arXiv:2603.14280v1 [math.HO] 15 Mar 2026

贝尔纳·泰西耶访谈

帕特里克·波佩斯库-潘普

Abstract. 本文是根据2024年9月28日和29日在巴黎贝尔纳·泰西耶家中进行的一次访谈录音整理改写而成。

Contents

1. 引言 2
2. 父母与求学经历 2
3. 最初的研究兴趣 5
4. 发现奇点理论 6
5. 第一篇文章 8
6. 早年的数学家朋友 9
7. 首次在哈佛大学停留 9
8. 研究风格 13
9. 合作与研讨会 16
10. 博士生指导 20
11. 重要会议 21
12. 布尔巴基成员 24
13. 编辑工作 27
14. 数学图书馆管理 28
15. 研究兴趣的演变 31
16. 关于卡尔热兹论文的细节 33
17. 等奇异性问题 36
18. 与 Lˆe 的合作 37
19. 对极性簇的兴趣 40
20. 邦内森型不等式 43
21. 赋值理论 46
22. 其他数学著作 50
23. 对数学史的兴趣 51
24. 对数学哲学的兴趣 54
25. 主要结果、概念与猜想 56
26. 工作方法 59
27. 阅读风格 63
28. 什么是奇点理论？ 64
29. 数学之外的方面 66
参考文献 70

Date：2026年3月15日。*Acknowledgments.* 感谢 CDP C2EMPI、法国政府“法国2030”计划、里尔大学、里尔大学卓越计划以及里尔欧洲大都会为 R-CDP-24-004-C2EMPI 项目提供资金和支持。本研究部分由法国国家研究署（ANR）资助，项目编号为 ANR-22-CE40-0014 SINTROP。感谢 Pedro Daniel Gonz´alez P´erez、Evelia Rosa Garc´ıa Barroso、Antoni Rangachev、Paul-Emmanuel Timotei 和 Kroum Tzanev 对本文早期版本提出意见。

1. Introduction

1998—2001年期间，贝尔纳·泰西耶担任我的学位论文导师时，我每周都会与他会面。每次会面有时会持续整个下午。我们讨论的不仅有我正在进行的奇点理论研究，还有数学的许多其他方面，甚至包括数学之外的话题。我觉得这些讨论非常引人入胜。它们坚定地促使我决心毕生从事奇点理论研究。从那以后，只要有机会，我就喜欢和他讨论问题。



Figure 1. 2001年6月，贝尔纳和采访者在马恩河边交谈

我于2024年9月用两天时间进行了这次采访，旨在向那些没有机会与贝尔纳长时间交谈的人展现他的个性以及他的数学世界[1]。本文分为若干截面，各节标题旨在帮助读者了解我们讨论的不同话题。我们还添加了脚注，以提供更多信息。

2. Parents and studies

PPP：亲爱的贝尔纳，在这次采访中，我将向你询问有关你的生活、研究兴趣、著作以及你与他人的交往等问题。我们先从你的父母谈起吧。你能给我们讲讲他们吗?

BT：我母亲属于那一代女性，她们必须为接受高等教育而奋斗。她上了大学，后来成为记者、作家和译者。例如，她为马克思兄弟的许多电影撰写字幕，也写历史小说和侦探小说。前者署她的娘家姓让娜·德尔佩什，后者则使用多个笔名，你可以在她的维基百科页面上找到这些笔名。她是一位非常能干的女性。我父亲没有接受过正规教育，年轻时经历颇为坎坷，因为他的父亲很早就去世了。他曾在美国接受过部分教育。他做过商人，但那并非他真正喜欢的工作。比起经商，他更倾向于生活在文学世界里，而我母亲就生活在那个世界中。因此，他也曾为多家出版社工作，等等。我很敬佩父亲，因为他有一种天赋，能够从许多实际层面构想未来；我一直都很欣赏他以及其他人身上的这种能力。我很幸运，父母都非常和善，也善解人意。

[1]另有一篇由 Peter Galison 采访贝尔纳·泰西耶的访谈，见 [29]。



FIGURE 2. 访谈期间，贝尔纳身旁是一张他童年时的照片

PPP：你是什么时候开始喜欢数学的？原因是什么？

BT：我想是在求学期间比较晚的时候，也许是在高中会考前一年。原因是我遇到了一位非常好的老师，斯皮茨穆勒先生。事实上，我想我连续三年都遇到了同一位数学老师。我不记得他具体是怎么教的，但我记得他想让全班同学笑起来。他总是想方设法逗我们笑，什么话题都能聊。所以，对我来说，学数学是一种乐趣。虽然那时我的数学并不特别好，但我记得自己在课堂上很开心。也许这与我听懂了多少无关。

PPP：那是在哪里？

BT：是在斯坦尼斯拉斯中学，因为我的外祖母是个狂热的天主教徒，她劝我父母把我和我兄弟送进这所天主教学校。

PPP：您也喜欢其他老师吗？

BT：在我的中学学习期间.....是的，有一位，是我年轻得多时的一位拉丁语老师。那时我大概十四岁。他是一名神父。为人非常和善。我记得他的名字是吉罗东。

PPP：您现在还读拉丁语吗？

BT：哦，是的，我现在仍然能读拉丁语。

PPP：您学了很长时间吗？

BT：我学了六年拉丁语，五年希腊语。我所在的班级学习拉丁语和科学，但也可以选修希腊语。我比起拉丁语更喜欢希腊语。

PPP：你明白为什么吗？

BT：希腊语更像一座野生花园，而不是法式花园。某种程度上，希腊语更难平移，因为每个句子里都可能藏着许多细微之处。拉丁语则更直白。所以，我想我更喜欢希腊语，因为你常常会觉得自己可能理解错了；但在平移结束时，发现自己的理解百分之百正确，那种感觉令人愉悦



FIGURE 3. 贝尔纳（前排）和父母及兄弟让-雷诺在阿尔卑斯山，约1955年

。学拉丁语时，你确实不会有那种惊喜。平移古希腊语不仅能让你了解他们的文化，而且，因为你必须不断检视自己对意义的理解，直到终于弄对为止，它还能帮助你成为一名数学家。

PPP：从那以后，你还继续阅读拉丁语或希腊语文本吗?

BT：不太读了，没有。我在柏拉图《理想国》的 Bud´e 版译本中发现了一处错误，仅此而已。

PPP：高中毕业时，你对未来的职业有什么想法?

BT：高中毕业时，我想成为一名希腊学家。我其实不太清楚这意味着什么，但我愿意一辈子学习希腊语。有一次，我们的数学老师给我们出了一道关于包络的问题，非常有挑战性。我花了很多时间，最后终于找到了解法。我想，正是这件事让我开始认真考虑把数学作为一种潜在的职业。

PPP：是什么让你选择了科学预科班，而不是文学预科班?

BT：当时我在文学预科班和科学预科班之间犹豫不决。最终让我做出决定的是一个相当琐碎的想法。我当时以为——这大概是个错误的判断——如果先走理科路线，万一因为某种原因行不通，还可以转回文科；反过来却不可能。

PPP：关于你读预科班的这段经历，你有什么想告诉我们的?

BT：我读的预科班并不是顶尖的。

PPP：当时还在斯坦尼斯拉斯中学吗?

BT：是的。不过它由路易大帝中学管理，本来应该是该校的一个附属校区。它们位于同一地点，但与斯坦尼斯拉斯体系截然不同。那里要求不算高。和许多人不同，我对自己在预科班的那段经历记忆很好，因为嘛，大家稍微学习一下、稍微思考一下，日子就这么过去了。竞争并不激烈，我还有几个一起学习的朋友。

´我第一次没有考进巴黎综合理工学院。我们遇到了一些始料未及的问题。这正是就读于水平不太理想的预科班的特点之一。我当时在巴黎综合理工学院获得了所谓的高分获准免试资格，也就是说，我的笔试成绩不错，可以免去第一轮口试；但到了正式口试时，他们问了我一个问题，我完全不知道他们在问什么。所以我彻底失败了。

´PPP：你当时只对巴黎综合理工学院感兴趣吗?

´BT：不，不，我对高等师范学校也感兴趣。但我没考上。第二´ ´年，我只报考了两所学校：巴黎综合理工学院和高等师范学校。最后我考进了巴黎综合理工学院。

3. First research interests

PPP：是在预科班期间，您决定要成为一名数学研究人员的吗?

BT：也不完全是，不是。我对此一无所知，只是在按部就班地走。读预科班时，我和两个朋友开始翻译朗道的数论著作。我们有一本英文版，于是开始翻译成法语。我不记得原因了，但我对数论很感兴趣。后来，在巴黎综合理工学院，我又多学了一些，对数论也更加感兴趣。于是最终，我申请了法国国家科学研究中心的职位。当时，法国国家科学研究中心会招收刚从巴黎综合理工学院或高等师范学校毕业的年轻人，而我的研究计划是将概率方法应用于加性数论。

PPP：当时有没有人对您作出这个决定产生重要影响?

BT：那是马克·卡茨写的一本小书，讲的是概率方法在数论中的应用。我觉得那本书非常优美。当时几乎没有严肃的代数课程，教的全是分析。我没能有机会跟 Laurent Schwartz 学习，因为他隔年才授课，而我恰好不在他授课的那一年。所以，当时没有哪门课程给我留下特别深刻的印象。

´PPP：你只在巴黎综合理工学院上过课，没有在大学上过课吗?

´BT：没错。我在巴黎综合理工学院读二年级时，去参加了 Pisot、Delange 和 Poitou 在亨利·庞加莱研究所举办的数论研讨班´。我甚至在那里做过一次演讲，内容是 Viggo Brun 关于孪生素数的研究[2]。那是我当时与学术界唯一的接触。

PP ´P：因此，你是在巴黎综合理工学院时萌生了从事数学研究的想法 s.

BT：是的。我喜欢做数学。大多数其他学生都打算从事各种我完全不感兴趣的事情。所以，这多少算是一个默认的选择，主要是因为我无法想象自己在老板手下工作。Schwartz 成功从政府争取到并创立了两项重要举措，我非常非常幸运。其中一项叫作“研究方向”，允许高等师范学校或巴黎综合理工学院的学生´ ´离校后免缴离开公共服务岗位时必须缴纳的费用。如果你离开巴黎综合理工学院或高等师范学校后从事任何非公共服务领域的工作，原则上理论上都必须偿还学校为你支付的费用。Schwartz 争取到一项规定：想从事研究的学生可以将偿还期限推迟六年；如果他们在这段时间内获得博士学位，就完全不必偿还。当时，法国国家科学研究中心的成员享有特殊身份，并不算是真正的公务员。我认为，

[2]它以 [86] 的形式出现。

这对许多学生来说是一项非常重要的举措。碰巧，我正好赶上这套制度实施后的最初几年。

Laurent Schwartz 做的另一件重要的事，是在´巴黎综合理工学院创立了数学中心。我接触研究的方式有些特别，因为最初是通过´物理学家接触到研究的。巴黎综合理工学院有一个理论物理中心，十分活跃。后来有一天，我在老 ´巴黎综合理工学院[3], 的图书馆里看书时，发现了一本 EGA[4]。我打开书，读到第一句话就说：“我一个字也看不懂。”不知出于什么原因，我还借了一本厚厚的书，里面是 Chevalley 在亨利·庞加莱研究所讲授一门´课程的讲义。这些讲义由一位物理学家 Dimitri Fotiadi 记录。里面讲的又全是函子，都是我一个字也看不懂的东西。于是，一两周后，我把书还了回去。几周后，我接到通知，要去理论物理实验室一趟。在那里，我见到了这位教授兼研究员 Dimitri Fotiadi。他问我：“我看到你从图书馆借了那本书。能告诉我为什么吗？”这问题真让人尴尬。我实在不能说我是借来读的。我借它，是因为它看起来像个神秘的物件，像一块刻着奇怪图案的石头，或是一段形状有趣、可以摆在书桌或壁炉架上的木头。它似乎可能有某种意义，但你完全不知道那是什么。我感兴趣的就是这类东西。接着，他告诉我有数学中心的存在，说我或许会感兴趣。我想我欠他很多，因为从那时起，我清楚地意识到自己可以选择研究方向，然后去这个数学中心。最终我也确实这么做了。所以这更像是一次，怎么说呢，幸运的相遇。

4. Discovering Singularity Theory

PPP：因此，这次与 Dimitri Fotiadi 的相遇对你至关重要。

BT：是的，事后看来，这次相遇至关重要。之后，事情又有了进展。我服了一段兵役，期间也做了研究。当时我仍在考虑加性数论。但法国没有人在研究这个领域，所以这算是走进了死胡同。我修读了代数数论课程，但我不觉得这是自己真正想做的事。

后来，多亏了 Fotiadi，我又结识了 Heisuke Hironaka。Fotiadi 和其他一些物理学家，例如 Fr´ed´eric Pham 和 Jean Lascoux，都对奇点消解感兴趣。他们曾参加过 Battelle 的一次会议，也许是在 1966 年，并在那里结识了 Hironaka。那年，Hironaka 在法国的 IHES，Fotiadi 也在那里进行论文答辩。L̂e D˜ung Tr´ang 和我去听了他的论文答辩，尤其是参加了之后的聚会。那时，我们差不多已经计划好在斯堪的纳维亚某处租一间房子，在那里一起工作一个月。我们谁也不太清楚自己究竟想做什么，只想着一起读些书或论文，试着共同理解一些东西。后来我们见到了 Hironaka，他看起来像个年轻的日本人。我们开始和他交谈，询问他的专业领域。他说：“我稍微做些交换代数……”

PPP：大概是哪一年?

BT：那是在1967年末。后来我们发现，他是个非常和蔼可亲的人，和他交谈、讨论都很轻松。他告诉我们，他在布尔有一个研讨班。所以，1968年春，我们开始去参加他的研讨班。有一次我们告诉他，我们打算去斯堪的纳维亚，和几个人一起工作几周。我们邀请他同行，因为觉得他人不错。他立刻就答应了。我们把这件事告诉 Fotiadi 和 Lascoux 时，他们非常兴奋，因为他们知道 Hironaka 是谁。于是整件事完全变了样，因为他们找到了经费。最后，我们在芬兰组织了这次聚会。部分经费由我们承担，但大部分由理论物理中心提供。这并非什么正式活动，我也不知道当时是怎么安排的。如今这种事完全不可能了。

[3]巴黎综合理工学院 ´自法国大革命后创立以来，一直位于巴黎拉丁区，离先贤祠不远。它在七十年代中期迁到了帕莱索。[4]也就是说，迪厄多内和格罗滕迪克的专著《*Éléments de géométrie algébrique*》。

PPP：所以，这并不是一场正式会议，而是朋友之间的一次聚会。

BT：是的，确实如此。

PPP：为期一周?

BT：哦，不是，整个夏天持续了将近一个月。Hironaka 每天都给我们讲授关于复解析情形下奇点消解的课程。Monique Lejeune-Jalabert、L ̂e D ̃ung Tr ́ang 和 Audun Holme 都在那里。Deshouillers 也在那里，尽管他当时已经在做数论了。当然，Pham、Fotiadi 以及 Jean Lascoux 也都在那里。我们可能有十位数学家和物理学家。

PPP：正是在那段逗留期间，你开始对奇点理论产生兴趣的吗?

BT：是的。其实在那之前我就已经产生兴趣了，因为扎里斯基在巴黎做过两场讲座，让我非常激动。

PPP：你还记得那些讲座的主题吗?

BT：记得。当然是关于 Zariski 饱和[5]。

PPP：是这些讲座促使你和 Pham 一起研究饱和问题的吗[6]?

BT：是的，当然。当时我还不太清楚自己想做什么，因为除了加性数论之外，没有什么能引起我的兴趣，而在这个领域里也找不到人可以交流。后来我听了 Zariski 关于饱和的两场讲座。我什么都没听懂，但却非常兴奋。我记得自己开始向身边的人解释讲座的内容，但我肯定其实什么也没听懂。不过，Zariski 的风格，以及代数与几何学的交融……我突然觉得，这正是我喜欢的东西，哪怕我并不理解。

之后，Samuel 起了作用。我想那应该是 1967 年春季，Samuel 召集了一次会议，筹备他下一年的研讨班。我和 L ̂e 一起去了。你知道，我们那时多少有些漫无目的，到处听讲座，试着寻找自己的方向。我们很幸运，能够在这个体系中生存下来，只凭直觉行事。总之，我们去了那次筹备研讨班的会议。有些内容我不懂，但最后我建议 L ̂e 问问 Samuel，他是否打算在研讨班上讲饱和。我记得那是在亨利·庞加莱研究所的 Hermite 阶梯教室里。我们走下去见 Samuel，态度很恭敬，因为 Samuel 毕竟是 Samuel。我们问：“您打算在研讨班上讲饱和吗？”他说：“是个好主意，你来讲。”于是，我们就得准备关于 Zariski 饱和的讲座。

PPP：你和 L ̂e。

BT：是的，L ̂e 和我。我讲了第一场讲座，L ̂e 讲了最后一场。而且，第一篇论文的第一行是这样开头的：“令 $\mathcal{O}$ 为一个 Krull 维数为一的局部整环 ”。这些词我一个都不明白。所以，我正是在那时真正开始研究奇点，试图弄明白“局部整环”是什么意思……

PPP：你还记得你当时查阅了哪些书吗？比如扎里斯基和 Samuel 的著作？还是说，为了了解这个领域，你向专家们请教了?

BT：1966年我去了美国，想看看自己是否愿意在那里学习。最后我决定不在那里学习。不过，在纽约的一家书店里，我找到了一本二手的《扎里斯基-塞缪尔》第一卷。我翻开一看，觉得这是一本很棒的书，而且蓝色精装封面也很漂亮，价格又便宜，于是就买了下来。也许我当时就开始读了，也许这就是我最初学习一些交换代数的方式。我大概也向身边的人请教过。当然，我得到了 Pham 等许多优秀人士的大力帮助。我觉得，在交换代数方面，Fotiadi 和 Lascoux 并不算特别精通，但我从 Pham 那里学到了很多……

[5]扎里斯基关于这一主题的主要论文是 [122], [123] 和 [125]。[6]这项工作直到2020年才以 [75]的形式发表。

5. The first article

PPP：是我们与 Pham 的项目[7] 是为了从较少依赖交换代数的角度来研究饱和吗?

BT：不是。事情是这样的。我当时在尼斯参加一次会议，那应该是 1968 年底，具体时间我记不清了。我做了一场关于饱和的演讲，Pham 当时也在场。他提出开车送我回巴黎，但他说：“我得在欧洲核子研究中心停一下。”那里靠近日内瓦。这并不是直达路线。最后，凌晨 3 点我们到了欧洲核子研究中心，整晚都在讨论饱和。事实上，他差不多是在向我解释我那场演讲的内容。我们的论文就是这样诞生的。

PPP：如果我没记错，那是第一篇将奇点理论与利普希茨几何结合起来的论文。

BT：是的。

PPP：你还记得你们是如何把这两件事联系起来的吗?

BT：我想有很多因素。我不太确定，但我认为我们知道，得益于 Hironaka，整依赖关系对应于绝对值不等式。

PPP：你是在芬兰的那一个月里学到这些的吗?

BT：是的，我想是吧。Pham 比我进展快得多。也许是他把这些联系起来的。在演讲时，我心里一直有个问题：我非常苦恼，因为我学到平面分支的普伊苏指数，却发现它们没有内蕴定义。你必须选择一个坐标系，而我觉得这不太好，也不应该如此。这肯定是我们夜间驱车时讨论的事情之一。最后得出的，是通过沿着分支正规化的相对笛卡尔积，对两份正规化的笛卡尔积 $X \times X$进行膨胀，从而以内蕴方式定义普伊苏指数 X X。我对此非常满意。我觉得，某种隐于迷雾中的东西突然变得清晰起来。当时，对我而言，这就是那篇文章的主要贡献[8]，，而不是它的 Lipschitz 部分。令我印象深刻的是，这种研究奇异空间的芽的方法，不必先验地 将其呈现为非奇异空间的分歧覆盖，至今仍影响着我对赋值的研究。

PPP：这是你的第一篇论文，在开始攻读博士学位之前写的。

BT：哦，是的。

PPP：但你当时为什么没有发表呢？直到2020年，它才刊登在第一本关于奇点利普希茨几何的教科书中[9]。

BT：你知道，那时候的情况和现在不一样。许多研究中心通过预印本交流。各个实验室之间有一整套交换预印本的机制。我还清楚地记得，在 Centre de Math´ematiques，我们觉得只要写好东西，做成预印本，寄出去，就算完事了。我们有专门的印刷室，和 Centre de Physique Th´eorique 共用。

PPP：真不错，比现在简单多了。

BT：是的，你不必去找审稿人之类的人。我想，当时的评审制度适用于数量少得多的研究人员。我的意思是，几年后我在美国时，一位颇有声望的美国数学家在交谈中说：“哦，是的，不过你有这个利普希茨诠释。”不知怎么回事，那份预印本传到了他的办公桌上，或者说，里面的内容传到了他的耳朵里。我认为，那些有趣的东西会流传开来。从某种意义上说，这种传播方式要求更高，因为你得亲自给某人寄一份副本，并说：“也许你会觉得这很有趣。”所以，如果某些东西没有引起足够多人的兴趣，它们就会自然消失。

[7]也就是说，这个项目促成了文章的诞生 [75].[8]请参见 [75, 第 10 节。6].[9]这就是那本书 [130]。

6. Early mathematician friends

PPP：你提到了 L^e D˜ung Tr´ang 和 Monique Lejeune-Jalabert。他们对你来说非常重要。你还记得自己是如何认识他们的，以及你们的友谊是如何发展起来的吗？在同一时期，你这一代人中是否还有其他对你很重要的人？

´L^e曾获巴黎综合理工学院录取，但后来出于一些个人原因放弃了。我其实也试过做同样的事，但我是法国公民，而他不是。我去找指挥官，说："我想离开。"他说："你知道这意味着接下来三年你都得待在一个团里吗？"我说我之前没意识到这一点。总之，我想是 Schwartz 鼓励 L^e 来数学中心的。当时他是 Chevalley 的助理。

´ ´Monique毕业于女子高等师范学校。它类似于男生就读的高等师范学校，只招女生，招生人数也更少。法国许多杰出的女数学家都毕业于这所学校，尤其是在皮埃尔·萨缪尔担任那里的数学教研主任之后。Monique、Mich`ele Vergne 和克莱尔·德拉罗什等人当时都是学生，我妻子 Maryvonne 也与她们同届。如果我没记错，两所学校于1985年合并了。那时巴黎综合理工学院还没有女生，所以 Monique 是第一位进入数学中心的女数学家。她很早就对奇点产生了兴趣。她显然对 Hironaka 的工作很感兴趣，这可能是因为她曾在奥赛听过让·吉罗的课程。

PPP：课程的主题是什么？

BT：那时是关于奇点的，这在当时非常新颖。因此，她也来到了芬兰 .

PPP：所以，对你而言，扎里斯基和 Hironaka 对奇点理论的发现很重要，而 ud. 那 L^e 呢？

对她而言，则是 Gira

BT：L^e 的情况比较难说。我不太清楚，但他的兴趣可能是因为他做过关于饱和的演讲，当然也因为他在1968年春听了 Hironaka 在布尔举办的研讨班。

PPP：Jean-Jacques Risler，你的另一位挚友，当时已经在那里了吗？

BT：他晚些时候才到。他已经完成了学位论文，或者正在收尾。我想他当时不在芬兰。他想研究实代数几何，是 Cartan 的学生。我对他是如何加入我们的有一个猜想。当时，实代数几何在法国一点也不受欢迎。它和奇点学差不多，但处境甚至更糟。我猜 Cartan 对 Schwartz 说过："我有个学生，他很优秀，但我不知道该怎么安排他。你何不把他招进你的数学中心？"因为我们都多少有点，你知道，像是被排斥在外；我们不属于体制，不在布尔，也不在高等师范学校，研究的也不是当时热门的学科。我想 Risler 就是因此加入我们的。当然，我们相处得非常融洽；我们有点身处边缘，但又恰到好处，因此感到自在而自由。

7. The first stay at Harvard

PPP：那么我们来谈谈美国。你是怎么开始跟随 Hironaka 攻读博士学位的？

BT：事情是这样的，芬兰会议结束后，Hironaka 邀请 Monique 和我去哈佛大学，和他一起撰写一本关于复解析去奇异化的书。这本书最终直到几年前才出版[10]。

PPP：它的作者不是 Hironaka、Monique 和你，而是 Hironaka 以及两位西班牙数学家 Jos´e Manuel Aroca 和 Jos´e Luis Vicente。

[10]这本书就是 [2], , 于2018年出版。



FIGURE 4. 贝尔纳和 Maryvonne 于2011年在西班牙托德西利亚斯与平介及其妻子广中和歌子合影



FIGURE 5. 贝尔纳于2019年在奥伯沃尔法赫与Heisuke Hironaka合影

BT：但 Monique 和我是最先着手这项工作的。Hironaka 为了让我们进行这项写作，给了我们在哈佛大学的职位，所以我们就去了。

PPP：当时并不是打算跟他攻读博士学位吗?

BT：不，倒也不是。我们不是研究生，而是研究员之类的。除了法国国家科学研究中心发的工资，我们甚至还能领一小笔补贴。

PPP：那时你甚至没想过要读博士学位吗?

BT：我知道“研究方向”有六年的期限。但我并不真正清楚攻读博士学位意味着什么。我知道不久后的某个时候，我必须这么做，但这只是个遥远而抽象的念头。这次去哈佛大学的目的是写这本书，而不是拿博士学位。我们和 Hironaka 一起工作、讨论，当然还有当时也在那里的扎里斯基，以及许多有趣的人，比如芒福德和 Bott。那真是个很棒的地方。我们没有完成这本书，但写了很多页。我们回到法国，就在那时，让·吉罗产生了极其积极的影响，因为我们回来时没有论文导师……

PPP：你们过了多久才回来?

BT：一年后。我们从 1970 年秋天到 1971 年 6 月去了哈佛大学。从哈佛大学回来时，六年期限已所剩不多。我猜，吉罗，也可能还有 Samuel——我想他关注过 Monique 的工作——说服了该说服的人，让他们相信我们已经有足够的材料来写学位论文。

PPP：因为在研究复解析空间消解的过程中，你和 Monique 开创了一种新理论。

BT：是的。当然是从 Hironaka 的思想出发，我们开发了一些相当不错的技术工具，我想，我们称之为安装理论。这是关于一般类型牛顿多边形的理论。我们还研究了如何根据局部代数的希尔伯特–塞缪尔函数对复空间进行分层，探讨了理想整依赖的若干方面，在复解析框架下重新发现了 Rees 赋值，并引入了理想的分数次幂等。1971—72 学年基本上都用于撰写学位论文；之后，我们在 1973—74 年的研讨班上讲解了其中一部分[11]。此外，我在哈佛大学期间，对托姆的典范形变理论的复数情形产生了浓厚兴趣。

PPP：你在哈佛大学逗留之前，就开始去听托姆的研讨班了吗?

BT：我了解 Thom 的一些想法，但不记得自己是否去布尔参加过他的研讨班。他曾到巴黎综合理工学院做讲座，我非常喜欢。

在哈佛大学时，我一直思考一个关于米尔诺数的问题，简直着了迷。每周工作日我都在读 Hironaka 的书，周末则研究判别式几何之类的问题。最终，这些工作促成了我在卡尔热塞发表的论文中的一部分[12]，，而这部分后来也成为我学位论文的一部分。

PPP：你在哈佛大学期间见过 Milnor 吗?

BT：没有。

PPP：你从未和他有过数学方面的交流吗?

BT：没有，从来没有。

PPP：那和 Whitney 呢?

BT：没有，很遗憾。我本来很想见见他，但他当时已经很老了。我对惠特尼条件有了一些认识后，曾写信给他。他回了一封非常亲切的信，说：“我已经不做几何学了，现在在做教学法。”我和他的交集就到此为止。

PPP：你在哈佛大学和谁有过深入的数学交流?

BT：当然主要是和扎里斯基、Hironaka合作，也和 Mather 有过合作。扎里斯基组织了一个研讨班，Mather 也参加了。我讲过关于饱和的讲座，这次说的是 Lipschitz 饱和。我记得 Mather 非常友善，还对我说了不少好话。我们和数学系的许多成员关系都非常融洽，比如芒福德、Mazur 和 Bott，因为他们理解我们都在努力做同样的事情，而且他们都很友善。

---

[11]后来经过更新，以……的形式发表 [55]。[12]也就是说，文章 [88]。
第16节对此有详细讨论。

PPP：您能否简要描述一下扎里斯基是如何做数学的？他如何选择问题？和他交谈是什么样的？他喜欢给您讲许多数学故事、解释各种事情吗？

BT：这很难解释。他讲的数学故事不多，但提出了许多观察。比如，在1970—1971年的一次研讨班演讲中，我展示了一个证明，私下里我觉得它相当漂亮。其他人都离开后，他和蔼地对我说："这只是一个漂亮的证明草图。"于是我回去重新审视这个证明，并把它仔细剖析了一番。我想，当时他主要仍对奇点消解感兴趣。事实上，饱和理论是他奇点消解研究计划中的一个子项目。他认为，要真正理解事情的进展，就应该跳出常规思路。我认为，他设想了一种奇点消解方法，它是荣格方法的一种变体，但要复杂得多，并且以一种比通常的荣格方法更微妙的方式运用判别式几何。更重要的是，这是一种精确的归纳定义。我们之间的一些交往记录在卡罗尔·帕里克的书中[13]。书中没有提到的是，他为人多么和善：他会邀请我和他的学生一起在教员俱乐部吃午饭；后来他开始出现听力问题时，也会邀请我去他的办公室。20世纪70年代和80年代初，我经常访问哈佛大学，Maryvonne和我也常去布鲁克莱恩的公寓拜访奥斯卡和约尔。我们的双胞胎中有一个——我不记得是哪个——第一次学会走路就是在那套公寓里。

PPP：您对判别式的兴趣源自扎里斯基吗？

BT：不完全是。我想，这源于这样一个观察：Thom 和扎里斯基所做的一切都与分岔有关。Thom 有自己的观点，扎里斯基也有自己的观点，两者不同，但所涉及的现象基本相同。你有一个解析变化的对象族，当参数跨越某些边界时，其形状就会改变，而这正是你需要理解的现象。我想，我非常清楚地意识到，这两位巨擘可以说是在面对同一类问题。扎里斯基的方法是代数的，但人们可以看出，它凝聚了大量几何学内容。

PPP：您还记得自己曾想解决的某个具体问题吗？

BT：我在哈佛大学时有一个执念，我把它称为"$\sum \mu_i = \mu$"。事实是，如果你有一个对象族，其中一个奇点发生分岔，但米尔诺数之和保持不变，那么就只能有一个奇点。后来，L^e[14] 利用单值化的不可约性证明了这一点，此后还有其他几个人也给出了证明[15]。我想给出一个代数证明，但至今仍未实现。

PPP：这个猜想是由您提出的吗？

BT：是的。

PPP：可以说，正是因为这个猜想，您才开始研究判别式吗？

BT：是的，完全正确。我真的不知道自己是怎么想到这个猜想的。当时我只是觉得事情就该是这样。我试着证明它，非常努力地尝试过，但最终失败了。

PPP：您还记得当时是如何着手解决这个问题的吗？

BT：我当时试图理解判别式几何学究竟是什么。这是一个非常具体的问题，可以从不同角度考察。它围绕着这样一个事实展开：米尔诺数就是极小万有变形的判别式的重数；而由于 Hironaka 的消解工作，我也意识到等重数性的重要性。因此，我用 Fitting 理想定义了判别式，并提出了分解公式：当离开原点时，判别式分裂为若干分量的并集，这些分量分别对应纤维[16]中的各种奇点。这是我当时理解到的事情之一。我试图找出这些判别式必须遵循的规律，希望这些规律结合起来最终能给我答案。我尝试了很多方法。判别式的几何学为什么应该相同

[13]这是扎里斯基 [71] 的传记。[14]在文章 [56]中。[15]由 Lazzeri 和 [54] Gabrielov 撰写 [28]。[16]相关内容见 [88, 第三章第二节和第 3]节。

当判别式的重数保持不变时？这涉及如何理解判别式上的等重数条件。事实证明这是个微妙的问题，后来 Pham 举了一个例子，表明判别式的几何学确实可能沿着等重数层发生变化[17]。再后来，我证明了沿着 $\mu^{(*)}$-常数层——在平面曲线的情形下，它与判别式的等重数层相同——这种变化不会“太大”：判别式的某个牛顿多边形必须保持不变[18]。

8. Research style

PPP：所以，你的理解逐渐深入了。你是如何记住自己发现的一切的？你有一本笔记本，记录主要观点和证明吗？

BT：这因人而异。扎里斯基有许多写满例子的笔记本。他能只靠翻阅笔记本就找到许多例子，这一点给我留下了很深的印象。我只是偶尔会那样做。有时，如果我对自己想做什么有了相当清晰的想法，就会把事情记在笔记本上。大多数时候，我只是把东西写在几张纸上，再尽量把它们整理好。不过，我没有一种——该怎么说呢——研究方法，不像生物学实验室里的实验记录本，会把每次实验及其所有条件都记录下来。你知道，所谓疯狂，就是重复同一个实验，却以为它会得出不同的结果。但这句话只有在实验独立于实验者时才成立。我的研究方式里，这种情况很多。你尝试某件事，结果行不通，于是换一种稍有不同的心态再试。有时，想法就是这样产生的。你可能不必改变计算过程，但必须改变理解它们的方式。有时你会突然说：“啊，对，我一开始就该看出来。”当然，过一段时间，你会忘掉那些计算，再尝试别的东西。

PPP：你认为计算是研究中的实验部分吗？

BT：是的。我自己不使用计算机进行研究，但我的合作者会用；当然，我是手工计算的。

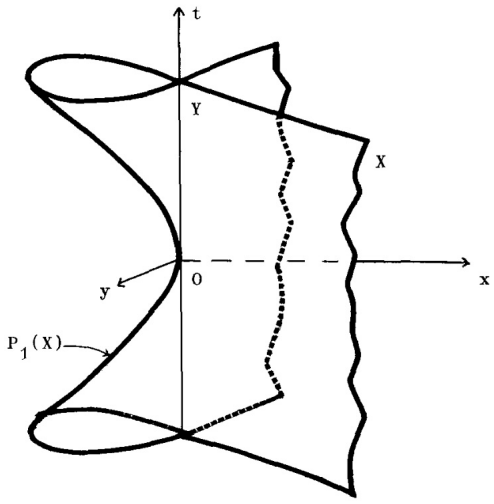


Figure 6. 一族节点退化为一个尖点

PPP：你也会通过绘图来做实验吗？

[17]参见 [3, 定理 2。9]以及 [89, 第二部分，第 8]节。[18]
参见 [91,定‘理‘ 6’]。

BT：是的，当然。我会画图来确定一些想法。我认为这是必要的。

PPP：我从您那里学到了一幅美丽的图[19]，它出现在您的论文《*Vari´et´es polaires II*》中，图中一个节点退化为尖点，展示了一个不满足惠特尼条件 B 的例子。

BT：我不认为那个例子是我首先提出的。我确信，像 Whitney、Thom 和 Mather 这样的人都知道它。

PPP：这个例子对您理解某些事情来说，是不是很重要?

