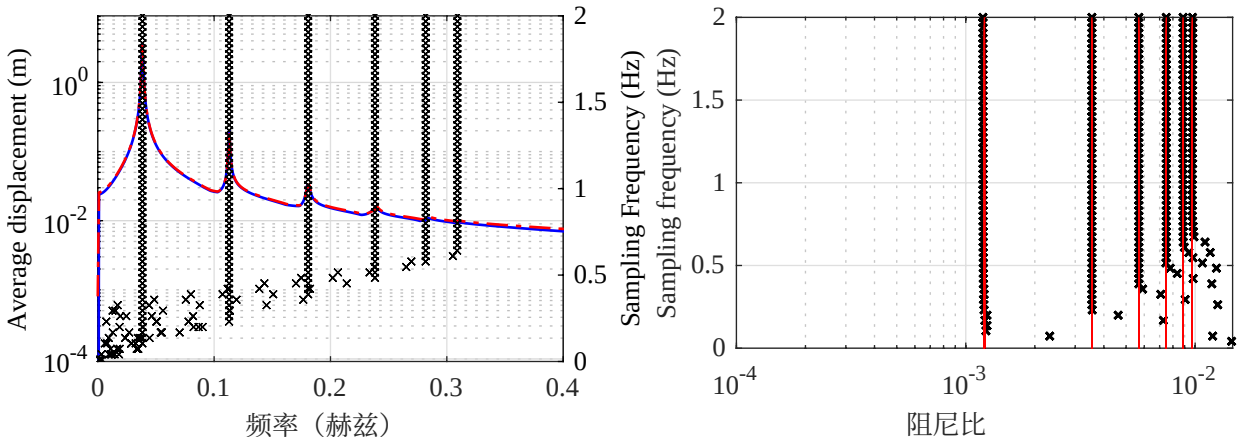
(d) 模态 4　(e) 模态 5　(f) 模态 6

图 7：振型。解析解，—+—，LSCF，—□—，动态模态分解 (#1&#2)，– –△– –，正交分解#1，– –○– –，正交分解#2，—·–★–·—

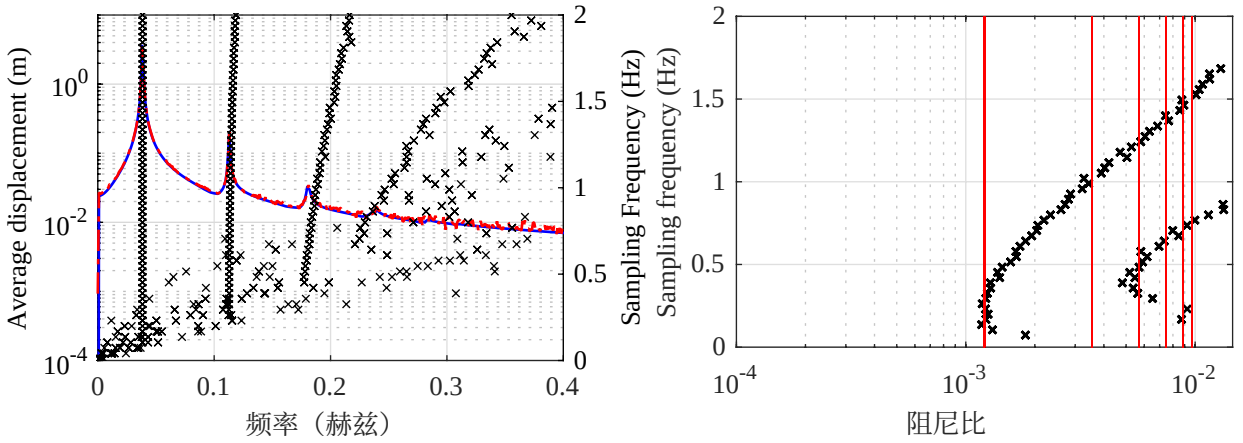
大于与 POD#2 对应的奇异值。可以看出，对于前两个模态，DMD、LSCF 和两个 POD 模态几乎完全相同。然而，从模式3开始，POD 模态与其他模态之间的差异变得明显。随着模态阶次增加，差异似乎也随之增大。众所周知，随着数据量增加，POD 模态会收敛到线性正规模态 [5]。因此，如果纳入更多数据点，这些差异可能会消失。另一方面，LSCF 和 DMD 方法所得结果均与解析解高度吻合。除振型本身外，还计算了 DMD、LSCF、POD 模态与解析解之间的模态保证准则值（例如，参见 [3]），并列于表4中。如表所示，DMD 和 LSCF 均为全部六个模态提供了准确的振型。对于 POD 模态，模态序号越大，MAC值越低，这一点在图7中也很明显。

