超越 B-除子 I——与流的对应

MINGCHEN XIA

摘要。我们研究紧致 Kähler 流形上的超越 b-除子。我们建立了闭正流与数值有效 b-除子之间的对应关系。作为应用，我们建立了数值有效 b-除子的交理论，从而回答了 Dang–Favre 提出的问题。

arXiv:2603.14348v1 [math.AG] 15 Mar 2026

目录

1. 引言 1
2. 预备知识 3
3. 混合体积 8
4. 超越 b-除子 15
5. 交理论 20
6. b-除子的光滑拉回 22
7. b-除子的迹算子 24
参考文献 27

1. 引言

本文研究超越 b-除子。特别地，我们将 [DF22] 所发展的代数 b-除子交理论推广到超越情形。

设 X 是一个维数为 n 的连通紧致 Kähler 流形。回顾一下，代数 b-除子（类）是一个赋值 $(\pi\colon Y \to X) \mapsto \mathbb{D}_Y \in \mathrm{NS}^1(Y)_{\mathbb{R}}$（由 Y 的 Néron–Severi 群张成的实向量空间），其中 π 遍历 X 的所有修改。这些数据假定在推前下相容。一个例子是所谓的 Cartier b-除子：从一个修改 $\pi\colon Y \to X$ 以及 Y 上的一个类 α 出发，对于任何支配 π 的修改 $Z \to X$，$\mathbb{D}_Z$ 的取值为 α 到 Z 的拉回。若 α 可取为数值有效，则称该 Cartier b-除子为数值有效。一般而言，若一个代数 b-除子可由数值有效 Cartier b-除子逼近，则称其为数值有效。

b-除子在推广除子的同时，也纳入了双亚纯扭曲。理解它们的交理论具有重要意义。当 X 是射影的时，Dang–Favre [DF22] 建立了数值有效 b-除子的交理论，并将其应用于动力系统 [DF21]和 K-稳定性 [Xia22]。粗略地说，他们证明，在这种情况下，数值有效 b-除子总能由数值有效 Cartier b-除子的递减序列逼近。这个结果将一般的交理论归约为 Cartier b-除子的交理论，而后者本质上与 [Ful98]中的经典交理论相同。

在同一篇论文中，Dang–Favre 提出一个问题：能否为超越 b-除子建立类似的理论，也就是说，当 X 不一定是射影的，且 $\mathbb{D}_Y$仅仅是 $\mathrm{H}^{1,1}(Y, \mathbb{R})$中的类时，是否仍能建立这样的理论？本文给出了肯定的回答。即使 X 是射影的，我们的理论也是新的。

证明的思路已包含在作者先前的论文中 [Xia22; Xia24]。此处我们暂且只讨论代数情形。在这种情形下，这两篇论文为 Dang–Favre 交理论提供了一种解析方法。设 $L_1, \dots, L_n$ 是 X上的大线丛。那么，对于 $h_1, \dots, h_n$ 上的任意奇异 Hermitian 度量 $L_1, \dots, L_n$，我们可以利用 Siu 分解构造自然的代数数值有效 b-除子 $\mathbb{D}_1, \dots, \mathbb{D}_n$，它们定义在 X 上。这些论文中的一个关键

这些论文中的结果表明， $\mathbb{D}_1,\dots,\mathbb{D}_n$ 的 Dang–Favre交数与 $h_1,\dots,h_n$的混合体积相同。

反过来，忽略一些技术细节，任意数值有效 b-除子本质上都源自流的 Siu 分解。在代数情形中，这一点早已为人所知，参见 [BJ22，定理 6。40] 以及 [DXZ25，定理 1。1], 数值有效 b-除子与（非除子型）流的$\mathcal{I}$-等价类，都与同一类齐次非阿基米德度量构成双射。我们证明了超越版本：

定理 1.1。存在一个自然映射 $\mathbb{D}$ （通过 *Siu* 分解），将每个闭正$(1,1)$-流 T映射到 X上的数值有效 *b*-除子 $\mathbb{D}(T)$，其定义在 X上。

设 α 是 X 上的一个修正*nef*上同调类， $\mathbb{D}$ 是定义在 X 上的一个 *nef* 且大 *b*-除子，且满足$\mathbb{D}_X=\alpha$，则存在一个非除子型的闭正 $(1,1)$-流 T，属于 α，且满足 $\mathbb{D}(T)=\mathbb{D}$（也就是说，沿 X上任意素除子的一般 *Lelong* 数均为零）。

参见定义4.2 和定义 4.6，以了解 nef 且大的 b-除子的精确定义。修正nef上同调类的概念见第2.1节。关于 $\mathbb{D}$的精确定义见第4.2节。

作者不清楚当 $\mathbb{D}$ 仅为数值有效但非大时，是否仍然成立。

流 T 远非唯一。非唯一性的程度由下一个结果给出。首先回忆一下，若两个闭的正$(1,1)$-流 T和 T'在 X 上满足$\mathcal{I}$-等价，即它们处处具有相同的勒隆数，并且在对 X进行任意双有理修改的拉回下仍具有相同的勒隆数，则称二者等价。

定理 1.2。 设 α 是 X上的修正*nef*上同调类。 α 中具有正体积的两个非除子型闭正 $(1,1)$-流，通过 $\mathbb{D}$ 对应于同一个数值有效 *b*-除子，当且仅当它们是 *I*-等价的。

换言之，以下集合之间存在自然双射 $\mathbb{D}$ ：
(1) α 上具有正体积的非除子型闭正(1,1)-流的 *I*-等价类集合；*(2)* X 上具有 $\mathbb{D}_X=\alpha$的 *nef* 且大 *b*-除子 $\mathbb{D}$ 的集合。

上述两个定理对应于定理 4.11。此处 α 的修正 nef 性并非强约束，因为一般的伪有效类总能通过除子Zariski分解分解为修正 nef 部分和固定部分，参见 [Bou02]。

尽管定理 1.2 与 [Tru24，命题 3.1], 有些相似，但这些定理的内容截然不同。事实上，Trusiani 研究的是可能具有无穷多个分量的 b-除子，且未将其转到数值等价类。本文的一个关键发现是，数值等价类足以完全确定流在模去$\mathcal{I}$-等价后的奇点，这也说明了我们定理表述的简洁性。与此同时，这些定理表明，作者在 [Xia24]中提出的增广 b-除子概念并无必要。

作为 定理 1.2 和 Demailly 的逼近定理的一个简单推论，我们可得 [DF22，定理 A]的一个类似结果。

推论 1.3 (推论 4.15)。 设 $\mathbb{D}$ 是 X上的一个数值有效 *b*-除子。那么存在一个递减序列，其元素是 X 上的数值有效且大 *Cartier b*-除子，并以 $\mathbb{D}$为极限。

根据 推论 1.3，原则上可以重复 [DF22] 中的论证，建立数值有效 b-除子的交理论——将数值有效 b-除子的一般交理论归约为 Cartier b-除子的交理论，而后者基本上已为人所知。

但我们选择在第 5 节采用一种略有不同的方法：我们将数值有效 b-除子的交数定义为相应流的混合解析体积。如今，后一理论已经相当成熟，因此这似乎是建立交积性质最有效的方法。

因此，推论 1.3 在本文中并未发挥重要作用，因为 Demailly 的逼近已是流的解析交理论所内含的特性。

这里有一个技术上的微妙之处：解析理论至少有两种候选方案——$\mathcal{I}$-体积，由 [DX24b提出；DX22]以及 Cao 意义下的混合体积 [Cao14]。我们将在第 3 节证明这两种理论是一致的，并且满足所需的性质。

作者在 2020 年撰写 [Xia22] 时，便已想到运用解析方法扩展 Dang–Favre 理论。阻碍这篇论文问世的是解析理论发展缓慢[1]。必要的工具历经多年才在 [DDNL21b；DX22；DX24b；Xia24；Xia25b] 中逐步发展完善，并在作者的著作 [Xia]中得到系统总结和拓展。