BT：是的。因为我在那篇论文中的主定理[20]是，这个例子所呈现的现象具有普遍性。我想我在引言中说过这一点。如果您看懂这幅图，那么您就理解了这个一般性定理。

PPP：您认为，在数学中除了计算和绘图之外，还有其他进行实验的方式吗?

BT：这是个有趣的问题.....我想是的。还有一些更抽象的方法。例如，一种可能是检测两个问题之间是否存在范畴等价芽。实验就是尝试弄清楚它是否确实是范畴等价。如果这种等价不成立，情况可能会非常有趣。因此，这是一种更加抽象的实验方式，但我认为确实存在这种情况。

PPP：你能想到一个具体的例子吗?

BT：是的。当我第一次对凸性与代数几何之间的关系产生兴趣时 y,
我当时在思考这能发展到何种程度。

PPP：所以，你是有意识地尝试建立一部词典，并寻找它行不通的地方。

BT：是的，我觉得，准确地理解它究竟在哪里行不通很有意思。你面对两个世界：一边是凸体，另一边是代数几何。你会发现一些现象，就现象本身而言，它们是同构的。一种看法是：好吧，它们都是某种一般现象的特例，只不过以两种不同的方式体现出来。另一种看法则是，两个世界之间存在一部词典。但原则上，这部词典不可能尽善尽美。那么，它的不完善之处在哪里？我认为，光是这个问题本身就很有意思。举例来说，可以把一个凸格多胞体与一个射影托里克簇联系起来，而该簇的交理论包含了关于这个多胞体的大量信息。但是，在多胞体的世界里，并没有超平面截面的概念，而这对托里克方法证明凸多胞体方面的困难结果至关重要。因此，McMullen 将多胞体的世界扩展到了一个包含超平面截面运算类比的世界。June Huh 和他的合作者则以一种更具组合性的方式，为拟阵构造了上同调理论[22]；在这些理论中，基于超平面截面的“霍奇结构”成立，并为拟阵方面的结果提供了证明，而这些结果适用于许多类型的组合问题。令我感兴趣的是，霍奇理论[23]首次被用来证明一个数列的对数凹性或凸性，正是我对不等式 $\mu^{(i+1)}\mu^{(i-1)} \geq (\mu^{(i)})^2$ 的证明[24]。这个不等式联系了一个复超曲面的孤立奇点在各维一般向量子空间截面下得到的连续各截面的米尔诺数（X，0）$\subset$（$\mathbb{C}^{n+1}$，0），由 $f(z_0, \ldots\ldots, z_n) = 0$ 定义，其中 $\mu^{(n+1)} = \dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}\{z_0, \ldots, z_n\}/(\frac{\partial f}{\partial z_0}, \ldots\ldots, \frac{\partial f}{\partial z_n})$ 是通常意义下的米尔诺数。霍奇理论与超平面截面思想如此广泛地出现，这本身就十分引人注目，也无法用某种共同的上层结构来解释。

当然，曲面上的霍奇指数定理与正特征下曲线的黎曼猜想之间存在联系，而格罗滕迪克和 Deligne 对其作出了宏伟的推广。我很欣赏这种将对简单现象的深入研究体现于先验

[19]见图8。它出自文章 [100]。[20]也就是说，[100,第五章，定理 1。2]。[21]在文章 [65]。[22]参见 [48]。[23]以曲面消解中例外因子的交叉矩阵负定性的形式。[24]在 [93]。

遥远环境中的例子。比如，Yves Hellegouar'ch 发现[25] 费马方程的一个解可以对应一个椭圆曲线方程；这一发现最终促成了安德鲁·怀尔斯对费马大定理的证明。

PPP：你曾认真思考过数学家发现新知的方式……

BT：我非常关注这样一个事实：我们发现问题和着手解决问题的方式应该是多种多样的。我认为，有一种我称之为 Galois-Grothendieck方式的思路：如果你理解了这一切背后的结构，能够为这种结构命名并加以研究，那么所有问题就会变得——不是微不足道，而是你懂的，容易解决，或者说顺理成章，随你怎么称呼。还有一种更偏实验的方式，我认为这正是不同问题类别得以形成的原因。有一类问题关乎定义结构、完善结构和应用结构；还有另一类问题，则是发现某些现象，然后像物理学家那样尝试理解这些现象。比如，判别式几何就是一种现象。它遵循某些规律，因为变形或展开是极小普适的。规律是什么？找到这些规律之后，它们是否足以刻画这种现象？

再举一个例子：域上的代数簇的格罗滕迪克环。它是一个非常自然且实用的对象，适用于任何涉及可加不变量的情形，例如计算有限域上的点数。当然，在这个方向上有许多非常有趣的内容。然而，当你写下 X 等价于 $(X \setminus Y)$ 与 Y 的不交并时，它完全无法体现 X 沿着子簇 Y 的几何性质。与之对比的是托姆配边环，它是另一种为簇的集合赋予代数结构的方式，这些簇是按照某种等价关系取商得到的。它基于这样一个事实：带边流形沿其边界具有几何结构，因此一个流形要成为另一个流形的边界，必须满足一定条件。两个簇等价，当且仅当它们构成某个第三个簇的边界。这同样是一种结构，但更合我的口味，因为它基于一种可以通过几何方法探索的现象，例如运用莫尔斯理论。

人们很容易会评论说，这纯粹是主观的，我只不过是在说，发现现象的最佳层次就是让我最自在的层次；但我相信，事情远不止于此。我认为，我们称为几何的现象，很大程度上根植于我们对世界的原始经验和感知系统；而与结构有关的现象，则更多反映了大脑的运作方式、它的句法结构，以及驱动我们的思维和感知的强烈组织与概括冲动。当然，两者并非彼此独立，正是这种相互作用造就了对我们有意义的抽象数学。我绝不是朴素意义上的柏拉图主义者。我认为，我们的数学概念和对象并非某些完美、非人的对象的影子，而是我们对世界的无意识经验与人类冲动相互作用的表达；这些冲动也大多是无意识的，例如寻找原因、组织、比较、预测的需求，以及许多其他需求。简而言之，我认为数学是一门人文科学；我们觉得它具有客观性，是因为所有人对世界都有非常相似的无意识感知，也都有非常相似的无意识机制来处理这些感知。

PPP：您认为自己结合了这两种发现方式，还是主要属于第二类研究者？

BT：我认为，要成为一名非常优秀的数学家，两者必须兼备。我觉得自己更偏向物理学家那一边。不过，我是一名代数几何学家，因为如果能找到某种支配几何现象的一般代数现象，我就会非常高兴，比如理想化贝尔蒂尼定理。它可用于证明，在小层的某个闭解析集之外，惠特尼条件均成立；还可证明，相对极簇与定义它们的投影的核横截[26]。

PPP：更确切地说，是指您更喜欢做这类数学吗？

BT：说到底，这并不是一种偏好，而是当你思考某件事时，脑海中浮现的东西。PPP：你的意思是，回顾过去，你发现自己更多从事的是第二类数学。

[25]参见 [42] 及其维基百科页面。[26]参见 [100,第四章第 5]节。

BT：是的。我非常钦佩并尊重第一类数学活动，因为它创造出非常优美而重要的结构。但事实证明，我并不真正以这种方式工作。我想，我一直是被迷住了才投入工作的。就像我被扎里斯基的讲座深深吸引，即使什么也听不懂。我也被我跟你提过的 Chevalley 课程吸引，同样什么也听不懂。和扎里斯基一样，Chevalley 显然全身心沉浸在他所讲解的内容之中。我认为，人的心智有某种能力，能够凭借一种信念之举，对特定现象产生兴趣。但要有所创造，你必须在某种程度上让自己认同某个对象或某种现象。这样，至少你会提出问题。例如，根据 Roquette 的历史著作[27]，，引出 Weil猜想的提出过程始于 Emil Artin 的研究，也就是我们所说的实验数论。当然，在一些特殊情形下，相关研究已经相当成熟，并且建立在其他代数学家的工作之上。在我看来，历史学家也应该努力寻找各种数学发展的最初火花；试着弄清事情从何处、又是如何开始的，会让人受益匪浅。

PPP：在我看来，大多数数学家看重的远胜于那些富有启发性的问题，是已经完成的成果，是带有证明的定理。你如何看待我们这个群体的这一特点？提出一个好问题其实非常难。

BT：是的，我们不应该低估问题的价值。但另一方面，我们也不能只靠问题过活。这两者之间需要保持平衡。有些数学家更热衷于寻找最一般的表述和最优美、简洁的证明，或者证明某些结果是某个更抽象结果的体现，揭示某种深层结构。这就是我所说的 Galois-Grothendieck方式。正如我所说，我很欣赏这种方式，但我并不遵循它。每位数学家都处于两者之间的某个位置。我恰好更倾向于实验这一边，在这里，简单的问题由此诞生，例如探究超曲面奇点的几何学／拓扑在多大程度上决定其一般超平面截面的几何学／拓扑。

9. Collaborations and seminars

PPP：贝尔纳，你有好几位合作者。能谈谈其中一些合作是如何开始的吗？

BT：这些合作都始于讨论，最初是在数学中心（Centre de Math´ematiques）。当时那里非常小，基本上只有一间大房间、一间小一些的房间，旁边还有两间小办公室。所以我们差不多都待在大房间里，花很多时间讨论自己在做什么，并向其他人解释。这种情况相当特别，因为正如我所说，那时大家并不执着于学位论文，只是一起做数学。有时讨论会更有条理一些。我记得 Laudenbach 在法兰西学院（Coll`ege de France）开设 Cours Peccot 时，想先试讲一遍，我就做他的听众。在好几次试讲中，他都向我讲解自己的想法。当然，那不是我的研究领域，但非常有趣；他很善于讲解。这就是当时的氛围。

与 Monique 的合作是自然而然的，因为我们当时都在哈佛大学，做着同一个项目。我非常欣赏 Monique 的数学创造力。至于 Lˆe，我记不清具体情况了，我们当时在谈米尔诺数……他有一份 Thom 的手稿，我后来才发现其中讨论了极曲线与单值化[28]。那时我也以自己的方式发现了一条极曲线[29]。我对单值化并不感兴趣，这是错误的，因为最终我的猜想[30] 是通过拓扑方法，借助单值化证明的。我仍然认为存在代数证明。总之，我们开始讨论各种问题，渐渐地，有时讨论内容会凝结成一篇论文。

PPP：这是因为你在讨论中非常开放，不会说“我不必谈这个，因为我想自己发表”。你总是觉得可以毫无顾忌地谈论自己的所有想法。

[27]这本书是 [78]。[28]这篇文章是 [116]。[29]它首次出现在 [88, 命题 II.1.2 的证明，第 318], 页，没有名称。它是记作 Γ 的曲线，由超曲面奇点的定义函数除一个偏导数外的所有偏导数同时为零所定义。[30]也就是说，在第 $\sum \mu_i = \mu$节讨论的猜想“7”。

BT：是的，完全如此。

PPP：我读博士时也是这种感觉：你从来没有告诉我不要和别人交谈。

BT：不，我不喜欢那样。我知道，人有时可能会对此感到后悔，但如果你不是始终疑神疑鬼，生活会愉快、简单得多。

PPP：你很早就开始组织研讨班，而且一直坚持到现在。我想知道，那些合作在多大程度上是从研讨班开始、并与之相关的。

BT：啊，可能确实如此。事情是这样开始的。我和 Monique 从哈佛大学回来后，´觉得应该分享我们所学到的东西。于是，我们在巴黎综合理工学院开始了一个研讨班，因为当时有很多人对奇点消解感兴趣。里斯勒和 Lˆe——不过我认为主要是里斯勒——每周整理一次笔记。我们只是解释自己所理解的内容：最大接触、希尔伯特–塞缪尔分层之类的东西。最后形成了一本小册子，题为“*Quelques calculs utiles pour la r´esolution des singularit´es*”。我的网页上有这本小册子。我们当时开始合作了吗？我不记得了。也许那是我第一次真正见到吉罗，因为他来参加研讨班，还提出了问题。

PPP：那么，你是从哈佛大学回来后才认识吉罗的吗？

BT：我不敢肯定，但我的印象是这样的。

PPP：你是通过他认识格罗滕迪克的吗？

BT：不是，我是通过 Lˆe 认识格罗滕迪克的，因为 Lˆe 要去 IHES，他就带我一起去参加这个研讨班。听了两三场讲座后，我便决定这不适合我。

PPP：那是在去哈佛大学之前还是之后？

BT：我想应该是在之前。

PPP：后来你参加了 Thom 的研讨班，你更喜欢那里。

BT：是的，不过那是在卡尔盖会议之后`。Thom、扎里斯基、Hironaka 当然都在场，还有 Pham、 ·Lojasiewicz 和 Brieskorn，以及许多年轻的数学家。这次会议实在太精彩了。我再次感到自己深深有恩于 Pham，因为卡尔盖`会议后不久，大约两三个月后的秋天，Thom 组织了一种小型研讨班。Pham 原本要在研讨班上演讲。据我后来所知，他对 Thom 说：“让贝尔纳代我演讲吧。”于是，我开始讲述自己对米尔诺数的理解。我就是在那里遇见 Thom 的。这完全要归功于 Pham。我很高兴，我关于惠特尼分层的研究最近被用于[31] 发展他对理论物理学中朗道奇点的构想。

PPP：后来，您在数学方面是否经常与Thom交流？

BT：当时，在论文答辩期间，您必须讲解一篇与自己学位论文所属领域不同的数学论文，这篇论文由一位外部导师选定。我请Thom为我“挑选”一篇Coxeter关于叶序的论文，因为我觉得那很有意思[32]。他答应了，因此他与Hironaka和Verdier一起担任了我1973年1月学位论文答辩的评审委员。只要有可能，我就去参加他的研讨班。有时，当我觉得自己有些话要说时，也会专程去拜访他。他总是非常热情，也非常和善。

PPP：他是一个很好的倾听者吗？

BT：是的，确实如此。

PPP：所以，他会提出重要的意见？

BT：有时是这样。比如，他让我理解了实数情形的种种困难。因为那时我一心只关注复数情形。有一次，由于 Thom 的一句话，我意识到有很多事情自己其实并不真正理解。

[31]见 [43] 及其参考文献 [11]。[32]这就是论文 [15]。

特别是，他曾多次让我思考他提出的灾变论版本的吉布斯相律；再加上 Michel Herman 提出的一个问题，我开始思考实极小全变形的判别式几何学，这一点在 [113]中有所阐述。

有一次，我们谈到惠特尼分层时，他向我解释了自己的想法：对仿射复空间的理想进行迭代雅可比扩张，以此导出惠特尼分层的理想，正如 [115] 中所介绍的那样。之后他笑着说：这是我的少年梦想[33]。我认为他这么说，是因为这将使空间的定义映射在射流空间中的位置（其含义可借助分层思想来定义）与空间本身的几何学之间建立起精确的联系。

PPP：您谈到了卡尔热兹。若我没记错，奇点领域的首个大型会议稍早前在利物浦举行，而卡尔热兹是第二场。会议论文集非常出色，直到今天仍是重要的参考资料[34]。您能谈谈众人对奇点理论的兴趣是如何逐渐形成的吗?

BT：这段历史当然非常复杂。起初是 Milnor 关于异球的研究以及希策布鲁赫的诠释，随后是 Brieskorn 的工作。这当然引起了许多拓扑学家的兴趣。米尔诺的书[35] 在吸引人们研究奇点方面发挥了非常重要的作用，因为它将代数奇点理论——即便它并非那么代数化，其框架仍是代数的——与微分拓扑结合起来。这本书或许是一个转折点，促使人们在高维情形下寻求具有几何意义、而非仅限于重数的奇点代数不变量。此外，当时有不少人，尤其是在英格兰，利物浦以 C.T.C. 沃尔为核心、华威以克里斯托弗·齐曼为核心的研究者，都对奇点映射理论在微分拓扑中的应用以及突变理论感兴趣。还必须补充这段故事的另一面：Hironaka 正在进行奇点消解。许多人或多或少都知道代数情形下已经完成了这项工作，也知道理解复解析情形很有意思，等等。在利物浦，人们更强调微分拓扑这一面。在卡尔热兹，讨论则更为多元：米尔诺数、拓扑、单值化、判别式、分层、消解、饱和，所有这些都出现在卡尔热兹`。因此，我认为，人们逐渐认识到奇点理论是一个让许多不同思想相互作用的熔炉，这正是它吸引众人的主要原因。

PPP：你曾说，你对消解的兴趣源于与 Hironaka 的交往。至于你对微分拓扑方面的兴趣，我想你是在米尔诺的书刚一出版时就读了它。

BT：是的，事实上，Hironaka 在布尔组织这个小型研讨班时，就在我们见到他之后，首个 st 主题是 米尔诺的书，当时他手里拿的是手稿。

PPP：我最近才意识到，人们常说米尔诺数是从米尔诺的那本书中出现的。但即使尚未命名，它们在 Thom 构想极小万有展开时就已经出现了。

BT：是的，当然。

PPP：是你意识到这两种情形中出现了相同的数吗?

BT：是 Pham 认识到了这一点，但我当然也是觉得这很有意义的人之一。多年来，我和 Thom 进行过几乎滑稽的讨论，因为他总是把 μ 记作实际上是 $\mu - 1$的东西。Carg`ese 会议期间，人们正试图证明 μ-常数猜想；这是 Hironaka 针对曲线提出的。一般来说，该猜想指出：对于复超曲面的孤立奇点族，米尔诺数保持不变意味着嵌入拓扑类型保持不变。后来，Lˆe-Ramanujam 运用 h-配边定理，针对维数为 $\neq 2$的超曲面证明了这一点；Lˆe 则针对平面曲线[36]证明了这一点，此事广为人知。我意识到，我们甚至不知道 μ 是否是一个拓扑不变量。所以，

[33]青春之梦，指的是克罗内克的青春之梦。[34]这是第 [126]卷。[35]也就是说，这本书 [68]。[36]
参见论文 [57], ，其中第 3 节讨论了平面曲线奇点的情形。

我证明了这一点，而且这很容易[37]。大约在那时，L^e 证明了单值化也是拓扑类型的不变量。在思想喷涌而出的时代，许多简单的东西会随之出现。最后，它们让整个事情完整起来。是的，当时，极小万有展开的基的维数与米尔诺数之间的这种对应关系让我着迷。我确实认为这背后有某种深刻的东西。

PPP：有一部著名的论文集，是由你主持的研讨班促成的，主题是 Du Val 曲面奇点[38]。

´BT：那是在巴黎综合理工学院举办的，我和 Demazure、平克姆共同组织了研讨班。

PPP：这是一个为期一年的研讨班。

BT：没错。我为研讨班提出了这个主题，因为我刚刚读到杜瓦尔的论文[39]，又一次为之着迷。我一直有些惊讶于考克斯特-戴因金图与奇点之间的对应关系，阿诺德对此非常着迷。读到杜瓦尔的论文时，我最后想：是的，这显而易见。这里并没有什么神秘之处，只是杜瓦尔的视角非常独特。他研究了射影平面中的某些曲线线性系，这些线性系对应于德尔佩佐曲面的超平面截面，而这些曲面是通过对射影平面上的点进行点爆破得到的。他将这些曲面的皮卡群表示为某个多胞体的等距变换群，所用的度量由曲面的交叉型给出。因此，他把一系列完全属于代数几何的论述，转化成了关于某些抽象多胞体对称性的论述。之后他对 Coxeter 说：“我需要理解它们的对称群。”于是 Coxeter 提出了考克斯特-戴因金图。所有这些都见于一系列论文：杜瓦尔的两篇论文、Coxeter 的一篇论文，接着又是杜瓦尔的一篇论文，大致如此。我发现这些之后，便想：“我们何不办一个研讨班，讲讲这些精彩的思想是如何诞生的？”正如我先前所说，我非常喜欢探究思想诞生的过程。就杜瓦尔而言，显然正是杜瓦尔和 Coxeter 奠定了这一理论的基础。有趣的是，这一理论并非真正源自奇点理论，而是源于对曲线线性系算术性质的研究[40]。

PPP：如今你主持研讨班已有数十年，你觉得随着时间推移，风格有所变化吗？

BT：哦，确实有。最初那些年，比如说从七十年代中期到九十年代，很多人会来参加研讨班，也很喜欢。如今，奇点研讨班的出席情况一点也不理想。我的意思是，质量依然很高，但来的人不再像从前那么多了。有人说研讨会太多了。我不认为这真是原因。更主要的原因是，我们一直举办这个研讨班，秉持的是一种理解思想本身、不带任何特定目的的精神。我记得 Schwartz 曾经告诉我，他年轻时在南锡当教授时说过：“我是数学系的系主任。这件事每周一早上九点到十一点就能处理完，还有秘书帮忙。然后，我还要讲一门关于自己研究的课程。就这样，我这周的教授职责就完成了。”所以，他可以思考许多其他事情。如今，这简直像是一个梦。因此，你不能指望博士生或年轻的副教授参加一个通常根本不可能立刻派上用场的研讨班。但在那个年代，人们出于好奇去参加研讨会。我认为，这种研讨班风格已经过时了。

PPP：去年，Norbert A’Campo 告诉我，七十年代的研讨会期间，人们会谈论自己不理解的东西，这对博士生或其他寻找研究课题的人来说很有帮助。他说，与之相反，如今人们会用复杂的方式解释自己理解的东西。你认同这种对风气变化的描述吗？

BT：是的，这是变化的另一个方面。如今，评价体系鼓励研讨会上的报告者努力给人留下深刻印象。

[37]参见 [88,定理 1。4]。[38]它就是体积 [127]。[39]也就是说，这些论文 [23]。[40]Du Val 当时研究的是通过对平面上的点进行点爆破得到的曲面的交理论，并将例外除子的交叉型负部的相反数解释为辅助空间中的度量。这些有理（Del Pezzo）曲面也是仅具有有理奇点的射影超曲面的解消，这些奇点“不会影响伴随条件”。

10. PhD supervisions



Figure 7. 贝尔纳与几位昔日博士生、朋友和合作者在2015年6月于奥苏瓦举行的《奇异景观》会议上合影。该会议是为庆祝他70岁生日而举办的。照片中有：Dale Cutkosky、Mark Spivakovsky、Patrick Popescu-Pampu、Pedro Daniel Gonz´alez P´erez、Evelia Rosa Garc´ıa Barroso、贝尔纳·泰西耶、Charles Favre、Ignacio Luengo、Fran.cois Loeser

PPP：既然您提到了年轻人，也许现在正是谈谈您与博士生之间互动的好时机。您曾指导过许多博士生[41]。您会如何描述自己的指导风格?

BT：我一直认为，自己对博士生的责任，是让他接触某个主题的研究氛围。重要的是这种氛围。所谓“氛围”，就是一系列问题和人们所了解的一系列事物；如果你思考这些问题，而且足够聪明，就会有新的问题浮现出来。有时，比如你这种情况，或 Evelia 的情况，我心里确实有一个具体问题，也试着与他分享。每次我都觉得，与其说这是一个博士课题，不如说是一个我们可以讨论的有趣问题。我脑子里并没有一份博士课题清单。任何时候，我都有一系列问题，其中有些也许根本不是博士课题。

PPP：您更把它们看作讨论的起点，通往一个宇宙的入口吗?

BT：正是如此，是通往一个宇宙的入口。接着，新的问题会冒出来，而我做的就是说：“不，这不是适合作为学位论文的问题”，或者“是的，这是个好主意”。

PPP：在我看来，你似乎为每位博士生引入了一个研究领域，然后让他们在其中发展，而你自己并不同时对其进行探索。你是否有意识地这样做，不向他们提出那些当时萦绕在你心头的问题?

[41]以下是他们的名字，以及他们答辩的年份：米歇尔·梅尔（1974年）、赫尔维希·豪瑟（1980年，与 Adrien Douady 共同指导）、Fran.cois Loeser（1983年）、Michel Vaqui´e（1983年）、Evelia Rosa Garc´ıa Barroso（1996年）、科乔·马乌西（1996年）、帕特里克·波佩斯库-潘普（2001年）、Pedro Daniel Gonz´alez P´erez（2000年）、穆罕默德·穆加达姆（2007年）、Arturo Giles Flores（2011年）、Ana Bel´en de Felipe Paramio（2015年，与 Evelia Rosa Garc´ıa Barroso 共同指导）。

BT：我觉得你的描述很到位。在某个阶段，我会有一些念念不忘的问题，但我不希望我的学生卷入其中。我认为这不利于他们。

PPP：我想，你的一些博士生可能曾遇到过卡壳，或者感到沮丧的时候。你还记得当时是如何回应的吗？你做了些什么来帮助他们？

BT：我想，有时我会说："这很正常，别害怕，这是过程的一部分。"有些人经历起来会比其他人更痛苦。我自己从未有过这种经历，因为正如我告诉你的，在我和 Monique 有了足够的材料之前，我从没真正觉得自己必须答辩学位论文。不过，那是另一个时代了。如今压力重重，我只能说，觉得困难是很正常的。我会说："只管继续做，你会有所进展；你会发现，在答辩前几个月，自己会突然意识到，你理解的远比原先以为的多。"

PPP：对于刚开始指导博士生的人，你有什么建议吗？

BT：建议一：选择学生时要确保对方是你能够与之交朋友的人：不要招收那些你认为无法与之建立信任关系的学生。建议二：让他了解你的思维方式，以及你曾思考过的一系列问题、你感兴趣的一系列事物，尤其是你感兴趣的论文。但正如我所说，不要把你眼下痴迷的东西灌输给他。否则就不会成功。

我总是和学生聊很多，可能比一般人聊得更多。因为我喜欢这样，而不是出于好心。我不觉得他们是负担，不觉得每周都得见他们一次，还得想办法督促他们在某个方面取得进展。也就是说，我的建议是，只招收自己乐于交谈的人攻读博士学位。然后就尽情交谈！我认为，这样到头来几乎必然会产生一篇学位论文。不过，如果要求在三年、至多四年内完成学位论文，这种做法就要困难得多。把一个自己知道如何解决的问题交给博士生，不去冒险，这很有诱惑力。但敢于冒险是进行真正原创研究的重要组成部分。

PPP：关于写论文呢？对此您有什么建议？

BT：我唯一的建议是，尽可能晚些时候再写。不要着急。当然，时间有限制。所以，写第一篇论文往往非常困难，因为你需要尽快发表它。

PPP：但"不要急"意味着你有点像高斯，喜欢"少而精"地发表论文[42]？

BT：是的，不过说到底，你还是得现实一点。我会这么说：你不仅要听取论文导师的建议，也要听听另外两三个人的意见。也许是其他博士生，或者其他教授。你很清楚，我们法国现在有一套名为个人跟进委员会 ´学位 `论文的制度。它要求每位博士生有一位第二咨询导师，我认为这非常好。这套制度有点过于形式化，规定每年必须组织一次会议，而会议讨论的核心问题基本上是："你和论文导师之间有矛盾吗？"

PPP：这确实是个重要的问题。

BT：这是个重要的问题，但并非唯一值得提出的问题。我认为第二导师也应承担数学方面的指导工作，而制定规则的人似乎没有想到这一点。我觉得，除了论文导师之外，还应该有另一个人，让你有时可以更自在地与他交流。你可以说："我做了这个，你觉得怎么样？"或者"我写了这个，你觉得怎么样？"这有助于初学者建立信心。让一个没有直接参与其中的人看看你最初的写作、项目或其他成果，然后告诉你："是的，这看起来挺有意思。"我的意思是，我认为任何数学家即使不在自己的专业领域内，也能判断一篇论文是否有意思。所以，我非常赞成大家不要各自困在自己的小圈子里。

11. Important conferences

PPP：能否告诉我哪些会议对您特别重要？

[42]"不多，但都恰逢其时"。



FIGURE 8. Jos´e Luis Cisneros-Molina、Jos´e Seade、L^e D˜ung Tr´ang、贝尔纳Teissier和帕特里克·波佩斯库-潘普，摄于2018年6月



FIGURE 9. Pedro Daniel Gonz´alez P´erez、贝尔纳Teissier、帕特里克·波佩斯库-潘普和Antoni Rangachev，摄于2025年6月

BT：我参加过很多会议。其中并非每一场对我来说都意义重大。但当然，从专业角度来说，它们都很有用，因为让我有机会与许多人交流[43]。

[43]图 8 和9 展示了在 *International School on Singularities and Lipschitz Geometry* 11 22 2018 *Singularities* 期间拍摄的照片。会议于6月日 *in Plovdiv* 8 13 2025 至日举行，地点在墨西哥库埃纳瓦卡；另一场会议于6月日至日举行，地点在保加利亚普罗夫迪夫。

我受邀参加的第一次国际会议，我想，是1969年在科莫湖举行的一次 CIME 会议。扎里斯基、贝尼亚米诺·塞格雷、塞登伯格和芒福德都在那里，但会议的大部分内容都超出了我的理解范围。第二年在奥斯陆举行的1970年北欧暑期学校上，我又多理解了一些。Hironaka 也参加了会议，但由于家中有人去世，不得不提前离开。我参加的第一场真正充分参与其中的会议，是1972年在 Carg`ese 举行的那次会议。这对我显然极其重要，因为正如我告诉过你的，许多对奇点感兴趣的数学家都在那里，比如扎里斯基、Hironaka、Thom、 Lojasiewicz、Brieskorn，当然还有 Pham。气氛非常自由，大家进行了大量讨论，而我也从讲座中学到了很多。因此，对我来说，这或许是我参加过的最重要的一次数学会议。

我还会想到1976年在奥斯陆举行的北欧暑期学校。那里再次汇聚了各式各样的数学家。我当时的心境也很特别，因为我正在讲授一门课程，必须为此做准备，同时还得听其他人的讲座。这件事一直留在我的记忆中，也许是因为那时我还年轻。

我还会想到1981年第二届美国数学学会阿卡塔奇点会议。会议氛围轻松，环境宜人，聚集了一群对奇点感兴趣的数学家。

之后，1993年在日本举行了一次会议，由Hironaka组织。许多对奇点感兴趣的数学家在那里相聚了很长一段时间。留下来那么久的人不多，但许多人待了好几周。讲座不多，但与会者之间有很多思想交流。由于氛围十分自由，大家可以散步，也可以交谈，这与通常安排好讲座的日程大不相同。我们也安排讲座，不过可能提前一天才安排，而且进行了许多讨论。在那段时间里，我在潜意识中取得了很大进展，因为能够在安静的环境中，长时间与许多数学家为伴，十分令人振奋。此外，我也借此更深入地认识了森重文、冈睦雄、Jos´e Manuel Aroca和迈尔斯·里德等人。

1997年，赫尔维希·豪瑟还组织了在奥贝古格尔举行的会议，以纪念扎里斯基。会议气氛十分热烈，内容也丰富多彩。Abhyankar、Hironaka、Monique 和 L^e 出席了会议，丹·阿布拉莫维奇、Vincent Cossart、戴维·考克斯、Franz-Viktor Kuhlmann、约瑟夫·利普曼、弗朗茨·奥尔特、奥兰多·比利亚马约尔等许多人也都参加了。

我还想特别提到一系列奥伯沃尔法赫研讨会。我尤其喜欢这些研讨会，因为在那里我能遇到与平时接触的人截然不同的人。这些会议组织得非常出色，大家可以十分自由地交流猜想和想法。对我来说，它们总是收获颇丰。

再就是 2007年 由 Barry Mazur 和 Apostolos Doxiadis 在德尔斐组织的会议。主题是 数学与叙事。会议催生了一本名为《《被扰乱的圆》》的书[44]，，书名取自阿基米德的一句话：“别扰乱我的圆”，这是他对杀害他的士兵说的。会议旨在探讨写证明与写故事之间的类比。这听起来或许有点疯狂，但这次会议确实产生了许多有趣的想法。对于数学哲学家来说，这些想法很有意思。数学家写作时会发生什么？小说中的严谨性意味着什么？这是个有趣的问题，因为我认为，在这种情况下，严谨性意味着人物的行为符合其性格。除侦探故事外，你不能让一个具有某些特征的人物突然变成一个完全不同的人。

PPP：这 很难把你刚才说的话翻译成法语，比如，法语里有两个
词来表示 英语中的“character”，分别是“personnage”和“caract`ère”。

BT：当然。我觉得以这种方式思考很有意思。这件事也让我印象深刻，或许是因为这是一次非常独特的研讨会，也是一个结识来自知识生活中截然不同领域的人们的机会，比如那些以叙事为研究主题的人。我记得其中一位告诉我们，每当有一部大片上映，电影业的专家就会追踪其中的情节时间线，然后制作另一部采用等距时间线的电影。这方面我完全一无所知。总的来说，这是一次非常有意思的聚会。除此之外，我还了解了德尔斐先知为何不再预言——这一直是我感兴趣的问题。据称，

[44]这是书籍 [128]。

原因是发生了一场地震。德尔斐神谕坐着进行预言时所依赖的烟雾也随之消失了。我对神谕或一般而言那些有远见的人很感兴趣，比如凯恩斯和西拉德。

PPP：顺便问一下，在人类历史上，无论哪个领域，你最钦佩谁?