表 4：与解析解计算所得的 MAC值（%）对比。

模态序号	LSCF	DMD	正交分解#1	正交分解#2
1	100.00	100.00	100.00	99.97
2	100.00	100.00	99.97	99.79
3	100.00	100.00	99.78	98.38
4	100.00	100.00	98.39	72.75
5	100.00	100.00	73.97	88.03
6	99.99	100.00	89.27	99.63



(a) 动态模态分解与位移谱，适用于 $\sigma = 1.0 \times 10^{-5}$: ×，动态模态分解，—，无噪声，---，含噪声 (b) 动态模态分解阻尼比，适用于 $\sigma = 1.0 \times 10^{-5}$: ×，动态模态分解，—，精确值



(c) 动态模态分解与位移谱，适用于 $\sigma = 1.0 \times 10^{-2}$: ×，动态模态分解，—，无噪声，---，含噪声 (d) 动态模态分解阻尼比，适用于 $\sigma = 1.0 \times 10^{-2}$: ×，动态模态分解，—，精确值

图 8：含测量误差的六自由度系统通过动态模态分解计算得到的伪稳定性图

3.3. 测量误差的影响

接下来，使用第 3.2 节中的数值算例，研究时域响应中的测量误差对动态模态分解结果的影响。再次根据公式（44）和（49）计算系统在第六自由度受到单位阶跃激励时的时域响应。此次，为研究测量误差对动态模态分解结果的影响，在各自由度的时程中加入人工测量误差，如下所示：

$$\tilde{x}_i(t_j) = [1 + \sigma\delta_i(t_j)]\, x_i(t_j), \quad \text{for } i = 1, \ldots, 6, \quad j = 1, \ldots, n_t, \tag{50}$$

其中， n_t 是快照中时间点的数量，而 $\delta_i(t_j)$ 是一组均值为零、标准差为单位值的均匀分布随机数， σ 是预先设定的标准差。随后对数据应用动态模态分解（DMD），并提取 $\sigma = 1.0 \times 10^{-5}$ 和 $\sigma = 1.0 \times 10^{-2}$对应的模态参数，同时逐步提高采样频率，直至 2 赫兹，方法与第3.2节相同。动态模态分解的结果如图8所示。如图8(a) 和 (b) 所示，当测量误差相对较小（ $\sigma = 1.0 \times 10^{-5}$）时，动态模态分解能够高精度地提取固有频率和阻尼比。另一方面，当测量误差相对较大（$\sigma = 1.0 \times 10^{-2}$）时，动态模态分解无法提取固有频率和阻尼比。具体而言，第三至第六阶固有

表5：含噪数据下由动态模态分解得到的振型的模态保证准则值（%）对比。

	$\sigma = 1.0 \times 10^{-5}$			$\sigma = 1.0 \times 10^{-2}$		
模态序号	DMD	正交分解#1	正交分解#2	动态模态分解	正交分解#1	正交分解#2
1	100.00	100.00	99.97	99.93	100.00	100.00
2	100.00	99.97	99.79	59.43	99.99	99.44
3	100.00	99.78	98.38	32.78	99.83	86.90
4	100.00	98.39	72.75	71.64	90.34	9.70
5	100.00	73.97	88.03	25.34	48.85	5.85
6	100.00	89.27	99.63	68.36	62.84	29.95

频率无法随着采样频率的提高而得到良好捕捉。值得注意的是，在存在这一水平的测量误差时，动态模态分解无法准确捕捉阻尼比。这些结果与 Duke等人 [19], 的讨论一致：动态模态分解预测的增长率或衰减率对信噪比高度敏感。这种对测量误差的高度敏感性可能是一个有待克服的问题，尤其是在将动态模态分解应用于含噪实验数据，且阻尼比至关重要时。

为了进一步考察动态模态分解特征值对测量噪声的敏感性，本文研究测量误差对动态模态分解特征值的传递。令 s_i 和 μ_i 的一阶扰动分别为$s_i' = s_i + \delta s_i$和 $\mu_i' = \mu_i + \delta\mu_i$，其中 δs_i和 $\delta\mu_i$ 表示测量误差在$\mathbf{x}$或$\mathbf{A}$中引起的特征值扰动。将 s_i' 和 μ_i' 代入式（16），可得：

$$s_i + \delta s_i = f_s \log\left(\mu_i + \delta\mu_i\right), \tag{51}$$

其中 $f_s = 1/\Delta t$ 为采样频率。利用式（16），可得

$$\delta s_i = f_s \log\left(1 + \delta\mu_i/\mu_i\right). \tag{52}$$

这意味着，如果 $|\delta\mu_i/\mu_i| \ll 1$，$|\delta s_i| \approx f_s|\delta\mu_i/\mu_i|$。由于对于给定的测量误差，$|\delta\mu_i/\mu_i|$ 是有限的，这意味着 $|\delta s_i|$ 近似正比于 f_s。这一论述与图8中的观察结果一致：采样频率增加时，预测精度会降低。