定理 1.2 也阐明了代数理论。强大的解析工具也可以转化回代数理论，即使在纯代数理论中也能带来新的见解。例如，在 第 6 节 和 第 7 节中，我们将研究数值有效 b-除子的两种函子性运算：沿光滑态射可以拉回数值有效 b-除子；给定一个子簇，在较弱的假设下可以限制数值有效 b-除子。借助 Boucksom–Jonsson 的非阿基米德度量理论，这两种运算在代数情形下基本上已为人所知。我们的方法直接以 b-除子本身来定义这些运算，更为简洁。这似乎并非仅仅出于审美考虑；作者认为，这是攻克 Collins–Tosatti 猜想 [CT22]的重要一步。此外，迹算子在单调性定理 [Xia25c]中发挥着关键作用。

最后，本文中的所有结果同样适用于 Fujiki 类 $\mathcal{C}$ 中的流形。不过为简便起见，我们始终将讨论限制在凯勒流形上。

进一步的方向。 关于交理论的进一步发展及其在多重势理论中的应用，请参阅后续论文 [Xia25c]。

我们的交理论在动力系统中有直接应用，正如 Dang–Favre 的代数理论在 [DF21]中所展现的那样。

在 [DF22], 中，Dang–Favre 提出，定义交理论可能依赖于 [BDPP13]中提出的超越 Morse 不等式猜想。我们期望反过来，我们的理论也应有助于理解这一猜想。退一步说，在尝试理解一个与非 Kähler 轨迹有关的结果时，我们的理论也应有所帮助；该结果已在 [CT22]中提出猜想。

对于超越的数值有效 b-除子，也存在 Okounkov 体的概念，正如 [Xia第 11 节中研究的代数情形一样。3]在 $\mathbb{C}$上，该理论借助解析理论已经得到了充分理解。然而，对于一般底域上的 Dang–Favre 或 Boucksom–Jonsson 理论，如何得到类似结果尚不清楚。

编者按。 本文的早期版本自 2025 年初起可在作者的个人网页上获取。投稿版本以作者专著的初版为依据[Xia]。该专著于 2025 年 9 月进行了全面修订，本文证明的部分结果也在书中重现。除为反映该书的修订而作的细微修改外，本文当前版本与投稿版本几乎完全相同。

致谢。 作者谨向 Nicholas McCleerey、Charles Favre 和 Antonio Trusiani 致谢，感谢他们对论文草稿提出的意见。部分工作是在作者于 2024年访问云南师范大学期间完成的，作者谨感谢杨志鹏教授的热情接待，以及云南省现代分析数学及其应用重点实验室（编号：202302AN360007）的支撑。作者最初获得克努特和爱丽丝·瓦伦堡基金会 KAW 2024.0273 的资助，随后获得中国国家重点研发计划 2025YFA1018200 的资助。

2. 预备知识

设 X 是一个维数为 n 的连通紧致 Kähler 流形。

2.1. 修改与锥。 在本文中，我们以一种非常非标准的方式使用修改 一词。

[1]和法国 出了名的办事迟缓的政府，使作者在 20 年的大部分时间里无家可归

定义 2.1。 X 的修改 是一个双有理亚纯映射 $\pi\colon Y \to X$，它是有限次由光滑中心的爆破复合而成。

我们称修改 $\pi'\colon Z \to X$ 支配另一个修改 $\pi\colon Y \to X$，如果存在一个态射$g\colon Z \to Y$ 使下图交换：

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\quad g \quad} & Y \\ & {\scriptstyle \pi'}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \pi} & \\ & X. & \end{array} \tag{2.1}$$

注意， π 必然是射影的，而 Y 始终是凯勒流形。

X 的修改连同支配关系构成一个有向集 Modif(X)。给定类 α， $\beta \in \mathrm{H}^{1,1}(X,\ \mathbb{R})$，我们称 $\alpha \leq \beta$，如果 $\beta - \alpha$ 是伪有效的。

命题 2.2。 设 $\pi\colon\ Y \to X$ 是一次爆破，其中心是余维至少为2 的连通光滑子流形，例外除子为 E。那么存在一个自然的同一

$$\mathrm{H}^{1,1}(Y,\mathbb{R}) = \mathrm{H}^{1,1}(X,\mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}\{E\}. \tag{2.2}$$

参见 [RYY19] ，其中给出了一个更一般得多的结果。一般而言， Y 的伪有效锥没有任何简单的描述。

固定 ω on X 上的一个参考凯勒形式。回顾一下，如果对于任意 $\epsilon > 0$，我们都可以找到一个闭的 (1，1)-流 $T \in \alpha$，使得某个上同调类 $\alpha \in \mathrm{H}^{1,1}(X,\ \mathbb{R})$ 是修正 *nef*（或可动）的：

(1) $T + \epsilon\omega \geq 0$；(2) 对 X 上任意素除子 D， $\nu($ $T + \epsilon\omega,\ D) = 0$。

这个定义与 ω 的选取无关。这里， $\nu(\bullet,\ D)$ 表示沿 D 的一般 Lelong 数。

这些类在*Boucksom* 的论文中被称为余维 1的 nef 类 [Bou02], ，并且是在该文中首次引入的。修正 nef 类在$\mathrm{H}^{1,1}(X,\ \mathbb{R})$中构成一个闭凸锥。注意，修正 nef 类必然是伪有效的。nef 类显然是修正 nef 的。

回顾一下 [Bou02第 2.1 节中定义的上同调类的重数。3]。

定义 2.3. 设 $\alpha \in \mathrm{H}^{1,1}(X,\ \mathbb{R})$ 是一个伪有效类，且 D 是 X上的一个素除子。我们将勒隆数 $\nu(\alpha,\ D)$ 定义如下：

(1) 当 α 是大类时，对任意具有最小奇异性的闭正 (1，1)-流 $T \in \alpha$，定义 $\nu(\alpha,\ D) = \nu(T,\ D)$（也就是说， $T \in \alpha$ 是 α 中的一个流，其奇异性不强于 α中的任何流）。(2) 一般情况下，定义

$$\nu(\alpha, D) \coloneqq \lim_{\epsilon \to 0+} \nu(\alpha + \epsilon\{\omega\}, D).$$

当 α 是大类时，(2) 与 (1) 相容，且定义与 ω的选择无关。根据定义，伪有效类 α 是修正 nef 的，当且仅当对 X上的所有素除子 D ，都有 $\nu(\alpha,\ D) = 0$。

我们来回顾一下若干锥在修改下的行为。

命题 2.4. 设 $\pi\colon\ Y \to X$ 是从凯勒流形 Y出发的一个真双亚纯态射。

(1) 对于任意 *nef* 类 $\alpha \in \mathrm{H}^{1,1}(X,\mathbb{R})$， $\pi^*\alpha$ 是数值有效的。*(2)* 对于任意修正 *nef* 类 $\beta \in \mathrm{H}^{1,1}(Y,\mathbb{R})$， $\pi_*\beta$ 是修正 *nef*。*(3)* 对于任意大类 $\alpha \in \mathrm{H}^{1,1}(X,\mathbb{R})$， $\pi^*\alpha$ 是大类。此外，体积 $\pi^*\alpha =$体积 α。*(4)* 对于任意大类 $\beta \in \mathrm{H}^{1,1}(Y,\mathbb{R})$， $\pi_*\beta$ 是大类。此外，体积 $\pi_*\beta \geq$ 体积 β。