BT：这是个难题。回顾历史，我会想到阿基米德，当然还有希腊哲学家，基本上他们全都令我钦佩。还有迈蒙尼德、丰特奈尔、勒让德、高斯、伽罗瓦等等。正如我所说，我也非常钦佩那些能够在某种程度上预见未来、对人性和社会现象有着极其敏锐感知的人。他们能够说，如果我们这样做，就会发生那样的事；这对别人来说并不显而易见，对他们而言却一目了然。我认为，拥有这样的人非常重要。在任何一个时代，这样的人都寥寥无几。通常我们不会听从他们的意见，但事后 我们会意识到，他们对后来发生的事情作出了极其准确的预言。

12. Member of Bourbaki



Figure 10. 贝尔纳在普罗旺斯格拉斯附近的一次布尔巴基会议上打 ´球，约在1975年，与Jean-Louis Verdier、Andr´e Gramain和海曼·巴斯在一起。

PPP：从七十年代中期开始，您加入了布尔巴基小组。我很想了解您能否谈谈这段经历。例如，您是如何被邀请加入小组的，或者他们是如何组织工作的。

BT：我确实不知道自己是怎么被邀请的，不过我猜是因为七十年代初我在高等师范学校的´杜阿迪-韦尔迪耶研讨班上做过几次演讲。至少，Douady似乎挺喜欢那些演讲。后来有人邀请我参加一次会议，像他们所说的那样做一只“豚鼠”，也就是充当试验品。于是我就去了，地点在普罗旺斯圣雷米。

PPP：是哪一年?

BT：大概是1974年。参加这个「豚鼠」的原则是：如果你对布尔巴基正在阅读的内容表现出兴趣，他们就会再次邀请你。如果你仍然表现出兴趣，就会获邀成为成员。

我就是这样加入的。我觉得这段经历非常有趣，因为看着一群人尽可能地厘清各种想法，实在引人入胜。我猜布尔巴基希望编写一卷关于复解析几何的著作，或许还想涉及奇点消解，这大概就是他们邀请我的原因。从这个意义上说，他们失望了。不过当时布尔巴基在许多计划上其实都不太顺利，因为大部分时间都花在了*Grande Edition*上，那本书原本应该成为权威版本。尽管如此，我还是继续参与其中。对我来说，那些年都非常有启发性。首先，你能接触到许多数学；其次，你也参与到寻找恰当表达方式、确定应定义哪些合适对象等过程中。

PPP：如何开始研究一个具体课题？是通过阅读一些文章或书籍吗？还是一切都从头开始？

BT：不是。我来解释一下布尔巴基是如何工作的。小组会决定某个课题是否适合作为一卷或一系列卷册的主题。这需要经过长时间的讨论。围绕这个课题编写一卷书，是个好主意吗？如果决定是肯定的，那么布尔巴基就会把这个学科分配给一位成员，请他先起草一章，作为该学科的初稿。

PPP：这位成员完全可以自由查阅文学作品吗？

BT：是的，当然。

PPP：而且布尔巴基还有一条规定，绝不列参考文献.....

BT：没错。我说不清为什么会制定这条规定，因为那是很久以前的事了。但我知道这和一致同意规则有关。归根结底，你会发现这样做是有目的的。尤其是许多习题取自已发表论文，如果每道习题都要注明出处，那就没完没了。

PPP：第一个人写完草稿后，接下来发生了什么？

BT：草稿会在一次会议上宣读，接受批评，然后会请另一个人，有时也会请原来那个人，再写一份草稿，如此反复。整个过程可能要花上好几年。

PPP：你说它被朗读时，是只进行口头朗读，还是进行黑板讲演？

BT：不，纯粹是口头朗读。

PPP：我看到了一些布尔巴基会议的照片，照片里有黑板，所以我想知道黑板是怎么使用的.

BT：黑板上会讲解一些技术性的点，或者提出改进文本的想法。通常，所有布尔巴基成员都围坐在桌旁，手里拿着文本，由其中一人朗读。

PPP：朗读时也会采用福楼拜的理念，找出听起来不顺的地方或重复之处吗？

BT：是的，也有这一方面。

PPP：你会如何描述布尔巴基事业的哲学？

BT：我把布尔巴基看作一项公共服务。有能力且有意愿的人撰写一部专著，旨在为从事研究的数学家提供一套工具包。我对此感受非常强烈。我们试图为研究布尔巴基所涵盖领域问题的数学家，打造尽可能好的工具。我们追求好的定义和好的证明。

PPP：你会说最好的工具就是最一般的工具吗？还是说这种说法过于漫画化了？

BT：我觉得这种说法过于漫画化了。

PPP：你们是如何讨论什么才是尽可能好的工具的？你们会考察应用，并尝试看看它是否适用于许多应用吗？

BT：不，不完全是。在讨论过程中，有人对已经写下的内容提出异议，并说：“这样写会更好。”这并非从应用的角度出发，而更多是从写作的角度考虑。当然，也会考虑应用，但写作的指导原则是寻找通往结果的最佳路径，例如去除无用的假设，以最清晰的方式引入有用的概念，等等。这绝不是要建立一种元理论，而更多是要剔除理论诞生时所处环境中的那部分内容



FIGURE 11. 同一场布尔巴基会议上的贝尔纳，交换代数专题 a

而这部分内容，事后看来，证明是不必要的。此外，必要时还会补充一些概念，以阐明理论的结构。这更像是从矿石中取出钻石，再将其打磨抛光。

PPP：你们怎么看待用户？你们认为他们是为了寻找某个具体定理而来，还是希望通过这本书学习一整门学科？

BT：我认为两者都有。

PPP：你们是否非常注重这部专著的整体结构？

BT：是的，关于哪些内容应该放在前面，我们讨论了很多。每个专业主题也是如此，我们会讨论为什么要这样安排内容。而且，这并不总是为了追求一般性。首要目标是清晰。有时，如果你试图把内容处理得过于一般化，就会过多地丢失其意义。

PPP：有个传说说，布尔巴基的创立源于对斯托克斯定理的困惑，以及对 Goursat 教科书中该定理的表述和证明方式的不满。你们也曾用学生做过实验，看看它是否适合用于教学吗？

BT：没有。

PPP：所以，后来人们便不再关注这一点了，也就是这部专著原本是为大学教学而写的这一事实。

BT：我认为这种严谨性已经失落了，而且我不确定教学问题是否是布尔巴基最初那些成员感兴趣的；他们真正关注的是严谨性。如果你想要一个好的

斯托克斯定理的表述，就必须知道什么是边界，还必须了解许多事情，而人们有时对这些事情相当疏忽。我没有 Goursat 的专著，但我有 Valiron 的那本，它大约晚了十年问世；确实，我多次发现它缺乏严谨性。另一方面，它充满了意义。我喜欢 Valiron 的这本书，因为尽管它相对缺乏严谨性，却努力做到有意义。

PPP：你的写作方式是否受到布尔巴基的影响而有所改变?

BT：我想是的。

PPP：你能描述一下有哪些变化吗?

BT：这很难说……我从来没人指导过该如何写作，因为我从未真正有过现代意义上的论文导师。我不认为 Hironaka 曾非常严格地审阅过 Monique 和我写的东西；他只是想知道里面写了什么。因此，他不会像我对待一些学生那样，去挑剔句子或类似的细节。所以，我完全是靠自己摸索成为一名作者的，我想有很多不足。我没法具体指出这些不足，但我认为在布尔巴基的影响下，我的写作能力有所提高。我学会了对严谨性提出更高要求。

13. Editorial work

PPP：现 在我们来谈谈你的另一个兴趣——编辑工作。你曾担任多种 s
期刊以及 图书丛书的编辑。你能列举并比较一下这些工作吗?

BT：这要从 Ast´erisque 说起。我不记得是谁邀请我担任 Ast´erisque 的编辑了。刚开始担任主编时，我懂得不多，不过幸好有一位非常出色的秘书。我们两个人几乎包办了一切，包括接收手稿、挑选审稿人、处理与审稿人的往来通信，甚至还要去印刷厂。每当我需要就审稿人遴选征求意见时，都会与编委会讨论。这项工作量很大，远超合理范围。不过它很有意思，因为我亲眼见证了许多优秀的数学成果。我觉得这项工作很有意义。Ast´erisque 的创办有点像是要做法语版的 Springer《数学讲义》；当时后者在手稿、会议论文集等的出版方面已占据主导地位。我对这项工作颇感兴趣，因为它既有学术层面，也有实际层面。人们必须做出许多实际选择，甚至包括封面和字体。此外，Ast´erisque 当时正处于发展壮大的阶段，它还很年轻，这令人备受鼓舞。

´后来，Michel Herman 辞去了《高等师范学校年刊》的编辑职务。他来找我，希望我接替他。我非常尊重他，也和他交情深厚，因此接受了，尽管我觉得这工作量很大。最后发现工作并没有那么多，因为有一位全职秘书（而《奇点》只有一位半职秘书）。此外，出版商 Gauthier-Villars 承担了实际事务。因此，这份工作轻松得多，纯粹是智力劳动。不过也相当有趣。

PPP：之后，你转到了施普林格《数学讲义》。

BT：是的。与此同时，我也逐渐为施普林格所熟知，因为我和法国数学图书馆网络（RNBM）联合主任 Genevi`eve Sureau 一起，为施普林格期刊与法国图书馆组织了一个联盟。正因如此，我在海德堡颇有名气。于是有一天，Catriona Byrne 问我是否愿意与 Floris Takens 和 Albrecht Dold 一起担任该丛书的主编。不幸的是，他们两人不久后都去世了，大约是在 2010 年。我至今仍非常喜欢这份工作，因为它有尽是优点，没有任何缺点。我们的秘书 Ute McCrory 效率极高。她不会放过任何事情，比如我没有回复时，她会一再催问。我觉得这确实很有帮助。我和共同主编 Jean-Michel Morel 的哲学完全一致，因此经过讨论后，我们对所有事情都能达成共识。他负责应用数学的很大一部分领域。过去三四年来，我们设立了编委会，可以委托他们处理一些手稿。当然仍有一些工作要做，但我非常享受数学领域的多样性。

我觉得，在所有这些编辑工作中，数学界就像一支没有指挥的乐队。我的一位朋友 G¨unter Ewald 也是一位神学家，他曾写过一篇关于大脑的论文，并用“没有指挥的乐队”来比喻大脑。我不知道神经生理学家是否认同这种描述，但我认为这非常贴切地描绘了数学家群体。奇妙的是，我们没有分部，也没有领袖，却能奏出音乐。我很高兴自己是其中一员。对我来说，数学家这份工作最令人满足的，主要就是成为这支乐队的一员。而编辑工作或多或少就像是让音乐传扬开来，我也很享受这一部分。有时会收到一些研究非常小众学科的手稿，但只要我们确信它们是好的数学成果，就会予以发表。我认为，很多期刊不会这么做，因为它们追求高影响因子，而我们不太在意这类事情。

PPP：您对刚开始担任编辑的人有什么建议吗？比如该如何选择审稿人？

BT：在《讲义丛书》，我们有一个优势，就是可以同时邀请几位审稿人。很多时候，我需要处理一些学科领域的手稿，而我对这些领域远谈不上是专家。我会花很多时间查阅 MathSciNet 和 Zentralblatt，看看谁和谁合作发表过论文、谁评审过谁的论文、谁发表过什么。通过这种方式，我能对心目中可能担任审稿人的人选有个大致了解。过一段时间后，我会做出选择。我可能会看六个人选，然后再做决定。

PPP: 您不会请手稿所属学科领域的专家帮您选择审稿人吗? es?

BT：这要视情况而定。如果可以，当然会。过去几年里，我们聘请了副编辑，他们可以安排手稿的同行评审，然后提出建议。这大大减轻了工作负担。不过，我们收到的一部分手稿并不属于任何一位副编辑的学科领域。此时，需要花一点时间确认所选的审稿人与作者的关系既不会太密切，也不会对相关主题过于陌生。

PPP：您希望审稿人逐行阅读并找出错误吗?

BT：不。当然，如果他们这样做，我们会非常高兴。但我们主要希望他们看看定理，判断这些定理是否有趣、是否很可能成立。真正的专家不需要逐行阅读证明。他会看定理陈述及其表述方式，也许还会看看相关的几个引理，据此形成自己的看法。关键问题是，这篇文本是否有趣，是否确实是一部关于该学科的专著。这是我们希望审稿人着重关注的方面。当然，作为数学家，他们也会判断内容是否正确，有时还会发现错误。

PPP：您对初任编辑的人还有其他建议吗?

BT：你必须尊重作者和审稿人。有时他们之间会有分歧，这时编辑可以发挥关键作用。如果你尊重双方，最终就能达成一致。最重要的是，你必须形成自己的看法。至少收到两位审稿人的意见后，你要通过查看手稿和审稿报告来形成自己的判断。如果我发现了问题，作出最终决定就是我的职责。是否接收稿件并没有统一的规则。有些期刊要求审稿人意见一致。我认为这不是个好规则，因为你选了两三位审稿人之后，可能其中一位并不理解究竟发生了什么。

14. Administration of mathematical libraries

PPP：现在我们来谈谈您参与数学图书馆管理的经历。

´BT：我于1987年到高等师范学校时开始做这件事。后来，Michel Brou´e 请我负责数学系的图书馆。我以前从未做过类似的事，但觉得这可能很有意思。事实证明确实很有意思，因为当时正是数学图书馆开始数字化的时候。图书馆员Martin女士即将退休，但我和她讨论这件事时，她非常热心。于是我们着手完成图书馆计算机化所需的工作。这让我结识了其他图书馆员。当时，国家数学图书馆网络（RNBM）——我已经提到过这个成立多年的组织——提出了一个非常好的想法：所有数学图书馆都应使用同一套系统，

Texto，这样它们就可以交换文件。因此我们采用了Texto。我不仅参与了高等师范学校图书馆的工作，也参与了RNBM的工作。我发现那里有一个很棒的群体，成员都非常能干，也十分投入。他们对自己的工作充满热忱。由于图书馆员与研究人员直接接触，那里有一种特别的氛围。RNBM内部，图书馆员和数学家之间有着某种平等关系，而其他学科领域完全不是这样。RNBM设有一位主任，由图书馆员担任；另有一位联合主任，由数学家担任。

当时，我想到与施普林格建立联盟，以限制订阅价格。那时，RNBM主任是奥赛的首席数学图书馆员Genevi`eve Sureau，而我受邀担任RNBM科学主任。那是一段非常有意思的时期。我向Catriona Byrne阐述了这个想法，随后Genevi`eve和我都受邀前往海德堡。我们与施普林格管理层的许多人讨论了此事，并开始了漫长的谈判。后来，施普林格的一位副主任说："好吧，我们先让你们免费使用一年半，然后再谈判。"这招非常高明。法国所有数学图书馆都免费获得了我们RNBM选定的一份施普林格数学期刊清单的使用权，当然，图书馆也因此产生了依赖。尽管如此，最终我们还是进行了非常成功的谈判，达成了一份至今仍在延续的良好联盟协议。我相信大家对此都很满意，不过施普林格也曾有过更强硬的时期，例如试图强推整套数学目录。这主要是因为施普林格变得更加商业化了。此后，RNBM还与欧洲数学学会出版社和法国数学会就类似协议进行了谈判。

PPP：如果回顾一下你开始从事研究以来所见的一切，你认为数学的制度演变中有哪些方面是积极的?

BT：有一件事无疑是积极的，那就是数学实验室的创建。事实上，巴黎综合理工学院数学中心于1966年成立，是法国第一个官方数学实验室。几年后，Douady 和 Verdier 在高等师范学校仿照这一模式建立了实验室。在此之前，研究生没有办公室，也没有书桌，只能在家里工作。甚至教授也不得不共用办公室。基础设施逐渐在各地建立起来。它可能是在1980年之后才真正开始发展起来的，因为数学家和数学专业学生的数量都增加了。应该说，数学的大量发展始于20世纪60年代末和20世纪70年代初，其原因之一是原子弹。政府投入了惊人的能量来研制原子弹。其中一部分能量被用于为像我这样的青年研究人员创造职位。政治家抱有一种与美国相同的观点：投入资金，希望其中一部分经过一段时间后能够对实现目标有所帮助。这种做法在美国效果非常好，在法国也相对成功。那一时期招募了整整一代数学家，他们从事数学研究。对其中大多数人来说，他们的研究与原子弹毫无关系。政府可能没有立即意识到，如果建立起一支青年研究人员队伍，就必须为他们提供工作的条件：办公室、椅子、桌子、计算机……这一点无疑得到了改善。

PPP：哪些方面朝着负面的方向发生了变化?

BT：首先，也是最重要的，是青年研究人员的薪资。这是个灾难，不仅仅是数学领域如此。当然，研究人员的职位数量也一样。

PPP：你认为政治家理解纯数学的必要性了吗?

BT：我认为事情是这样的。战争期间，政治家们意识到，基础科学能够赢得战争，尤其是原子弹的出现更让他们深刻认识到这一点。原子弹的研制是一个令人难以置信的历程，始于极为纯粹的研究，并在曼哈顿计划的开发过程中大量运用了纯数学和物理学。还有许多其他例子，比如雷达、声呐、信号处理、图像分析、密码学等等。随后冷战开始了。于是，政治家们投入了大量资金发展纯科学，几乎不加选择。他们的想法只是，在冷战背景下，这是一项战略投资。政治家们基于这种认知推动基础研究蓬勃发展，直到柏林墙倒塌。此后，投资基础科学似乎就没那么必要了，因为政治家们有一种看法——当然，这是错误的——认为冷战已经赢了，因此不必再投入那么多资金

用于基础研究。从那时起，资金就开始减少。20世纪90年代初，法国的情况有所缓和，因为密特朗有一些出色的部长和顾问；而如今，大多数西方国家的资金都已开始大幅削减。这就是我的看法。我可能错了，但我认为基本上是对的。

如今，政治家们没有意识到，我们还有另一个敌人——气候变化。应对它需要大量基础科学研究，因为关于气候及其变化，还有很多事情是我们不了解的。与此同时，政治家们拒绝资助基础研究。当然，他们不会说自己拒绝，只是任由它逐渐消亡。对我来说，这是科学研究领域最主要的变化。当然，数学也受到影响。法国有许多政治家对数学研究一无所知，甚至连数学及其应用的基本概念都不了解。在法国，戴高乐决定制造原子弹时，大量资源被投入基础科学，因为戴高乐的顾问们知道基础科学不可或缺。我认为，我在法国国家科学研究中心的工作就是这一决策的结果。你知道，戴高乐的一位顾问是皮埃尔·勒隆，他是一位非常优秀的数学家，我认为戴高乐听取了他的建议。我想知道，近几届总统或总理中，有多少人听取过杰出的基础科学家或应用科学家的建议。

PPP：您觉得可以做出哪些改进?

BT：我认为，如果不改变政治阶层的感知，就无法有所改进。政治家们如今对人工智能都兴奋不已，但有多少人意识到，训练神经网络这一想法最早是在20世纪70年代由一些人探索并发展起来的，他们大多是数学家和理论计算机科学家，也有一些从事基础研究的生物学家？如今，这些人当年在开展日常研究之余，用来追寻这些全新根基性想法的时间，恐怕都会被用来撰写经费申请。

PPP：您认为主要问题在于沟通吗?

BT：我不喜欢把它称为沟通，因为这个词带有一些我不喜欢的含义。

PPP：这是一种职业……

BT：很遗憾，确实如此。而且这并不是一种能够帮助我们实现目标的职业。我担任舍瓦勒雷研究所主任时，曾提议让巴黎政治学院的学生到我们的实验室来，让他们看看实验室是如何运作的。我当时想，等他们日后成为政治家时，或许会记得，从事基础研究的人并不是因为萨科齐在一次著名演讲中所说的那样——那里有灯光和暖气——才待在那里的。我认为，政治阶层深深缺乏对纯科学家的尊重，因为他们不理解科学家在做什么，也无法设想其应用，因为他们没有好好学习历史。我很怀疑，在国立行政学院的课程设置中——我们的许多政治家都毕业于该校——是否有一门课程会颂扬基础科学在社会学、工业或战争中的历史作用。这让我想起《群众的强暴：极权主义政治宣传心理学》一书，该书于1940年由伦敦的工党图书服务社出版。1939年，该书以《政治宣传对群众的强暴》为题出版了法语版。作者谢尔盖·恰科廷是巴甫洛夫的学生，也是爱因斯坦的朋友。若能以同样的目标创作一本21世纪版本的这本书，将会很有意义。

PPP：那后来怎么样了，那些学生来了吗?

BT：不，因为我做不到。我担任主任的时间不长，因为部委做了一些我不喜欢的事。我认为有一项小小的改进：巴黎索邦大学与巴黎政治学院开设了一个联合硕士项目。基本上，我们必须改变政治阶层中足够多人的观点，甚至也要改变工业阶层的观点。不过，工业界的观点更多元。工业界有些人理解基础研究的必要性。法国的大量基础研究是在公共实验室中开展的。这类实验室依赖公共资金，但资金不足，因为政治家并未清楚认识到，除了那些有明显短期应用的研究之外，为其他研究提供资金的理由是什么。如今，我们再次身处一场战争之中，这场战争关乎气候变化；我们应当大幅增加对基础研究的资助，因为这是应对这场战争的一项战略投资。中国已经认识到了这一点。我预计，几年后，我们的政治家会说，谁也没有预料到中国会在这场战争中占据主导地位。

15. 研究兴趣的演变

PPP：让我们回到您的研究。您会如何概括自己从获得博士学位至今研究兴趣的演变？其中是否有几个主要阶段？

BT：起初有一段时间，我和 Pham 写了论文[45]。这段时间很短。之后，我开始和 Monique 一起研究 Hironaka 的书。大约从 1970 年到 1974 年，我们一直在做这件事；那时 Hironaka 已不再常与我们联系。我的兴趣不知不觉偏离了原来的方向。他让我们把写好的内容交给年轻的西班牙数学家 José Manuel Aroca 和 José Luis Vicente，由他们完成。对 Hironaka 来说，获得协助进行编写一直很重要。我想，他在撰写关于消解的原始论文时吃了很多苦，因此想与他人分担这项工作。当然，对我们来说，这是一个绝佳的机会。

之后，我越来越投入极性簇的研究，并从不同于消解的视角研究奇点。这段时期持续了相当长时间，从 1973 年在 Cargèse 开始，直到大约 1982 年 La Rábida 的论文《极性 ´簇 ´*II*》[46]。当时我也已经对组合学、凸体和托里克簇之间的联系感兴趣。那也是我努力刻画如今所谓的*Khovanskii-Teissier*不等式等号情形的一段时期；此前我曾为重数的 Minkowski不等式做过类似尝试。我没能成功，但这一努力促成了关于*Bonnesen* 型不等式的论文[47]。我所寻求的结果后来由 Boucksom、Favre 和 Jonsson[48] 获得，之后 Cutkosky[49]在最弱的假设下也得到了这一结果。随后我放弃了这项工作，专心撰写 La Rábida 论文。再后来，我的孩子们出生了，于是有一段时间我不太积极从事研究。

PPP：八十年代末，我又和 L^e 合写了一篇关于极性簇的论文[50]。

BT：没错。

PPP：所以，八十年代你一直在研究极性簇。

BT：这不是什么突破，但确实是件好事。这是一次尝试，旨在让局部极化簇理论进入主流。

PPP：你还写过一些关于分层的论文，发表于波兰国际数学大会上，以及八十年代末发表于《IHES出版物》的一篇论文。那么，八十年代你也对分层很感兴趣吗？

BT：我在七十年代研究惠特尼分层时，就已经对分层很感兴趣了。可以说，我对分层的兴趣拓宽了。那篇发表于1983年国际数学家大会论文集的论文，是在我的孩子出生前不久写的。到了八十年代末，我开始对一个三角剖分问题感兴趣。这个问题源于 Tr`eves 提出的问题；此前我已经从一个更特殊的角度研究过这些问题[51]。我意识到，人们在实解析几何中苦苦应对的许多问题，都可以通过证明一个三角剖分定理来解决。后来，我在一篇与 Brasselet 合写的论文中运用了这一点。我们花了很长时间撰写这篇关于次解析形式的相对积分的论文；它同样是受 Tr`eves 提出的一个问题启发的[52]。

PPP：我在1998年开始跟随您攻读博士学位，这在我看来，或多或少标志着一个时期的开端：直到现在，您一直对环面几何与赋值理论的交叉领域感兴趣。这样描述是否准确？

BT：是的。这或许要从我们1993年在北海道举行的那次会议说起，我已经跟你提过了。Hironaka出生于1931年。所以，大约在1990年，也可能稍早一些，我开始跟他说：“我们应该

[45]见第5节。[46]这篇论文是 [100]。[47]这篇论文是 [101]。[48]在这篇论文中 [5]。[49]见这些论文 [16] 和 [17]。[50]这篇文章是 [59]。[51]见 [102]和 [104]。[52]这篇论文是 [10]

为你60岁生日办一场国际会议。”他完全无法接受，几乎发起火来。他说：“我想要像芬兰那样的活动。”所以，他对我们的芬兰会议记忆犹新[53]。当然，我们当时不知道该如何组织类似的会议。我跟你说过，如今要办芬兰会议那样的活动是不可能的，而在1990年就已经不可能了。但Hironaka想出了办法，因为他有一家基金会。从某种意义上说，那次活动和芬兰会议一模一样，只是持续时间长得多，为期两个月，参加的人也多得多，而且不只围绕单一学科展开。不过，两次活动都是在度假胜地举行的。

PPP：会议的主题是什么?

BT：没有。谈的是奇点。

PPP：这促成了某部著作的诞生吗?

BT：没有，就像芬兰一样。

PPP：这对你来说又是一段美好的回忆。

BT：是的，太棒了。那里有许多有趣的讲座和许多有意思的人，我的孩子们很喜欢，当然 Maryvonne 也很喜欢。不知为什么，我当时心境很自由。就在那儿，我开始认真思考这种对应关系——也许这件事已经在我脑海里萦绕了一段时间。

PPP：哪种对应关系?

BT：凸集与环面几何之间的对应关系。你知道，我已经证明了这些关于重数的闵可夫斯基型不等式，也知道对于单项式理想，重数本质上就是某个余凸集的余体积。我还写过一些关于代数几何中 Bonnesen 型不等式的内容。在北海道，我开始思考，也许其中还有更深层的东西。我觉得环面几何对奇点理论还能有更多贡献，但我需要一个契机。当然，这个契机就是我与丽贝卡·戈尔丁合写的论文[54]，它引导我开始将环面几何用于奇点消解。

PPP：你在2000年发表了这篇论文。你说你是在90年代初写的?

BT：不，不，时间间隔更短。这篇论文的来历很有意思。我原本要在奇点研讨班上做一个讲座。我忘了确切日期，大约是1995—1996年。前一天，我完全不知道该讲些什么。后来我想到了这个点子：对具有相同半群的单项式曲线及其分支进行同时环面消解。我计算了一些例子，第二天就围绕它们做了讲座。

PPP：不过，这个想法的根源要早得多，因为在七十年代初，你就在扎里斯基的书的附录里写过那条单项式曲线。这意味着，二十年后，你对分支与其单项式曲线之间的关系有了新的理解。

BT：完全正确。我本该早点想到这一点。不过，我写扎里斯基那本书的附录时，重点在于模。当时我们经常讨论，部分原因是他病了，我不得不代他讲一些讲座；当然，他给我讲解时，我也理解得更多。最后，他请我写这篇附录，而这也是我写起来最愉快的一篇论文。一切都从这样一个想法自然地展开：分支是具有相同半群的单项式曲线的一种变形。然后，正如你所说，大约二十五年后，出于某种原因，我又有了新的认识，大概是因为我迫切需要在研讨班上找点东西可讲。

PPP：和 Goldin 合写的论文是献给 Hironaka 的。为什么?

BT：因为它提出了一种与他的方法截然不同的消解方法。

PPP：这算是一种幽默吗?

BT：是的，同时也是对他教给我的一切表示感谢，以及对他自身幽默感的欣赏。

[53]参见第4节[54]这篇论文是 [36]。

PPP：于是你建立了一整套程序，以便在任意维度中攻击同一事物。

BT：是的，没错。

PPP：在我看来，与其他主题相比，这个主题似乎最让你着迷。是这样吗?

BT：我不会这么说。不过可以肯定的是，这是一个更复杂的计划。

PPP：你一开始就想到这会持续这么久吗?

BT：我想，从一开始我就知道这需要很长时间，也知道它必定会很复杂。我确信几件事。首先，应当回到局部一致化。其次，关键在于半群。在零特征下，可以不借助它；但如果你想要一个适用于所有特征、甚至适用于分支的证明，就必须用到半群。我的想法是，半群支配一切，因此环面几何也支配一切，即便必须将其推广到无限嵌入维数的情形。我于是试着理解半群可能有多复杂。我和 Cutkosky 讨论了这个问题，并就此写了两篇论文[55]。我们意识到半群可能非常复杂。这让我确信，我的计划必定会很复杂，不可能在几个月内完成。我开始尝试证明一些自己能够证明的结果。最终，我想到可以通过使用某些非常具体的有限生成逼近来控制半群的复杂性。半群可以复杂到任意程度，甚至有限生成半群也可能极其复杂，但归根结底这并不重要。这一点我是慢慢才明白的。起初，我执着于有限生成半群究竟能有多复杂；后来我意识到：“不，如果它是有限生成的，那么即便组合学糟糕透顶，我也可以借助有理扇的正则细分轻松完成计划。所以，我们还是回到用有限生成半群逼近半群这条路上来吧。”而且，我早在第一篇关于赋值的论文中，就已经用平面上的无限奇异赋值描述了一个这样的模型。

16. Details about the Cargèse paper

PPP：现在让我们更详细地谈谈你数学研究生涯中的每一个时期。我们已经谈过你与 Pham 合作的论文[56]。之后发生了什么?