接下来讨论测量误差对振型的影响。计算 DMD 模态与解析得到的振型之间的模态保证准则值，并将结果列于表 5。如表 5所示，对于 $\sigma = 1.0 \times 10^{-5}$，DMD 和正交分解模态的模态保证准则值都与无测量误差时一样准确，无测量误差时的结果见表 4。另一方面，对于 $\sigma = 1.0 \times 10^{-2}$，尽管第一个 DMD 模态的模态保证准则值仍然较好，达到 99.93%，但较高阶模态的模态保证准则值较低，这意味着 DMD 提取的振型与解析解并不相似。

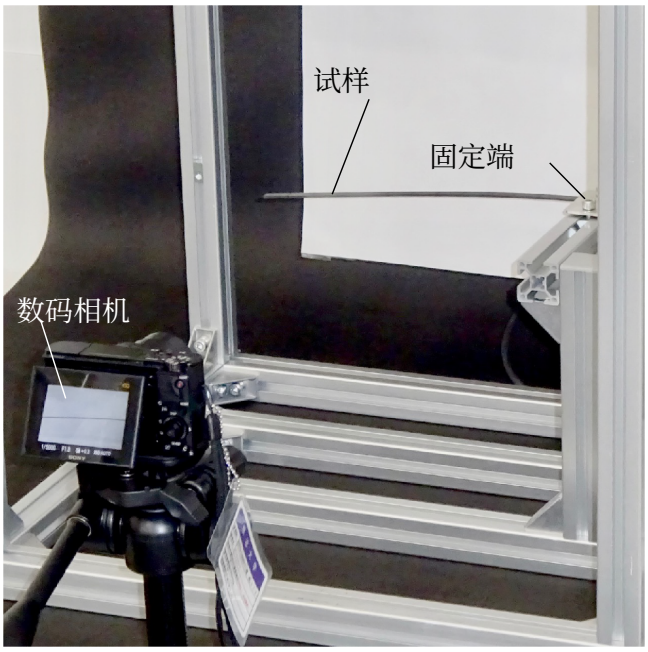
同样，DMD 的这种高敏感性仍需改进，尤其是在使用含噪实验数据时。众所周知，通过引入增广快照矩阵应用总体最小二乘法，可以有效处理 DMD 中的测量误差 [20], 然而，这超出了本文的讨论范围。

4. 实验示例：悬臂梁的脉冲响应

本节讨论将动态模态分解应用于实验数据所得的结果。尤其关注从高速摄像机获取的基于图像的大规模数据中提取模态参数。本研究采用受到脉冲激励的细长悬臂梁的振动响应来应用动态模态分解。关于动态模态分解的一项相关进展是，已有研究报告将动态模态分解应用于冲击载荷下的响应[21], , 并成功提取了亚临界流动的动态模态。图 9 展示了本研究使用的试样和实验装置。梁由聚丙烯制成，其尺寸为 300×8。0×1.7mm，具有矩形横截面（图9(a)）。梁固定在夹具上，并使用冲击锤（GK-2110，小野测器，日本）在固定端附近施加冲击力。随后，使用高速数字摄像机（RX100M4，Sony，日本）将梁的振动记录为图像序列，并保存为单个视频文件。视频的帧率为每秒480帧（fps），足以捕捉振动



(a) 试样



(b) 实验装置

图9：试样和实验装置

频率最高达240赫兹的模态。视频中图像每个像素所包含的颜色信息均经过二值化处理，以便检测梁的边缘。随后，从图像中提取试样沿轴向的位移时间历程，提取范围为距自由端（图9(b)中左侧）15.64mm至204.2mm处，并以等间距设置1,570个离散采样点。视频文件中图像的提取、颜色信息的二值化，以及像素到实际长度的转换，均由Matlab完成®。