证明。 只有(2)需要证明。固定一个凯勒类 γ。对于 $\epsilon \in (0,1)$，用 $\beta + \epsilon\gamma$ 替换 β 后，我们立即归结为 β 也是大类的情形。设 T （分别地， S）是 $\pi_*\beta$ （分别地，在 β）中具有最小奇异性的流，且 D 是 X上的一个素除子，只需证明

$$\nu(T, D) = 0,$$

根据 引理 2.7 下文所述， $\nu(\pi_*S, D) = 0$，因此我们的断言得证。 □

设 T 是 X 上的闭正 (1，1)-流。于是，我们将 T 的正则部分 Reg T定义为相对于 Siu 分解而言的 T 的正则部分。换言之，我们写作

$$T = \operatorname{Reg} T + \sum_i c_i [E_i], \tag{2.3}$$

其中， E_i 是 X 上的一个可数素除子集合，且 $c_i = \nu(T,\ E_i) > 0$；正则部分 Reg T是一个闭正 (1，1)-流，其沿 X 上每个素除子的一般 Lelong 数均为 0。

定义 2.5。 若 X 上的闭正 (1，1)-流 T满足 $T = \operatorname{Reg} T$（相应地，Reg $T = 0$），则称其为非除子型 （相应地，除子型）。

非除子流的上同调类总是修正 nef。反过来，具有最小奇异性的修正 nef大 类中的流总是非除子型。

还有一个密切相关的概念，由 [McC21] 引入：

定义 2.6。 若 X 上的闭正 (1，1)-流 S 满足 $S = \langle S \rangle$ （相应地，$\langle S \rangle = 0$），则称其为非极化 （相应地，具有极化支撑）。

此处 $\langle S \rangle$ 表示 S的非极化极性部分，也就是 S自身的非极性乘积，按照 [BEGZ10]的意义。

显然，除子型流必然是多重支撑的，而非极化流必然是非除子型的。但一般而言，这些概念并不等价。不过，在$\mathcal{I}$-良奇点这一类中，这些概念最终证明是等价的。由于本文不需要后一个结果，我们省略其证明。

引理 2.7. 设 $\pi\colon Y \to X$ 是从凯勒流形 Y出发的真双亚纯态射。设 T 是 Y上的非除子流，则 $\pi_* T$ 是非除子型的。

反过来，若 S 是 X上的非除子流，则 $\pi^* S$ 可能具有除子部分。作为一个简单例子，考虑 S 在 $\mathbb{P}^2$上，其在 $0 \in \mathbb{C}^2_{z,w}$ 附近的局部势看起来像 $\log(|z|^2 + |w|^2)$。

证明。设 D 是 X上的一个素除子。由 Zariski 主定理（[Dem85，定理 1。7]）可知， D 不包含于 π的例外轨迹中。设 D' 是 D的严格变换。由 Siu 半连续性定理，我们有

$$\nu(\pi_* T, D) = \nu(T, D') = 0.$$

因此， $\pi_* T$ 是非除子型的。 □

2.2. **拟多重次调和函数**。我们首先回顾 P 和 $\mathcal{I}$-等价的概念。后者由 [DX22] 基于 [BFJ08]引入。前者由 [Xia] 基于 [RWN14]引入。

定义 2.8。设 φ， ψ 是 X上的拟拟凸函数。若存在 X 上的闭光滑实 (1，1)-形式 θ，使得 φ，$\psi \in \operatorname{PSH}(X,\ \theta)_{>0}$ 且，我们称 $\varphi \sim_P \psi$ （分别为 $\varphi \preceq_P \psi$）

$$P_\theta[\varphi] = P_\theta[\psi] \quad (\text{resp.} P_\theta[\varphi] \leq P_\theta[\psi]).$$

这里，$\operatorname{PSH}(X, \theta)$ 表示 X 上的 θ-拟凸函数空间，而 $\operatorname{PSH}(X, \theta)_{>0}$ 表示由满足 $\int_X \theta_\varphi^n > 0$、且具有 $\theta_\varphi = \theta + \mathrm{dd^c}\varphi$ 的 $\varphi \in \operatorname{PSH}(X, \theta)$ 构成的子集。这里及下文中，Monge–Ampère 型乘积 θ_φ^n 始终理解为 [BT87; GZ07; BEGZ10] 中的非多重极化意义。包络 P_θ 定义如下：

$$P_\theta[\varphi] \coloneqq \sup_{C \in \mathbb{R}}{}^*(\varphi + C) \wedge 0,$$

where $(\varphi + C) \wedge 0$ 是 $\operatorname{PSH}(X, \theta)$ 中同时受 $\varphi + C$ 和支配的最大元 0.

给定 X 上一个闭的光滑实 (1,1)-形式 θ，使得 $\varphi, \psi \in \operatorname{PSH}(X, \theta)$，若 $\varphi \sim_P \psi$ （分别为 $\varphi \preceq_P \psi$），我们也称 $\theta_\varphi \sim_P \theta_\psi$（分别为 $\theta_\varphi \preceq_P \theta_\psi$）。同样的约定也适用于稍后引入的 $\mathcal{I}$-偏序。

P-偏序的主要价值在于以下单调性定理 .

定理 2.9. 设 $\theta_1, \dots, \theta_n$ 是 X 上闭的实光滑$(1,1)$-形式。对 $i = 1, \dots, n$，令 $\varphi_i, \psi_i \in$ 拟次调和(X, θ_i)。假设对每个 $i = 1, \dots, n$ 都有 $\varphi_i \preceq_P \psi_i$。那么

$$\int_X \theta_{1,\varphi_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{n,\varphi_n} \leq \int_X \theta_{1,\psi_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{n,\psi_n}.$$

此结果是 Witt Nyström 的单调性定理 [WN19；DDNL18]。参见 [Xia，命题 6.1。4]的证明。

定义 2.10。 设 φ，ψ 是 X 上的拟多重次调和函数。我们称 $\varphi \sim_{\mathcal{I}} \psi$ （分别称 $\varphi \preceq_{\mathcal{I}} \psi$）当且仅当对所有实数 $\lambda > 0$，都有 $\mathcal{I}(\lambda\varphi) = \mathcal{I}(\lambda\psi)$（分别有 $\mathcal{I}(\lambda\varphi) \subseteq \mathcal{I}(\lambda\psi)$）。

这里 $\mathcal{I}$ 表示 Nadel 意义下的乘子理想层。

若 θ 是闭的光滑实 (1，1)-形式，且 φ，$\psi \in$ 属于 PSH(X, θ)，则 $\varphi \preceq_{\mathcal{I}} \psi$ 当且仅当

$$P_\theta[\varphi]_{\mathcal{I}} \leq P_\theta[\psi]_{\mathcal{I}},$$

其中

$$P_\theta[\varphi]_{\mathcal{I}} = \sup\{\eta \in \mathrm{PSH}(X,\theta) : \eta \leq 0, \mathcal{I}(\lambda\varphi) \supseteq \mathcal{I}(\lambda\eta) \text{ for all } \lambda > 0\}.$$

等价地，我们可以在此方程中用 $=$ 替换 $\supseteq$。

定义 定义 2.10 的另一种等价表述是：对于任意 E 在 X上的素除子，我们有

$$\nu(\varphi, E) = \nu(\psi, E) \quad \text{resp. } \nu(\varphi, E) \geq \nu(\psi, E).$$

这里，ν 表示一般 Lelong 数。有关详细内容，请参阅 [Xia，第 3.2 节。1]

给定任意 $\varphi \in$ 拟次调和(X, θ)，我们有

$$\varphi - \sup_X \varphi \leq P_\theta[\varphi] \leq P_\theta[\varphi]_{\mathcal{I}}.$$