BT：在哈佛大学，我开始与 Monique Lejeune-Jalabert 一起研究 Hironaka 关于奇点消解的书。但很快，我们便集中研究局部代数的 Hilbert- Samuel 函数保持不变所对应的分层，以及理想的整依赖这一概念；这是 Hironaka 教给我们的。我们在理解 Hironaka 的消解证明所需要的内容方面取得了一些进展。这包含两个方面。其一被称为最大接触的连续性，意思是：如果某个光滑环境空间中有一个奇异子簇，并且某个非奇异子空间在一点处与它具有最大接触，那么这个非奇异子空间必然包含该点的希尔伯特-塞缪尔层，并且在该层附近的点处继续具有最大接触。这是 Hironaka 证明中的一个重要步骤。我们所做的工作之一，是发展出我们称为安装理论的理论，这一理论有些技术性。它是定义牛顿多边形时所需操作的一种推广。我们运用这一理论证明了最大接触的连续性。我们发现，这一理论发表在我们的合作论文[57], 中，也可以用来研究平坦性。当我们把这一点告诉 Hironaka 时，他立即意识到可以利用它证明一个当时正在考虑的平坦化定理。因此，我们与他合写了一篇关于局部平坦化的论文。后来，Hironaka 基于他的除法定理[58]找到了一个好得多的证明。

在我致力于 Hironaka 关于复解析空间奇点消解的计划的同时，我也对典范形变的一些结果着迷，尤其是判别式几何

[55]这些是文章 [19]和 [20]。[56]在第 5节。[57]a）部分是 Monique Lejeune-Jalabert 和贝尔纳·泰西耶学位论文的共同部分。贝尔纳的学位论文是 [87]。[58]参见 [47,第 4]节。

的判别式。我对此进行了大量思考。对扎里斯基关于重数不变性的猜想的思考，促成了我的 Carg`ese 论文[59]。那篇论文的主要要素是平面截面、对判别式几何的关注以及整依赖。有人说，我在那里将整依赖引入了等奇异性理论。我确实发展了这一概念，但其根源在于 Hironaka 的思想。之所以会引入整依赖，基本原因在于：证明等奇异性，等同于证明某个函数的一些偏导数整依赖于其他偏导数乘以坐标[60]。更一般地说，理想的整依赖是一种有用的代数概念，可用于比较一个解析函数与其他解析函数的模。它使你能够以代数方式处理几何极限，例如，在比较偏导数时处理切超平面的极限，或者在比较函数时处理 Lojasiewicz 不等式。

我认为，卡尔热兹论文的另一项成果也很重要，因为它影响深远。这就是所谓的整依赖专化原理[61]。它指出，在满足等重数条件时，一般纤维上的整依赖会导出整个空间上的整依赖，因此也会导出特殊纤维上的整依赖。我称之为一种“原理”，因为我将它视为庞斯列的数目守恒原理的某种逆命题。庞斯莱原理指出，在某些条件下，如果对一个构形进行变形，其数值特征便保持不变，例如交点的数目。各种哲学家都清楚地阐述过这样一个一般观点，我认为这个观点很有意思：如果一个构形以连续的方式变形，而它具有离散不变量，那么这些离散不变量就必须保持不变。我认为，连续与离散之间的对立是一个有趣的哲学问题。我得说，庞斯列非常清楚，他的原理并非总是成立。有些人似乎认为他错了。但事实并非如此：只要读读庞斯列的著作，就会发现他很清楚其中存在例外。

那么，什么是整依赖专化原理？它指出，某种几何条件——也就是在某个除子的单参数族中不存在几何意外，即不存在像在参数空间中为点的垂直分支——实际上等价于某种数值条件。庞斯列曾说，除非构形族发生某种特殊退化，否则相关的数保持不变。我认为，如果这个数，也就是重数，保持不变，那么就没有几何意外，而这意味着整依赖的专化。更一般地说，在等维的空间族中，“没有几何意外”意味着：辅助空间中某个理想的爆破所得例外除子的所有不可约分支都映射到参数空间上；而等重数条件可以确保这一点。这一思想贯穿了许多这类结果：“某些重数保持不变意味着等奇异性”，典型例子是“极性簇的等重数性意味着惠特尼条件”。

PPP：这是庞斯莱原理的逆命题。

BT：是的，所以我也把它称为一种原理。

PPP：你能更详细地描述一下促成 Carg`ese 论文的思想演进吗？

BT：让我觉得自己取得了真正进展的关键，是1972年春天从罗斯科夫返程时在火车上想到的。这就是我所说的理想化贝尔蒂尼定理[62]，，这是一个我非常喜欢的结果。让我用最简单的形式来描述它。如果超曲面上有一个奇点，并且你取一个经过该奇点的一般超平面，那么在这个超平面上会有两个不同的雅可比理想。你可以考察超曲面定义函数的偏导数理想在该超平面上的限制，也可以考察该定义函数在超平面上的限制的偏导数理想，后者包含于前者之中。现在，萨德定理或贝尔蒂尼定理的一种自然推广表明，对于一般超平面，这两个理想具有相同的根基。[63] 我的定理表明，它们具有相同的整闭包，这在线 av

[59]这是文章 [88]。[60]它在第 节中被称为 $condition\ c$ [90, 2 5] ( )。它出现在论文的第 3 节中，这个名称则是[61]在 [95, 第 5] 节中引入的。[62]这个名称最早出现在 [99] 1980年在南锡举行的讲座笔记中。[63]参见 [88, 注 I.1。2]。

这是一个很大的区别。从技术上讲，这是整篇论文的关键。我清楚地记得，我一看到这个结论，就知道自己已经拿到了关键，而我所要做的就是转动钥匙，打开那扇门。

PPP：最初是什么问题促成了这篇论文?

BT：起初，我在思考扎里斯基关于等重数性的问题[64]：如果两个奇点的拓扑相同，它们的重数是否也必定相同？这个问题至今仍未解决。我转而研究一个我认为更容易的问题：在一个超曲面族中，如果拓扑保持不变，那么重数是否也保持不变？

PPP：这正是哈维尔·费尔南德斯·德·博巴迪利亚和托马什·佩尔卡最近证明的内容[65]。

BT：是的，完全正确。

PPP：我不知道这是您的猜想。

BT：是的，不过从扎里斯基猜想出发，这一点相当显而易见。我知道，如果拓扑保持不变，那么米尔诺数也保持不变。我想，也许只要证明米尔诺数保持不变时，一般超平面截面的米尔诺数也保持不变就够了。因为这样一来，随着我们逐步考察余维越来越高的截面，最终得到的就是重数减一。因此，我的基本想法是证明这个更强的命题。为此，我必须弄清楚一般超平面截面的米尔诺数。而这就涉及我刚才提到的理想化贝尔蒂尼定理。第一步是理解函数在超平面截面上的限制的雅可比理想，与函数限制到超平面截面所得函数的雅可比理想之间的差异。这其中包含了所有内容。仔细考察就会发现，它引出了极曲线[66]。这是我第一次接触极曲线。因为将函数限制到超平面上时，你立刻就会看到，所得理想正是一般极曲线的理想在超平面上的限制。所以，基本上所有内容都源于这个结果。之后，我要做的就是补齐细节。这也引出了混合重数，因为我必须弄清楚如何用代数方式定义一般超平面截面的米尔诺数。

PPP：用超平面的定义函数和初始函数来表述。

BT：是的。这就是我引入混合重数[67]的原因。

PPP：你说想要用代数方法定义米尔诺数时，似乎是在使用一种字典：有时你从拓扑角度思考，有时则从代数角度思考。你能说得更具体些吗？你是在什么时候意识到必须用代数方法思考的?

BT：我很快就明白了。想想理想化贝尔蒂尼定理吧，它是一个没有拓扑对应物的代数定理。当我发现，要理解超平面截面的米尔诺数，就必须弄清两个雅可比理想之间的差异，而这又引出了它们具有相同整闭包这一事实。原则上，这并没有拓扑对应物。你可以从几何角度来解释，这没错，但它并非一个拓扑事实。如果取一个零水平集就是你的超曲面的全纯函数，再用一般超平面截取，观察交点处水平超曲面的切超平面在趋近奇点时的情况，那么定理指出，这些切超平面的极限总是不同于我们用来截取的超平面[68]。因此，截面上米尔诺纤维各点处的切超平面，在你趋近奇点时，不会向截取超平面趋于平坦。我把这类结果称为精细横截性定理，因为你必须与之横截的空间会随你所考察的点而变化。我曾把这件事告诉 Deligne，他回答说：“当然，令人惊讶的反倒会是相反的情况。”这话没错，但并不能提供证明。

[64]是 [124, 问题 A]。[65]在文章 [27]。[66] 参见脚注 29。术语 *local polar variety* 首次出现在论文 [58] 中，该论文与 Lˆe 合著。极性簇与 *relative* 和 *absolute* 极曲轨迹之间的区别，是在 [100, 第四章，定义 14] 中提出的，以避免将 Todd 的极曲轨迹 *à la* 与其中研究的极曲线推广形式混淆。[67]参见 [88, 第一节。2]。[68]参见 [88, 第一节第 2 段。8]。

17. Equisingularity problems

PPP：大致在同一时期，你写了几篇关于等奇异性的论文[69]。它们都源自同一系列思想吗?

BT：是的，绝对如此。

PPP：你能简单介绍一下这些论文之间的关系吗?

BT：论文《等奇异问题导论》[70] 是别人请我写的。基本上，那时我对极不变量着迷不已；这些不变量源自我对极曲线的研究。正如我所说，我当时并不知道 Thom 的手稿。

PPP：是 Lˆe 告诉你这件事的吗?

BT：是的，不过要晚得多。我想表达一个对当时的我来说很新颖的观点：等奇异性关乎截取。我的意思是，如果想要获得强有力的等奇异性不变量，就必须纳入奇点被穿过奇点的线性空间截取所得截面的不变量。这是因为我已经证明，μ^*-恒定意味着满足 Whitney 条件—— μ^* 恰好就是一般平面截面的米尔诺数序列[71]——所以我想推广这一观点。与此同时，极曲线与判别式之间的相互作用也令我着迷。因为起初，对我而言，对判别式的兴趣和对极曲线的兴趣是两回事。我引入极曲线，主要是为了研究 Whitney 条件和理想化贝尔蒂尼定理；而我对判别式的兴趣则源于另一种原因，围绕着我的猜想 $\sum_i \mu_i = \mu$ 以及关于 μ-恒定层[72], 非奇异性的猜想展开。我将该层定义为极小万有变形的判别式中的一个解析子空间。于是，我突然意识到这两件事彼此相关。对我来说，这一点很重要；此前我从未意识到它们之间存在这种联系。事实上，整篇论文的写作在某种程度上都是为了理解这种联系。

PPP：整篇论文《等奇异问题导论》?

BT：是的，还有《判别式几何中的不变量搜寻》[73]。《导论》可以说是《不变量的探寻》的前身。我在那篇文章中特别将极不变量解释为判别式的一个平面截面的牛顿多边形[74]。对于平面分支而言，这个牛顿多边形决定了该分支的等奇异类，也就是它的拓扑类型。这个解释令我很高兴，因为在我看来，它提供了一个具体例子，说明了 Thom 所说的组织中心的重构；这是一个多少有些难以捉摸的概念，意味着我们可以从一个函数的极小万有展开的判别式中学到很多东西。

PPP：因此，这两篇文章都是你在撰写 Carg`ese 论文时萌生的想法的进一步发展。

BT：是的。

PPP：一并且你是通过研究扎里斯基的等重数性问题，开始涉足等奇异性问题的 n.

BT：是的。最后这项工作失败了，因为我的猜想—— μ-不变性蕴含惠特尼条件——是错误的，Brian¸con 和 Speder[75]给出了反例，证明了这一点。积极的成果是，对具有孤立奇点的超曲面族中的惠特尼条件作出了刻画。后来，当我意识到可以用代数方法刻画惠特尼条件时，我就不得不尝试将其推广到比超曲面族更一般的背景中。

PPP：您能否也谈谈您其他关于等奇异性的论文[76]?

[69]这些是论文 [89], [90], [92], [96], [97]。[70]也就是说，文章 [90]。[71]参见 [88,定义 I.1。5]。[72] 这是 [88, 猜想 III.2.11，第 359]，页；后来 Luengo 在 [63]中推翻了它。[73]这是论文 [92]。[74] 参见 [92,第 670] 页的定理。[75]这个反例发表于 [8]。参见 [90, 第 632]页的评论。[76]也就是说，脚注 69 中列出的其余几项： [89], [96], [97]。

BT：在《*D´eformations `a type topologique constant I et II*》[77] 中，我试图解释一个族中米尔诺数恒定与孤立超曲面奇点极小万有变形的判别式里原点的等重数层之间的关系，也就是 μ-常数层。当时这是一次关于模问题的研讨班，因此我采用了这一视角。后来，在《*R´esolution simultan´ee I etII*》[78]，中，我试图阐明奇点族中同时解消这一概念，因为它有几种可能的定义。我发现，在某些假设下，最强的定义蕴含惠特尼条件。在那些论文中，我利用曲线的同时解消，试图给出一个代数证明，说明约化平面曲线族中 μ 恒定蕴含等奇异性。这个证明最终没有完全成功。论文《*R´esolution simultan´ee II*》中包含整依赖专化原理的证明，也证明了所谓的*Pl¨ucker-Teissier* 公式，该公式用于计算具有孤立奇点的射影超曲面对偶的次数。当时我认为，对于射影平面曲线族，次数及其对偶的次数保持不变是一种等奇异条件。无论如何，我在那篇论文中提出的弱和强同时解消概念后来得到了一些应用；劳弗还以曲面为例，对它们作了非常漂亮的阐释[79]。

18. The collaboration with Lê

PPP：你和 Lˆe 合写过几篇论文。你们是如何开始合作的？也许是因为你们都对极曲线感兴趣？

BT：正如我所说，Lˆe 拿到了 Thom 的手稿[80]，，那是一份试图证明单值性的有限性的手稿。Thom 的想法是，通过考察相对于一个超平面的相对消失圈，来证明同调单值具有有限阶这一猜想。他认为，如果能证明这些相对消失圈的单值性有限，那么就可以通过归纳法得出结论。

那么，如何研究单值化在相对消失圈上的作用呢？Thom 的一个巧妙想法是，这些相对消失圈是米尔诺纤维上的梯度胞腔，并附着在超平面定义函数的实部上。因此，只需了解单值化对该实部的临界点的作用即可。而这些点恰好就是米尔诺纤维与极曲线的交点。这正是 Thom 发现的，因此他在那篇论文中引入了极曲线，并开始借助它研究单值化。他出错的地方在于，以为所有极不变量——它们对应于这些梯度胞腔的消失高度——都相等。这是不对的。他给出了一套颇为古怪的论证，认为可以在某个循环中将它们互换。但这种做法行不通。

所以，Lˆe 手里有那篇论文。他发展了 Thom 利用极曲线的思想。他仔细研究了极曲线各个分量的单值化；Thom 认为单值化与分量无关，而他证明了单值化的准有限性[81]，，这一点是正确的。因此，Lˆe 正是出于这个原因对极曲线感兴趣。

我对极曲线感兴趣，原因各不相同，之前已经向你解释过。Lˆe 和我发现，我的极曲线就是 Thom 的极曲线。我们开始合作时，我的混合重数理论给出了超曲面上维数为 i 的“绝对”极簇的重数公式 $(X,0)\subset(\mathbb{C}^{n+1},0)$，该超曲面具有孤立奇点；这个极簇是超曲面上非奇异点的集合的闭包，在这些点处，切空间包含一个给定的一般余维为 $i+1$ 的线性空间。其重数是 $\mu^{(n+1-i)}+\mu^{(n-i)}$ 两个相邻截面米尔诺数之和，而 Thom 的极曲线的重数则是 $\mu^{(n)}$。对绝对极簇的重数取交错和时，除首尾两项外，其余各项都会相消。随后我们意识到，这就是欧拉障碍——这是我们当时正在讨论的一个概念。根据 Kashiwara 的研究，人们已知它等于一般超平面截面的米尔诺数 $\mu^{(n)}$ 加一或减一。意识到这一点后，我们立刻想到

[77]也就是说，在 [89]。[78]也就是说，在 [96]和 [97]。[79]在 [52]和 [53]。[80]参见脚注 28。[81]单值化的准有限性意味着其在同调上的作用的特征值都是单位根。

欧拉障碍必定存在一个用极性簇的重数表示的公式。于是，我们着手对此作出解释。实际上，我们最初参考的是 Gonz´alez Sprinberg[82]，的一篇论文，其中给出了一个用线丛次数表示欧拉障碍的公式，我认为这是一个重大进展。该公式的几何解释让我们发现，可以利用极性簇的重数得到一个更精确的公式。在某种 Nash 修正上的线丛次数非常抽象，无法直接计算；而极性簇的重数则可以计算。因此，我们一起思考了这个问题，并引入了我称为 绝对局部极簇 的概念。我想作出区分，因为这一点并不总是清楚。回到射影几何，如果考察 Todd 极轨迹，它们是射影簇上满足某些线性条件（即舒伯特型条件）的切空间所对应的点集。它们是射影簇的子簇。而在 Carg`ese 几何中，我的局部极化簇位于环境空间中。因此，我想说清楚，当你说“某种极性对象”时，究竟指的是哪一种。我把 Todd 极轨迹称为“绝对”的，而把另一类，即环境空间中的那些，称为“相对”的，因为它们对应于一个映射。它们是这样一些点集的闭包：映射的纤维上的非奇异点处，其切空间满足某些舒伯特条件。相对极曲线正是在这个意义上称为相对的。它们上的点是米尔诺纤维的切空间满足某个条件的点，具体而言，就是平行于给定的一般超平面。我们引入绝对极曲线，是因为它们对应于欧拉障碍的公式。

PPP：是哪篇论文?

BT：这篇论文发表于《数学年刊》[83]。让我解释一下，我们用极不变量表示欧拉障碍的公式背后的哲学动机。一般来说，如果你考察代数几何，并且想要数值不变量，就会考察特征类，它们是同调或上同调´类。我们在巴黎综合理工学院数学中心的共同理念是，这并不是真正的几何学。几何学关注的是具体的子空间，而不是同调类。这篇论文的构想是给出欧拉障碍的一个公式；欧拉障碍是陈类理论中的一个重要不变量。我们并不太关心陈类，但我们认为，计算陈类的核心就是欧拉障碍。因此，我们想从几何上理解欧拉障碍。正如我所说，如果考察奇点的绝对极簇重数的交错和，就会得到欧拉障碍。于是我们认为，这样就有了几何解释。这是一种总体思路：几何解释与上同调相对。人们往往认为，只要提到“上同调”或“同调”，那就是拓扑的。从某种意义上说确实如此，但对我们而言，如果只是拓扑的，就还不够几何。后来，多亏了 Brasselet，我们才发现了 M.H. Schwartz 在20世纪60年代创立的、利用向量场构造奇异簇特征类的优美方法。[84]

PPP：您还和 Lˆe 合作研究过切超平面的极限。您是如何对这个主题产生兴趣的?

BT：原因如下。要定义绝对极簇，最好的方法是考察奇点的 余法空间 。为了说明原因，让我稍微回溯一下。极簇本质上是通过偏导数子式的消失来定义的，因为舒伯特条件正是这种形式。但这很难从代数角度解释。比如说，你甚至没有直接的证明能说明极簇一般是约化的。我之前说过，我在思考 Carg`ese 的论文时，不知道该如何证明极曲线是约化的。这让我十分沮丧。证明极簇约化的好方法是考察余法空间，也就是切超平面极限所构成的空间；它位于环境簇与对偶射影空间的乘积中。在那里，你用对偶射影空间中线性子空间的逆像来截取余法空间。这样做实际上就是写出舒伯特条件。但在这个空间里，你可以运用横截性。这是关键思想之一。考察余法空间，你知道它是约化的，也可以用惠特尼条件对它进行分层，因此原点上的纤维是若干层的并。设想用一个一般线性空间去截取它。与这些层横截是一个开条件，

[82]这篇文章是 [38]。[83]这篇论文是 [58]。[84]参见书籍 [79]。

特殊纤维。由于惠特尼条件，这一性质会延伸到邻近的层。这说明超平面截面与所有部分都横截。因此，它至少一般是约化的。现在，你的极簇就是该交集在起始簇中的像，这个像由一个几乎处处为同构的映射给出。所以你知道，极簇至少一般是约化的。对相对极簇也同样适用，只需使用相对余法空间。后来[85]，我用相对 Semple-Nash 修正作了同样的论证。这就足够了，因为计算重数时，你不必在意它是否有嵌入分支。由于约化空间的一般超平面截面未必约化，我应该取它的约化部分。

PPP：它有嵌入分支吗?

BT：我认为很可能有。无论如何，我们需要的结果是它们在一般情形下是约化的。我曾在某处写过一个猜想：局部极性簇的约化部分的惠特尼等奇异类型仅取决于奇点的解析类型。但这尚未得到证明。

PPP：你刚才关于余法空间的解释，是否已包含在 Carg`ese 的论文中? ?

BT：不，那是后来才有的，见 La R´abida 论文[86]第二章的末尾。实际上，L^e 和我最初是用 Semple-Nash 修正以及格拉斯曼流形中的舒伯特簇来定义局部极化簇的。Merle 和 Henry 在讨论中向我们建议，最好研究余法空间，因为它们的交理论简单得多，而且在投影下的表现也比纳什膨胀更好，正如他们在 [44]中所解释的那样。L^e 和我从余法的观点出发，推导出了关于投影的结果，见 [59]。

PPP：在某个时刻，您开始从辛几何或接触几何，以及拉格朗日子空间或勒让德子空间的角度来思考这些现象。您能解释一下为什么吗?

BT：切超平面的极限空间就是余法的纤维。因此，为了理解我刚才解释的极性簇定义，您需要理解余法的纤维。后来我意识到——当时我在哈佛大学——余法的纤维是一些子簇的并，而这些子簇分别与射影化切锥中的某些子簇射影对偶。余法空间的接触结构正是理解这种对偶性所需要的。这就是它发挥作用的方式。L^e 此前曾针对曲面、通过一种不同的论证证明，曲面的切超平面的极限由射影化切锥的对偶，加上一些线性空间构成；这些线性空间与切锥上的直线对偶。于是，我们所做的就是将这一事实加以推广。当时，有人来问我：“切超平面的极限是否就是切锥的切超平面？”我说：“不，在一般情况下完全不是，但 L^e 和我确切地知道它是什么。”

用接触和辛术语思考，使我们得以发现某些不可约分量之间的这种对偶性。这是我从 Pham 那里学来的，而且立刻就铭记于心。Pham 写过一本关于 D- modules[87]的书。书中首先介绍了辛几何学，例如余切丛上的辛结构。书中提到，不可约的拉格朗日簇是其在底空间中的像的余法。当 L^e 和我一直在思考余法时，我说：“这正是我们需要的！我们只要找到许多不可约拉格朗日簇就行了。”结果确实如此。此外，我们还证明了，惠特尼条件等价于某些辅助簇相对于小层是拉格朗日的。

PPP：你和 L^e 关于消失圈与惠特尼条件的论文[88]是怎么回事?

BT：在那里，我们试图梳理整个惠特尼分层理论、拓扑平凡性，以及我所说的总体拓扑类型。它指的是奇点本身的拓扑类型，加上经过该奇点的不同维数的一般平面截面的拓扑类型。我们试图对整个理论作出连贯的阐述。例如，当时还没有人证明这样一个事实：

[85]在 [99]中。[86]也就是说，在论文 [100]中。[87]那本书是 [74]。
[88]那篇论文是 [59]。

局部总体拓扑类型的恒定性蕴含惠特尼条件。我们知道这一定是对的，但还没有书面证明。由此产生了一篇篇幅很长、内容极为复杂的论文，我想没多少人读过。不过那篇论文的优点之一，是完整证明了一个公式：该公式将任意复解析惠特尼分层空间中，小层上某一点处局部极化簇的重数，与大层沿小层的局部消失欧拉示性数联系起来。我们想要证明的是，邻接分层的局部总体拓扑类型沿小层保持恒定——这可以用消失欧拉示性数来表示——等价于这些邻接分层沿小层满足惠特尼条件。我们认为这是复解析几何中的一项重要结果，也是汤姆-马瑟定理（即惠特尼分层沿各分层具有拓扑平凡性）的恰当逆命题[89]。这篇论文旨在以一种与所有相关内容相协调的方式证明这一结果，其中也包括典范最小惠特尼分层的存在性。论文篇幅很长，因为我们试图从头开始论述。一旦你想在复解析几何中计算重数或进行莫尔斯理论之类的工作，就必须非常谨慎地选择所用的邻域：要使用边界以良好方式与各分层相交的多圆盘，等等。这带来了大量技术负担。

19. The interest for polar varieties

PPP：我们再多谈谈极曲线吧。您说，写作《卡尔热塞论文》时，极曲线就闯入了您的视野。此后，它们伴随了您几十年。您能谈谈自己对它们的看法是如何演变的吗？我们可以从您的论文《极 ´曲 ´线 *I*》[90]谈起。

BT：那 篇论文源于我想理解米尔诺数与极 lar
不变量[9] [1]。结果发现，它带给我的远不止这些。

PPP: 你所说的“理解极不变量”是什么意思？你当时有更具体的问题吗 n?

BT：“极曲 ´面 ´*I*”同样源于我想理解截面的米尔诺数这一愿望。我认为 Thom-Sebastiani 和[92]是一个很好的实验场，因为只需将 $f(x)+g(y)$ 换成 $u(x)f(x)+v(y)g(y)$，其中$u(x)$ 和 $v(y)$ 是单位，就能得到解析类型各异、拓扑却相同的对象。我当时想：“让我看看，能否用各分量的米尔诺数来计算 *Thom-Sebastiani* 和的一般超平面截面的米尔诺数。”结果发现，这办不到。极不变量有分子和分母，分子的总和就是米尔诺数，分母的总和则是一般超平面截面的米尔诺数。尝试计算 Thom-Sebastiani 和的一般超平面截面的米尔诺数时，极不变量的分子和分母就会出现。可以说，它们以一种非常初等的方式出现。我非常高兴，因为我得到了一个计算 Thom-Sebastiani 和的一般超平面截面的米尔诺数的公式，只不过公式并非用米尔诺数表示，而是用极不变量表示的。这让我对极不变量的作用有了非常深刻的认识。如果把它们看作（相对）消失圈大小的消失速率，那么这项代数计算便告诉了我们一些颇具几何意味的事情，其性质与汤姆-塞巴斯蒂亚尼定理大体相同。这一见解促使我提出了关于超曲面孤立奇点极小指数的猜想，而该猜想最近已由 Dirks 和 Mustaţ˘a[93] 证明。

PPP：因此，最初的问题并非关于极曲线，而是关于 Thom-Sebastiani 和的 Milnor 数；你惊讶地发现，极不变量也由此进入了故事。

---

[89]参见 [64, 第 11] 节以及 [13]。[90]本文为 [91]。[91] 设 $f(z_0, \ldots\ldots, z_n)$是一个不含常数项且在原点具有孤立临界点的收敛幂级数。记 $X_0 \hookrightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ 为它所定义的超曲面奇点，记 Γ_q 为
f Γ_q m_q X_0 $e_q + m_q$ *polar*
invariants X_0 e_q/m_q [91, 1 3]

的一般极曲线的不可约分支。的重数记为，与的交数记为。的为商。详情请参见第.....节。[92]两个函数 $f(x)$和 $g(y)$的 *Thom-Sebastiani sum*为 $f(x) + g(y)$。其中， x 和 y 表示不相交的变量多重集。该名称源自文章 [80],，文中将 Thom-Sebastiani 和的同调单值化表示为其各分量的同调单值化。[93]在文章 [22]中。

BT：是的，正是如此。我对此感到非常高兴，也意识到它们发挥作用的方式可以概括为牛顿多边形上的一种乘法运算。因此，我为牛顿多边形引入了一套记号[94]。显然，它们有一种加法，即闵可夫斯基和。不过，事实证明，它们还有一种乘法[95]。除了没有乘法单位元之外，它们构成一个半环。这种乘法恰好是理解 Thom-Sebastiani 和的一般超平面截面的 Milnor 数所需要的。因此，我引入了这套记号，也引入了牛顿多边形的乘法。接着，那个定理非常漂亮：Thom-Sebastiani 和的雅可比牛顿多边形，等于各分量的雅可比牛顿多边形之积[96]。在我看来，这似乎与霍奇理论、米尔诺纤维上的混合霍奇结构有关。有一篇文章解释了这种联系，作者是 Steenbrink 和 Zucker[97]。再说一次，我的哲学是：极不变量属于几何学，霍奇结构属于上同调。如果能把两者联系起来，那就很好；如果不能，我仍会立足于几何学，研究米尔诺纤维中梯度胞腔的消失速率和曲率。这一思路最终使我证明了这样一个事实：在一个 μ^*-常值超曲面族中，雅可比牛顿多边形保持不变，尽管极曲线的不可约分支数、因而判别曲线的不可约分支数可能发生变化，正如 Pham 所证明的那样[98]。

结果证明，从这个角度来看，最简单的 Thom-Sebastiani 运算 $f(z_0, \ldots\ldots, z_n) + w^N$为我提供了一把钥匙，让我理解了喷流的拓扑充分性和 Łojasiewicz 指数，并证明任意孤立超曲面奇点都是另一个孤立超曲面奇点的一般超平面截面，从而回答了 Thom 提出的问题。

PPP：“*Vari´et´e polaires II*”[99] 是对这些想法的延续吗？

BT：不是，“*Vari´et´e polaires I*”讨论的是相对极曲线，“*Vari´et´e polaires II*”主要讨论的是绝对极簇。

PPP：对你来说，哪一个先出现？

BT：我觉得它们在我的脑海里始终几乎是并行出现的。Carg`ese 论文刚发表后，我就觉得，这不可能只是适用于超曲面奇点的偶然现象；惠特尼条件一定存在一种完全一般的刻画。因此，我把尝试获得惠特尼条件的代数刻画列为一个计划，或者说一个梦想。这促成了“*Vari´et´e polaires II*”。实际上，它采用的思路与 Carg`ese 论文或“*Vari´et´e polaires I*”略有不同。它更多涉及归纳法。其中有一个关键引理，部分灵感来自 Brian¸con 和 Henry 关于曲面的一条引理[100]。简单来说，这条关键引理指出，如果分层空间中有一个一维分层，以及一个与之相邻且满足惠特尼条件的分层，那么该分层的极曲线为空。这是一条关于切线极限的非常技术性的引理。由此可知，如果我们取一个包含小层的一般超曲面，并与大分层相交，那么惠特尼条件就会得到保留。因此，这是一个归纳证明，但其思路与 Carg`ese 的证明略有不同。

PPP：因此，这两篇论文中都出现了通过超平面截取来进行归纳的策略。您当时是有意识地受到 Lefschetz超平面截面定理的启发吗？

[94] 每个牛顿多边形都可以写成 $\sum_i P_i$ 个 *elementary Newton polygons*的闵可夫斯基和，其中每个多边形至多有一条紧边。此处的记号指这些初等牛顿多边形：$P_i = \left\{ \begin{matrix} \ell \\ h \end{matrix} (P_i)\ (P_i) \right\}$ 表示 P_i 的紧边连接点 $(\ell(P_i), 0)$ 和 $(0, h(P_i))$。[95]乘积对闵可夫斯基和满足分配律；对于初等牛顿多边形，其定义规则为 $P \star Q = \left\{ \begin{matrix} \ell \\ \ell\ P \end{matrix} (P)\ell(Q) \min\left((\ )h(Q)\ \overline{\overline{\ell(Q)h(P)}} \right) \right\}$。详情请参见 [95, 定义 2.2]。[96] $f \in \mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_n\}$ 的 *Jacobian Newton polygon*是态射 $(f, \ell) : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$ 的判别式芽的牛顿多边形，其中 ℓ 是一般线性形式。[97]~~这篇文章是 [85]。[98]参见 [73]~~的例 3。[99]这篇文章是 [100]。[100]该引理发表于 [6]。

BT：绝对没有。当然，我知道Lefschetz定理。真正促使我思考的是这样一个想法：如果我们有一个非奇异射影超曲面，并取它的一般超平面截面，那么这个截面由次数决定。如果我们取一个非奇异射影簇上的锥，已知该簇的拓扑，那么就能知道它所有平面截面的拓扑。我当时心底里想的是，对于奇异超曲面，这一切完全不成立。因此，我们必须更好地理解它们之间的差异，以及差异究竟在哪里。对此有很多种研究方法，我采用的只是其中一种。我的证明的核心是：为了将大分层在小层各点处的极性簇与惠特尼条件联系起来，可以通过截取包含小层的一般平面来进行归纳，而我们总可以假设这些平面是线性的。

PPP：现在我们来谈谈一篇较新的极曲线论文。这篇论文是你与 Evelia Garc´ıa Barroso 合著的，题为“曲率的多重´尺度集中……”[101]。你的创作动机是什么？

BT：这始于 Langevin[102] 的一项结果。粗略地说，该结果指出，米尔诺纤维的曲率极限等于相对极曲线与超曲面的交数。我觉得这个结果非常漂亮，也曾与 Langevin 讨论过。我由此了解到临界点数与曲率之间的交换公式；在我看来，这是一个非常优美的结果。由于我对极曲线感兴趣，因此想更深入地理解这种曲率背后的几何学。此前，我曾针对平面曲线奇点提出过这样一个问题：我能否仅通过观察米尔诺纤维退化为奇点的动态过程，确定它的拓扑类型？我其实并没有构造例子，但开始从另一个角度思考这个问题。基本上，事实是可以在极曲线的每个分支附近局部化交换公式。我尝试给出一个证明，并最终对分支得到了证明。

几何思想相当简单：根据 Merle-Smith定理[103]，，极曲线的各个分支与给定分支之间的接触关系已确定，并由极不变量编码。这意味着，如果确定极曲线的（一般）方向发生变化，其分支不会有太大移动；而它们与给定分支的接触越紧密，移动幅度就越小。因此，它们与米尔诺纤维的交点也不会有太大移动。但如果米尔诺纤维上存在这样的点：点只移动了一点，切线却发生了很大变化，那就意味着曲率很大。此外，由于一般情况下极曲线有多个分支与曲线具有相同的接触关系，根据交换公式，米尔诺纤维的全部曲率都集中在它与若干个朝原点逐渐收窄的楔形区域的交点处。接下来只需验证公式是否证实了这一点，并计算各楔形区域中的曲率趋于无穷大的速率。

随后我意识到，对于任意平面曲线奇点，背后应该都有一个有趣的定理。我建议 Evelia 将此作为研究课题，去理解可约情形下极曲线的行为。这项工作量很大。最终，Evelia 成功地弄清楚了其中的情况[104]。后来我们发现，西班牙数学家 Eduardo Casas-Alvero 也用完全不同的方法，借助经典意大利无穷近点，证明了同一方向的结果[105]。不过，我对 Evelia 得出的几何结果非常满意；这个结果将 Eggers 图与极曲线变换曲线在曲线消解过程中的行为，以及极曲线各分支的 Puiseux 展开联系起来。我认为，这种对可约情形下极曲线的精确描述是新的，而且应该很有用。为了证明它确实有用，我们着手撰写关于可约情形下曲率集中的论文。结果发现，这比单分支情形复杂得多。尤其是，研究表明，在许多情况下，米尔诺纤维的 Lipschitz-Killing 曲率作为$\lambda \to 0$ $f(x,\ y) = \lambda$中一张曲面 $\mathbb{R}^4$来看时，随着 λ 在不同楔形区域 $\mathbb{C}^2$中趋于零而趋于无穷大的不同速率，确实能够确定极限曲线奇点的等奇异类型。总的来说，这种想法——不同的消失速率或趋于无穷的速率具有代数和几何意义，且其意义远不止牛顿多边形类型——

[101]这是文章 [32]。[102]摘自文章 [50]。[103]摘自 [83] 和 [66]。[104]这是文章 [30]。
[105]参见文章 [11]。

这一结果多年来一直萦绕在我心头。20 世纪 80 年代初，我在日内瓦听了 George Wanner 的一场讲座，他讲解了一个关于二次向量场极限环的例子：如果你在一张纸上画出三个极限环，那么第四个极限环的半径就会达到数公里。这个例子让我强烈地联想到极不变量。

PPP：我认为，Evelia 的学位论文首次运用了 Eggers 的论文[106]。

BT：我意识到极曲线及其分支对于联系米尔诺纤维的几何学与超平面截面的几何学有多么重要时，正值 Carg`ese 前后。于是，我给 Merle 的学位论文指定了这样一个研究课题：计算平面分支的极不变量，并考察它们是否与普伊苏指数有关。我当时已经知道，第一个普伊苏指数包含其中。Merle 出色地完成了这项工作，对分支的情况作了全面描述[107]。许多年后，我发现 H. J. S. Smith 也做过类似的研究[108]。Brieskorn 给 Eggers 指定的学位论文课题，是将 Merle 对分支所做的工作推广到可约情形。Eggers 的工作也非常出色，他引入了*Eggers* 图，这非常有用[109] 。不过，正如你所说，起初人们看不出它有什么实际作用，因为在可约情形下，极不变量无法确定等奇异类。在她的学位论文中，Evelia 找到了修正这一问题的方法，并将 Eggers 图与解消图等其他不变量联系起来。

20. Bonnesen 型不等式

PPP：在研究极曲簇的这些工作期间，您证明了 Bonnesen 型不等式[110]。这两个研究主题之间有关系吗?