在图10中，展示了图像二值化后梁在若干代表性时刻的测量位移。请注意，冲击锤冲击发生的时刻定义为 $t = 0$。如图所示，冲击锤的冲击激发了悬臂梁的弹性振动。正如预期，脉冲激励似乎激发了多个振动模态。此外可以看到，响应形状中包含一些由图像二值化引起的测量噪声。提取了梁上 1,570 个点的位移时程，并对这些时程应用了动态模态分解。与第3.2节的做法相同，针对逐渐提高至 200 赫兹$\leqslant f_s \leqslant$ 450赫兹的采样频率，重复进行了动态模态分解计算。此外，为了将动态模态分解得到的结果与 LSCF方法得到的结果进行比较，还利用输入力的频谱和得到的位移场计算了频率响应函数和相干函数。为得到频率响应函数，进行了五次测量，并将频域中的频率响应函数取平均后用于 LSCF方法。

首先讨论采用 LSCF方法得到的结果。结果如图 11 所示，其中展示了随着多项式阶数增加而变化的平均柔度和识别出的固有频率。值得注意的是，已知基于图像的频率响应函数在 LSCF方法中需要使用更高阶的多项式 [22]。因此，模型阶数增加至 100。可以看出，采用 LSCF方法，在 150赫兹以下识别出了三个具有明显稳定极点的模态。它

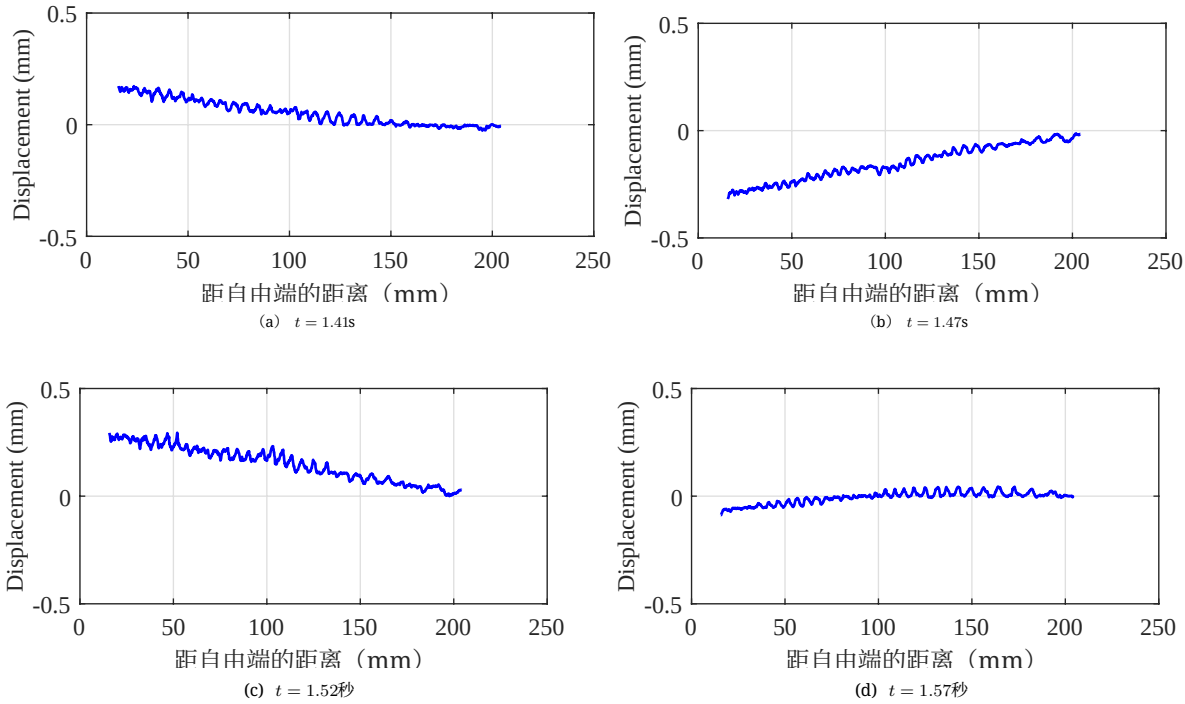


图10：梁在代表性时间点的实测振动响应

值得注意的是，LSCF方法检测到一个接近 0赫兹的不稳定极点。尽管在多项式阶数最高时，该极点被检测为稳定极点，但在阶数较低的多项式下，它是不稳定的。检测到该极点是因为频响函数数据在接近 0赫兹处存在一个微小的“边缘”。