参见 [DX22，命题 2。18]或 [Xia，命题 3.2。9]。

为便于后续使用，我们回顾如下内容：

引理 2.11。 设 $\pi\colon\ Y \to X$ 是从凯勒流形 Y出发的真双亚纯态射。给定 X上的两个拟多重次调和函数 φ, ψ，则以下条件等价：

- $\varphi \preceq_I \psi$；
- $\pi^*\varphi \preceq_I \pi^*\psi$。

证明。(1) $\Longrightarrow$ (2)。只需注意，Y 上的每个素除子也是 X上的素除子。(2) $\Longrightarrow$ (1)。这可由以下众所周知的公式得出：

$$\pi_*\left(\omega_{Y/X} \otimes \mathcal{I}(\lambda\pi^*\varphi)\right) = \mathcal{I}(\lambda\varphi), \quad \lambda > 0,$$

其中 $\omega_{Y/X}$ 是相对对偶化层。参见 [Dem12b，命题 5。8]。 □

运算 $P_\theta[\bullet]_{\mathcal{I}}$ 是幂等的。若 $P_\theta[\varphi]_{\mathcal{I}} = \varphi$，则称 $\varphi \in$ PSH(X, θ) 为 I-模型。同样，在子集 PSH$(X, \theta)_{>0}$上，运算 $P_\theta[\bullet]$ 也是幂等的，参见 [DDNL18，定理 3.12]。若 $P_\theta[\varphi] = \varphi$，则称 $\varphi \in$ PSH$(X, \theta)_{>0}$ 为模型。

假设 $\{\theta\}$ 是大类的。在 [DDNL21b] 中证明了，在 d_S 上的拟次调和(X, θ) 上存在一个伪度量，满足以下不等式：对于任意 $\varphi, \psi \in$ 拟次调和(X, θ)，有

$$\begin{aligned} d_S(\varphi,\psi) \leq & \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\left(2\int_X \theta^j_{\varphi\vee\psi} \wedge \theta^{n-j}_{V_\theta} - \int_X \theta^j_\varphi \wedge \theta^{n-j}_{V_\theta} - \int_X \theta^j_\psi \wedge \theta^{n-j}_{V_\theta}\right) \\ \leq & C_n d_S(\varphi,\psi), \end{aligned} \tag{2.4}$$

其中 $C_n = 3(n+1)2^{n+2}$。这里 $V_\theta = \max\{\varphi \in$ 拟次调和$(X, \theta) : \varphi \leq 0\}$。此外，$d_S(\varphi, \psi) = 0$ 当且仅当 $\varphi \sim_P \psi$。参见 [Xia，命题 6.2.2]。特别地，d_S-伪度量下降为定义在 $\{\theta\}$ 中闭正 (1,1)-流空间上的伪度量（仍记作 d_S）。

给定一族闭正$(1,1)$-流 T_i 在 $\{\theta\}$中，以及另一个闭正$(1,1)$-流 T 在 $\{\theta\}$中。文献 [Xia25b第 4] 节以及 [Xia推论 6.28] 证明了，$T_i \xrightarrow{d_S} T$ 当且仅当 $T_i + \omega \xrightarrow{d_S} T + \omega$ 对任意凯勒形式 ω 在 X上成立。

一般而言，给定 X 上的闭正 (1，1)-流 T_i 和 T，如果我们能够找到 X 上的凯勒形式 ω_i 和 ω，使得各个 $T_i+\omega_i$ 与 $T+\omega$ 表示同一个上同调类，并且 $T_i+\omega_i \xrightarrow{d_S} T+\omega$，那么我们就称 $T_i \xrightarrow{d_S} T$。这个定义与 ω_i 和 ω 的选取无关。

本文引入一个更强的概念：

定义 2.12。设 $(T_i)_i$ 是 X 上的闭正 (1,1)-流网，T 是 X上的闭正 (1,1)-流。我们称 $T_i \Longrightarrow T$，如果

(1) $T_i \xrightarrow{d_S} T$;
(2) $\{T_i\} \to \{T\}$.

φ 上的拟拟凸函数 X 称为$\mathcal{I}$-良好 的，如果存在 X 上的闭光滑实 (1,1)-形式 θ，使得 $\varphi \in \mathrm{PSH}(X,\theta)_{>0}$ 并且

$$P_\theta[\varphi] = P_\theta[\varphi]_{\mathcal{I}}.$$

对于任意闭光滑实(1,1)-形式 θ' 在 X 使得 $\theta'+\mathrm{dd^c}\varphi \geq 0$，我们也称流 θ'_φ是$\mathcal{I}$-良好的。根据 θ，这一概念与 [Xia24，引理 17]中的证明无关。另见 [Xia，第 7 节1]。一个简单的例子是，具有正非极化质量的$\mathcal{I}$-模型势总是$\mathcal{I}$-良好的。

在 [DX22；DX24b]中证明的一个关键结果如下：

定理 2.13。X 上的闭正$(1，1)$流 T 是 I-良好的，当且仅当存在一列 X 上的闭正$(1，1)$流 $(T_j)_j$，它们具有解析奇点，且满足 $T_j \Longrightarrow T$。

事实上，$(T_j)_j$ 可以取为 T的任意准等奇异逼近。

这里，若一个闭正 (1，1)-流 T 在局部可写为 $\mathrm{dd^c}f$，其中 f 是如下形式的拟凸函数，则称 T 具有解析奇点：

$$c\log\left(|f_1|^2+\cdots+|f_N|^2\right)+R,$$

其中，$c\in\mathbb{Q}_{\geq 0}$，f_1，……，f_N是 X 上的全纯函数，而 R是一个有界函数。关于这一概念的一些细微之处，见 [DRWN+26，注 2。7]。当我们写作 $T=\theta+\mathrm{dd^c}\varphi$，其中某个光滑闭实$(1,1)$-形式为 θ，且 $\varphi\in\mathrm{PSH}(X，\theta)$时，我们也称 φ具有解析奇点。

作为一个特殊情形，若 D 是 $\mathbb{Q}$ 上的有效 X-除子，则称闭正 (1,1)-流T 沿 D 具有 $T-[D]$ 对数奇点，如果 $T-[D]$ 是正的，且具有局部有界势。容易看出，T 具有解析奇点。反过来，如果从具有解析奇点的 T 出发，则总存在一个修改 π：$Y\to X$ 使得 π^*T 沿 $\mathbb{Q}$ 上的某个有效 Y-除子具有对数奇点。参见 [MM07，第 104]页。

设 θ 是 X 上的光滑闭实 (1,1)-形式，且 $\eta\in$ 属于 $\mathrm{PSH}(X,\theta)$。称拟拟凸函数序列 $(\eta^j)_j$ 是 η 的准等奇异逼近，如果满足以下条件：

(1) 对每个 j，η^j 都具有解析奇点；(2) $(\eta^j)_j$ 单调递减，且极限为 η；(3) 对每个 $\lambda'>\lambda>0$，我们都可以找到 $j_0>0$，使得对于 $j\geq j_0$,

$$\mathcal{I}(\lambda'\eta^j)\subseteq\mathcal{I}(\lambda\eta);$$

(4) 存在一个递减序列 $(\epsilon_j)_j$，属于 $\mathbb{R}_{\geq 0}$，其极限为 0；并且在 X 上存在一个凯勒形式 ω，使得

$$\eta^j\in\mathrm{PSH}\left(X,\theta+\epsilon_j\omega\right)$$

对每个 $j>0$，都有。

准等奇异近似的存在性由 [DPS01] 保证。我们也称$(\theta+\mathrm{dd^c}\eta^j)_j$ 是 $\theta+\mathrm{dd^c}\eta$ 的准等奇异逼近。

类 $\mathcal{I}$-良奇点在许多自然运算下封闭。

命题 2.14。两个 I-良拟多重次调和函数的和与最大值仍然是 I-良的。若 θ 是 X 上的闭实光滑$(1,1)$-形式，且$(\varphi_i)_i$ 是一个非空且有上界的 I-良 θ-拟次调和函数族，则$\sup^*_i\varphi_i$ 也是 I-良的。