BT：没有。

PPP：您是如何开始研究 Bonnesen 主题的?

BT：这多少有些奇怪。当我引入平面截面的米尔诺数时，我证明了一个公式，用混合重数来表示两个理想的乘积的重数混合重数[111]。关于混合重数，其中一种可能的定义——你可以称之为欧多克索斯方法[112] ——是： $\mathfrak{m}^a\mathfrak{n}^b$ 对 a 和 b 正整数而言，是 a 和 b的一个多项式，其系数就是理想 $\mathfrak{m}$ 和 $\mathfrak{n}$的混合重数。我觉得这非常引人注目，因为居然存在如此简单的公式。事实上，Bhattacharya[113], 早已预见了这一点，不过是在研究希尔伯特函数等问题的经典框架下。

当时我考虑的是关于函数的闵可夫斯基不等式，但这是一个错误，因为在凸体理论中，与之良好对应的不等式是 Brunn-Minkowski 不等式。当时我并不知道这一点。无论如何，对于理想，相应的不等式应为 $e(\mathfrak{n}_1\mathfrak{n}_2)^{1/d} \leq e(\mathfrak{n}_1)^{1/d} + e(\mathfrak{n}_2)^{1/d}$。我非常想知道这个不等式是否成立。我发现，如果连续的混合重数之间存在某种不等式，那么该不等式就会成立；也就是说，如果混合重数序列是如今所称的对数凸序列。

PPP：在证明这个关于重数的 Minkowski 型不等式之前，您是否已经考虑过它的应用?

BT：绝对不是。

---

[106]Eggers 的论文以 [24] 的形式发表。[107]这就是文章 [66]。[108]在 [83, 文章 18]中。[109]事实证明，正如 [31], Favre 和 Jonsson 的 *valuative tree* 所展示的那样， [25]中的结果也可以通过 Eggers 图的一种变体（即所谓的 Eggers-Wall 树）的射影极限得到。[110]参见文章 [101]。[111]参见 [88, 第 I.2 节5]。[112]这里引用的是文章 [33]。[113]在文章 [4]中，其作者 Phani Bhusan Bhattacharya 是一位印度数学家。他于 1954 年在德里大学取得博士学位后，曾在埃克塞特与 David Rees 共事两年，随后返回德里大学。感谢 Jugal Verma 教授提供这一信息。

PPP：纯粹是出于好奇……

BT：是的，纯粹出于好奇。

PPP：这源于你对一本词典的探索。

BT：不是，那时还没有那本词典。我最初问混合重数的问题，纯粹是出于好奇。那样的结论会成立吗?

PPP：但我不明白你为什么会问这个问题。

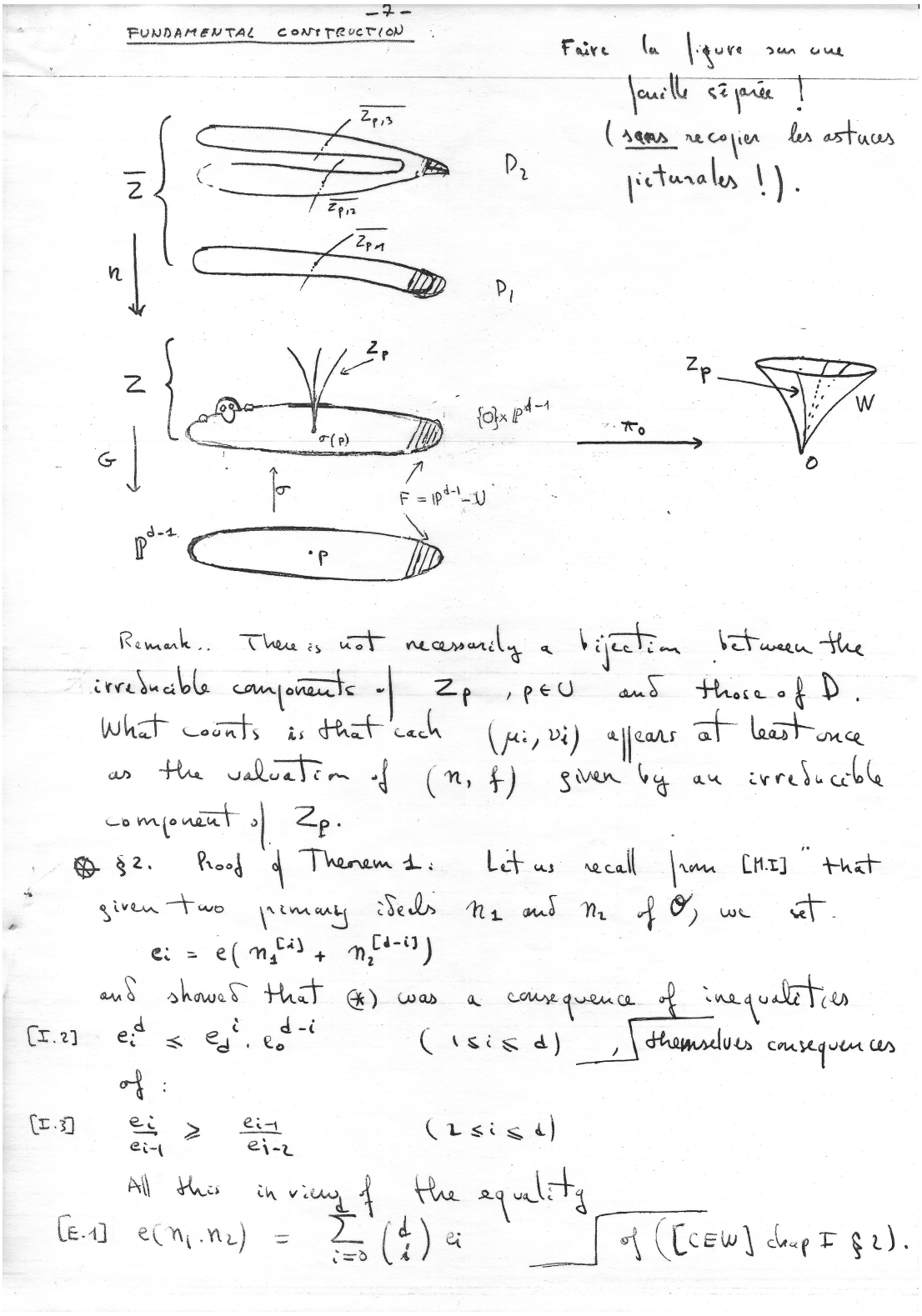
BT：我也不明白。我看了公式 $e(\mathfrak{n}_1\mathfrak{n}_2) = \sum_{i=0}^{d} \binom{d}{i} e(\mathfrak{n}_1^{[i]}, \mathfrak{n}_2^{[d-i]})$，它将局部 d 维环中两个初理想乘积的重数表示为混合重数的组合。我当时在想，关于超曲面的极大理想与雅可比理想的混合重数之间的不等式 $\frac{\mu^{(i+1)}}{\mu^{(i)}} \geq \frac{\mu^{(i)}}{\mu^{(i-1)}}$，而该超曲面具有孤立奇点；我发现一个带有 $e_i = e(\mathfrak{n}_1^{[i]}, \mathfrak{n}_2^{[d-i]})$ 的一般版本 $\frac{e_{i+1}}{e_i} \geq \frac{e_i}{e_{i-1}}$ [114]，推出了 $e(\mathfrak{n}_1\mathfrak{n}_2)^{\frac{1}{d}} \leq e(\mathfrak{n}_1)^{\frac{1}{d}} + e(\mathfrak{n}_2)^{\frac{1}{d}}$。我在二维情形下验证了它。然后，这个问题便一直萦绕在我脑海里。实际上，我在 Carg`ese 论文中把它写了下来。后来，大约在 1975 年，我想到了一种证明方法。这个想法是利用霍奇指数定理，或者更确切地说，利用它的局部形式：正规曲面奇点消解中例外除子的交叉矩阵的负定性。

竟然一直没有人想到结合贝尔蒂尼定理和霍奇指数定理，来证明一个序列中三个连续数之间的不等式，这实在令人惊讶。但情况显然就是如此。按照我定义混合重数的方式，很明显可以除以函数，也就是两个理想的生成元；因此，当有三个连续的混合重数时，它们就是二维空间上理想的重数。这正是关键所在。因为我知道，混合重数是通过混合两个理想的生成元，并取所得理想的重数得到的，所以我想到，如果把其他一切都切掉，就能分离出三个连续的数。利用贝尔蒂尼定理可以看出，当用足够一般的元来截切时，得到的是一个正规曲面，接下来用的就是霍奇指数定理。于是，我就得到了证明。这里有件挺有意思的事。那是在1975年左右。Iarrobino和Eisenbud当时都在巴黎。有一天，Iarrobino说——我们是朋友，一直常常聊天——“Eisenbud问了我一个关于重数的问题。”然后他把问题告诉了我，但不知怎么把它稍稍改动了一下，也可能是我误解了他的意思。我回答说：“不，不可能是那样。我知道这个问题，也知道答案。”这是我刚刚完成的工作的一个推论。

PPP：这就是促使您为 Eisenbud-Levine 论文撰写附录的原因吗[115]?

BT：是的，完全如此。后来，我开始思考等号情形。结果如何呢？1978年，写完附录后，我应松村之邀前往名古屋。在那里时，他对我说：“你知道吗？我收到了一篇 Rees 和 Sharp 写的论文，讨论你的定理[116]。”那是另一种证明，而且更一般；因为我偷懒，证明时采用了一些简化假设，比如 Cohen-Macaulay。Rees 和 Sharp 则沿着 Rees 关于重数的精妙思路，给出了另一种证明。随后我意识到，刻画等号情形很有意思。于是，我在《Ramanujam 纪念文集》[117]中写下了等号情形的证明。那时我意识到，我对闵可夫斯基不等式所作的类比是错误的；恰当的类比应是凸体的 Brunn-Minkowski 不等式。我从混合重数的 Alexandrov-Fenchel 型不等式，转向了 Brunn-Minkowski 型不等式。我认为，凸几何领域也经历了同样的路径，只不过方向或许不同。Minkowski 定义混合体积之后，这或许自然地成为平面区域等周不等式的一种推广；该不等式涉及连续的三个量：区域的面积、周长以及单位圆盘的面积。后来我开始思考，或许可以用环面几何来证明这样的不等式。

[114]这个记号表示由 i 的一般元 $\mathfrak{n}_1$ 和 $d-i$ 的一般元 $\mathfrak{n}_2$生成的理想的重数。[115]文本是 [93]。[116]这篇文章是 [77]。[117]这篇论文是 [94]。图12 展示了那篇文章手稿中的一页。贝尔纳解释说：“这是我对 Rees 赋值的几何理解，Monique 和我重新发现了这些赋值。”



Remark.. There is not necessarily a bijection between the irreducible components of Z_p, $p\in U$ and those of D. What counts is that each (μ_i, ν_i) appears at least once as the valuation of (n, f) given by an irreducible component of Z_p.

⊛ §2. Proof of Theorem 1: Let us recall from [M.I] that given two primary ideals n_1 and n_2 of $\mathcal{O}$, we set

$$e_i = e(n_1^{[i]} + n_2^{[d-i]})$$

and showed that ⊛) was a consequence of inequalities

[I.2] $e_i^d \leq e_d^i \cdot e_0^{d-i}$ $(1\leq i\leq d)$, themselves consequences of:

[I.3] $\frac{e_i}{e_{i-1}} \geq \frac{e_{i-1}}{e_{i-2}}$ $(2\leq i\leq d)$

All this in view of the equality

[E.1] $e(n_1.n_2) = \sum_{i=0}^{d}\binom{d}{i} e_i$ of ([CEW] chap I §2).

FIGURE 12. 文章手稿的一页 [94]

PPP：这是你第一次接触环面几何吗?

BT：是，也不是。我第一次接触环面几何，是在访问日本时，通过小田了解到的。小田当时在思考一些与奇点消解和牛顿多面体有关的问题。他跟我讲了一些关于牛顿多面体的内容。我没有看出牛顿多面体与环面几何之间的联系，而他对此非常清楚。和小田交谈之后，我想："这家伙有一些有意思的想法，我应该读读他的著作。"他当时写过的作品中，有一本关于环面几何的书[118]。当然，我此前已经对它有了模糊的认识，因为我知道 Demazure 关于环面几何的奠基性论文[119]。我依稀知道，有些簇是由扇定义的。当时我处于一种懵懂状态。后来我意识到，我所知道的不等式与凸几何中的不等式非常相似，便开始觉得其中一定有些东西值得我去理解。接着我明白了，有理多胞体的支撑函数的线性区域定义了一个 Demazure 扇，而且可以将一个簇与多胞体联系起来。就在那时，我意识到环面几何与凸体几何之间存在联系。之后一切就都很容易了。

PPP：当时你是否了解到，在阿诺德身边有一些人也对同类问题感兴趣? 并且霍万斯基也证明了如今所称的霍万斯基–泰西耶不等式?

BT：当然。那时霍万斯基得知我们做了同样的事情后，给我写了一封信。他在信中说，他独立地完成了凸体与托里克簇之间的对应关系。他还解释说，阿诺德研讨班上曾有一场演讲，内容是关于我提出的重数的闵可夫斯基型不等式。我想，阿诺德之所以对此感兴趣，是因为我的不等式意味着某种彼得罗夫斯基–奥列伊尼克不等式的类比。在演讲结束时，霍万斯基站起来说，他可以为线丛证明同样的不等式。所以，他是受到了我的不等式启发，因为他已经完成了基础工作。真是非常有趣：我们在同一时间产生了同一个想法，这让我们成为了朋友。

PPP：正是因为你新近对环面几何产生了兴趣，才接受邀请，做了一场关于斯坦利定理的布尔巴基演讲吗? 在那篇布尔巴基论文[120], 的开头，你解释了环面几何的基础知识。

BT：是的。我的意思是，与此同时，Stanley 正在利用多胞体与托里克簇之间的同一对应关系来证明麦克马伦猜想[121]。有趣的是，我们利用同一对应关系，借助霍奇理论的两个方面，证明了关于凸体的两件不同的事情。再说一次，把一个格多胞体与一个扇和一个凸支撑函数联系起来，从而得到一个射影托里克簇，这个想法几乎同时在好几个人的头脑中萌生。其根源是 Demazure 对托里克簇的构造 [21] ，它使人们能够从凸体走向代数几何，这与受牛顿多边形启发的经典方向相反。

21. Valuation theory

PPP：现在我们来谈谈赋值理论。您在局部一致化问题上做了很多工作[122].....

BT：我认为，我对局部一致化的主要贡献，是将问题化归为有理赋值的情形来处理，而不是采用经典的化归方式——化归为秩一赋值的情形；此外，我提出，有优秀等特征局部整环上的有理赋值的半群包含了我们理解局部一致化所需的全部信息。当然，我还提出了

[118]这是那本书 [70]。[119]这是那篇论文 [21]。[120]这是那篇文章 [98]。[121]在那篇文章中 [84]。[122]设 X 是代数、解析或形式簇的一个约化芽， ν 是其局部环上的一个克鲁尔赋值。要实现*uniformize it locally* ，就是要找到 X 的一个修改，使得 ν 的中心是一个正则点。

这个猜想：任何仿射奇点都可以在嵌入到某个更大的空间之后，通过环面映射加以消解[123]。对我来说，迈向证明这一猜想的一步就是局部一致化。

为什么必然会涉及局部一致化？当然，如果你消解奇点，就会一致化赋值。因此，如果你一开始就相信，一致化一个赋值是从它的半群中得出的，那么你就会说：好吧，为了理解奇点消解，我必须通过半群来理解局部一致化。这个想法从何而来？这是因为我与丽贝卡·戈尔丁合写的那篇论文，我们已经讨论过了[124]。事后看来，让我颇为惊讶的是，对于平面分支，半群确实能给出一种算法来消解奇点，而且不受特征影响。我又一次或多或少地着迷于这个想法。我想弄清楚半群包含了哪些信息。一如既往，起初想法并不明确。我当时在迷雾中摸索，试图找出一些可以深入思考、并在其上取得进展的扎实内容。

我还是想尝试理解一般情形下的局部一致化，而不是采用扎里斯基或 Abhyankar 所说的降至秩一情形。在这种情形下，值群包含于实数中。从这个角度来看，半群可能更简单，因为它位于实数中。但你无法使用环面几何；除了爆破之外，你没有任何可能推广到正特征的工具。我想把重点放在我有工具处理的赋值上。我的主要工具是环面几何。这意味着我必须研究有理的赋值——不存在剩余域扩张——但其秩可以任意。在这个框架下，我的贡献在于指出，伴随分次环的几何是关键。因为它定义了一个广义环面簇，可以通过对其环境空间施加环面态射来解消，而且不受特征影响；从奇异芽到其伴随分次环的特化，在赋值选取的点处具有同时解消。伴随分次环或相应的环面簇或许具有无限嵌入维数，但我们仍然得到一个环面簇，也就是说，我们有二项式方程，可能是无穷多个方程，涉及无穷多个变量。这样一来，方程就很简单，是二项式方程，可以直接对其进行研究。

当然，Abhyankar 成功证明了任意特征下曲面的局部一致化[125]。但这算是一种壮举，就像 Cossart-Piltant 对三维情形的证明 [14] 一样。因此，我考察与赋值相关联的分次环、它的几何学，以及它由二项式方程给出的表示。回过头看，这似乎顺理成章。接下来处理半群有限生成的情形。这本质上就是 Abhyankar 赋值的情形。从这个角度看，这非常简单。我在第二篇关于赋值的论文[126]中写下的证明显得笨拙。但基本上，证明非常简单。接下来是非 Abhyankar 赋值的情形。这项工作仍在进行中。

这个问题很自然。你有一个不是有限生成的半群。你想找到一种嵌入，使托里克修正能够实现一致化。那你就必须用有限生成的半群来逼近你的半群。该怎么做呢？这基本上就是我所做到的，只不过我不是用有限生成半群的赋值来逼近我的赋值，而是用具有有限生成半群的半赋值 来逼近。就是这样。然后你只需处理方程，仔细考察，不需要做别的。

PPP：这里的总体思路是，你希望发展出另一种奇点消解的一般方法，并使用环面几何学。

BT：是的。

PPP：在这段研究期间，你曾与 Pedro Gonz´alez P´erez 顺带谈到 Nash修正。你能谈谈自己对 Nash 修正的兴趣吗？从某种意义上说，这可以追溯到你对切超平面的极限的兴趣，不过当时你是在托里克几何框架下思考。

[123]这一猜想出现在 [36] ，并在局部一致化版本中于 [108], [111] 以及 [113]中重复出现。[124]参见第15节。[125]在文章 [1] 中。[126]这篇论文是 [111]。[127]这篇文章是 [37]。

BT：是的。当然，我们当时想着塞姆普尔-纳什猜想：通过迭代塞姆普尔-纳什变换，可以消解奇点。这个想法部分源于我对托里克簇总是正规这一点感到不满意。我对 Pedro 说，也许如果我们能定义托里克簇的非正规化 Semple-Nash 修正，让我们能够在不一定正规的托里克簇框架下开展工作，那么事情或许会变得更简单。因为根据实验，我们知道正规化会抹去大量信息。我们证明了一个结果，比 Hironaka 用不同方法证明的结果稍好一些，但并没有得出决定性的结论。我们无法证明 Semple-Nash 修正最终能够消解[128]。

PPP：如果你知道对环面簇的结果，是否有办法将其推广到任意簇? s?

BT：是的，可以回到向某个环面簇的特化。特化到环面簇有很多种可能。

PPP：这会用到你为局部一致化所发展出的其他所有成果吗?

BT：是的。因为，要证明可以通过塞姆普尔-纳什变换来消解，只需证明可以通过塞姆普尔-纳什变换使赋值一致化。

PPP：这是一个定理吗?

BT：是的。我确信扎里斯基知道这一点，Hironaka 也知道。我的意思是，当我们有一个具体的过程，并想证明它最终会得到某个非奇异对象时，只需证明对每个赋值而言，其中心最终都会变成非奇异的。这源于 Zariski-Riemann空间在起始簇上的适当性。

PPP：最近，您与 Ana Bel´en de Felipe 合作研究了一个赋值理论问题[129]。这也与您关于局部一致化的总体计划有关吗?

BT：事情是这样的。我与 Javier Herrera Govantes、Miguel Angel Olalla Acosta 和 Mark Spivakovsky 合写了一篇论文[130]，探讨如何将赋值延拓到完备化。这是一个非常重要的问题，Spivakovsky 和我此前曾分别思考过。我有一个非常具体的猜想，因为我知道如何处理许多关于完备诺特等特征局部环的问题。但若要证明局部一致化，就必须证明可以将优良情形归约到完备情形。这里就出现了一个我已经指出的问题。这个猜想是：给定一个优良等特征诺特局部环和一个有理赋值，可以将其延拓到完备化的商环，使得值群保持不变。令人惊讶的是，似乎没人认为这很重要。我在自己的第一篇赋值论文[131]，中提出了这一点，并引起了 Spivakovsky 的兴趣。这就是我们共同撰写这篇论文的原因。Mark 从抽象角度关注所有可能的完备化延拓；这是交换代数中一个非常优美的问题。这个问题一般而言仍大多悬而未决，但 Mark 很久以前[132] 就解决了秩一赋值的情形，并提出了新的研究方法。我在自己的第二篇赋值论文[133]中解决了 Abhyankar 赋值的情形。这项工作用到了我们关于一般情形的那篇论文。对于任意的非 Abhyankar 赋值，我们仍然束手无策。但我认为，要获得局部一致化的证明，实质上只剩下这一个问题有待解决：这个关于完备化的具体问题。

在我们的论文中，我们利用了这样一个事实：当我们从一个环过渡到其亨泽尔化时，赋值的值群不会发生变化。我们当时并不知道，对于许多从事赋值域模型论研究的人来说，这是一个众所周知的结果。虽然已有一个证明，但依我看并不漂亮。因此，我说应该存在一种自然的证明。与此同时，我正在阅读Lafont关于亨泽尔化的一篇论文；Lafont曾是

[128]事实并非总是如此，这一点在访谈结束后不久由 Federico Castillo、Daniel Duarte、Maximiliano Leyton-´Alvarez 和 Alvaro Liendo 在文章 [12] 中证明。[129] 这促成了文章 [26]。[130] 这就是论文 [45]。[131] 这就是论文 [108]。[132] 参见 [46]。[133] 也就是说，在 [111] 中。

Samuel的学生。我认为，应该可以利用Lafont所做的工作，捕捉赋值在亨泽尔化中的行为。这就是Ana Bel´en和我着手要做的事情。

事情的发展比我预想的要复杂，但也让我获益匪浅。传统上，在模型论中，人们知道，如果我们有一个带赋值的域，并对这个域进行亨泽尔化，那么值群不会改变。当然，这并不能真正告诉我们，当域中有一个赋值子环时，亨泽尔化会如何改变它的值半群。我最终真正感兴趣的正是这一点。这与其说是关于域的值群，不如说是关于环的值半群。无论如何，第一步是考察这个群。我们着手研究此事，所依据的是这样一个事实：亨泽尔化可以构造为一系列非常简单的扩张的极限，这些扩张称为永田扩张，每个扩张都由一个具有特定性质的多项式定义。我喜欢研究这个问题，是因为如果我们考察牛顿根近似算法对这类多项式所做的运算，就会得到一个序列。这个序列未必收敛，但总是按照 Ostrowski 的意义伪收敛。因此，我们从 Ostrowski 的一个精妙思想出发：相对于赋值，存在伪收敛这一概念。在 [26], 中，我们给出了一个更具构造性的证明，说明对一个环进行亨泽尔化时，值群不会改变。通常用伽罗瓦分歧给出的证明只有寥寥数行，却除了结果本身之外什么也没告诉我们。借助我们的构造，我们还重新证明了 Kuhlmann 的一个非常漂亮的定理。进行亨泽尔化时，我们知道亨泽尔化中的元素可以由较小的域中的元素逼近，但我们想更精确地了解它们是如何被逼近的。秩一的情形很清楚，而在秩大于一时，Kuhlmann 的定理对这些逼近给出了非常精确的描述。

PPP：关于你的局部一致化研究计划，你还与 Dale Cutkosky 合作过。你能解释一下这项合作如何融入该计划吗?

BT：有两方面。很久以前，我想弄清楚值半群可以有多复杂。Dale 也有同样的关注，我们就此写了两篇论文[134]。最近，我们又与 Hussein Mourtada 合写了一篇论文[135]。Dale 和我关注的问题非常接近，但当然并不相同。他想为赋值构造生成序列。如果把范围限定在有理赋值这一领域，也就是我研究的领域，那么这类序列由环中的元素构成，这些元素在赋值分次环中的像生成该分次环。它们在几何上是最重要的元素。例如，对于平面分支，它们是这样的多项式：其根对该分支的普伊苏根进行逼近，精确到某个固定的普伊苏指数。我的看法略有不同，因为我想从半群入手。但我们的研究非常接近。一般问题是，给定一个局部整环的赋值扩张 $R \subset S$ 以及 R的一个生成序列，如何将它扩展到 S?

Dale 方法的优点是无需完备化。它并不依赖于我刚才提到的问题，而且非常直接。因此，在我与 Dale 和 Hussein 合写的论文中，我们提出了一些非常特殊、但仍然意义重大的情形，以说明如何构造生成序列。这种方法运用了环面几何中的思想，也运用了其他思想。我认为这是一篇意义重大的论文。让我解释一下原因。我想强调这一点：如果我们考察一般的解消，或局部一致化，会发现有两种哲学。其中一种是我称之为 Jung 哲学的思路：将你的环表示为一个正则环的有限扩张，或者至少表示为一个其奇点已知如何消解的环。然后，你试图利用下面那个环是正则环这一事实，来推导上面那个环的消解。Jung 实际上使用了判别式的嵌入消解。在零特征下，这种方法对曲面有效，只是过程相当复杂；而且最终，由于粘合方面的原因，它无法推广到所有维数。

PPP：那些理由是什么?

BT：在高维情形使用荣格方法，会产生准常奇点[136]。在零特征下，我们知道如何消解准常奇点，但必须把所有这些解消粘合起来。在正特征下，这种方法行不通，因为准常奇点可能

[134]那些是论文 [19] 和 [20]。[135]这就是文章 [18]。[136]这在 [61]以及 [76]中都有解释。

非常糟糕。所以，这是一种哲学思路，即使用有限投影。在特征 p下，我们寻找良好的投影，使代数扩张是单扩张。但如果从给定的投影出发，通常所有麻烦都出在投影不驯时。Abhyankar 多年来一直致力于理解这类扩张。

假设你想要使一个赋值一致化，另一种哲学思路，也就是我的做法，是利用赋值的半群来选择一个合适的嵌入，而不是从投影入手。如果你想把这两种方法联系起来，可以看这个例子。取一个平面分支 $x = t^4$，$y = t^6 + t^7$ 并假设其处于特征 2 下。它的半群由 4、6 和 15 生成。那么，如果取任意一个线性投影 $ax + by$ 到一条直线上，它就不是驯的。相反，将曲线嵌入三维空间 $x = t^4$，$y = t^6 + t^7$，$z = y^2 - x^3 - x^2y = -t^{15}$，其中有一条 z 轴对应于 t^{15}，并将曲线投影到该轴上。这个投影是驯的[137]。

PPP：驯是什么意思?

BT：自然赋值在下方的较小值群（在本例中定义在 $k[[x]]$或 $k[[y]]$上，即 $\mathbb{Z}$）嵌入上方的较大值群（同样是$\mathbb{Z}$）时，其指数不被特征整除。对于 Abhyankar 赋值，我的方法是将奇点嵌入一个更大的空间，在那里我有一个到光滑空间的有限投影，而且该投影是温和的。我证明了这种嵌入总是存在的。事实上，我并不使用这个温和投影。

PPP：但既然如此，你为什么需要它?

BT：我不需要它。我只是说，如果我想比较两种奇点消解哲学，就会这样解释。我所用到的是某些雅可比子式非零。从投影的角度来看，这意味着某个投影是温和的。但对我而言，雅可比行列式不为零对应于指数矩阵的子式满足互素条件；这告诉我，如果对环境空间进行某种托里克修正，严格变换就会是光滑的。因此，我们在那篇论文中所做的工作更接近投影哲学，因为我们解释了如何构造赋值环的生成序列：我们把该环看作正则子环的有限扩张，并把这个赋值看作正则子环上某个赋值的扩张。如果这个扩张是温和的，那么结果就非常有力，并能立即给出环面解释。或者我应该说，它给出了一种环面化嵌入：对于奇点的环上的赋值而言，环面化嵌入是将奇点嵌入一个更大的（可能是无限维的）非奇异空间，使其能够退化为该赋值的伴随分次环；这个伴随分次环就是广义环面簇的代数。接着，对伴随分次环足够大一部分进行嵌入式环面消解，也应该能将该赋值统一化。我与 Dale 和 Hussein 合写的论文中的主要结果令人非常满意，它表明环面观点十分有效。但这不是我的哲学；我的哲学与使用投影截然不同。尽管如此，知道存在这类结果还是很有益的。

我还应该补充一点，Hussein Mourtada 和 Bernd Schober 最近为正特征下的超曲面引入了[138]，一种概念。他们认为，这一概念将发挥准常奇点在零特征下所起的作用，而且它是相对于到非奇异空间的投影而言的。这些超曲面并非准常的，但可以通过等奇异的方式将它们“提升”为零特征下的准常奇点。我认为这很有前景。

22. Other mathematical works

PPP：您与 Lipman 的合作情况如何?

