arXiv:2603.14268v1 [math.GR] 15 Mar 2026

有限群极大子群列的 SS-拟正规性 [1]

Wei Meng*[a], Jiakuan Lu[b], Boru Zhang[b]a. 广西电子科技大学数学与计算科学学院及广西应用数学中心，桂林，广西，541002，中华人民共和国。b. 广西师范大学数学与统计学院，桂林，广西，541004，中华人民共和国，电子邮箱：mlwhappyhappy@163.com,jklu@gxnu.edu.cn, brzhangqy@163.com

摘要

设 G 为有限群。若存在 G 的子群 B，使得 G = HB，且 H 与 B 的每个 Sylow子群都相交换，则称 G 的子群 H 为 G 的 S S -拟正规子群。设 Ω : G $= G_0 > G_1 > \cdots > G_{n-1} > G_n = 1$为 G 的一个极大子群列，其中对每个 i = 1, . . . , n, G_i 都是 G_{i-1} 的极大子群。本文研究具有 S S -拟正规极大子群列的有限群 G，即所有 G_i都是 G 中的 S S -拟正规子群。首先，我们证明，若 G 存在 S S -拟正规极大子群列，则 G 可解。此外，我们证明，G 超可解当且仅当 G 存在一个在 G 中次正规的 S S -拟正规极大子群列。

关键词：极大子群列；SS-拟正规子群；超可解群。MSC（2020）：20D10, 20D30

1 引言

本文中，所有群均为有限群。研究子群性质如何影响有限群的结构，是有限群论中的一个重要课题，这一研究方向已取得许多成果。取X 为G 的某些子群构成的集合，并要求X 中的每个子群都具有“良好”的性质，以此来研究群G的结构。具体而言，在现有研究中，X通常取为G的极大子群集合、G的极小子群集合，或G 的具有特定阶的子群集合（见 [11]）。此外，从G的子群格的角度来看，这类子集X 通常构成G 与单位子群 1 之间的一个水平截面。基于这一观点，设 G 为一个群，

$$\Omega : G = G_0 > G_1 > \cdots > G_{n-1} > G_n = 1$$

[1]* 通讯作者：J.K. Lu（jklu@gxnu.edu.cn）。W. Meng 获中国国家自然科学基金（12161021）及广西高校数据分析与计算重点实验室资助。J.K. Lu 获广西自然科学基金项目（2024GXNS-FAA010514）资助。B. Zhang 获国家自然科学基金（12301022）资助。

为G的一个极大子群列，也就是说，对每个$i = 1, \ldots, n$，G_i 都是G_{i-1}的极大子群。假设极大子群列具有某种正规性，可以得到一些有趣的结果。例如，若对每个$i = 1, \ldots, n$，$[G, G_{i-1}] \leq G_i$，则称级数 Ω 在 G 中是中心的；若所有 G_i 在 G 中都是正规（或次正规）的，则称其在G中是正规（或次正规）的。以下结果是众所周知的：

(1)G 是幂零群，当且仅当G 拥有一个在G中为中心的极大子群列。

(2)G 是超可解群，当且仅当G 拥有一个在G中正规化的极大子群列。

(2)G 是可解群，当且仅当G 拥有一个在G中次正规化的极大子群列。

回顾一下，若子群A 与G 的所有 Sylow子群均可置换，则称A 在G 中是S-可置换的（或S-拟正规化的）（见 [6]）。若A 是G 的子群，且对G 的每个子群H，都存在元素$g \in \langle A, H \rangle$，使得$AH^g = H^g A$ （见[3, 9]），则称A 在G 中完全条件可置换的（简称c-c-可置换）。

最近，Qian 和 Tang [10] 研究了具有S-可置换（或c-c-可置换）极大子群列的有限群G，即如下列$G = G_0 > \cdots > G_i > \cdots > G_n = 1$，其中所有$G_i$ 在G中均为S-可置换的（或c-c-可置换的）。他们证明了以下定理：

定理 1。**1** *[10, 定理 1,2]* G 是超可解的，当且仅当 G 具有一个 S-可置换（或 *c-c-pemutable*）的极大子群列。

2008年，Li [7] 将 S-可置换子群推广为 SS-拟正规子群。若存在 B 为G 的一个子群，使得 $G = HB$，且 H 与 B的每个 Sylow子群都可置换，则称 H 为 G 的 SS-拟正规子群。关于SS-拟正规子群的一些有趣结果可见 [7, 8]。

根据上述研究，我们关注具有G -SS-拟正规极大子群列的有限群，即具有如下列的有限群：$G = G_0 > \cdots > G_i > \cdots > G_n = 1$ 其中所有G_i 在G中都是SS-拟正规子群。我们的第一个目标是证明以下定理。