证明见 [Xia，第 7 节。2]。

3. 混合体积

设 X 是一个维数为 n的连通紧致 Kähler 流形。设 T_1，……，T_n 是 X上的闭正(1，1)-流。设 θ_1，……，θ_n 是 X 上的闭实光滑(1，1)-形式，分别属于 T_1，……，T_n 的上同调类。考虑 $\varphi_i \in \mathrm{PSH}(X, \theta_i)$，使得对每个 $i = 1$，……，n都有 $T_i = \theta_i + \mathrm{dd^c}\varphi_i$。在 X上固定一个参考凯勒形式 ω。

3.1. 不同的定义。对于每个 $i = 1$，……，n，令$(\varphi_i^j)_j$为 φ_i的准等奇异逼近。

定义 3.1。按照 Cao 的意义，T_1，……，T_n的混合体积定义如下：

$$\langle T_1, \dots, T_n\rangle_C := \lim_{j\to\infty} \int_X \left(\theta_1 + \epsilon_j\omega + \mathrm{dd^c}\varphi_1^j\right) \wedge \cdots \wedge \left(\theta_n + \epsilon_j\omega + \mathrm{dd^c}\varphi_n^j\right),$$

其中，$(\epsilon_j)_j$ 是一个极限为 0 的递减序列，使得对每个$i = 1, \dots, n$，都有 $j > 0$。$\varphi_i^j \in$ 拟次调和$(X, \theta_i + \epsilon_j\omega)$

Cao [第 2 节证明了，该定义与14] 的选取无关，θ_i、ϵ_j、φ_i、φ_i^j 以及 ω均是如此。

另一种定义依赖于$\mathcal{I}$-包络技术，该技术在 [DX24b中进行了研究；DX22]。回顾一下，流的体积定义见 [Xia，定义 3.2。3]:

$$\mathrm{vol}(\theta + \mathrm{dd^c}\varphi) = \int_X (\theta + \mathrm{dd^c}P_\theta[\varphi]_{\mathcal{I}})^n.$$

它仅取决于流 $\theta + \mathrm{dd^c}\varphi$，而与 θ 和 φ的选取无关。一般而言，正如 [DX22和DX24b],所示

$$\mathrm{vol}(\theta + \mathrm{dd^c}\varphi) \geq \int_X (\theta + \mathrm{dd^c}\varphi)^n.$$

此外，若右侧为正，则等式成立当且仅当 φ 是$\mathcal{I}$-优良的。详情请参见 [Xia第 7 节。1] 。

定义 3.2. 假设对于所有 $i = 1, \dots, n$，均有 vol $T_i > 0$。Darvas–Xia 意义下的 $T_1, \dots, T_n$ 的混合体积定义如下：

$$\mathrm{vol}(T_1, \dots, T_n) = \int_X (\theta_1 + \mathrm{dd^c}P_{\theta_1}[\varphi_1]_{\mathcal{I}}) \wedge \cdots \wedge (\theta_n + \mathrm{dd^c}P_{\theta_n}[\varphi_n]_{\mathcal{I}}). \tag{3.1}$$

一般地，定义

$$\mathrm{vol}(T_1, \dots, T_n) = \lim_{\epsilon\to 0+} \mathrm{vol}(T_1 + \epsilon\omega, \dots, T_n + \epsilon\omega). \tag{3.2}$$

利用与 ω 相同的证明可知，这一定义仍然与 θ_i、φ_i 的选取无关，参见 [Xia，命题 3.2。7]。

混合体积可以看作可移动交理论的推广。事实上，当每个 T_i 都具有最小奇异性时，混合体积恰好等于相应上同调类的可移动交。

当 体积 $T_i > 0$ 对于所有 $i = 1, \dots, n$ 均成立时，定义（3.2）与（3.1）相容。由 $\mathcal{I}$-优良性可知，$P_{\theta_i}[\varphi_i]_{\mathcal{I}}$ 满足

$$P_{\theta_i+\epsilon\omega}\left[P_{\theta_i}[\varphi_i]_{\mathcal{I}}\right] = P_{\theta_i+\epsilon\omega}[\varphi_i]_{\mathcal{I}}.$$

因此，作为 3.2）由 3.1）推出的结果，定理 2.9。

当 $T_1 = \cdots = T_n = T$ 时，上述定义与纯情形相容：

命题 3.3. 我们总有

$$\mathrm{vol}(T, \dots, T) = \mathrm{vol}\, T.$$

证明。 写作 $T = \theta_\varphi$。更具体地说，我们需要证明

$$\lim_{\epsilon\to 0+}\int_X (\theta+\epsilon\omega+\mathrm{dd^c}P_{\theta+\epsilon\omega}[\varphi]_{\mathcal{I}})^n = \int_X (\theta+\mathrm{dd^c}P_\theta[\varphi]_{\mathcal{I}})^n.$$

我们可以用 $P_\theta[\varphi]_{\mathcal{I}}$ 替换 φ，并假设 φ 是 PSH(X, θ) 中的$\mathcal{I}$-模型。于是我们声称 at

$$\varphi = \inf_{\epsilon>0} P_{\theta+\epsilon\omega}[\varphi]_{\mathcal{I}}.$$

由此，我们的断言可由 [Xia，命题 3.19]。

$\leq$ 方向显然。反过来，只需证明对于 X上方的每个素除子 E，都有

$$\nu(\varphi,E) \leq \nu\left(\inf_{\epsilon>0} P_{\theta+\epsilon\omega}[\varphi]_{\mathcal{I}}, E\right).$$

我们直接计算

$$\nu\left(\inf_{\epsilon>0} P_{\theta+\epsilon\omega}[\varphi]_{\mathcal{I}}, E\right) \geq \sup_{\epsilon>0}\nu\left(P_{\theta+\epsilon\omega}[\varphi]_{\mathcal{I}}, E\right) = \nu(\varphi,E).$$

□

命题 3.4。 两种体积都是对称的。*Cao* 意义下的混合体积是多-$\mathbb{Q}_{\geq 0}$-线性的，而 *Darvas–Xia* 意义下的混合体积是多-$\mathbb{R}_{\geq 0}$-线性的。

多-$\mathbb{Q}_{\geq 0}$-线性意味着两件事:

(1) 对于每个 $\lambda \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$，我们有

$$\langle \lambda T_1, T_2, \ldots, T_n\rangle_C = \lambda\langle T_1, T_2, \ldots, T_n\rangle_C.$$

(2) 如果 T_1' 是另一个闭正 (1，1)-流，那么

$$\langle T_1+T_1', T_2, \ldots, T_n\rangle_C = \langle T_1, T_2, \ldots, T_n\rangle_C + \langle T_1', T_2, \ldots, T_n\rangle_C. \tag{3.3}$$

多-$\mathbb{R}_{\geq 0}$-线性的定义类似。

证明。 我们先处理 Cao 意义下的混合体积。只有性质（3.3）需要证明。但这可由两个准等奇异逼近之和仍是准等奇异逼近这一事实得出。参见 [Xia，定理 6.2.2，推论 7.1。2]。

接下来，我们处理 Darvas–Xia 意义下的混合体积情形。我们只需证明

$$\mathrm{vol}(T_1+T_1', T_2, \ldots, T_n) = \mathrm{vol}(T_1, T_2, \ldots, T_n) + \mathrm{vol}(T_1', T_2, \ldots, T_n). \tag{3.4}$$

根据定义（3.2），不妨假设对每个 体积 $T_i > 0$，以及 i，都有 体积 $T_1' > 0$。记$T_1' = \theta_1' + \mathrm{dd^c}\varphi_1'$。于是根据 命题 2.14,

$$P_{\theta_1}[\varphi_1]_{\mathcal{I}} + P_{\theta_1'}[\varphi_1']_{\mathcal{I}} \sim_P P_{\theta_1+\theta_1'}[\varphi_1+\varphi_1']_{\mathcal{I}}.$$