BT：Lipman 对 Lipschitz 饱和感兴趣，视角比我与 Pham 合著的论文所采用的更加偏向代数，并为此写了几篇出色的论文。他几次邀请我去普渡大学。20 世纪 70 年代中期，Brian.con 和 Skoda 的论文问世，回答了一个由 Mather 提出的问题

[137]另一个例子是特征 p下 Artin-Schreier 环的完备化 $k[[x]][y]/(y^p - x^{p-1}(1 + y))$。作为 $k[[x]]$ 的扩张，它不是驯分扩张。但如果我把它看作 $k[[y]][x]/(x^{p-1} - y^p(1 + y)^{-1})$，那么我就得到了 $k[[y]]$的一个驯分扩张。[138]在文章 [69]中。

[139]：给定一个定义在（$\mathbb{C}^n$，0）上的全纯函数芽，能否给出 f 的幂的上界，使其包含在它的偏导数理想 $j(f)$ 中？当时已知 f整依赖于 $j(f)$。Brian¸con 和 Skoda 对 $f^n \in j(f)$ 的证明依赖于 Skoda 的一个深刻的解析定理，尽管这个结果显然是代数的。我原本并没有特别想寻找代数证明，直到有一天在哈佛大学，Griffiths 把他与 Harris 合著的书送给我。我翻阅关于留数的章节时，突然想到至少在一个重要的特殊情形下，可以利用留数定理以及通过模的不等式来解释整依赖，从而得到一个简单的解析证明。当然，这并不是代数证明，但我知道有个人对整闭包和代数留数理论有着极深的造诣，能够将其转化为代数证明；碰巧几天后我就要乘飞机去普渡大学拜访 Lipman！于是我们写了那篇论文[141]。这推动了解析留数理论与交换代数之间富有成效的互动发展，相关内容见 [120]。

PPP：您还想谈谈您那篇关于直线配置的《科学院报告》短文吗[142]？

BT：那篇短文里有一个错误。不过，它是从一个有趣的问题出发的，而且结论是正确的。只是我证明它的方式不对。我来解释一下。对于任意约化复平面曲线奇点，其等奇异类型都可以在 $\mathbb{Q}$上定义：我们可以找到一个等奇异的平面曲线奇点，它由一个系数为有理数、甚至是整数的方程定义。这相当引人注目。我想知道这一结论在更高维数时是否仍然成立。我知道 Ignacio Luengo 大约在同一时期也独立地提出了同样的问题。例如，对曲面来说，这是否成立？我想找一种方法来构造反例。最简单的办法，是在平面中找一个不能在 $\mathbb{Q}$上定义的实直线配置。我记得这是经典结果，是从 Grünbaum 的书里学到的：存在由九条直线构成的配置，并非所有这些配置都能在 $\mathbb{Q}$上定义，因为有四条直线交于一点，而该交点处的交比不属于 $\mathbb{Q}$。一个重要事实是，这种配置是刚性的，也就是说它没有变形。我的想法很简单：取这个直线配置，将它复化，再取其上的锥。这样就得到一个在 $\mathbb{C}^3$中经过原点的平面配置。

我声称，这个曲面即使经过等奇变形，也无法定义在 $\mathbb{Q}$ 上。只需指出，如果存在这样一个曲面的等奇异族，就可以推导出一个切锥的等奇异族；而刚性意味着其中任何一个成员都无法定义在 $\mathbb{Q}$ 上。

PPP：错误在哪里？

BT：如果只看那九条直线，出于伽罗瓦理论原因，它可以定义在 $\mathbb{Q}$ 上。是 Jean-Benoit Bost 告诉我这一点的，因此由此得到的曲面奇点可以定义在$\mathbb{Q}$ 上。不过，只要再加上一条精心挑选的第十条直线来打破对称性，就很容易纠正这个问题。事实上，Adam Parusi´nski 和 Laurent¸iu P˘aunescu 写了一篇很好的论文[144]，纠正了这个问题，也纠正了我那篇笔记中的另一个更具技术性的问题。

23. Interest in History of Mathematics

PPP：我现在想问问你那两篇更具历史性的论文，即《从蒙日到托德的表观轮廓》[145]和《生日花束之花束》[146]。你是如何写这类论文的？你会查阅文献，向其他数学家请教吗？

[139]这是论文 [7]。[140]也就是说，是这本书 [39]。[141]这是文章 [62]。[142]这是笔记 [105]。[143]这是这本书 [40]。[144]这是论文 [72]。[145]这是文章 [106]。[146]这是文章 [107]。

BT：我觉得我用的方法很不完善。我们来谈谈那篇关于视轮廓的论文吧。我想传达的是，据我所知，视轮廓这一思想确实起源于蒙日关于防御工事的研究。我觉得，追溯一个几何思想从实际问题中的萌芽，到它被用于射影簇不变量理论（主要是在复数域中），是件很有意思的事。不过我的方法很糟糕，我不会推荐别人这么做。事情是这样的：我对这一思想的历史很感兴趣，于是读了一些蒙日和庞斯列的作品；庞斯列的写作风格让我着迷。蒙日的文笔也十分严谨。但我必须承认，我没有读历史学家的著作。在很大程度上，我是凭直觉摸索的。

Todd 的两篇论文给我留下了非常深刻的印象。[147] 因为要找到一个公式，将视轮廓或临界轨迹的等价类转化为射影几何中的不变量，绝非易事。Todd 做到了，他找到了恰当的公式。我觉得这是一个很美妙的故事。当然，如今它已完全被遗忘，人们只谈陈类。但仔细想想，一切都非常自然。从临界点的角度，或者从延拓向量场所遇障碍的角度，你也可以讲述同一个故事。因为你将一个射影簇投影到一个非奇异空间上，试图提升与像相切的向量场，接着便会遇到障碍，而描述这些障碍是一个非常自然的问题。我想说明这些思想之间一脉相承的脉络。不过，这纯粹是我的个人看法。正如我所说，从数学史的角度来看，这是一种糟糕的方法，因为我没有去寻找源头，也没有查阅同一学科的其他论文。当然，我知道陈关于特征类的论文，也了解外尔和塞尔的一些工作，等等。但这并没有什么帮助，因为这些人致力于证明结果，而除陈的论文或许例外，这些思想在表面之下根本无从显现。但在我看来，蒙日、庞斯列或 Todd 的情况完全不是这样。我只是想强调思想的延续性。你可以说这是一篇数学史论文，但作者并非历史学家，而是以一种非常特殊的心态写成的。它无疑是一个反例，说明数学史论文不应该是什么样子。

PPP：您是否认为，阅读数学史论文时，最令您感兴趣的是追寻思想的发展？

BT：是的。数学思想的历史发展中存在一些分岔点。整段故事都很有意思，包括连续发展的部分和发生分岔的部分：当一些全新的思想出现时，人们会如何运用这些新思想。在我看来，数学史应聚焦于这种连续性与分岔的更迭。当然，这是一项极其艰巨的工作。我认为，有些历史学家并不赞同这种观点，因为他们追求某种更具文化性或更宏观的视角。举例来说，英国射影几何学派提出了射影簇不变量的思想，这些不变量具有某些性质，例如可加性。后来，来自其他学派的人——纯粹的黎曼学派，或是致力于纤维丛分类的学派——重新构建了这套理论，并取得了巨大的成功。从这个角度看，我认为关键论文是陈的那篇。但这是一种截然不同的方法。陈的论文着重于舒伯特演算的微分形式视角，而Todd则关注几何方面，例如切超平面、映射到射影空间的线性映射的临界点等等。最终，两者得出了相同的结果。不同之处在于，Todd的情形只涉及代数簇的切丛，而陈的情形则适用于带有联络的任意纤维丛，等等。一种理论可以纳入另一种理论之中，但两者并不能很好地契合。你必须转换视角。对我来说，这一点很有意思，所以我试着在那篇论文中对此作了一些解释。

PPP：您提到了几个名字，比如蒙日、庞斯列和 Todd。您还记得自己是如何意识到这些人物的存在的吗？这是从您的工作中首次出现极曲线开始的吗？

BT：我在学校学过极线变换[148]，知道这基本上是庞斯列的贡献。事实上，它就是射影对偶。因此，我试着读了一些那个时代的文学作品。比如，我看到 Bobillier 写道，庞斯列的变换是一般对偶原理的一个特例，而庞斯列则回应说，对偶性不过是给出一条非退化圆锥曲线。这很有意思，因为

[147]文章 [118] 和 [119]。[148]在法语中它被称为 *transformation par polaires réciproques*。它在射影平面中使用了一条非退化圆锥曲线。相对于这条曲线，任意点都有一条极线，反之亦然，并且这种对应关系保持点与直线之间的关联关系。

这是一场关于观念、关于思想的对话。你如何理解对偶性？如今，我们已不会在写作和期刊中进行那种对话了。但当你读 Bobillier 和庞斯列的论文时，就会发现他们确实是在探讨不同的观点。

PPP：你觉得在 MathOverflow 上也能感受到这种精神吗？

BT：是的，我觉得在 MathOverflow 上，人们常常会表达某种关于意义的看法。我同意，从某种程度上说，这种精神确实存在。

我也为庞斯列的《*Trait´e des propri´et´es projectives des figures...*》着迷。在那篇论文里，我开始阐述自己对这一切的看法。对我来说，这令人满足，因为我把自己认为有趣的想法付诸文字。

PPP：你是什么时候发现 Todd 的著作的？因为我觉得从庞斯列到 Todd 并不容易。

BT：催生《数学讲义》的研讨班 777[149] 源于我发现了 Du Val 在 20 世纪 30 年代发表的精彩论文。后来我注意到有这样四位人物：Du Val、Hodge、Coxeter 和 Todd。他们都出生于 1903 至 1908 年之间，而且显然对数学抱有共同的态度。我认为他们都是非常杰出的几何学家。我尤其研读了 Todd 的论文，对它们很感兴趣。它们有计算方面的内容：你必须找出使类保持不变的正确组合。我一直对这类半组合问题感兴趣。当时我对奇异簇的陈类完全不感兴趣，只是很高兴看到 Todd 如何运用极轨迹这一概念。从庞斯列的*transformation par polairesr´eciproques* 到 Todd 的极曲轨迹，跨度相当大。前者从非退化平面圆锥曲线出发，后者则利用余法空间为任意非奇异射影簇定义对偶性。当然，与此同时，19 世纪出现了许多相关成果，涉及 Clebsch、Noether 等人，后来还有意大利几何学家。

PPP：事实上，普吕克的论文中有一种相对极曲线。

BT：是的。不过可以说，那属于庞斯列传统，只是庞斯列从未发表过极曲线的方程。这确实令人惊讶。显然，庞斯列受纯粹思考的指引，也就是后来所谓的综合几何。发表方程的是普吕克。

PPP：你认为庞斯列真的是这样做的吗？他没有像Newton那样把方程留给自己，因为出于某种哲学上的理由，不愿将它们写进专著？

BT：我不知道。但我知道，在专著的第二版中，他流露出了一些苦涩。由于职业上的职责，他很长一段时间都无法从事数学研究。在此期间，普吕克用方程推导出了以他名字命名的公式。庞斯列说，年轻一代发展了他的思想，并得出了漂亮的结果，或大致是这个意思。

PPP：您会说，您对数学史的了解更多来自阅读，而非交谈吗？

BT：是的。

PPP：现在我们来谈谈另一篇论文《生日花束之花束》，您将它献给了约翰·米尔诺。文中谈到了更新近的事情。您还记得当时是怎么写这篇论文的吗？

BT：那篇论文也很不完善。我当时试图阐述米尔诺球面花束定理的传承[150]。对我来说，这是我初次接触同伦观点。我读了Hamm和Lˆe[151]，关于簇的同伦深度，以及在某些情况下这与纤维分解为球面花束之间关系的论文。那篇论文里我犯了一个很大的错误：没有查阅荷兰学派的文献。比如，当时Siersma也得到了一个花束

[149]这是第 [127]卷。[150]这是 [68, 定理 6。5], 该定理指出，具有原点处孤立临界点的复多项式的 Milnor 纤维具有由 μ 个中间维数球面组成的花束的同伦型。[151]特别是，这篇论文 [41]。

在新的情形下的分解定理[152]。所以我试图描述米尔诺花束的传承，但遗漏了其中相当一部分。

24. Interest in Philosophy of Mathematics

PPP：现在我们来谈谈数学哲学。这是另一个令你非常感兴趣的话题。你能谈谈自己是如何对它产生兴趣的吗？你写过几篇这类论文，也至少共同组织过一次关于这门学科的研讨班。

BT：我想，这一切都始于我需要赋予事物以意义。或许这就是我无法真正读懂科学书籍的原因，因为对我来说，赋予意义的尝试很快就会变得过于复杂。所以我只好停下来，随手翻阅，直到找到一句对我来说显然有意义的话。然后我就从那里开始。比如，Thom 的《稳定 ´结构与形态发生 ´学 `》就是我这样读的。我在书中发现了许多意味深长的句子。回到你的问题，基本上就是因为这个。我感兴趣的是弄清楚理解一个证明意味着什么。

我记得，在预科班上课时，我常说，如果我们真的聪明，就不必学习数学了。当然，这只是个玩笑。但早在那时，我就开始思考应当通过什么方式理解世界，尤其是通过数学。在那段时期，我听过克洛德·列维-斯特劳斯在法兰西学院开设的讲座，内容是关于南美洲和北美洲神话结构的同构。我相信，我当时无意识地意识到：试图赋予世界意义并寻找原因的，是相同的人类大脑结构；而这些结构在不同环境中会产生同构的神话系统。很久以后，这个想法才浮现出来。

PPP：所以，可以说，你最根本的哲学问题是“意义是什么？”

BT：是的，我想可以这么说。让我回想一下，我最初之所以被奇点理论吸引，是因为这个领域里有扎里斯基、Hironaka、Thom 或 Pham 这样杰出的人物。他们谈论问题的方式，以及他们所阐释的内容，都让我非常着迷。他们同时极其专注，又非常谦逊，丝毫没有压倒任何人的意图。我之所以这样说，是因为他们开口时，很容易看出他们所谈论的东西对他们而言具有意义。未必对我有意义，但无论他们谈论什么，对他们来说都有强烈的意义。他们完全沉浸其中。我想，正是这一点吸引了我：这些人以一种非常深刻的方式，真正知道自己在谈论什么。所以，我又回到了这样一个问题：我如何赋予事物意义，以及我如何理解一个证明。后来，我开始读一些数学哲学方面的书，例如阿尔贝·洛特曼的著作。

PPP：还有别的吗？

BT：我认为最重要的是 David 和 Hersh 合著的《数学经验》。这本书的核心思想是形式主义与意义之间的对立。很多年前我读过它，它给了我很大的鼓励，让我明白并非只有我一个人认为这种区分很重要。后来我读了一些 Cavaill`es 的作品，但在他的著作中，我没有找到能回应我这个问题的内容。接着当然是维特根斯坦。不过维特根斯坦并不合我的口味。我认为他的哲学是一种美丽的失败。尽管如此，我还是非常钦佩他；我认为他是一位非常杰出的人物和哲学家。总之，没有哪篇哲学文本给我留下过深刻印象。后来我开始独立思考。与此同时，我也和朋友 Jean Petitot 进行讨论。

渐渐地，我得出了一个结论：意义是在我们的无意识中产生的。于是我试着探索这个想法[153]。现在我对此理解得深入多了。这是一个由来已久的哲学问题，但数学哲学并未真正认识到这一点。例如，我写到 Lautman 时说，他对数学结构有非常出色的描述，但完全没有解释我们为什么这样做，为什么我们赋予这个意义，

[152]这发表于 [81]。他的结果很快被 Tib˘ar 在 [117]中推广。[153]在论文 [109]和 [110]中。

而不是那个意义，等等。我试图说明，他的数学哲学非常连贯、令人满意，但对我来说仍然有所欠缺。

我认为，在某种意义上，就我试图做的事情而言，许多哲学并不是很相关。因为哲学试图描述绝对的事物，描述那些可以被有意识地解释的事物，而我正朝着不同的方向前进。我深信，重要的部分并不是有意识的，我们不可能作出绝对的描述；我正在努力寻找一些对大脑中所发生之事的有趣映照。如果能够成功，我认为这本身就已经是巨大的成功。

我们所具有的客观性印象，源于这样一个事实：我们的所有感知系统和潜意识世界基本上以同样的方式运作。因此，我们会觉得，那些令我们感兴趣、也令许多其他人感兴趣的事物是客观的。但数学之所以具有客观性，仅仅是因为：一个拥有同构感知系统、同构的远古世界经验以及同构大脑结构的存在，会创造出同构的数学。如果我们是章鱼，我们的兴趣和方法就不会相同。因此，在我看来，把数学视为绝对真理，仅仅因为它在逻辑上是严密的，这种哲学观点是一个严重的误解。

PPP：现在我们来谈谈你共同组织的认知研讨班。

´BT：我与 Giuseppe Longo 和 Jean Petitot 在高等师范学校共同组织了这个研讨班。´

PPP：是什么时候?

BT：我想是在九十年代初。Giuseppe 来到计算机科学系，当时该系与数学系是合并的。我们发现彼此都对认知有共同的兴趣。我知道 Jean Petitot 也对此很感兴趣。我们三人的动机非常相似。

我只谈谈自己的情况。正如我之前告诉你的，我一直对理解数学感兴趣。我们理解一个陈述或一个证明时，究竟发生了什么？我认为，在做了大量数学研究之后，我能够赋予其中涉及的对象以意义。但这种意义是在我的潜意识中产生的，我无法控制它。我认为我们必须接受这一事实。这也是我在哲学论文中试图阐释的内容。如今，得益于认知科学的进展，我们开始理解这一过程是如何运作的。比如，我们无法理解意义是如何产生的。但我们可以像 Petitot 等人那样，理解我们的感知系统是如何运作的；事实上，这正是我们研讨班的主题。

例如，我们为什么能认出一条线就是一条线？我认为，我们有许多完全无意识的驱动力，它们适应于我们的感知系统，使我们觉得一条线比一条随机曲线更有趣，或者说，更有意义。对我而言，视觉直线是我们的感知系统中神经元集合的一种极值状态。我们可以把这种极值状态称为前线或原线。于是，我们可以设想一个对象，它根据我们的感知系统具备原线的所有性质，我们称之为数学直线。它体现的不仅是视觉直线，还包括我们以恒定速度行走时所产生的感知，也就是所谓的前庭直线[154]。

这与我研究数学史时所采取的做法相反：只有在与一些专业人士进行了大量讨论之后，我才尝试发展这一思想：Jean Petitot、Daniel Bennequin、Alain Berthoz、Giuseppe Longo、Francis Bailly。因此，我们是一小群对这类问题感兴趣的人。有些人´做得更多。例如，Petitot 成为了巴黎综合理工学院的认知科学教授。我可以说，自己是把这件事当作一种业余爱好继续下去的。但这对我而言是一项重要的业余爱好。因为我们可以开始把握在数学中理解究竟意味着什么。我们也会发现，一些关于理解的哲学问题其实毫无意义。我们倾向于赋予数学对象某种超人的性质，有点像Lautman那样。我认为，这无法让我们在理解方面走得太远。

PPP：你觉得理解只有一种独特的脑过程，还是我们有多种理解方式?

BT：让我感到惊讶的是，当你说自己理解一个证明时，这并不是逻辑过程的结果，而是一种感觉：你能够赋予证明的每一步以意义。但意义很难定义。当你成为一名数学家时，真正困难的事情是赋予你所研究的对象以意义。如果你无法赋予它们意义，那么你永远不会成为数学家。

[154]参见文章 [110]。

遗憾的是，学校教学并不是为了向学生解释对象的意义。教学侧重于向他们传授可以据以操作对象的规则。但对许多人来说，如果对象没有意义，他们就不会在意这些规则。

我们回到实数直线这个例子。首先要做的是让学生理解，一个数就像直线上的一个点，两个数相加就像平移。如果你脑海中没有这样的图景，那么例如你就无法理解任何关于分析的内容。这就是意义。因为正如我所说，前庭直线是在我们以恒定速度和方向行走时产生的，它也是神经元群的一种特殊状态。有一种我称为庞加莱´—贝特索同构的关系，它在某种程度上将前庭直线与视觉直线对应起来。而我认为，这就体现了数学直线的真正意义。它有步进，有方向，就像前庭直线；但同时它也具有连续性，且没有定向，就像视觉直线。如果把二者对应起来，就能赋予视觉直线一个定向。在我看来，如果你能让学生相信数学直线具有这两个方面，那么你就在许多数学初等问题上取得了巨大的进展。

同样，我们也具有对平行性的前数学感知。我想强调的是，其中许多事情根本不是有意识的。这样说或许有些粗略，但我把它们看作神经元集合的特殊状态。至于你的问题，我认为，对于每个人而言，理解只有一个过程。

PPP：你认为如今我们是否能够更好地解释理解的顿悟时刻，比如庞加莱所描述的那个著名时刻？[155]他说自己为那一刻准备了很长时间，一切都已经存在于他的脑海中，而就在那一刻，某种化学反应发生了。但除此之外，他无法再说更多。我们能否更好地描述这种“化学反应”？

BT：首先，我不喜欢把它想成化学反应，因为这样太过还原主义。但我认为，当我们思考一个数学问题时，我们会面对各种对象，并赋予它们意义。我们与这些对象进行了足够多的接触，使它们成为熟悉的对象。然后，我们提出问题。

对一个你赋予了意义的对象提出问题，就像是制造了一种张力。我认为，顿悟时刻就是一种放松的时刻。能量降到了最低。所有这些张力之所以存在，是因为我们不理解，因为某些对我们有意义的东西与我们的组织性冲动和既往经验不相契合——无论我们是灵长类动物还是科学家。突然间，出于某种我当然无法描述的原因，这种张力松弛下来，降到了最低。很多时候，这就像一场突然而剧烈的灾变。我想强调，这并不是一种还原论或机械论观点。因为大脑中发生的物理学、化学和电学过程，远远超出了我们的理解能力。我们永远无法写出公式，只能对其中发生的事情建立粗略的模型。系统的复杂性极高。因此，我们可以做一些类比，就像我刚才所做的那样，但具体细节仍然难以捉摸。物理学家喜欢让我们相信，突触连接内部存在量子现象之类的东西。也许确实如此，但我更愿意认为，它们是极其复杂的系统，我们不可能对其作出任何准确的描述。不过，这就像云，或像薄雾：我们可以粗略勾勒出它的形状，并大致了解其内部发生的事情。对我来说，这已经是了不起的进步了。但我们离这一步还很远。

25. Main results, notions and conjectures

PPP：您特别喜欢自己的哪些结果?

BT：有趣的问题.....我已经提到过理想化贝尔蒂尼定理[156]。然后，或许还可以提到与超曲面奇点[157]的相对极曲线的分量相关联的极不变量，以及我称之为雅可比牛顿多边形[158]的东西。我非常喜欢这个

[155]在他于1908年出版的第三章《*Science et méthode*》中。[156]其在 [88, 命题27]中出现。相关内容曾在第16节中讨论。[157]参见脚注91。[158]参见脚注96。

事实，即它在等奇变形中保持不变[159]，，因为这多少有些出人意料。我认为它有一些有趣的推论。当然，还有关于相对极曲线与超曲面交数的结果[160]。因为这同样带来了许多有趣的推论。我并不是按时间顺序来介绍它们，而是想到什么就说什么。然后，还有我与丽贝卡·戈尔丁共同得到的结果，更一般地说，平面分支特化为其相应的单项式曲线，在奇点消解的意义下是等奇异的[161]。这是一个我非常喜欢的结果，因为我认为它很有启发性。

接下来，还有一件事，我思考了很久，后来终于证明了：关于射影簇的 Pl¨ucker 公式，可以用最小惠特尼分层[162]来表述。它体现了存在最小惠特尼分层[163]的用处。我喜欢这个结果，因为我觉得它非常自然。它在复数域中成立，在实数域[164]，中却不成立，这说明实数域中仍有一些问题有待理解。不过，射影簇的对偶的次数有一个公式，而这个公式只取决于分层的拓扑以及沿分层的拓扑；多年来，这件事一直萦绕在我的脑海中。事实上，我曾在一篇为 1983[165]，国际数学家大会撰写的论文中写下了证明概要，但直到许多年后才写出完整证明。我有很长一段时间没有研究这个问题，不过终于把证明写出来时，我相当高兴。这是一个很好的例子，说明射影几何中的结果可以是奇点理论中一个更一般结果的推论，而这里的奇点是射影簇上方锥的顶点。它也是一个不涉及上同调类交数的公式，只涉及与射影簇的一般线性截面相关的拓扑欧拉示性数。唯一发生变化的是线性空间。与上同调公式相比，这个公式更具几何意味，也更合我的口味。我想知道，射影簇还有多少其他不变量，可以描述为一般奇点的不变量在锥这一特殊情形下的表现。

近来，我证明了 Abhyankar 赋值的局部一致化，我觉得这个证明相当巧妙。更近一些，我还给出了一个一般性证明——如果它能成立的话，而我认为它确实成立。

PPP：这是你目前的研究主题吗?

BT：是的。这是一个相对复杂的证明，但我喜欢它。

PPP：这 次谈的是结果，不过你也定义了各种概念。你能试着列出主要的
那些概念吗，从 您的观点呢?

BT：首先是我与 L^e 一起完成的局部极曲变种的定义。对我而言，这始于我接触到相对极曲线之时。经过一番思考后，我才意识到，还应该定义我所称的绝对极簇。我认为这是一个有用的定义[166]。此外，还有赋值的分次环这一概念。它是 Samuel 和 Rees 所构造理论的推广，后来证明是一个非常重要的对象。

PPP：这可以追溯到扎里斯基那本书的附录.....

BT：从某种意义上说，是的。那里处理的是分支的情形，其灵感来自我们在哈佛大学与 Monique 一起完成的一项构造，我们称之为 gr $\mathcal{O}$。随后，我在 1990年代´于高等师范学校任职期间，将其推广到了一般赋值。

PPP：那么在完全一般的情形下呢?

BT：在我第一篇关于赋值的论文中，那篇论文题为“赋值、变形与托里克几何”[167]，，我当时确实仔细研究了这个问题。所以，极性簇、分次环.....

[159]也就是说， [91,Th´eor`eme 6]。[160]在 [88, 命题 1。2]以及后文中。[161]这是 [108,第 6 节。3]这出现在 [35,第 8]章。[163]这在 [100, 第六章、第 3]节中有解释。[164]见 [9]。[165]这就是文章 [103]。[166]见脚注 66。[167]这就是文章 [108]。

PPP：还有这个序列 μ^*?

BT：是的，也许应该把它列入其中。事实上，这并不是真正对 μ^* 的定义，而是这样一种观念：我们不仅要考察空间芽，还要同时考察它的一般线性截面。与其说这是一种定义，不如说是一种思维方式。

PPP：那么，*"B.*泰西耶问题"呢？就像 Tevelev 一篇文章的标题里所说的那样[168]？我认为这是一个重要的思想，在您的许多论文中都有体现。

BT：是的，这正是我近期大部分工作的核心。这是一个令我极感兴趣的问题，而 Tevelev 的结果非常令人鼓舞，是一种"概念验证"：如果嵌入消解确实存在，那么按我的意义所说的环面嵌入解消也存在，而且它们在嵌入解消中甚至是"共尾"的，也就是说，任何嵌入消解都可以实现为某个环面嵌入解消中的严格变换图。

PPP：H 你是如何想到这个想法的？你是否有意识地受到库什尼连科关于牛顿 on 非退化 超曲面?

BT：绝对没有。我知道库什尼连科的论文，它曾在我们的研讨班上发表[169]。我觉得这个想法非常优美，因为它为牛顿多面体增添了几何学；但在理解它的运作方式后，我便失去了兴趣。真正影响我的是我和丽贝卡·戈尔丁证明的关于分支的结果。这确实是我或许已经研究了二十年的想法。当然，我知道这意味着，经过适当的重新嵌入，任何奇点都会在某种意义上变成"非退化"的。正如我之前所说，我从一开始就知道这会是一个漫长而复杂的过程。但它给我带来了许多满足感。我曾思考过一段时间的一个问题是：如果你有一个赋值，你知道局部一致化是存在的，但你会希望描述一系列双有理运算，从而产生填满赋值环的正则局部环。稍作尝试，你就会发现，在维数 > 2 较高时，如果使用膨胀，这件事会非常困难。但如果使用环面几何，几乎就轻而易举了。这可以由雅可比-佩龙算法的一种推广推得。

PPP：我们能否进一步谈谈你提到的这些概念各自是在什么背景下引入的吗？我们先谈极不变量吧。是什么问题引导了你?