接下来讨论通过动态模态分解（DMD）获得的结果。图12展示了随着采样频率增加，固有频率和阻尼比的伪稳定性图。可以看出，DMD预测的固有频率和阻尼比均产生了近乎连续的谱。借助这些图，无法识别系统的真实模态参数。这是因为用于DMD的数据集包含测量噪声，且测量点众多。因此，DMD产生了许多特征值，导致谱近乎连续。这就需要一种策略来滤除DMD产生的不显著特征值。迄今已有许多选择合适动态模态的方法，例如基于动态模态在采样空间中的演化的方法 [23]。解决这一问题最有效的方法之一是采用奇异值剔除（例如， [24]），即忽略幅值较小的奇异值及其对应的左、右奇异向量，并利用显著的奇异值和奇异向量构造伪逆矩阵。图13展示了应用奇异值剔除的DMD所得的固有频率和阻尼比伪稳定性图。可以看到，不显著的极点均已从图中剔除，因而得到清晰的稳定性图，尤其是固有频率的稳定性图。同样，与识别出的固有频率对应的阻尼比在图中未形成稳定轨迹，这一点在第3.3节中也曾观察到。

需要指出的是，图12 所示结果可视为未采用奇异值剔除的 ITD 方法结果。该案例研究表明，与传统ITD方法相比，DMD 能够产生数值上更加稳定的结果。

两种方法均识别出了前三阶模态，所得固有频率和阻尼比列于表6。请注意，比较中采用了采样频率为 450 赫兹的 DMD 结果，以及多项式阶数为 100 的 LSCF 结果。可以看出，DMD 得到的固有频率与LSCF方法得到的结果吻合良好，误差最高为 6%。另一方面，DMD 得到的阻尼比与 LSCF 得到的结果吻合较差。

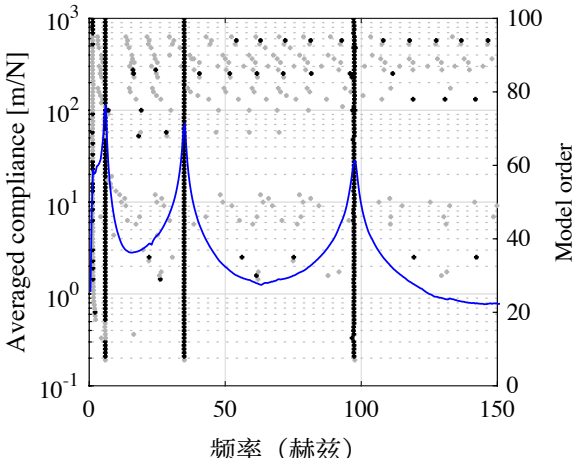


图11：采用 LSCF方法对 1,570 个测量点得到的稳定性图。 +：实部为负的稳定极点， •：实部为正的不稳定极点，—：平均柔度。

表6：LSCF 与动态模态分解在固有频率和阻尼比方面的比较

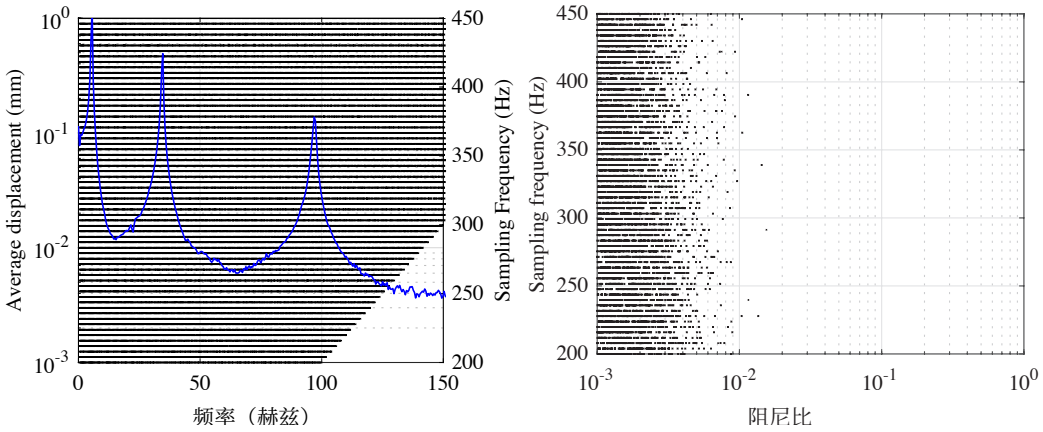
	频率 [赫兹]			阻尼比		
模态序号	DMD	LSCF	误差 [%]	DMD	LSCF	误差 [%]
1	5.91	5.61	5.08	0.0460	0.06290	36.14
2	34.90	34.41	1.39	0.01429	0.00731	48.86
3	97.13	96.35	0.81	0.01181	0.01100	6.84