因此，（3.4）由定理 2.9立即得到。 □

定理 3.5. 我们有

$$\langle T_1, \ldots, T_n\rangle_C = \mathrm{vol}(T_1, \ldots, T_n). \tag{3.5}$$

特别地，我们不再需要记号 $\langle T_1, \ldots, T_n\rangle_C$。

证明。 **步骤 1**。我们将问题化归为 $T_1 = \cdots = T_n$ 的情形。

Suppose 这一特殊情形已经得到证明。设 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{Q}_{>0}$ 是一些数。 n

$$\left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i T_i, \ldots, \sum_{i=1}^n \lambda_i T_i \right\rangle_C = \mathrm{vol}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i T_i\right).$$

由 命题 3.4 可知，等式两边都是关于 λ_i的多项式。比较 $\lambda_1 \cdots \lambda_n$的系数，可得（3.5）。

从现在起，我们假设 $T_1 = \cdots = T_n = T$。记 $T = \theta_\varphi$。

步骤 2。我们将问题归结为 T 是凯勒流的情形。为此，只需证明

$$\lim_{\epsilon\to 0+}\langle T_1+\epsilon\omega,\dots,T_n+\epsilon\omega\rangle_C=\langle T_1,\dots,T_n\rangle_C,$$

这由定义显然可得。

步骤 3. 设 $(\varphi^j)_j$ 是 φ 在 PSH(X,θ) 中的准等奇异逼近。我们需要证明

$$\lim_{j\to\infty}\int_X(\theta+\mathrm{dd^c}\varphi^j)^n=\int_X(\theta+\mathrm{dd^c}P_\theta[\varphi]_{\mathcal{I}})^n.$$

这由 [DX24b，推论 34],另见 [Xia，推论 7.12]。 □

3.2. **混合体积的性质**。

命题 3.6。 设 $S_1,\dots,S_n$ 是 X 上闭的正$(1,1)$-流。假设对于每个$i=1,\dots,n$,

(1) $T_i\preceq_{\mathcal{I}}S_i$;
(2) $\{T_i\}=\{S_i\}$。

Then

$$\mathrm{vol}(T_1,\dots,T_n)\le\mathrm{vol}(S_1,\dots,S_n). \tag{3.6}$$

证明。 设 ω 是 X上的凯勒形式。只需证明，对于每个 $\epsilon>0$，都有

$$\mathrm{vol}(T_1+\epsilon\omega,\dots,T_n+\epsilon\omega)\le\mathrm{vol}(S_1+\epsilon\omega,\dots,S_n+\epsilon\omega).$$

特别地，我们只需考虑对每个 $i=1$ 都有体积 $T_i>0$、体积 $S_i>0$ 的情形，……， n。
在这种情况下，(3.6) 是 定理 2.9的推论。 □

命题 3.7。我们有

$$\mathrm{vol}(T_1,\dots,T_n)\ge\prod_{i=1}^n(\mathrm{vol}\,T_i)^{1/n}.$$

证明。 不妨假设对每个 $i=1$ 都有体积 $T_i>0$，……， n，否则无需证明。在这种情况下，我们需要证明

$$\int_X(\theta_1+\mathrm{dd^c}P_{\theta_1}[\varphi_1]_{\mathcal{I}})\wedge\cdots\wedge(\theta_n+\mathrm{dd^c}P_{\theta_1}[\varphi_n]_{\mathcal{I}})\ge\prod_{i=1}^n\left(\int_X(\theta_i+\mathrm{dd^c}P_{\theta_i}[\varphi_i]_{\mathcal{I}})^n\right)^{1/n}.$$

这是 [DDNL21a]主定理的一个特殊情形。 □

命题 3.8。 设 $\pi\colon Y\to X$ 是从凯勒流形Y 到 X的真双亚纯态射，则

$$\mathrm{vol}(\pi^*T_1,\dots,\pi^*T_n)=\mathrm{vol}(T_1,\dots,T_n).$$

证明。 如同命题 3.6的证明中那样，我们可以轻易地将问题化归到以下情形：体积$T_i>0$ 对每个 $i=1,\dots,n$。由 [Xia，命题 3.2。5], 我们知道，若写作 $T_i=\theta_i+\mathrm{dd^c}\varphi_i$，则

$$\pi^*P_{\theta_i}[\varphi_i]_{\mathcal{I}}=P_{\pi^*\theta_i}[\pi^*\varphi_i]_{\mathcal{I}}.$$

特别是,

$$\mathrm{vol}\,\pi^*T_i=\mathrm{vol}\,T_i>0.$$

我们的断言显然由非极化乘积的双有理不变性得出 t.
□

引理 3.9。 设 ω 是 X 上的凯勒形式。则存在一个常数 $C>0$，其仅取决于 X、ω、*{θ_1}……{θ_n}*，使得

$$0\le\mathrm{vol}(T_1+\epsilon\omega,\dots,T_n+\epsilon\omega)-\mathrm{vol}(T_1,\dots,T_n)\le C\epsilon$$

对任意 $\epsilon\in[0,1]$。

证明。 由线性性，我们可以写成

$$\mathrm{vol}(T_1+\epsilon\omega,\dots,T_n+\epsilon\omega)-\mathrm{vol}(T_1,\dots,T_n)$$

表示为 T_i 与 ω 之间的混合体积的线性组合，其系数为 ϵ^j，其中 $j\geq 1$。混合体积显然有一个常数上界。□

命题 3.10。 设 $(T_i^j)_{j\in J}$ 是 X 上闭正$(1,1)$流的网，其中每个 $i=1,\dots,n$。假设对于每个 $i=1,\dots,n$，我们有

$$T_i^j \implies T_i.$$

Then

$$\lim_{j\in J}\int_X T_1^j\wedge\cdots\wedge T_n^j=\int_X T_1\wedge\cdots\wedge T_n, \tag{3.7}$$

and

$$\lim_{j\in J}\mathrm{vol}\left(T_1^j,\dots,T_n^j\right)=\mathrm{vol}\left(T_1,\dots,T_n\right). \tag{3.8}$$

回顾一下，$\implies$ 定义于定义 2.12中。

证明。 设 ω 是 X 上的一个凯勒形式。对于每个 $\epsilon>0$，我们可以找到 $j_0\in J$，使得对于 $j\geq j_0$，下列类都是凯勒类:

$$\{T_i\}+2^{-1}\epsilon\{\omega\}-\{T_i^j\},\quad i=1,\dots,n.$$

取一个属于类 $\{T_i\}+\epsilon\{\omega\}-\{T_i^j\}$ 的凯勒形式 ω_i^j。然后注意，对于 $i=1,\dots,n$，

$$T_i^j+\omega_i^j\xrightarrow{ds} T_i+\epsilon\omega.$$

由于现在这些流属于同一个上同调类，由 [Xia25b，定理 4.2]（另见 [Xia，定理 6.2.1]）可知

$$\lim_{j\in J}\int_X(T_1^j+\omega_1^j)\wedge\cdots\wedge(T_n^j+\omega_n^j)=\int_X(T_1+\epsilon\omega)\wedge\cdots\wedge(T_n+\epsilon\omega). \tag{3.9}$$

注意，我们可以找到一个与 $j\geq j_0$ 无关的常数 $C>0$，使得对任意 $j\geq j_0$，都有

$$\begin{aligned}\int_X(T_1^j+\omega_1^j)\wedge\cdots\wedge(T_n^j+\omega_n^j)-\int_X T_1^j\wedge\cdots\wedge T_n^j\leq C\epsilon,\\ \int_X(T_1+\epsilon\omega)\wedge\cdots\wedge(T_n+\epsilon\omega)-\int_X T_1\wedge\cdots\wedge T_n\leq C\epsilon.\end{aligned} \tag{3.10}$$