BT：正如我之前告诉你的，扎里斯基重数猜想给了我启发。我把扎里斯基猜想转化成一个更简单的猜想：如果有一个超曲面奇点族，其米尔诺数保持不变，那么它的重数也保持不变。得知米尔诺数是拓扑不变量后，这么做就很自然了。这样一来，这个猜想就变成了一个可以尝试用方程或其他方法来处理的问题。为了做到这一点，我想我可以证明一个更一般的结果：如果 μ 保持不变，那么一般超平面截面的米尔诺数也保持不变。然后我们可以递归地逐步降维，最终得到重数不变。后来，Brian、con 和 Speder 的反例表明，这种方法行不通。不过，在得知这一点之前，我要解决的问题是将超曲面奇点的米尔诺数与一般超平面截面的米尔诺数联系起来。两者之间的差恰好由极曲线与米尔诺纤维的交数体现。这就是我引入极曲线的原因，因为我想弄清这两个米尔诺数之间的差异。由此得出的公式后来成为 Lˆe-Greuel-Teissier 公式，它指出，超曲面奇点与其一般超平面截面的米尔诺数之和，等于一般极曲线与该超曲面的交数。

然后，受扎里斯基关于判别式和等奇异性的研究启发[170]，，自然而然地会想：为什么只考察投影到同维非奇异空间所得的判别式？为什么不考察投影到所有维数的所有线性空间？正因为通过超平面切割的思路行之有效，我才觉得这会带来一些有趣的发现

[168]这就是文章 [114].[169]库什尼连科的论文 [49] 由 Merle 在章节 [67] 中介绍， [127]。

[170]正如 [121], 所说。

也包括投影到维数更低的线性空间。确实有了有趣的发现，因为这由此引出了绝对局部极曲线的概念。这对惠特尼条件很有用。

PPP：这两种观点彼此相关，因为截面就是那些投影的纤维。因此，一切都统一起来了。

BT：是的，完全正确。理解到这一切都处于同一个框架之中，也让我感到很满足。

PPP：那么最小惠特尼分层呢？证明它存在是您的研究计划，还是它作为其他工作的副产品而产生的？

BT：不，这并不是我的研究计划。找到惠特尼条件的数值刻画后，显然就必须用等重数条件来描述空间的整个惠特尼分层。我做到了，而结果证明，这项成果给出了最小惠特尼分层的存在性。

PPP：现在我们来谈谈您关于赋值的工作。您说，您的研究起点是与丽贝卡·戈尔丁合写的论文。您是如何想到这个问题的？

BT：我之前告诉过你，有一天晚上，在演讲前，我还不知道自己要讲什么。突然间，我也不知道为什么，想到扎里斯基那本书里那个古老的附录或许能给我提供一种方法，来消解平面分支的奇点。

PPP：所以，这让你很意外，你突然有了这个想法。

BT：是的，完全如此。然后我想："试试看吧。"我开始对具有两个特征对的分支进行计算，发现结果完全成立。第二天，我的演讲就是重新推导扎里斯基那本书附录中的一部分。丽贝卡·戈尔丁来巴黎待了一年。她是个非常有决心的人´。高等师范学校和哈佛大学之间曾有一项协议，允许哈佛大学的学生´到高等师范学校学习一年，反之亦然。这项协议已经中止了十年甚至更久。但丽贝卡决心要来巴黎，于是她不断催促哈佛大学的行政部门，直到他们不得不承认这项协议从未终止。于是她就来到了巴黎。后来，她参加了奇点研讨班。她似乎很感兴趣，因此我提议和她一起把这些内容写下来。她一直在做许多有趣的事。她是一个名为 STATS 的团体的成员，他们剖析美国政府和媒体发布的统计数据，看看哪些有意义，哪些没有意义，做的就是这类事情。

回到奇点消解的方法，对我来说，它呈现了一种有趣的视角：我们受教导说，理解簇的正确方式是采用"内蕴"的视角，不受其在仿射空间或射影空间中的嵌入影响。我们谈论的是非常丰沛线丛，而不是射影嵌入。一切都必须建立在簇上，本质上说，就是簇上的丛或层。这种思路可以走得很远，例如导出几何、分类空间，最近还有拓扑斯。以我的方法为例，只有在以恰当的方式将一个平面分支重新嵌入到某个高维空间后，你才能理解它的嵌入消解；在那里，它可以等奇异地特化为具有相同半群的单项式曲线，而该曲线的环面消解不受特征影响。当然，我可以把这一切改述为广义 Rees 代数的语言，让它看起来仿佛一切都是内蕴的，但这并不是打动我的思路。这种将一个环特化为与某个滤过相对应的伴随分次环的"可等消解"特化，或者更一般地说，"在某种意义下等奇异"的特化，是我开始逐渐理解的一般现象，尤其是在局部一致化方面。

26. Working methods

PPP：您能描述一下促成您撰写研究论文的过程吗？例如，您是否会等到证明的所有细节都确定后才开始写作？

BT：不，我不认为这是个好方法。举例来说，正如我在撰写第一篇关于极不变量的论文时告诉你的，我做过一个测试，考察的是 Thom-Sebastiani 和。它的解析类型取决于你在相加的那些函数前面乘上的单位元。所以，这是一个非常

简单的等奇异性不变量测试。解析类型会变化，等奇异类型却不会变化，因此我们有了可以进行计算的对象。于是我想到计算 Thom-Sebastiani 和的一般超平面截面的米尔诺数，心想这应该会有某种公式，因为一切都只取决于等奇异类型。结果发现，这个公式并不是用各分量的米尔诺数表示的，而是用各分量的极不变量表示的。不过，我开始写论文来回答这个问题时，完全不知道结果会是什么。我的问题是计算 Thom-Sebastiani 和的一般超平面截面的米尔诺数。好吧，我开始着手，进行计算，试着理解，等等。然后结果就浮现出来了。在写论文之前，我对此一无所知。

PPP：所以，你会在写作过程中有所发现。一般来说，为了完成论文的最终版本，你会经常重新安排写作过程吗？你会调换各个章节的顺序吗？

BT：会。我写作时非常注重逐次逼近。

PPP：我想知道这种做法是否具有普遍性。你和其他数学家讨论过这个问题吗？

BT：并不是所有人都这样做。我相信很多人会先写下笔记，等确切知道要在论文里写什么之后，再把它们整理好。一般来说，我不会这样做，因为我喜欢顺着思路写下去。

PPP：那么，在研究一个问题时，你会查阅很多文献吗？还是会刻意不看文献？

BT：都不是。我读的文献不多，但与此同时，如果我需要弄清某个概念……比如说，你拿起这卷布尔巴基的书……

PPP：《代数》第4至7卷……

BT：……我之所以翻到这里，是因为我正在思考关键多项式，不知怎的，我觉得它们与本原元定理有关。只有在域扩张的中间域有限多个时，这个定理才成立。我认为人们对这一事实关注得还不够。这是一个我想进一步理解的条件。据我所知，这卷布尔巴基的书是唯一以这种方式论述本原元定理的文本，不过赫尔穆特·哈塞或 Emil Artin 的著作中或许也有相关内容，只是我并不了解。大多数文本只提到该定理在零特征下成立。而这里说，只要中间域有限多个，它在任意特征下都成立。

PPP：这个问题与您关于奇点消解的研究计划有关吗？

BT：是的，间接有关。

PPP：我想，LaTeX 出现后，您的写作习惯也发生了变化吧？

BT：哦，是的。

PPP：您能描述一下这些变化吗？

BT：这是个有趣的问题。以前，我会写一份手稿，然后交给一位出色的秘书玛丽-若·L´ecuyer，她来自数学中心（Centre de Math´ematiques），不仅打字打得很好，还能发现错误。

PPP：真了不起！她是数学家吗？

BT：不，完全不是。她会说：“这里你这么说，那里你那么说，但记号应该统一。”她思路非常连贯。她打字排版的稿件十分漂亮。当时，Centre de Math´ematiques 会制作小册子，作为预印本寄出去。我喜欢为它们设计封面插图。例如，《不变量的狩猎》的封面是我画的一幅画，灵感来自1976年奥斯陆会议期间的一次徒步旅行，我们去了一座名叫Falketind的山[171]。而《*Vari´et´es polaires 2*》的封面则体现了这样一个事实：这本册子是马德里一门课程的讲义，时间是 1980[172]。这一次，因为我不会画´马，我就先打了个草稿，再由Marie-Jo完成最终的图画。这种情况一直持续到我离开高等师范学校。

[171]参见图13。[172]参见图14。

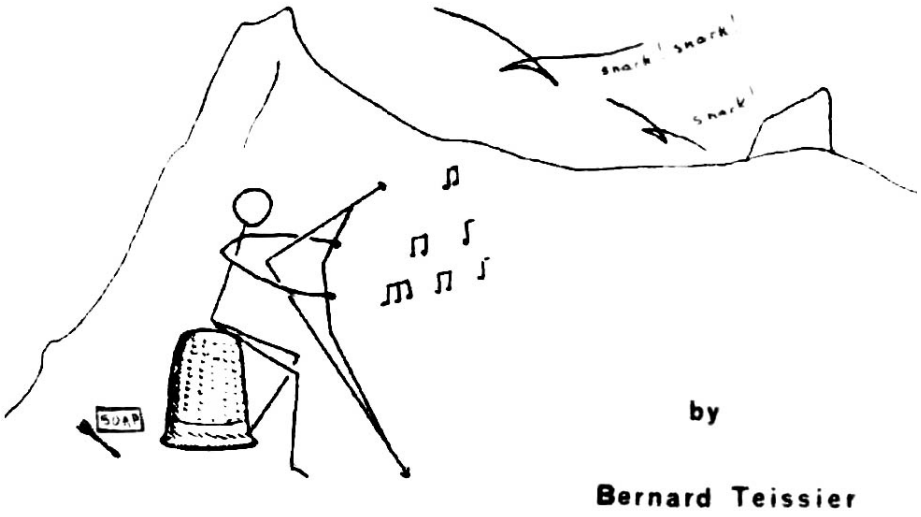


FIGURE 13. 《判别式几何中的不变量搜寻》的封面插图

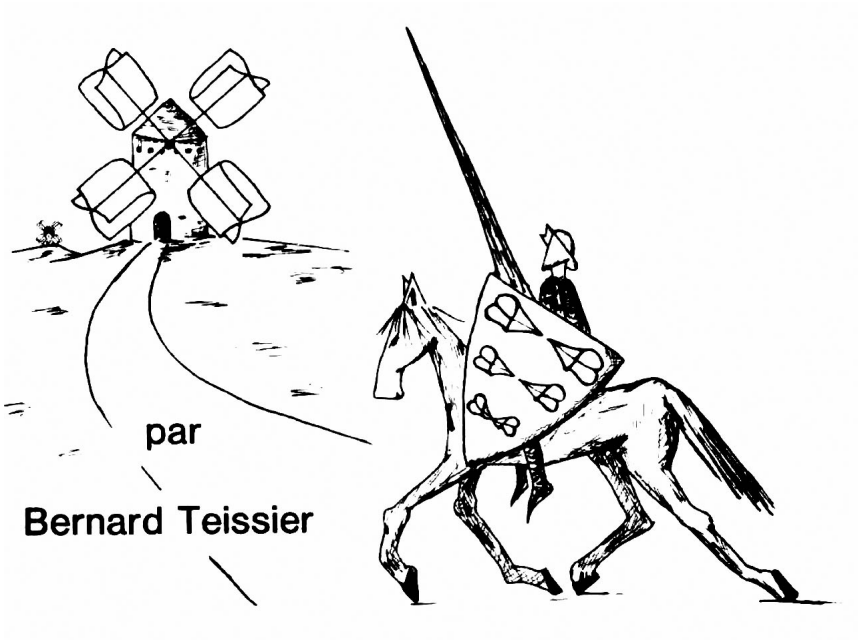


FIGURE 14. 《极 ´曲 ´变体 *II*》的封面插图

而且就在 abo 与此同时，LaTeX也在20世纪80年代末问世。从那以后，我就用LaTe
x打字。在那之前，
我甚至制作了一种字体，可以表示一些数学记号。

PPP：你在一些论文中用过它吗?

BT：用过，不过只是一些初步草稿，后来都被取代或放弃了，比如我1988年在东北大学讲授代数化时所作的“斯通讲座”笔记。

PPP：人们或许会觉得，有了 LaTeX 之后，写作就不再那么谨慎了。因为任何时候都可以修改，不像打字稿，改动后就得把整份内容重新打一遍。你觉得自己也经历了这种变化吗?

BT：你知道，我过去和现在都非常尊重这位秘书。只要有可能，我就不想拿同一页的十五个不同版本去麻烦她。我尽量写出相对整洁的手稿。你说得也许没错：为了不写出乱糟糟的手稿，我写作前会多加思考。不过，当然，有了 LaTeX，你可以先开始打字，边写边改，所以初稿可以写得比较粗略。LaTeX 在这方面非常有用，也便于更改名称和记号。LaTeX 也让你在记号的使用上有很大的自由。我认为，选择记号时必须非常谨慎。这是一件很重要的事。

例如，如果我们谈到极不变量或雅可比牛顿多边形，这也回答了你先前的一个问题：在这篇关于极性簇的论文中，我为一个超曲面及其一般超平面截面构造了一个雅可比牛顿多边形。我证明了它在惠特尼等奇异变形下保持不变。不过，由于所有一般超平面截面都是惠特尼等奇异的，你也可以对这个一般超平面截面做同样的事，得到一个新的多边形，如此等等。把所有这些多边形放在一起，会得到一个凸多边形吗？也就是说，超曲面的最大极不变量与其一般超平面截面的最小极不变量之间是否存在不等式？这个问题一直萦绕在我心头，我决定在找到答案之前不发表这篇论文。答案并不显而易见，但一旦我发明了一套描述牛顿多边形的记号，就很容易找到了一个反例，否定了这种凸性。

PPP：广义分数记法[173]？

BT：是的。正因为有了这种记法，我才能找到一个反例。我想，如果没有它，我恐怕永远也找不到这个反例。因为很难同时想象所有这些事情。所以，我决定发表这篇论文。反例出现在论文的后半部分[174]。

PPP：你还引入过其他记法吗？

BT：我想没有。嗯，也许有 $E_Y X$（或 $B_Y X$）这种记法，用来表示在 X中对Y 进行膨胀的结果；后来又将其扩展为 $E_Y Z$，表示通过态射 $Z \to X$，在 Z 中对 Y 的逆像进行膨胀的结果。这种记法见于 [100]。

PPP：你是如何准备演讲的？比如，你会写详细的笔记，还是只列一个简短的提纲？ ？

BT：通常我会写详细的笔记，之后却把它们忘在一边。我的意思是，我会写好详细的笔记，带在身边，但最后从来不会用到。

PPP：这项工作能帮助你理清思路，让你牢牢记住想讲的内容，这样就不再需要这些笔记了。

BT：没错。

PPP：但如果不写下这些笔记，你就没法直接做演讲。

BT：如果不这样做，哪怕是非常简单的计算，你也可能在黑板前迷失思路。阿兰·孔涅有句很精彩的话：“你准备的不是讲座，而是讲师。”

PPP：人们认为演讲是展示研究结果的一种方式。不过，你有没有单纯为了理清自己的想法而做过演讲？

BT：我不确定自己是不是有意这么做的。不过，准备演讲会迫使你理清思路，这是必然的。如果你思考如何以最佳方式呈现某件事，就会加深自己的理解。

PPP：D 你会通过演讲来观察哪些内容容易理解、哪些不容易理解，并根据听众的反应来判断吗 e？

BT：不会。或许我应该多这么做。不过，我会事先尝试调整演讲，以适应听众。

PPP：如果要你为如何做演讲提出建议，你认为最重要的原则是什么？对我来说，你刚才说的就是最重要的原则：“想想你要对谁讲话。”你也会把它列为第一条吗？

---

[173]参见脚注 94。[174]参见 [91,注释 5。3]。

BT：是的，我想是这样。

PPP：然后呢?

BT：然后就是“限制想法的数量”。

PPP：要消化哪怕三个新想法，确实也非常困难。

BT：是的，就是这样。你应该集中注意力，看看有哪些想法。这相当困难。我记得曾在库埃纳瓦卡做过一场关于 $\mathbb{Z}^r$上的序空间的演讲。它有一个自然拓扑。开集基由a、b中不同元素的有序对（ $\mathbb{Z}^r$）来索引。与这样一对相对应的基本开集由满足 $\prec$ 的序 $a \prec b$构成。接着，考虑这个拓扑，Sikora 证明了[175] 当 $r \geq 2$ 时，它同胚于康托尔集。我基于环面几何找到了这一事实的一个证明[176]。不过，这依赖于这样一种刻画：什么时候有限拓扑空间的射影极限同胚于康托尔集。众所周知，康托尔集是有限拓扑空间的射影极限。于是你可以反过来问：是否成立？这里有一个简单的条件。这让我很感兴趣。演讲时，我不得不先向大家讲解环面几何，因为那些有限集最终是托里克簇射影系统中的轨道集。所以我有些为难：是该着重讲哪些射影极限是康托尔集的刻画，还是花很长时间讲环面几何？最后我决定着重讲环面几何，因为我觉得这对听众最有用。如果他们理解了什么是托里克簇的射影系统，那么其余内容就容易了。这就是我会做的那类取舍。

PPP：现在来谈谈例子吧，它们在演讲中非常有用。你的论文中的例子通常是在充分理解理论后才寻找的阐释，还是你会写下那些帮助你取得进展的例子?

BT：我会写下那些帮助我理解某些东西的例子。

27. Reading style

PPP：你告诉过我，写论文时你读得不多。但除了这种情况，你会如何描述自己阅读数学书籍和文章的方式?

BT：我不想显得自以为是，但我记得有一次我和 Thom 谈到他读书的方式。他告诉我的一番话让我深有同感：“我不读书。我会随手翻翻，直到找到一句让我感兴趣的话。”然后他会看看这句话周围的内容，也许还会看看整本书。我觉得，这种描述也适用于我读数学书的方式。当然，书名也很重要。但如果我找不到一句能以某种方式激发我想象的话，比如本原元定理的陈述，那我就不会再花时间看下去。

PPP：这很有意思，因为前段时间，NorbertA’Campo拿起了那本为庆祝他八十岁生日[177] 而出版的文集，说这对他来说是个大问题：每次他开始读其中一篇论文的引言，就会开始梦见刚读到的内容，结果从来读不到引言之外……

BT：他真幸运，因为他会从引言开始读。我得找出某处能打动我的句子。

PPP：有没有哪本数学书籍，是你发现了某个有趣的句子之后，会从头到尾按顺序读完的?

BT：没有，从来没有。

PPP：比如希尔伯特和 Cohn-Vossen 的《几何与想象》，也不行吗? ?

BT：我不是按顺序读的。我相信书里的内容我都读过，但不是按顺序读的。

[175]在这篇文章里 [82].[176]
参见 [112].[177]这是那本
书 [131]。

PPP：连 Thom 写的书也读了吗?

BT：确实，也许有个例外。我想我把“预 ´测并不等于解释”逐字读了下来。

PPP：那本书更多是关于数学哲学的。

BT：是的，确实如此。

PPP：你最喜欢哪些数学书籍?

BT：我很喜欢翻阅数学书籍和论文。我会在图书馆里这么做，拿出一本书，翻开看看能否找到对我有意义的东西。任何主题的书都可以。这样做有好处，因为我觉得这能带来某种浅层的文化素养。它也有很大的缺点：你很少能深入了解这个学科的核心思想，或是人们为何会关注这类或那类问题。我尤其想到组合学。我不太明白许多主题是怎么来的，因为每个学科都有自己的历史.....

PPP：你也会翻阅古老的书籍和论文吗？比如说，你会追溯到十五世纪吗?

BT：不会，我不会追溯那么远。我认真读过的最早作品是蒙日、庞斯列的著作，也许还有勒让德的。

PPP：如果谈到数学论文，对你的研究而言，哪些论文特别重要，让你从中学到了很多?

BT：当然是扎里斯基关于许多主题的论文：饱和、消解、局部一致化.....我从中学到了很多。接下来，我会提到劳弗关于正规二维奇点的书[178]。我读了其中的大部分。还有之前提到的马克·卡茨的书。显然，Hironaka 的论文对我影响很大。几年前，我和 Lˆe 撰写了一篇介绍 Hironaka 数学工作的文章，这些论文对我帮助很大[179]。

PPP：H 你读完了他那篇关于代数簇奇点消解的重要论文吗 in 特征 零点?

BT：某种程度上是，某种程度上不是。我没有逐行读过，但我知道它的结构，也知道每一部分讲了什么。可以说我了解它，但不能说我读过它。

PPP：你对它的了解，有一部分是因为他向你讲过吗？Hironaka 喜欢讲数学故事吗?

BT：他喜欢讲解数学。他从不解释自己是如何想到做这件事或那件事的。但他向我们讲解复解析情形下的消解证明时，解释了它与代数情形的不同之处。结合这些讲解，当然还有阅读论文原文，我对整个内容形成了连贯的认识。我试着在后来出版的那本书的序言中解释这一点[180]。为什么读那本书很有意思？因为1964年的论文尚未定稿，证明本可以简化。但要理解如何简化，最好读一读关于复解析情形的那本书。

28. What is Singularity Theory?

PPP：现在转向一个更为全局的视角，您会如何向该领域之外的数学家介绍奇点理论？这一理论主要关注什么？我们又能在何种意义上称它为一个统一的理论?

BT：基本上，这是一种几何理论，是关于形状的理论。这些形状受到约束，因为它们必须是代数的或解析的。它们不能是分形。当人们问我从事什么工作时，我有时会说，我研究的是分形几何之外的几何学。

[178]这是这本书 [51]。[179]这是这篇文章 [60]。[180]这是这本书 [2]。

PPP：嗯，这并不完全正确，因为你说过你会遇到康托尔集。你还告诉过我，你对赋值空间的分形形状十分着迷。

BT：是的，确实如此，不过这多少处于这门学科的边缘。我会说，如果它是一门研究形状的理论，那它也是一门研究投影的理论，研究那些形状的投影表现得与附近所有点都截然不同的点。我想，基本上就是这样。它也研究形状在族中的分岔。举例来说，看看任意一个立体，以及它在各个方向上的所有线性投影。参数是投影的方向，而判别式则是图像作为一种形状发生变化的方向集合。仅此一项，就涉及大量精彩的奇点理论。不过，还有许多与奇点理论密切相关的交换代数和同调代数，它们在过去几十年里也得到了发展。

PPP：一……如果现在转而面向奇点理论领域内的人，你会如何描述自你进入这个领域以来的进化这门理 自从你进入这个领域以来，发生了什么变化？

BT：它已经大大拓展了。例如，将奇点理论的思想延伸到叶状结构和动力系统中，就是其中一例。这是进化过程中的一个重要方面，五十年前还不存在。与五十年前相比，几何思想在正特征领域的拓展要大得多。关于超曲面方程判别式的思想，尤其是将其作为不变量的来源，早在19世纪就已相当明确地应用于平面曲线。Jung、随后是扎里斯基和Abhyankar将其应用拓展到了更高维度；但一般意义上的这一思想——Thom式分岔、平面截面等的结合——当时还不存在。我认为这是一个重要进展：如今我们拥有的判别式比过去多得多。与五十年前相比，现在有更多形状可供研究，我们可以称之为辅助形状。此外，分析（例如霍奇理论）与奇点理论之间的联系也取得了长足发展。另外，我会把与动机积分相关的思想也归入分析这一类。将空间的线性组合用作奇点领域中的对象，是近几十年来的一项重要进展。双利普希茨几何的发展，为我们提供了关键方法，使我们能够比以往深入得多地理解曲面奇点的实际形状与其消解的几何、其超平面截面以及其极曲线之间的关系。

零特征下的奇点消解也取得了长足发展。现在有了更简单、更具函子性的版本，以及不以爆破非奇异中心为基础、而是基于加权爆破的版本。正如我提到的，在正特征下，Cossart 和 Piltant 在三维情形中完成了一项杰作。

我们为什么要进行奇点消解？我们可以说，这是因为我们想要进行分析，而无法在奇异空间上进行分析，却可以在一个解消上进行分析。但前一种说法并不完全正确：如今我们已经能够在奇异空间上进行某些分析。此外，与五十年前相比，我们也更加清楚在解消上进行分析究竟意味着什么。

极小模型纲领发展之际，另一种研究双有理或双亚纯几何的方法也应运而生，部分动因来自复动力系统提出的问题。它在双有理映射的射影系统以及 Zariski-Riemann 流形上发展几何，尤其是交理论；后者是一个赋值空间，与 Berkovich 解析化有相似之处。我认为，这如今确实已成为一个研究主题，例如 Favre 和 Jonsson[181]，或 Gignac 和 Ruggiero[182]的研究便是如此。事实上，得益于奇点理论，无限维空间的代数几何正在发展起来，研究对象包括赋值空间、与赋值的伴随分次环相对应的空间、弧空间及其代数结构，以及以幂级数系数为坐标、用来几何化逼近定理的空间。我也参与了其中一部分工作，并对这一整体领域着迷。在《《奇点的几何与拓扑手册》》[183] 第一卷的序言中，我写道，奇点理论在数学中的地位，正如数学在科学中的地位。它与数学的各个领域都有重要联系，从数论、偏微分方程到组合学、微分几何、数学物理、代数统计学和逻辑学，等等。

[181]在 [25]。[182]在 [34]。[183] 这是本卷 [129]。

29. Extra-mathematical aspects

PPP：现在我们来谈谈你生活中一些与数学无关的方面。你很年轻时就认识了妻子 Maryvonne。你们有一对双胞胎，如今也幸福地成为了祖父母。平衡个人生活与职业生活是否很难?



Figure 15. 贝尔纳和 Maryvonne，1973年1月

BT：说来惭愧，但我觉得这对我来说很轻松，对 Maryvonne 却很难。她付出了很多牺牲，比我多得多。由于我们经常旅行，她没能充分发挥自己作为数学家的潜力，而她的潜力本来相当大。我想，孩子们年幼时，我在照顾他们方面也帮了不少忙。但大多数时候，大部分担子都压在 Maryvonne 肩上。对此我并不特别满意，但事情最终就是这样。

PPP：我想你的孩子并不觉得你忽视了他们。他们都是研究人员，虽然从事的领域与数学不同，但他们看到你做这件事时很快乐，于是也选择了从事类似的工作。

BT：也许这是我对他们的教育所作出的最大贡献，此外还有夏天带他们去我们在山间小屋度假。Maryvonne 则在许多其他方面都出了力。她想到把他们送进演艺儿童学校，因为她有一位朋友 Marilyse Beffa，她的孩子曾在那里上学。她负责他们的音乐教育、小提琴课程和体操课程。要进入那所学校，这些活动是必不可少的。那是一所公立学校，招收有许多课外活动的孩子，无论是表演、音乐、滑冰、国际象棋、马戏、体操等等。我想他们在那里很开心，身边的孩子也都在专注于某项活动。离开那所学校后，他们进入了“精英”路易大帝中学，分在不同的班级。第一学期过半时，两位班主任分别把我们叫去，对两个孩子有着同样的不满：“他们笑得太多了。”孩子们在路易大帝中学就读期间，Maryvonne 积极参与家长协会的工作。后来，她建议 Jean 去工业物理化学高等学院——一所工程师学院，他在那里如鱼得水。



FIGURE 16. 贝尔纳和 Maryvonne 大约1岁时 980



FIGURE 17. 贝尔纳与他的双胞胎 Jean 和 Anne，在 1986

PPP：你能告诉我你是怎么认识 Maryvonne 的吗?

BT：哦，我们俩都上过 Michel Mend`es-France 开设的一门课程，内容是拓扑学的混合 ，组合学 cs 和分析。

PPP：这是什么时候?

BT：在1966年秋。

PPP：这门课程是在哪里上的？

BT：在亨利·庞加莱研究所。后来，米歇尔·芒德尔布罗特组织了一次搭便车前往阿富汗的旅行。Maryvonne 和我都参加了，那次旅行让我们真正相识。

PPP：我记得你们一起去了哈佛大学，她还在那里完成了学位论文。

BT：是的，没错。

PPP：能简单介绍一下她的数学研究吗？

BT：她是肖凯的学生，研究组合拓扑学和超滤子等课题，我认为这些课题至今仍然相当有趣。我记得八十年代我们遇到了一位集合论学家金森昭宏。我们开始讨论数学，后来 Maryvonne 说了些什么，阿基就问："你知道达盖内的研究吗？"达盖内是她的娘家姓。

PPP：真不错！

BT：我很遗憾没能为她的数学事业做得更多。不过后来，孩子们占去了我们很多精力。直到退休，她一直在巴黎第七大学教授《计算机科学数学》。她很喜欢这门课，因为听众各不相同，不仅有计算机科学专业的学生，还有数学家、物理学家和化学家；而且她可以自由选择授课内容。

PPP：我们来聊聊你在数学之外的兴趣吧。比如登山、科学随笔和文学。我记得你告诉过我，你在哈佛大学时发现了斯蒂芬·杰伊·古尔德，而且非常喜欢他。

BT：我想那是在20世纪80年代。我已经读过他的一些书，书中以既具体又富有概念性的方式探讨进化。不过在那里，我看到他在科学中心举办讲座。这是我的消遣，我想是在星期三上午十一点。我下楼走了三层，斯蒂芬·杰伊·古尔德就在那里讲故事。

PPP：你和他聊过吗？

BT: 不算聊过。我只是喜欢听他给本科生讲进化的故事。 .

PPP：哪些非数学书籍对你特别重要？我记得你有时会引用迈蒙尼德的《《迷途指津》》。你为什么喜欢这本书？

BT：就像我之前告诉你的，我会翻阅一本书，直到找到一句让我感兴趣的话。当时我在图书馆里看迈蒙尼德的书，做的正是这件事。我想，那句吸引我注意的话说，时间不是上帝的一种属性。之后我便开始更仔细地阅读。我发现，作者在探讨逻辑与宗教之争时展现出了极其敏锐的头脑。我非常喜欢这一点。我喜欢的同类作者还有丰特奈尔。他同样头脑敏锐，以非常有趣的方式剖析宗教文学和传统。

PPP：你喜欢哪些文学作品？你曾多次跟我提起一些作家，我首先想到的是赫尔曼·黑塞和翁贝托·埃科。

BT：是的，尤其是黑塞，因为他的《玻璃珠游戏》给我留下了很深的印象，我读的是法语版。这部小说围绕一种游戏编织出一幅历史画卷：书中的人物都对这种玻璃珠游戏很感兴趣，并努力精通它，但游戏本身始终没有被明确说明，你永远不会知道它究竟是什么。对我来说，这描绘了黑塞心目中的文化，也体现了文化无法被定义这一点。不过在此之前，我完全出于另一种兴趣，非常喜欢大仲马。我认为《三个火枪手》中的阿托斯对我影响很大，因为他是道德层面最为复杂的人物，正直却不迂腐。我在少年早期读了这本书，它一直留在我的记忆里。我还得补充一点，我也读了很多科幻小说。

PPP：现在我们来谈谈您对山脉的热爱。



FIGURE 18. 2019年在阿尔卑斯山的贝尔纳

BT：我喜欢置身山脉之中，喜欢那里的风景、它们带来的自由，也喜欢山脉所具有的一些危险性：你必须时刻留意天气、时间和地形。

PPP：徒步时你会思考数学吗?

BT：有时会。尼采说过——尼采对我也有些影响——唯一有价值的思想，是人在行走时产生的思想。当然，他往往有些走极端，但我觉得这话有几分道理。十几岁或稍晚一些的时候，我经常独自徒步。我觉得徒步能让人进入一种特殊的心境。我不能说自己曾在徒步时产生过什么想法，但我非常喜欢徒步时冥想。当然，我也喜欢滑雪，也喜欢山区居民。无论你是在阿尔卑斯山、特内里费岛，还是喜马拉雅山脉，都是如此。这些人有些特别的品质。他们勤劳，会为子孙后代着想，表现出极强的团结精神，也能立刻信任你；但你必须尊重他们及其祖先为使山地适宜居住所付出的巨大努力。

PPP：您在喜马拉雅山脉徒步过?

BT：称之为徒步实在有些夸张。不过，1967年，Maryvonne 和我从阿富汗前往巴基斯坦北部的洪扎山谷。那时我的脚踝扭伤了，所以实际上无法徒步。但我们在那里遇到了一些人。

山地对我来说也很重要，因为它的寂静与壮丽景色。那是一种特殊的氛围，一种与世界融为一体的感觉，我非常享受。两三年前，我去了我的小屋。它离您上面展示的那张照片的拍摄地点非常近，而那一年正逢干旱。通常情况下，您能听到溪流声，但那次却听不到。我是在下午晚些时候到那里的，当时没有风，四周一片绝对的寂静，景色就像照片中一样。在山脉中，偶尔会有这样的时刻。我想，那是一份奇妙的馈赠，是在其他任何地方都无法找到的。

我非常感谢 Maryvonne 多年来与我共同努力，重建这座废弃的牧羊人小屋。它位于公路上方海拔 550 米处；那时还没有直升机吊运，我们只能靠自己的肩背和

牧羊人借给我们的驴子搬运物资。当然，我们也共同享受了夏季在那里生活的乐趣，五十多年来一直如此，并把山地生活和价值观教给我们的孩子。

PPP：我觉得你似乎也喜欢格言。我记得读博士学位期间听过一句。我抱怨说自己不懂数学。你引用了一位伟大艺术家的话，说他七八十岁时才开始理解绘画意味着什么。我不记得那位艺术家是谁了。

BT：那是马蒂斯。

PPP：啊，谢谢。那么，如今你快八十岁了，你觉得自己开始理解数学是什么了吗?