定理 1.2 如果 G 具有一个 SS-拟正规极大子群列，那么 G 是可解的。

下面的注释表明，如果G 仅具有一个SS-拟正规极大子群列，那么G 不一定是超可解群。

注 1.3 设 $G = A_4$，H 是 G 的一个阶为3的子群。则

$$\Omega_1 : G > H > 1$$

是 G 的 SS-拟正规极大子群列。然而，G 不是超可解的。另一方面，设 K 是 G 中阶为 4 的子群，L 是 K 中任意一个阶为2的子群。那么

$$\Omega_2 : G > K > L > 1$$

是 G 的次正规极大子群列。但 Ω_2 在 G 中不是 S S-拟正规子群。

受注 1.3 的启发，我们的第二个目标是证明以下结果。

定理 1.4 G 是超可解群，当且仅当 G 存在一个在 G 中次正规的 S S-拟正规极大子群级数。

所有未作说明的记号和术语均为标准用法，可参见 [2, 5]。

2 预备知识

本节汇集一些将在主要结果的证明中用到的结论。

引理 2.1 *[7,* 引理 *2.1]* 设 H 是 G 的 SS-拟正规子群，$K \leq G$，且 N 是 G 的正规子群。那么有以下结论：*(1)* 若 $H \leq K$，则 H 是 K 的 SS-拟正规子群。*(2)* HN/N 是 G/N 的 SS-拟正规子群。

引理 2.2 *[7,* 引理 *2.2]* 设 H 是 G 的幂零子群。则以下陈述等价：

(1) H 是 G 的 S-拟正规子群。*(2)* $H \leq F(G)$，且 H 是 G 的 S-拟正规子群。

引理 2.3 设 M 是 G 的极大子群。如果 M 在 G 中是 S-拟正规的，则$|G : M|$是素数幂。

证明。假设存在两个不同的素数，例如 p 和 q，使得 $pq \mid |G : M|$。由于 M 在 G 中是 S-拟正规的，因此存在 G 的一个子群 B，使得 $G = MB$，且 H 与 B 的每个 Sylow子群都可交换。特别地，$MB_p = B_pM$ 是G 的真子群，其中 B_p 是 B 的 Sylow p-子群。因此有 $M < MB_p < G$。这与 M 是G 的极大子群相矛盾。因此，$|G : M|$ 是素数幂。 □

引理 2.4 设 N 是 G 的正规子群，并假设 G 存在一个 S S-拟正规极大子群列。那么 G/N 也有一个 S S-拟正规极大子群列。

证明。 设 $G = G_0 > \cdots > G_i > \cdots > G_n = 1$ 是 G 的一个SS-拟正规极大子群列。由于 G_i 在 G 中是SS-拟正规的，根据引理 2.1 (2)，w G_iN/N 在 G/N 中也是S S-拟正规的。记$\overline{G} = G/N$ 和 $\overline{G_i} = G_iN/N$。考察G的以下子群列：

$$\overline{G} = \overline{G_0} \geq \cdots \geq \overline{G_i} \geq \cdots \geq \overline{G_n} = 1.$$

对于每个$i = 1, \ldots, n$，我们看到，要么$\overline{G_i} = \overline{G_{i-1}}$，要么$\overline{G_i}$是$G_{i-1}$中的极大子群。因此，删去上述子群级数中的相等项后，我们得到G的一个SS-拟正规极大子群列。 □

引理 2.5 *[4, 定理 1]* 设 G 是一个非阿贝尔单群。若 H 是 G 的真子群，且其指标为 p^a，其中 p 是素数，则以下情形之一成立：*(1)* G = 交错群 A_n，且 $H = A_{n-1}$，$n = p^a$；*(2)* $G = PSL(n, q)$，且 H 是一条直线或一个超平面的稳定子，$|G : H| = (q^n - 1)/(q - 1) = p^a$，且 n 是素数；*(3)* $G = PSL(2, 11)$，$H = A_5$；*(4)* $G = M_{23}$，且 $H = M_{22}$；*(5)* $G = M_{11}$，且 $H = M_{10}$；*(6)* $G = PSU(4, 2)$，且 $|G : H| = 27$。

引理 2。6 *[1, 引理 2]* 设 $N = S_1 \times \cdots \times S_t$ 是由同构的非阿贝尔单群构成的直积，且 M 是 N 的极大子群，并且 $S_1 \not\leq M$。则下列断言之一成立：