因此，3.7）成立。

对于（3.8），只需将（3.10）替换为引理 3.9，并将（3.9）替换为

$$\lim_{j\in J}\mathrm{vol}\left(T_1^j+\omega_1^j,\dots,T_n^j+\omega_n^j\right)=\mathrm{vol}\left(T_1+\epsilon\omega,\dots,T_n+\epsilon\omega\right),$$

这由 [Xia25b，定理 4.2、定理 4.6]（另见 [Xia，定理 6.2.1、定理 6.2.3]）可得。□

接下来，我们证明混合体积的半连续性。

定理 3.11。 设$(\varphi_i^j)_{j\in J}(i=1,\dots,n)$ 是 拟次调和(X,θ_i)中的网。假设对于每个 E 上方的素除子 E，我们有

$$\lim_{j\in J}\nu(\varphi_i^j,E)=\nu(\varphi_i,E),\quad i=1,\dots,n.$$

Then

$$\overline{\lim_{j\in J}}\,\mathrm{vol}\left(\theta_1+\mathrm{dd^c}\varphi_1^j,\dots,\theta_n+\mathrm{dd^c}\varphi_n^j\right)\leq\mathrm{vol}\left(\theta_1+\mathrm{dd^c}\varphi_1,\dots,\theta_n+\mathrm{dd^c}\varphi_n\right).$$

证明。 **步骤 1**。我们首先假设，对于所有$i=1,\ldots,n$以及 $j\in J$，体积$(\theta_i+\mathrm{dd^c}\varphi_i^j)>0$且体积$(\theta_i+\mathrm{dd^c}\varphi_i)>0$。

不失一般性，我们可以假设，对于所有$i=1,\ldots,n$和 $j\in J$， φ_i^j's 和 φ_i's 都是$\mathcal{I}$-模型。我们的断言变为

$$\overline{\lim_{j\in J}}\int_X\left(\theta_1+\mathrm{dd^c}\varphi_1^j\right)\wedge\cdots\wedge\left(\theta_n+\mathrm{dd^c}\varphi_n^j\right)\leq\int_X\left(\theta_1+\mathrm{dd^c}\varphi_1\right)\wedge\cdots\wedge\left(\theta_n+\mathrm{dd^c}\varphi_n\right). \tag{3.11}$$

对于每个 $j\in J$，定义

$$\psi_i^j:=\sup_{k\geq j}{}^*\,\varphi_i^k,\quad i=1,\ldots,n.$$

注意到 ψ_i^j 是 $\mathcal{I}$-良好的，这归功于 命题 2.14。由 [Xia，推论 1.4。1]以及我们的假设可得

$$\lim_{j\in J}\nu\left(\psi_i^j,E\right)=\nu\left(\varphi_i,E\right),\quad i=1,\ldots,n.$$

对于每个 $i=1,\ldots,n$，我们定义

$$\psi_i=\inf_{j\in J}P_{\theta_i}[\psi_i^j].$$

根据 [DX22，引理 2。21] (另见 [Xia，命题 3.2。12])， ψ_i 是$\mathcal{I}$-模型。由 [Xia，命题 3.1。10],我们知道

$$\nu(\psi_i,E)=\nu(\varphi_i,E)$$

对于任意 $i=1$、.....、 n 以及 X上的任意 E素除子。换言之，对于 $i=1$、.....、 n， $\psi_i\sim_{\mathcal{I}}\varphi_i$。但 φ_i 和 ψ_i 都是$\mathcal{I}$-良好的，因此，

$$\psi_i\sim_P\varphi_i,\quad i=1,\ldots,n.$$

根据定理 2.9，我们有

$$\int_X(\theta_1+\mathrm{dd^c}\psi_1)\wedge\cdots\wedge(\theta_n+\mathrm{dd^c}\psi_n)=\int_X(\theta_1+\mathrm{dd^c}\varphi_1)\wedge\cdots\wedge(\theta_n+\mathrm{dd^c}\varphi_n).$$

接下来再次由定理 2.9 可得，

$$\overline{\lim_{j\in J}}\int_X\left(\theta_1+\mathrm{dd^c}\varphi_1^j\right)\wedge\cdots\wedge\left(\theta_n+\mathrm{dd^c}\varphi_n^j\right)\leq\overline{\lim_{j\in J}}\int_X\left(\theta_1+\mathrm{dd^c}\psi_1^j\right)\wedge\cdots\wedge\left(\theta_n+\mathrm{dd^c}\psi_n^j\right).$$

O另一方面，由于 [DDNL21b，命题 4.8], 对于每个 $i=1$，.....、 n，我们有 e

$$\psi_i^j\xrightarrow{d_S}\psi_i.$$

由命题 3.10可知

$$\overline{\lim_{j\in J}}\int_X\left(\theta_1+\mathrm{dd^c}\psi_1^j\right)\wedge\cdots\wedge\left(\theta_n+\mathrm{dd^c}\psi_n^j\right)=\int_X(\theta_1+\mathrm{dd^c}\psi_1)\wedge\cdots\wedge(\theta_n+\mathrm{dd^c}\psi_n).$$

将这些方程合并，式（3.11）即得。

步骤 2。接下来我们处理一般情形。

在 X 上固定一个凯勒形式 ω。对于来自步骤 1 的任意 $\epsilon\in(0,1],$，我们知道

$$\overline{\lim_{j\in J}}\operatorname{vol}\left(\theta_1+\epsilon\omega+\mathrm{dd^c}\varphi_1^j,\ldots,\theta_n+\epsilon\omega+\mathrm{dd^c}\varphi_n^j\right)\leq\operatorname{vol}\left(\theta_1+\epsilon\omega+\mathrm{dd^c}\varphi_1,\ldots,\theta_n+\epsilon\omega+\mathrm{dd^c}\varphi_n\right).$$

利用引理 3.9，我们有

$$\begin{aligned}&\overline{\lim_{j\in J}}\operatorname{vol}\left(\theta_1+\mathrm{dd^c}\varphi_1^j,\ldots,\theta_n+\mathrm{dd^c}\varphi_n^j\right)\\&\leq\overline{\lim_{j\in J}}\operatorname{vol}\left(\theta_1+\epsilon\omega+\mathrm{dd^c}\varphi_1^j,\ldots,\theta_n+\epsilon\omega+\mathrm{dd^c}\varphi_n^j\right)\\&\leq\operatorname{vol}\left(\theta_1+\epsilon\omega+\mathrm{dd^c}\varphi_1,\ldots,\theta_n+\epsilon\omega+\mathrm{dd^c}\varphi_n\right)\\&\leq\operatorname{vol}\left(\theta_1+\mathrm{dd^c}\varphi_1,\ldots,\theta_n+\mathrm{dd^c}\varphi_n\right)+C\epsilon.\end{aligned}$$

但由于 ϵ 是任意的，我们的断言得证。 □

引理 3.12。 设 $\pi\colon\ Y \to X$ 是从凯勒流形 Y出发的真双亚纯态射。那么，对于 Y上的任意非除子型闭正 (1,1)-流 T，我们有

$$\pi^*\pi_*T = T + \sum_{i=1}^{N} c_i[E_i]$$

对于有限多个 π-例外除子 E_i 和 $c_i > 0$。

特别地，若 S 是 X上的闭正 (1,1)-流，则我们可以找到如上所述的 E_i 和 c_i，使得

$$\pi^*\langle S\rangle = \langle \pi^* S\rangle + \sum_{i=1}^{N} c_i[E_i].$$

证明。 令 E 为 π的例外轨迹。那么

$$T = \mathbb{1}_{Y\setminus E}\pi^*\pi_*T.$$

因此，

$$\pi^*\pi_*T - T = \mathbb{1}_E\pi^*\pi_*T,$$

根据支撑定理（参见 [Dem12a，第 8]节），具有所述形式。 □

事实证明，混合体积仅取决于流的正则部分。

定理 3.13. 我们有

$$\operatorname{vol}(T_1,\dots,T_n) = \operatorname{vol}(\operatorname{Reg}T_1,\dots,\operatorname{Reg}T_n).$$