需要指出的是，为了确认 DMD 所得结果的有效性，我们还使用 ANSYS®，通过有限元法（FEM）离散化建立三维梁模型，并进行了数值模态分析。模型尺寸为 $250 \times 8.0 \times 1.7$ 毫米，杨氏模量为 1.6 GPa，泊松比为 0.4，密度为 900 千克/立方米^3。梁模型采用实体单元离散，边长设为 0.6 毫米。其中一个面被刚性固定，以模拟固定端。所得前三阶固有频率分别为 5.88 赫兹、36.8 赫兹和 103 赫兹，与 DMD 和 LSCF方法所得结果均吻合良好。请注意，这些固有频率略高于通过 DMD 和 LSCF 方法实验得到的频率，这主要是由于所采用的边界条件所致，因为刚性固定一个面通常会使系统比具有固定端的实际系统更刚硬。

接下来将展示由 DMD、LSCF 和 FEM 得到的振型，并讨论它们之间的差异。在图 14 中，展示了由 DMD、LSCF 和 FEM 得到的前三阶模态振型。从图中可以看出，DMD 和 LSCF 得到的振型均与 FEM 得到的振型吻合良好。可以观察到，LSCF 和 DMD 的振型中都存在少量噪声。这是因为快照矩阵中含有噪声，如图 10 所示。LSCF 模态中的噪声水平似乎略低于 DMD 模态。这归因于频率响应函数测量中采用的平均技术，该技术通常用于消除实验模态分析中的测量噪声。另一方面，用于计算

表 7：动态模态分解与有限元法计算所得模态之间的模态保证准则（%）

DMD \ FEM	1	2	3
1	99.56	8.365	6.130
2	10.48	98.85	2.609
3	6.602	2.336	99.39



（a）DMD 频谱与平均傅里叶频谱的位移。 ×，动态模态分解，—，位移的傅里叶谱—ment

（b）DMD 阻尼比

图12：未进行奇异值剔除时通过动态模态分解计算得到的伪稳定图

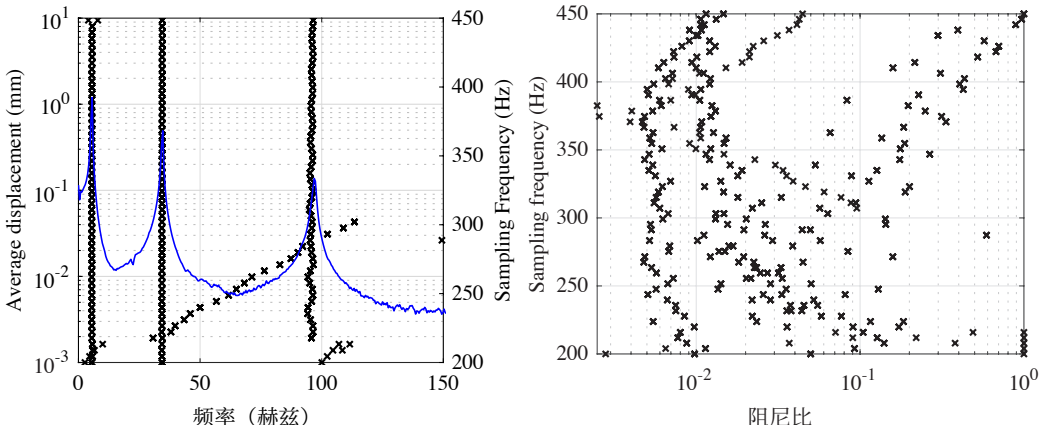
表 8：LSCF 与有限元法计算所得模态之间的 MAC（%）

LSCF \ FEM	1	2	3
1	99.57	8.960	6.053
2	6.559	99.37	1.750
3	6.524	1.443	99.52

DMD 的快照矩阵来自单次测量。如何消除这类空间噪声仍有待未来研究解决。为定量评估该方法预测振型的准确性，计算了模态保证准则（MAC）值。DMD 与 FEM 所得模态之间的 MAC 值列于表 7 中。如表中的对角元素所示，DMD 和 FEM 计算得到的振型彼此吻合良好，MAC 值均超过 98%。此外，从非对角项可以看出，模态的正交性也得到了验证。LSCF 与 FEM 所得模态之间的 MAC 值也列于表 8 中。表中呈现出类似的趋势，且对角元素上的 MAC 值略高。不过总体而言，结果与 DMD 得到的结果一致。