(1) $M = D \times S_2 \times \cdots \times S_t$，其中 D 是 S_1 的极大子群。

(2) 子群 $S_2, \ldots, S_t$ 中有一个（不妨设为 S_2）不包含于 M 中，则 $M = D \times S_3 \times \cdots \times S_t$，其中 $D \cap S_1 = D \cap S_2 = 1$ 且 $S_1 \cong S_2 \cong D < S_1 \times S_2$。

3 定理证明

定理 1.2 的证明。 假设 G 不可解，且存在一个 SS-拟正规极大子群列：

$$\Omega : G = G_0 > G_1 > \cdots > G_{n-1} > \cdots > G_n = 1.$$

设N是G的一个极小正规子群。由引理 2.4，N的商群G/N也有一个SS-拟正规极大子群列。由归纳法可知G/N可解。若G有不同的极小正规子群，例如N_1和N_2,，则G/N_1和G/N_2均可解，因此G也可解。因此，我们可以假设G有唯一的极小正规子群，记为N。由于G不可解，N是若干个同构的非阿贝尔单群的直积，并且$C_G(N) = 1$。

应用引理 2.1(1)，我们知道 $G_1 > \cdots > G_{n-1} > \cdots > G_n = 1$ 是 G_1的一个 SS-拟正规极大子群列。由归纳法可知 G_1 可解。因此 $N \not\leq G_1$，从而 $G_1 \cap N$ 是 N 的真子群。注意到，根据引理 2.3，$|G_{i-1} : G_i|$ 是一个素数幂，并且 $|N \cap G_{i-1} : N \cap G_i|$ 整除 $|G_{i-1} : G_i|$。对每个 $i = 1, \ldots, n$，我们有 $|N \cap G_{i-1} : N \cap G_i|$ 是一个素数幂或 1。特别地，$|N : N \cap G_1| = |N \cap G_0 : N \cap G_1| = p^\alpha$，其中 p 是某个素数。这表明 N 有一个指标为素数幂的可解子群，即 $N \cap G_1$。由引理 2.6可知，N 是一个非阿贝尔单群。此外，N 将同构于引理 2.5 中的某个群。

令 j 为使 $|N : N \cap G_j|$ 为 p 的幂的最大指标。令 $B = N \cap G_j$，$C = N \cap G_{j+1}$。那么 $|B : C| = q^\beta$，其中 q 是一个不同于 p 的素数。由于 G_{j+1} 在 G 中是 SS-拟正规子群，因此存在 G 的子群 B，使得 $G = G_{j+1}B$ 且 $G_{j+1}B_p = B_pG_{j+1}$，其中 $B_p \in Syl_p(B)$。这意味着 $G_{j+1}B_p$ 是 G 的真子群，且 $|G|_p = |G_{j+1}B_p|_p$。因此，存在 $G_p \in Syl_p(G)$ 的子群，使得

$G_{j+1}G_p = G_pG_{j+1}$。由此可得

$$\begin{aligned} C(N \cap G_p) &= (N \cap G_{j+1})(N \cap G_p) \\ &= N \cap (G_{j+1}(N \cap G_p)) \\ &= (G_{j+1}(N \cap G_p)) \cap N \\ &= ((N \cap G_p)G_{j+1}) \cap N) \\ &= (N \cap G_p)C. \end{aligned}$$

令$N_p = N \cap G_p$，则$N_p \in Syl_p(N)$。因此

$$|N : CN_p| = |N : CN_P|_{p'} = |N : C|_{p'} = |B : C| = q^{\beta}.$$

现在，非阿贝尔单群N含有子群$G_1 \cap N$和CN_p，使得$|N : G_1 \cap N|$与$|N : CN_p|$是不同的素数幂。注意，PSL(2,7) 是唯一一个含有两个不同素数幂指数子群的单群（参见 [4]），因此$N \cong$PSL(2, 7)。

最后，由于N是G的唯一的极小正规子群，且$C_G(N) = 1$，根据 N/C 定理,

$$N \leq G = G/C_G(N) \lesssim \text{Aut}(N).$$

因此，由于 Aut(PSL(2, 7)) $\cong$PSL(2, 7)。Z_2, , 我们有

$$\text{PSL}(2,7) \cong N \leq G \lesssim \text{Aut}(\text{PSL}(2,7)) \cong \text{PSL}(2,7).Z_2.$$

所以$G = N \cong$PSL(2, 7) 或$G \cong$PSL(2, 7)。Z_2。通过检查G的极大子群列，可以得出G不具有SS-拟正规极大列。定理的证明完毕。 □