BT：很遗憾，我想我不能这么说。不过我仍在努力。

PPP：谢谢你　非常感谢你，贝尔纳，接受这次精彩的采访！

致谢。 本研究全部或部分由法国国家研究署资助，资助项目包括 SINTROP 项目（ANR-22-CE40-0014）和 CEMPI实验室（ANR-11-LABX-0007- 01）。感谢 Evelia Rosa Garc´ıa Barroso、Pedro Daniel Gonz´alez P´erez 和 Paul-Emmanuel Timotei 对本次采访先前版本提出的意见。

References

[1] Shreeram Abhyankar, *Local uniformization of algebraic surfaces over ground fields of characteristic $p \neq 0$*。《数学年刊》 **63**, 3 1956 491 526 47 第´卷第[2] ´ *Complex analytic desingularization*期（[3]），*Classification topologique universelle des singularités analytique* ´ **16**, 1974, 174 214 13 *Séminaire de Géométrie – d'après F. Pham*。Jose Manuel Aroca、平介 Hironaka、Jos´e Luis Vicente, *Complex analytic desingularization*。贝尔纳·泰西耶作序。施普林格，2018年。9，64[3] Pierre Berthelot, *Classification topologique universelle des singularités analytique* ´ **16**, 1974, 174 214 13 *Séminaire de Géométrie*，*d'après F. Pham*。载于[4] *The Hilbert function of two ideals* **53** 1957 568 575 43，Adrien Douady 与 Jean-Louis Verdier 编，法国数学会[5] ´ *Differentiability of volumes of divisors and a problem of Teissier* Asterisque, [4] *The Hilbert function of two ideals* **53** 1957 568 575 43–[6]。[5] ´ *Differentiability of volumes of divisors and a problem of Teissier* [4] *The Hilbert function of two ideals* **53** 1957 568 575 43 Phani Bhusan Bhattacharya, [6]。《剑桥哲学学会会刊》¨ (.)，[5] ´ *Differentiability of volumes of divisors and a problem of Teissier* *Équisingularité générique des familles de surfaces à singularités isolées*–[7]。Sebastien Boucksom、Charles Favre、Mattias Jonsson, ¨ ¸ *Sur la clôture intégrale d'un idéal de germes de fonctions holomorphes en un point de* $\mathbb{C}^n$。《代数几何杂志》18，第2期（2009年），279–308。31[6] Jo¨el Brian´ con、Jean-Paul Henry, *Équisingularité générique des familles de surfaces à singularités isolées*。《法国数学会通报》108，第2期（1980年），259–281。41[7] Jo ¨ ¸ *Sur la clôture intégrale d'un idéal de germes de fonctions holomorphes en un point de* $\mathbb{C}^n$ el Briancon、Henri Skoda, ´ **278** 1974 949 951 [8] ¨ ¸ 51。《巴黎科学院报告》A辑 *La trivialité topologique n'implique pas les conditions de Whitney*（ ´ **280** 6 1975 365 367 36），*Whitney b) regularity is weaker than Kuo's ratio test for real algebraic stratifications*– **45** 1979 27 34 57。[9] [10] Joel Briancon、Jean-Paul Speder, *La trivialité topologique n'implique pas les conditions de Whitney*。《巴黎科学院报告》[8] ¨ ¸ 51 A-B辑第 ´ **280** 6 1975 365 367 36 期（*Whitney b) regularity is weaker than Kuo's ratio test for real algebraic stratifications*），**45** 1979 27 34 57 –[9] [10] *Formes de Whitney et primitives relatives de formes différentielles sous-analytiques*。Hans Brodersen、David Trotman, *Whitney b) regularity is weaker than Kuo's ratio test for real algebraic stratifications*。《斯堪的纳维亚数学杂志》 **45** 1979 27 34 57（[10] *Formes de Whitney et primitives relatives de formes différentielles sous-analytiques*），15, 2, 2011 273 320 31 –[11] *Infinitely near imposed singularities and singularities of polar curves*。Jean-Paul Brasselet、B. Teissier, *Formes de Whitney et primitives relatives de formes différentielles sous-analytiques*。《亚洲数学杂志》，bf 15, 2, 2011 273 320 31 第[11] *Infinitely near imposed singularities and singularities of polar curves*期（[12]）。*Nash blowup fails to resolve singularities in dimensions four and higher* 2409 19767 48。Eduardo Casas-Alvero, *Infinitely near imposed singularities and singularities of polar curves*。《数学年刊》287卷第3期（1990年），429–454。42[12] Federico Castillo、Daniel Duarte、Maximiliano Leyton-´ Alvarez、Alvaro Liendo, *in dimensions four and higher* 2409 19767 48。arXiv：[13]。即将发表于《数学年刊》[13] Alain Chenciner, *Travaux de Thom et Mather sur la stabilité topologique* ´ **424**, ´ 1973,。布尔巴基研讨班，2月[14] – 116 140 40 *Resolution of singularities of threefolds in positive characteristic I*。[14] Vincent Cossart、Olivier Piltant, *Resolution of singularities of threefolds in positive characteristic I, II*。《代数杂志》320卷第 3 2008 1051 1082, **321** 7 2009 1836 1976 47 期（*The role of intermediate convergents in Tait's explanation for phyllotaxis*），**20** 1972 167 175 17 –[15] [16] *Teissier's problem on inequalities of nef divisors over an arbitrary field*；以及第 9 2015 31 期（*The Minkowski equality of big divisors*），[18] –[17] *On the construction of valuations and generating sequences on hypersurface singularities* **8**, 6 2021 705 748。Harold Scott MacDonald Coxeter, *The role of intermediate convergents in Tait's explanation for phyllotaxis*。《代数杂志》 **20** 1972 167 175 17（[16] *Teissier's problem on inequalities of nef divisors over an arbitrary field*），9 2015 31 – *The Minkowski equality of big divisors*。Steven Dale Cutkosky, *Teissier's problem on inequalities of nef divisors over an arbitrary field*。《代数及其应用杂志》14卷第 9 2015 31 期（*The Minkowski equality of big divisors*）。Steven Dale [17] Cutkosky, *The Minkowski equality of big divisors*。《密歇根数学杂志》74卷第3期（2024年），451–483。31[18] Steven Dale Cutkosky、Hussein Mourtada、贝尔纳·泰西耶, *On the construction of valuations and generating sequences on hypersurface singularities* **8**, 6 2021 705 748。《代数几何》第[19] *Semigroups of valuations on local rings* 期（[20]），*Semigroups of valuations on local rings II*–[21]。[19] *Semigroups of valuations on local rings* Steven Dale Cutkosky、贝尔纳·泰西耶，[20]。《密歇根数学杂志》57卷（2008年），173–193。33，49[20] Steven Dale Cutkosky、贝尔纳·泰西耶, *Semigroups of valuations on local rings II*。《美国数学杂志》132卷第5期（2010年），1223–1247。33，49[21] Michel Demazure, *Sous-groupes algébriques de rang maximum du groupe de Cremona*。《高等师范学校科学年刊》 ´（第4辑）3卷（1970年），507–588。46

[22] Bradley Dirks、Mircea Mustaţă, *Minimal exponents of hyperplane sections: a conjecture of Teissier*。《欧洲数学会杂志》 **25**, 12 2023 4813 4840 40 第[23] *On isolated singularities of surfaces which do not affect the condition of adjunction I*期（*II*），*III*– **30** 1934 453 465 483 491 19 。Patrick Du Val,[24] *On isolated singularities of surfaces which do not affect the condition of adjunction I*, *II*, *III*。《剑桥哲学学会会刊》 **30** 1934 453 465 483 491 19 （43, 65
Polarinvarianten und die Topologie von Kurvensingularitäten **147**, 1982 43 ）；[26] *Valuations and Henselization* **377** 2020 3 4, 935-[27] 及[24] *The valuative tree* **1853** 2004 35
Symplectic monodromy at radius zero and equimultiplicity of μ-constant –[28] *Bifurcations Dynkin diagrams* 。Harald Eggers, *families* **200**, 1 2024 153 299
Polarinvarianten und die Topologie von Kurvensingularitäten **147**, 1982 43 。波恩数学文集
[25] *The valuative tree* **1853** 2004 43, 65
[26] *Valuations and Henselization* **377** 2020 3 4, 935。Charles Favre、Mattias Jonsson,[27] 。《数学讲义丛书》 35
Symplectic monodromy at radius zero and equimultiplicity of μ-constant 。施普林格,[28] *Bifurcations Dynkin diagrams* 。 *families* **200**, 1 2024 153 299 43, 65
[26] *Valuations and Henselization* **377** 2020 3 4, 935Ana Belen de Felipe、贝尔纳·泰西耶,[27] 。《数学年刊》 35
Symplectic monodromy at radius zero and equimultiplicity of μ-constant ([28] *Bifurcations Dynkin diagrams* ）第 *and modality of isolated singularities*期, *families* **200**, 1 2024 153 299 94 98 12 –967。48，49[27] Javier Fern *Symplectic monodromy at radius zero and equimultiplicity of μ-constant* andez de Bobadilla、Tomasz Pelka,
[29] *Teissier interviewed by Galison* 35 *families* **200**, 1 2024 153 299
[28] *Bifurcations Dynkin diagrams* 。《数学年刊》第 *and modality of isolated singularities*期（ 1974 7 12, 94 98 12 ），[29] *Teissier interviewed by Galison* 35
+ [128] 2 –[31]。[28] *Bifurcations Dynkin diagrams* Andrei Gabrielov, *and modality of isolated singularities*,
[30] *Sur les courbes polaires d'une courbe plane réduite* 3 + [128] 2 。《泛函分析及其应用》8卷第2期（
1974 7 12, 94 98 12 ，[30] *Sur les courbes polaires d'une courbe plane réduite* 3 + [128] 2 –[31]，俄文。英文译本:
[29] *Teissier interviewed by Galison* 1974 7 12, 94 98 12 ），[30] *Sur les courbes polaires d'une courbe plane réduite* 3 43
[29] *Teissier interviewed by Galison* *The valuative tree is the projective* –[32] 。Peter Galison,
limit of Eggers-Wall trees **113** 2019 4051 4105
Concentration multi-échelles de courbure dans des fibres de Milnor。Thales Friends 随书附带的网站 [30] *Sur les courbes polaires d'une courbe plane réduite* 3 43 + [128] 2 。Evelia Rosa Garcıa
Barroso,[31] 。《伦敦数学会会刊》 *limit of Eggers-Wall trees* **113** 2019 4051 4105 *The valuative tree is the projective* ）81卷第1期（2000
年），1–28。42[31] Evelia Rosa Garc *limit of Eggers-Wall trees* 43 *The valuative tree is the projective* ıa Barroso、Pedro Daniel Gonzalez Perez、帕特里克·波佩斯库·潘普,
[32] **113** 2019 4051 4105 。RACSAM（ *Concentration multi-échelles de courbure dans des fibres de Milnor*），[33] – 43
A Eudoxian study of discriminant curves associated to normal 。[32] Evelia Rosa Garcıa Barroso、贝尔纳·泰西耶,
surface singularities 2410 21250 43
Concentration multi-échelles de courbure dans des fibres de Milnor。《瑞士数学评论》74卷第3期（1999年），398–418。42[33] Evelia Rosa Garc
A Eudoxian study of discriminant curves associated to normal ıa Barroso、帕特里克·波佩斯库·潘普,[34] 。arXiv: *Local dynamics of non-invertible maps near normal surface singularities*。
surface singularities 2410 21250 43
[34] William Gignac、Matteo Ruggiero, *Local dynamics of non-invertible maps near normal surface singularities*。美国数学会回忆录第1337号，2021年。65[35] Arturo Giles Flores、贝尔纳·泰西耶,
Local polar varieties in the geometric study of singularities。《图卢兹大学理学院学报》27卷第4期（2018年），679–775。已发表版本中，第752页第20行开头遗漏了"The main result of"这几个词。57[36] 丽贝卡·戈尔丁、贝尔纳·泰西耶,
Resolving singularities of plane analytic branches with one toric morphism。见 *Resolution of Singularities Obergurgl* **181** 2000 315 340 32, 47 ，[37] *Toric Geometry and the Semple-Nash modification* ，
108 1 2014 1 46 47 。比克豪泽数学进展丛书（），–。Pedro Daniel Gonzalez Perez、贝尔纳·泰西耶,
[38] *L'obstruction locale d'Euler et le théorème de MacPherson* ，
[39] *Principles of algebraic geometry* 1978 51 。《西班牙皇家精确、物理与自然科学院杂志 A辑：数学》
[40] *Arrangements and spreads* 1972
108 1 2014 1 46 47 第1期（），–[39] *Principles of algebraic geometry* 1978 51 。Gerardo
[38] *L'obstruction locale d'Euler et le théorème de MacPherson* 51 [40] *Arrangements and spreads* 1972
Gonzalez-Sprinberg,[41] 。高等师范学校解析几何研讨班，1978-79，Astérisque 82-83，1981年，7–32。38 51
[39] *Principles of algebraic geometry* 1978 51 Philip Griffiths、Joe Harris,[41] 。约翰·威利父子出版公司,
[40] *Arrangements and spreads* 1972 53
Rectified Homotopical Depth and Grothendieck's Conjecture *The Grothendieck* 。Branko Grunbaum,[42] 。美国数学会,
Festschrift II 311 351 1991 51
Invitation to the Mathematics of Fermat-Wiles。[41] Helmut Hamm、Lˆe Dung Trang,
Rectified Homotopical Depth and Grothendieck's Conjecture *The Grothendieck* 。载于[42] , *Invitation to the Mathematics of Fermat-Wiles*– 53
Festschrift II 311 351 1991
[43] *Geometric singularities of Feynman integrals* **112**, 065019 2025 17 。比克豪泽,[45] 。[42] Yves Hellegouarc'h,
[44] *Limits of normals Whitney conditions and the Hironaka blowing-up*
Invitation to the Mathematics of Fermat-Wiles。Leila Schneps 法译，Academic Press，2002年。15 *Invitation to the Mathematics of Fermat-Wiles*Martin Helmer、Felix Tellander,
[43] *Geometric singularities of Feynman integrals* **112**, 065019 2025 17 。《物理评论 D辑》（[45]）。Jean-Paul Georges Henry、米歇尔·梅尔，
[44] *Limits of normals Whitney conditions and the Hironaka blowing-up*
centered in a local domain to the formal completion **105**, 3 2012 571 621 48 。《纯数学专题讨论会论文集》第40卷，美国数学会，1983年，575–584。39[45] Javier Herrera Govantes、Miguel Ángel
Extending a valuation
Olalla Acosta、Mark Spivakosky 和贝尔纳·泰西耶, *centered in a local domain to the formal completion* **105**, 3 2012 571 621 48 。《伦敦数学会会刊》第[46] 期（
Extending valuations to
formal completions *Valuation theory in interaction* ），[47] – *Introduction to real-analytic sets and real-analytic maps*。[46] Javier Herrera Govantes、Miguel Angel Olalla
Extending valuations to
Acosta、Mark Spivakovsky、贝尔纳·泰西耶, *formal completions* *Valuation theory in interaction* 。载于[47]，《第二届国际赋值理论会议论文集》，塞哥维亚—埃尔埃斯科里亚尔,
2011年。Antonio Campillo、Franz-Viktor Kuhlmann 和 BernardTeissier 编。欧洲数学会，2014年，252–265。48[47] 平介 Hironaka, *Introduction to real-analytic sets and real-analytic maps*。比萨大学 Leonida Tonelli 数学研究所，1973年。
33[48] June Huh, *Combinatorial applications of the Hodge-Riemann relations*。国际数学家大会论文集，第3卷（2018年），3079–3098。14 42
[49] *Polyèdres de Newton et nombres de Milnor* **32**, 1 1976 1 31 58 Anatolii Kouchnirenko,[51] *Normal two-dimensional singularities* 1972 。
[50] *Courbure et singularités complexes* **54** 1979 6 16 64
《发明数学》第[52] *Weak simultaneous resolution for deformations of Gorenstein surface singularities*期（[53] *Strong simultaneous resolution for surface singularities* **8** 1986 207 214 37 ），
12 [54] *A theorem on the monodromy of isolated singularities* **7 8** 1973 269 275
[55] *Clôture intégrale des idéaux et équisingularité* – *Avec 7 compléments*。Remi Langevin, **17**, 4 2008 781 859 11 。《瑞士数学评论》（
[56]
Une application d'un théorème d'A'Campo à l'équisingularité），[57] – *The invariance of Milnor's number implies the invariance* 。
of the topological type 42 **98** 1976 67 78 18 64
[51] *Normal two-dimensional singularities* 1972 Henry Laufer,[52] *Weak simultaneous resolution for deformations of Gorenstein surface singularities*。普林斯顿大学出版社,
[53] *Strong simultaneous resolution for surface singularities* **8** 1986 207 214 37 。[52] *Weak simultaneous resolution for deformations of Gorenstein surface singularities*Henry Laufer,
[54] *A theorem on the monodromy of isolated singularities* **7 8** 1973 269 275
[53] *Strong simultaneous resolution for surface singularities* **8** 1986 207 214 37 。《纯数学专题讨论会论文集》第40卷，第2部分。美国数学会，1983年，1–30。37
[54] *A theorem on the monodromy of isolated singularities* **7 8** 1973 269 275
[52] *Weak simultaneous resolution for deformations of Gorenstein surface singularities*Henry Laufer,[53] *Strong simultaneous resolution for surface singularities* **8** 1986 207 214 37 。
[54] 12 *A theorem on the monodromy of isolated singularities* **7 8** 1973 269 275
《纯数学进展》（[55] *Clôture intégrale des idéaux et équisingularité* ），*Avec 7 compléments*– **17**, 4 2008 781 859 11 。Fulvio Lazzeri,
[56]
Une application d'un théorème d'A'Campo à l'équisingularité。Asterisque[57] – *The invariance of Milnor's number implies the invariance* （），–。
of the topological type 12 **98** 1976 67 78 18
[55] *Clôture intégrale des idéaux et équisingularité* Monique Lejeune-Jalabert、贝尔纳·泰西耶, *Avec 7 compléments*。 **17**, 4 2008 781 859 11 。《图卢兹大学
[56]
理学院学报》 *Une application d'un théorème d'A'Campo à l'équisingularité*第[57] 期（ *The invariance of Milnor's number implies the invariance* ），–。Lˆe Dung Trang,
of the topological type **98** 1976 67 78 18
Une application d'un théorème d'A'Campo à l'équisingularité。《数学研究》35卷第5期（1973年），403–409。12[57] Lˆe D *The invariance of Milnor's number implies the invariance*
of the topological type **98** 1976 67 78 18
ung Trang、Chakravarthi Padmanabhan Ramanujam, 。《美国数学杂志》（），–。

[58] L^e D˜ung Tr´ang，贝尔纳·泰西耶，*Variétés polaires locales et classes de Chern des variétés singulières*。《数学年刊》（ **2** **114** 3 1981 457 491 35, 38）第（）期，–。L^e Dung Trang，贝尔纳·泰西耶，*Limites d'espaces tangents en géométrie analytique*。《瑞士数学评论》[59] ˜ ´第63卷第 4 1988 540 578 31, 39（）期，–。L^e Dung Trang，贝尔纳·泰西耶，*On the mathematical work of Professor Heisuke Hironaka*。《数学科学研究[60] ˜ ´所出版物》 **44**， 2 2008 165 177 64 第（）期，–。约瑟夫·利普曼，[61] *Introduction to resolution of singularities* *Algebraic geometry (Humboldt State Univ., Arcata,* 。载于《》，–。《纯数学研讨会论文集》，美*Calif., 1974)* 187 230 **29**， 1975 49国数学学会，。[62] 约瑟夫·利普曼，贝尔纳·泰西耶，*Pseudo-rational local rings and a Theorem of Briançon-Skoda about integral closure of ideals* **28** 1981 97 116 。《密歇根数学杂志》（）–。51[63] *The μ-constant stratum is not smooth* Ignacio Luengo，。《数学发明》**90** 1987 139 152 36（），–。约翰·马瑟，。《美国数学会通报》第（）期，–。[64] *Notes on topological stability* **49** 4 2012 475 506 40[65] *The polytope algebra* **78** 1 1989 76 130 彼得·麦克马伦，。《数学进展》第（）期，–。14[66] *Invariants polaires des courbes planes* **41** 1977 103米歇尔·梅尔，。《数学发明》（），–111 42, 43。米歇尔·梅尔，，。载于[67] *Les anneaux coniques sont de Cohen-Macaulay d'après A. G. Kouchnirenko* *Séminaire sur les singularités des surfaces (1976-1977)* **777**, 295 302 1980 。《数学讲义》–。施普林格，。58[68] *Singular points of complex hypersurfaces* 1968 约翰·米尔诺，。普林斯顿大学出版社，。18, 53[69] *Teissier singularities* ´ Hussein Mourtada，Bernd Schober，。《科学院报告》数学´学**363** 8 2025 799 808 50 第（）期，–。织田忠雄，*Torus embeddings and applications*。基于与三宅克哉的合作研究。塔塔基础研究院与施普林格，[70] 1978 46。卡罗尔·帕里克，*The Unreal Life of Oscar Zariski*。学术出版社，1990年。施普林格于2008年再版。12[72] Adam[71] Parusi ´ ¸ *On Teissier's example of an equisingularity class that cannot be defined over* nski，劳伦齐乌·保内斯库，。即将在*the rationals* 51《波兰数学年刊》发表。[73] Fr´ed´eric Pham，*Déformations équisingulières des idéaux Jacobiens de courbes planes*。《利物浦奇点研讨会 II 论文集》（1969 70 218 233 **209** 1971 41 /），–。《数学讲义》。。施普林格，。Frederic Pham，。《数学进[74] ´ ´ *Singularités des systèmes différentiels de Gauss-Manin* **2**，展》系列，Birkh ¨ 1979 39 auser，。Frederic Pham，贝尔[75] ´ ´ *Lipschitz fractions of a complex analytic algebra and Zariski saturation* *Introduc-*纳·泰西耶，。载于*tion to Lipschitz geometry of singularities* **2280**, 309 337 2020 ，《数学讲义》–。施普林格，。首部出版的手稿， 1969， 7, 8 由瑙法勒·布沙雷卜从法语译出。帕特里克·波佩斯库-潘普，。[76] *Introduction to Jung's method of resolution of singularities* *Topology of Algebraic Varieties*载于*and Singularities* 401 432 **538**， 2011 49 ，–。《当代数学》，美国数学会，。[77]David Rees，罗德尼·夏普，*On a theorem of B. Teissier on multiplicities of ideals in local rings*。《伦敦数学学会杂志》 **18** 3 1978 449 463 44 第（）[78]期，-。彼得·罗凯特，*The Riemann hypothesis in characteristic p in historical perspective*。《数学讲义》2222，施普林格， 2018 16。Marie[79] ´ ` ´Helene Schwartz， *Classes de Chern des ensembles analytiques* ´ ´ 2000 38。《数学新知》，[80] ´ *Un résultat sur la monodromie* **13** 1971 90 96Hermann，。马科斯·塞巴斯蒂亚尼，Rene Thom，。《数学发明》（），–。40[81] *A bouquet theorem for the Milnor fiber* **4** 1995 51 66 迪尔克·西尔斯马，。《代数几何杂志》（），–。54[82] *Topology on the spaces of orderings of groups* **36** 2004亚当·C·西科拉，。《伦敦数学学会通报》（），519 526 63 –。亨利·约翰·斯蒂芬·史密斯，。《伦敦数学学[83] *On the Higher Singularities of Plane Curves* **6** 1875 153会论文集》（），–182。42，43[84] *The number of faces of a simplicial convex polytope* **35** 1980 236 238 46 理查德·斯坦利，。[85] *Polar curves*《数学进展》（），–。约瑟夫·斯滕布林克，史蒂文·M·扎克，*Resolution of singularities and the filtered mixed Hodge structure on the vanishing cohomology* *Singularities representations of algebras and vector bundles* 。载于，，，Gert-Martin Greuel 和 G¨unther Trautmann 编。《数学讲义》1273，178–202。施普林格，1987年。41[86] 贝尔纳·泰西耶，*Conformations à l'aide des singularités : d'un point de vue des déformations* *Le Crible de Eratosthène* 27 1973 《Delange-Pisot-Poitou 研讨会》7（1965-1966）第2期，第11讲，13页。5[87] 贝尔纳·泰西耶，*de* ` 02532495 。论文，巴黎第七大学，1月。可见于 https://hal.science/tel- 。33[88] *Cycles évanescents sections planes et conditions de Whitney* *Singularités à Cargèse (Rencontre*贝尔纳·泰西耶，，。载于*Singularités en Géométrie Analytique, Institut d'Études Scientifiques de Cargèse, 1972)*, 285–362。《Astérisque》7-8，法国数学会，1973年。11，12，16，19，34，35，36，43，56，57[89] 贝尔纳·泰西耶，*Déformations à type topologique constant I et II*。载于 *Quelques problèmes de modules (Séminaire de Géométrie Analytique* *Paris* ´ **16** 1974 215 249 13, 36, 37 *, École Normale Supérieure, , 1971–1972),*[90] *Introduction to equisingularity problems*《Astérisque》（），–。贝尔纳·泰西耶，。载于*Algebraic geometry (Humboldt State Univ., Arcata, Calif.,* , –。美国数学会，。*1974)* 593 632 1975 34, 36[91] 贝尔纳·泰西耶，*Variétés polaires. I. Invariants polaires des singularités d'hypersurfaces*。《数学发明》40（1977），第 3, 267 292 13, 40, 57, 62 –期。贝尔纳·泰西耶，[92] *The hunting of invariants in the geometry of discriminants* *Real and complex singularities (Proc.* 。载于，–。Sijthoff and Noordhoff，。*Ninth Nordic Summer School, NAVF Sympos. Math., Oslo, 1976)* 565 678 1977 36[93] *Sur une inégalité à la Minkowski pour les multiplicités* 贝尔纳·泰西耶，。David Eisenbud、哈罗德·I·莱文的 *An algebraic formula for the degree of a C^∞ map germ*一文之附录。《数学年刊》（2）106（1977），第1期，19–44。14，44

[94] 贝尔纳·泰西耶, *On a Minkowski-type inequality for multiplicities, II*。载于 *C. P. Ramanujam – a tribute*, 347–361, 塔塔基础研究院数学研究丛书 **8**, 1978 44, 45 施普林格, 。贝尔纳·泰西耶, 。《RIMS 奇点会议论文集》, 京都, 1978年4月。另见 [95] *Jacobian Newton polyhedra and equisingularity* *Polyèdre de Newton jacobien et équisingularité*。载于 *Séminaire de Singularités (Paris, 1976/1977)*, 193–221, 巴黎第七大学数学出版物, 1980年。34, 41[96] 贝尔纳·泰西耶, *Résolution simultanée, I. Familles de courbes*。载于 *Séminaire sur les Singularités des Surfaces*。《数学讲义丛书》 **777** 1980, 71 81 36, 37 。施普林格, – 。贝尔纳·泰西耶, , *II. Résolution simultanée et cycles évanescents*。载于 [97] *Résolution simultanée* *Séminaire sur les Singularités des Surfaces* **777** 1980, 82 146 。《数学讲义丛书》。。施普林格, – 。[98] *Variétés toriques et polytopes* ´ **565**, 贝尔纳 · 泰西耶。布尔巴基研讨班, 11 月 1980, 71 84 46 – 。贝尔纳·泰西耶。载于, *Nancy 1980*, 南锡埃 [99] *Variétés polaires locales: quelques résultats* *Conférence on Complex Analysis* 利·卡当研究所出版物 **3** 1981 33 55 34, 39 (), – 。贝尔纳·泰西耶, *Variétés polaires. II. Multiplicités polaires*, [100] *sections planes et conditions de Whitney* *Algebraic* 。载于, – 。《数学讲义》施普林格, 。 *geometry (La Rábida, 1981)* 314 491 **961**, 1982 14, 15, 31, 35, 39, 41, 57, 62 [101] *Bonnesen-type inequalities in algebraic geometry. I. Introduction to the problem* 贝尔纳·泰西耶。载于 *Seminar on Differential Geometry* 85 105, **102**, 1982 , – 《数学年刊研究丛书》。普林斯 31, 43 顿大学出版社, 。[102] *Sur trois questions de finitude en géométrie analytique réelle* 贝尔纳·泰西耶。《数学学报》151第 1-2期（1983年）, 39–48。弗朗索瓦·特雷夫斯文章 *On the local solvability and the local integrability of systems of vector fields*的附录。31[103] 贝尔纳·泰西耶, *Sur la classification des singularités des espaces analytiques complexes* *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* 1, 2 1983 763 781, 1984 57 。载于, 卷（华沙, ）, – PWN, 华沙, 。[104] *Sur la triangulation des morphismes sous-analytiques* 贝尔纳·泰西耶。《IHÉS 数学出版 物》70（1989）, 169–198。31[105] 贝尔纳·泰西耶, *Un exemple de classe d'équisingularité irrationnelle*。《巴黎科学院报告》I辑数学311第2期（ 1990 111 113 51 ）, – 。贝尔纳·泰西耶, *Apparent contours from Monge to Todd*。载于 *1830–1930: a century of geometry (Paris, 1989)*, 55–62, [106] 《物理学讲义》402, 施普林格, 1992年。51[107] 贝尔纳·泰西耶, *A bouquet of bouquets for a birthday* *Topological methods in modern mathematics (Stony Brook,* 。载于, – Publish or Perish, 。 *NY, 1991)* 93 122, 1993 51 [108] *Valuations deformations* 贝尔纳·泰西耶, , , *and toric geometry* *Valuation theory and its applications Vol. II* 。载于, , – 。Fields Institute *(Saskatoon, SK, 1999)* 361 459 **33**, 2003 47, 48, 57 Communications, 美国数学会, 。[109] *Protomathematics perception and the meaning of mathematical objets* 贝尔纳·泰西耶, 。 载于 *Images and Reasoning*。Pierre Grialou、Giuseppe Longo 和 Mitsuhiro Okada 编, 庆应义塾大学心智综合研究中心, 东京, 2005年。54[110] 贝尔纳·泰 西耶, *Géométrie et cognition : l'exemple du continu*。载于 *Ouvrir la logique au monde*, CNRS-LIGC 数学学校会议论文集 *Logique et interaction ; vers une géométrie du cognitif*。瑟里西, 2006年9月, 由Jean-Baptiste Joinet和Samuel Tron ˛ 2009, 145 167 54, 55 con主持。Hermann, – 。贝尔纳·泰西耶, [111] *Overweight deformations of affine toric varieties and local uniformization* *Valuation Theory in* 。载于, 第二届国际赋值理论会议论 *Interaction* 2011 文集, 墨哥维亚—埃斯科里亚尔。Antonio Campillo、Franz-Viktor Kuhlmann 和贝尔纳·泰西耶编, 欧洲数学会, 2014年, 252–265。47, 48[112] 贝尔纳·泰西 耶, *Two points of the boundary of toric geometry* *Singularities Algebraic Geometry Commutative* 。载于, , , – 。Gert-Martin *Algebra and Related Topics. Festschrift for Antonio Campillo on the occasion of his 65 th Birthday* 107 117 Greuel、Luis Narv 2018 63 aez Macarro 和 Sebastia [113] Xambo-Descamp 编, 施普林格, 。贝尔纳·泰西耶, *Some ideas in need of clarification in resolution of singularities and the geometry of discriminants*。 载于 *Mathematics Going Forward*, 《数学讲义》2313, 29–41。施普林格, 2023年。18, 47 [114] **65** 2014 61 66 58 Jenia Tevelev, *On a question of B. Teissier*。《数学汇刊》 [115] ´ *On some ideals of differentiable functions* **19** (), – 。Rene Thom, 。《日本数学会杂志》(1967 255 259 *Œuvre*) - 。另载于, 法国数学会, – 。后附 *mathématique de René Thom II* 2019, 261 265 贝尔纳·泰西耶的评论。18[116] Ren´e Thom, *Sur la monodromie associée à un point critique isolé d'une fonction holomorphe*。约1972年的手稿。载于 *Œuvre mathématique de René Thom II*, 法国数学会, 2019年, 603–614。后附贝尔纳·泰西耶的评论。16 [117] ˘ *Bouquet decomposition of the Milnor fibre* **35**, 1 1996 227 241 54 Mihai Tibar, 。《拓扑学》第 () 期, – 。John [118] *The geometrical invariants of algebraic loci* 2 Arthur Todd, 。《伦敦数学学会论文集》() **42** 1937 127 138 52 () – John Arthur Todd, 。 [119] *The arithmetical invariants of algebraic loci* 2 **43** 1937 190 225 《伦敦数学学会论文集》() () – 。 52 [120] *Analytic and Algebraic Ideas: How to Profit from Their Complementarity* Alain Yger。载于: Sabadini, I., Struppa, D.C., Walnut, D.F.（编）《调和分析、信号处理与复杂性》。数学进展丛书, Birkh¨auser, 波士顿, 第 238 2005 15 28 51 卷 () – 。奥斯卡·扎里斯基, *Equisingular points on algebraic varieties*。高等数学国家研究所研讨会, 1962-63年。重印于 [121] *Collected papers of Oscar Zariski*, 第IV卷, M.I.T.出版社, 1979年, 17–30。58[122] 奥斯卡·扎里斯基, *General theory of saturation and of saturated local rings I: saturation of complete local domains of dimension one having arbitrary coefficient fields (of characteristic zero)* **93** 3 1971 。《美国数学杂志》第 () 期, 573–648。7

[123] 奥斯卡·扎里斯基，*General theory of saturation and of saturated local rings II: saturated local rings of dimension* 1。《美国数学杂志》**93**，4 1971 872 964 7 第（）期，–。奥斯卡·扎里斯基，*Some open questions in the theory of singularities*。[124]
《美国数学会通报》77（1971），481–491。35[125] 奥斯卡·扎里斯基，
General theory of saturation and of saturated local rings III: saturation in arbitrary dimension and, in particular saturation of algebroid hypersurfaces **97** 2 1975 415 502 7 ，。《美国数学杂志》第（）期，。
[126] *Singularités à Cargèse (Rencontre Singularités en Géométrie Analytique, Institut d'Études Scientifiques de Cargèse, 1972)* ´ **7 8**, 1973 18 。法国数学会《Asterisque》，。[127] *Séminaire sur les singularités des surfaces*。于1976–1977年在巴黎综合理工学院数学中心举行。由Michel Demazure、亨利·查尔斯·平克姆和贝尔纳·泰西耶编辑。数学讲义丛书第777卷，施普林格，1980年。19、53、58
[128] *Circles disturbed: The interplay of mathematics and narrative*。由Apostolos Doxiadis和Barry Mazur编辑。普林斯顿大学出版社，2012 23 71 。´e Seade、Lˆe D˜ung Tr´ang、何塞·路易斯·西斯内罗斯·莫利纳编辑。施普林格，
[129] *Handbook of geometry and topology of singularities I* 2020 65 。由瓦尔特·诺伊曼和安妮·皮雄编辑。数学讲义丛书第2280卷，施普林格，2020年。
[130] *Introduction to Lipschitz geometry of singularities*
8[131] *Essays in Geometry, Dedicated to Norbert A'Campo*。《IRMA数学与理论物理讲座》。由阿萨纳斯·帕帕多普洛斯编辑，EMS出版社，2023年。63

作者地址： P. Popescu-Pampu，里尔大学，法国国家科学研究中心，UMR 8524 - Paul Painlev´é实验室，法国，F-59000 里尔。*Email address:* patrick.popescu-pampu@univ-lille.fr