5. 结论

本文研究了一种基于动态模态分解的数据驱动的实验模态分析方法。动态模态分解与著名的 Ibrahim 时域法有着相同的基本概念。然而，在动态模态分解中，动态模态分解特征值是根据投影到正交分解模态上的变换矩阵计算得到的，同时剔除不显著的正交分解模态。首先，将动态模态分解应用于离散质量-弹簧-阻尼器系统的解析解时程。在没有测量误差的情况下，动态模态分解能够非常准确地识别模态参数。其次，将动态模态分解应用于包含测量噪声的相同时间历程。当测量误差的标准差较小时，动态模态分解仍能准确识别模态参数。然而，当测量误差的标准差相对较大时，动态模态分解无法识别模态参数。此外，还将动态模态分解应用于由高速数字摄像机采集的悬臂梁位移时程。将获得的模态参数与采用 LSCF方法获得的参数进行了比较。采用奇异值剔除后，动态模态分解得到的固有频率及相应振型与 LSCF方法的结果吻合良好。阻尼比则与 LSCF方法所得结果吻合不佳。



（a）DMD 频谱与平均自谱相结合位移。 ×，DMD，—，位移的傅里叶谱

（b）DMD 阻尼比

图13：采用奇异值剔除的 DMD 计算得到的伪稳定性图

总之，动态模态分解作为一种实验模态分析方法具有应用潜力，尤其是在涉及大量数据时。然而，我们的研究表明，将动态模态分解应用于含噪实验数据时，阻尼比的准确估计仍然是一项挑战。

参考文献

[1] H. Van derAuweraer、P. Guillaume、P. Verboven、S. Vanlanduit，快速稳定频域参数估计方法的应用，《动态系统、测量与控制杂志》123 (4) (2001) 651–658。[2] B. Peeters、H. Van der Auweraer、P. Guillaume、J. Leuridan，Polymax频域方法：模态参数估计的新标准？《冲击与振动》11 (3-4) (2004) 395–409。[3] D. J. Ewins，《模态测试：理论、实践与应用》（第二版），Wiley，2009年。[4] G. Berkooz、P. Holmes、J. L. Lumley，本征正交分解在湍流分析中的应用，《流体力学年度评论》25 (1) (1993) 539–575。[5] B. Feeny、R. Kappagantu，振动中本征正交模态的物理解释，《声学与振动杂志》211 (4) (1998) 607–616。[6] G. Kerschen、J.-C. Golinval、A. F. Vakakis、L. A. Bergman，本征正交分解法在机械系统动力学表征与降阶中的应用：综述，《非线性动力学》41 (1) (2005) 147–169。[7] P. J. Schmid，数值与实验数据的动态模态分解，《流体力学杂志》656 (2010) 5–28。[8] G. Jourdain、L.-E. Eriksson、S. H. Kim、C. H. Sohn，动态模态分解在三维腔室带挡板喷注器声学模态识别与阻尼中的应用，《声学与振动杂志》332 (18) (2013) 4308–4323。[9] D. A. Bistrian、I. M. Navon，动态模态分解法在浅水问题和旋流问题中的应用，《流体数值方法国际期刊》83 (1) (2017) 73–89。