定理 1.4 的证明。 设G是超可解群。则G的每个主列必然是SS-拟正规极大子群列，并且在G中次正规。反之，假设该定理不成立，并设G是阶最小的反例。令

$$\Omega : G = G_0 > G_1 > \cdots > G_{n-1} > G_n = 1.$$

是G的一个次正规极大子群列，并设 Ω 在G中是SS-拟正规的。显然，G是可解的，且G_i在G_{i-1}中正规，指标为素数。由引理 2.1(1)，每个G_i都满足定理的假设，因此根据G的选择，G_i对于$i \geq 1$是超可解的。

设N是G的一个极小正规子群。由引理 2.4，G/N满足定理的假设，因此G/N是超可解的。因此，若G有两个不同的极小正规子群，分别为N_1和N_2, , 则G/N_1和G/N_2都超可解，故G也超可解。这与G的选取矛盾。因此，G有唯一的极小正规子群，记为N。由于G可解，我们可以假设N是一个阶为p^e的初等阿贝尔p群，其中p是某个素数。此外，假设 $\Phi(G) > 1$，则$N \leq \Phi(G)$，因而$G/\Phi(G)$是超可解的。因此G超可解，这又产生了矛盾。因此，我们可以假设

$\Phi(G) = 1$。此外，再次利用G的可解性，可知存在G的一个极大子群H，使得$G = HN = H \leftthreetimes N$，其中$H \cong G/N$超可解。现在容易看出$N = O_p(G) = F(G) = C_G(N)$，且$C_H(N) = 1$。

此外，注意到G_1在G中正规，而G_{n-1}是G的一个素数阶次正规子群。我们有

$$G_{n-1} \leq N = O_p(G) = F(G) < G_1.$$

注意到G_{n-1}在G中SS-拟正规。应用引理 2.2，G_{n-1}在G中S-可置换。

另一方面，我们有 $G_1 = G_1 \cap G = G_1 \cap HN = (G_1 \cap H) \leftthreetimes N$。令 $H_1 = G_1 \cap H$，则 H_1 在 H 中正规，因为 G_1 在 G 中正规。由 G_1, 的超可解性可知 $O_{p'}$,p,$p'(G_1) = G_1$。此外，由于 $O_{p'}(G_1) \leq O_{p'}(G) = 1$，$G_1$ 有一个正规 Sylow p-子群，它在 G 中也正规。因此，N 恰好是 G_1的正规 Sylow p-子群。于是，H_1 是一个 p′-群。

我们断言 H 也是一个 p′-群。否则，$H = P_0 \leftthreetimes H_1$, , 其中 $P_0 \in$ S yl$_p$(H) 的阶为 p。由 G_1, 的超可解性，我们得出 $H_1 \cong G_1/N = G_1/C_{G_1}(N)$ 是一个指数整除 $p - 1$ 的阿贝尔群。特别地，p 是 |H| 的最大素因子。由于 H 也是超可解的，H 有一个正规 Sylow p- 子群。这导致 $O_p(G) = P_0N > N$，矛盾。因此，H 是一个 p′- 群，证毕。

最后，注意到G_{n-1}在G中是S-可置换的，因此$G_{n-1}H = HG_{n-1} \leq G$。由于$H$是$G$的极大子群，我们有$G = HG_{n-1}$，这意味着 $|G_{n-1}| = |G : H| = |N$\{v41。因此，G 是超可解的。这是最后一个矛盾。定理的证明完成。□

参考文献

[1] Y. Berkovich，关于 Taketa 定理。《Journal of Algebra》，1996，182：501-510。[2] K. Doerk，T. Hawkes，《有限可解群》，Walter de Gruyter，柏林，1992。[3] W. Guo，K. P. Shum，A. Skiba，条件可置换子群与有限群的超可解性。《东南亚数学通报》，2025，29：493-510。[4] R. M. Guralnick，单群中的素数幂指数子群。《Journal of Algebra》，1983，81(2)：304-311。[5] B. Huppert，《有限群 I》。Springer，柏林，1967。[6] O. Kegel，有限群的 Sylow 群与次正规除子。《数学杂志》，1962，78：205-221。[7] S. Li，Z. Shen，J. Liu，X. Liu。某些子群的 SS-拟正规性对有限群结构的影响。《Journal of Algebra》，2008，319：4275-4287。[8] S. Li，Z. Shen，X. Kong。关于有限群的 SS-拟正规子群。《Communications in Algebra》，2008，36：4436-4447。

[9] G. Qian，P. Zhu，群超可解性的一些充分条件。《南京师范大学学报（自然科学版）》，1998，21(1)：15-21（中文）。[10] G. Qian，F. Tang，关于有限群的极大子群列的注记，《Communications in Algebra》，2025，DOI：10.1080/00927872.2025.2548991。[11] A. N. Skiba，关于有限群的弱s-置换子群。《Journal of Algebra》，2007，315：192-209。