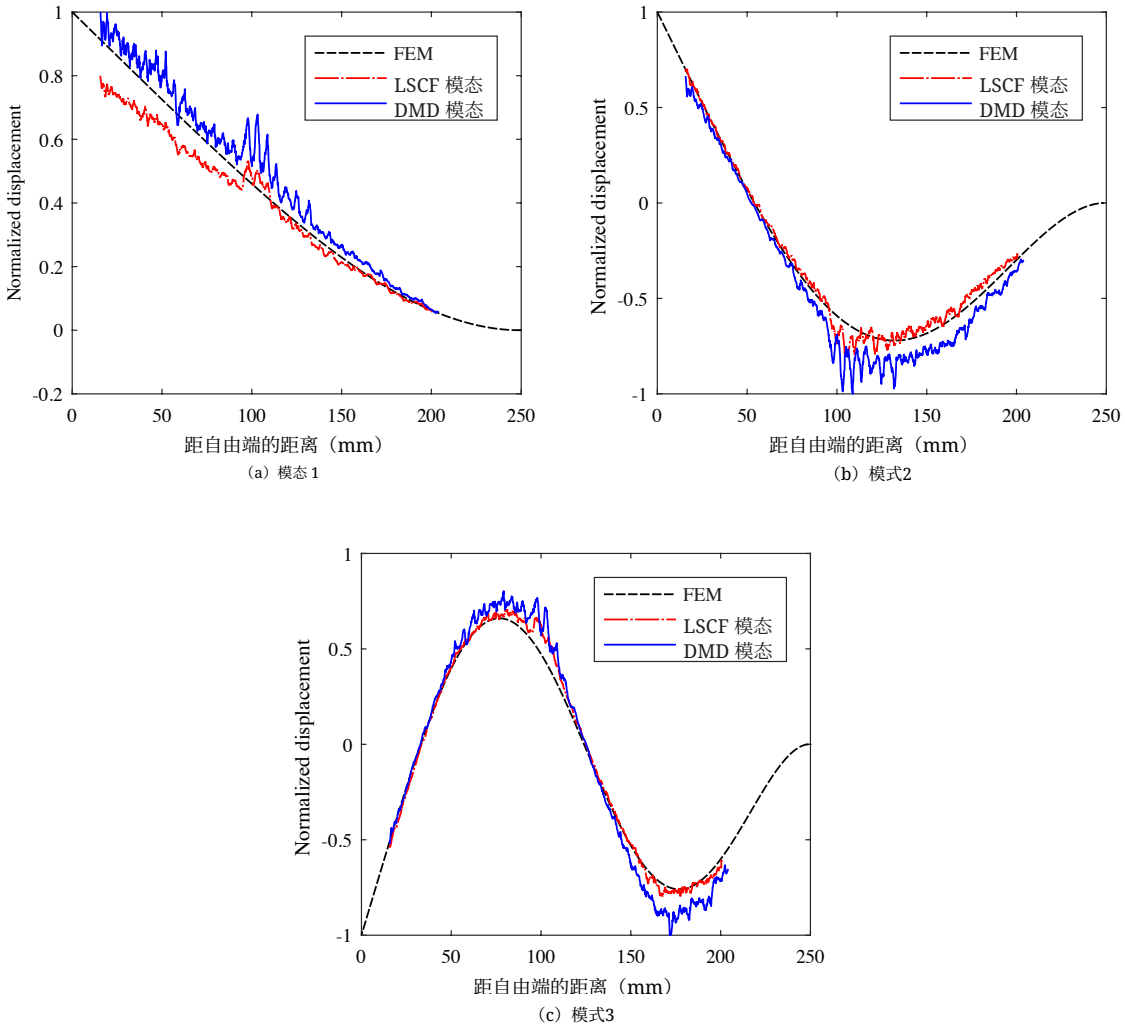


图14：通过 LSCF、动态模态分解从测量数据中提取的振型，以及通过有限元法计算得到的振型

[10] F. Richecoeur、L. Hakim、A. Renaud、L. Zimmer，燃烧实验数据处理的DMD算法，载于：2012年暑期项目论文集，湍流研究中心，斯坦福大学，2012年，第459–468页。

[11] M. Y. Ali、A. Pandey、J. W. Gregory，快速压力敏感漆数据的动态模态分解，《传感器》16 (6) (2016年) 862。[12] J. H. Tu、C. W. Rowley、D. M. Luchtenburg、S. L. Brunton、J. N. Kutz，关于动态模态分解：理论与应用，《计算动力学杂志》1 (2) (2014年) 391–421。[13] C.-T. Chen，《线性系统理论与设计》，第3版，牛津大学出版社，2009年。[14] J. H. Tu，动态模态分解：理论与应用，博士论文，普林斯顿大学（2013年）。[15] M. O.Williams、I. G. Kevrekidis、C. W. Rowley，Koopman算子的数据驱动近似：扩展动态模态分解，《非线性科学杂志》25 (6) (2015年) 1307–1346。

[16] G. I. Cirillo、A. Mauroy、L. Renson、G. Kerschen、R. Sepulchre，非线性正常模态的谱特征，《声学与振动杂志》377 (2016年) 284–301。[17] L. Meirovitch，《振动基础》，麦格劳-希尔，2001。[18] P. Verboven，模态分析的频域系统辨识，博士论文，布鲁塞尔自由大学（2002年）。[19] D. Duke、J. Soria、D. Honnery，动态模态分解的误差分析，《流体实验》52 (2) (2012年) 529–542。[20] M. S. Hemati、C. W. Rowley、E. A. Deem、L. N. Cattafesta，对含噪数据集的应用Koopman谱分析中动态模态分解的去偏，《理论与计算流体力学》31 (4) (2017) 349–368。[21] J. Kou、W. Zhang、Y. Liu、X. Li，涡激振动的最低雷诺数，《流体物理学》29 (4) (2017) 041701。[22] J. Javh、J. Slavi˘c、M. Boltežar，含噪高速摄像机数据的高频模态识别，《机械系统与信号处理》98 (2018) 344 – 351。[23] J. Kou、W. Zhang，从动态模态分解中筛选主导模态的改进准则，《欧洲力学杂志：B辑/流体》62 (2017) 109 – 129。[24] A. N. Thite、D. J. Thompson，通过反演方法量化结构传声路径。第1部分：改进的奇异值剔除方法，《声学与振动杂志》264 (2003) 411–431。