回忆一下，Reg 定义见（2.3）。

注 3.14。 一般而言，混合体积并非仅取决于流的非极化部分。纯体积甚至也不满足这一点，参见 [BBJ21，例 6。10]中的一个例子。

证明。 **步骤 1**。我们先在 $T_1 = \cdots = T_n = T$且 vol $T > 0$ 的情况下证明该断言。我们要证明

$$\operatorname{vol} T = \operatorname{vol}\operatorname{Reg}T.$$

我们将 T 按（2.3）中的方式分解。

我们首先处理 E_i 的集合有限的情形。在这种情况下，只需证明以下结论：若 S 是 X 上的闭正 (1,1)-流，且 E 是 X 上的素除子，则 vol$(S + [E])$ = vol S。为此，我们可以假设 S 是一个凯勒流。取 S 的准等奇异逼近 $(S_j)^j$，注意到根据 Xia 的定理 6.2.2、推论 7.1.2]，$(S_j + [E])^j$ 是 $S + [E]$ 的准等奇异逼近。因此，最终可以假设 S 具有解析奇点。在这种情况下，结论显然成立。

因此，我们可以假设指标 i 遍历所有正整数。根据前面的论证，我们知道，对于任意 $N \geq 0$,

$$\operatorname{vol} T = \operatorname{vol}\left(T - \sum_{i=1}^{N} c_i[E_i]\right).$$

感谢 命题 3.10 以及 [Xia，定理 6.2。2], 只需证明

$$\sum_{i=1}^{N} c_i[E_i] \implies \sum_{i=1}^{\infty} c_i[E_i] \tag{3.12}$$

如 $N \to \infty$。

固定 X 上的凯勒形式 ω。我们可以找到 $N_0 > 0$，使得对于任意 $N \geq N_0$，以下类

$$\omega + \sum_{i=N+1}^{\infty} c_i[E_i]$$

是凯勒类。取该类中的凯勒形式 ω_N。那么这些流

$$\sum_{i=1}^{N} c_i[E_i] + \omega_N, \quad \sum_{i=1}^{\infty} c_i[E_i] + \omega$$

都属于同一个上同调类。因此，我们的问题归结为

$$\sum_{i=1}^{N} c_i[E_i] + \omega_N \xrightarrow{d_S} \sum_{i=1}^{\infty} c_i[E_i] + \omega.$$

事实上，由于 [Xia，推论 6.25]，只需证明非极化质量收敛。换言之，我们需要证明

$$\lim_{N\to\infty} \int_X \omega_N^n = \int_X \omega^n,$$

这由收敛性$\{\omega_N\} \to \{\omega\}$得出。

步骤 2。我们处理一般情形。固定 X 上的凯勒形式 ω，由步骤 1 可知，对任意$d_1, \dots, d_n > 0$和 $\epsilon > 0$，有

$$\mathrm{vol}\left(\sum_{i=1}^{n} d_i(T_i + \epsilon\omega)\right) = \mathrm{vol}\left(\sum_{i=1}^{n} d_i(\mathrm{Reg}\, T_i + \epsilon\omega)\right).$$

由于两边都是 $d_1, \dots, d_n$ 的多项式，我们得出

$$\mathrm{vol}(T_1 + \epsilon\omega, \dots, T_n + \epsilon\omega) = \mathrm{vol}(\mathrm{Reg}\, T_1 + \epsilon\omega, \dots, \mathrm{Reg}\, T_n + \epsilon\omega).$$

令 $\epsilon \to 0+$，即可得出所要证明的结论。 □

推论 3.15. 设 $\pi\colon X \to Z$ 是一个从 X 到凯勒流形 Z的真双亚纯态射。那么

$$\mathrm{vol}(T_1, \dots, T_n) = \mathrm{vol}(\pi_* T_1, \dots, \pi_* T_n). \tag{3.13}$$

证明。注意，我们可以假设 $T_i = \mathrm{Reg}\, T_i$对所有 $i = 1, \dots, n$均成立。事实上，显然，T_i 的除子部分的推前仍是除子型的，因此根据定理 3.13，它们不会对体积产生贡献。

现在由命题 3.8，只需证明

$$\mathrm{vol}(T_1, \dots, T_n) = \mathrm{vol}(\pi^*\pi_* T_1, \dots, \pi^*\pi_* T_n).$$

根据 引理 3.12，差 $\pi^*\pi_* T_i - T_i$ 是除子型的，因此由定理 3.13即可得到所需的等式。 □

推论 3.15的一个特殊推论 将在后文用到。

推论 3.16. 设 $\pi\colon X \to Z$ 是从 X 到凯勒流形 Z 的真双亚纯态射。假设 T 是 X 上一个 I-良好的闭正 $(1,1)$-流，则 $\pi_* T$ 也是如此。

证明. 不妨设 $\int_X T^n > 0$。由 推论 3.15，

$$\mathrm{vol}\, \pi_* T = \mathrm{vol}\, T > 0$$

也如此。由于 T 是 $\mathcal{I}$-良好的，我们有

$$\mathrm{vol}\, T = \int_X T^n.$$

但 $\int_X T^n = \int_Z (\pi_* T)^n$，因此

$$\mathrm{vol}\, \pi_* T = \int_Z (\pi_* T)^n > 0.$$

由此可知，$\pi_* T$ 是 $\mathcal{I}$-良好的。 □

引理 3.17。 设 $\pi\colon X \to Z$ 是从 X 到凯勒流形Z的真双亚纯态射。考虑 X 上属于同一上同调类的非除子型闭正 $(1,1)$ 流 T、S。假设 $T \preceq_{\mathcal{I}} S$，则 $\pi_* T \preceq_{\mathcal{I}} \pi_* S$。

证明。不妨设 π <style id='6}得益于 Hironaka 的 Chow 引理 [Hir75，推论 2] 和 引理 2.11。

由引理 3.12,

$$\pi^*\pi_*T = T + \sum_{i=1}^{N} c_i[E_i],$$

其中 $c_i > 0$ 和 E_i 均为 π-例外除子。因此

$$T + \sum_{i=1}^{N} c_i[E_i] \preceq_{\mathcal{I}} S + \sum_{i=1}^{N} c_i[E_i].$$

将 T和 S 分别替换为 $T + \sum_{i=1}^{N} c_i[E_i]$ 和 $S + \sum_{i=1}^{N} c_i[E_i]$，我们可以假设$T = \pi^*\pi_*T$。特别地， S 和 $\pi^*\pi_*S$ 属于同一个上同调类，因此 $S = \pi^*\pi_*S$（参见下文定理 4.11 的证明）。于是由引理 2.11即可得证。□

4. 超越 b-除子

设 X 是一个维数为 n 的连通紧致 Kähler 流形。

4.1. 定义。 本节定义的 b-除子有时也称为 b-除子类。为节省篇幅，我们总是省略「类」一词。

定义 4.1。 在 X 上的一个（*Weil*）*b*-除子 $\mathbb{D}$是一个赋值 $(\mathbb{D}_\pi)_{\pi\colon\ Y\to X}$，其中 $\pi\colon Y \to X$遍历 X 的所有修改，并满足

（1） $\mathbb{D}_\pi \in \mathrm{H}^{1,1}(Y, \mathbb{R})$；（2）这些类在推前下相容：若 $\pi'\colon Z \to X$和 $\pi\colon Y \to X$ 都属于$\mathrm{Modif}(X)$，且 π' 通过 $g\colon Z \to Y$ 支配 π（即， g 使图表（2.1）交换），则 $g_*\mathbb{D}_{\pi'} = \mathbb{D}_\pi$。

如果不会引起混淆，我们也记作 $\mathbb{D}_Y = \mathbb{D}_\pi$。

给定 X 上的两个 Weil b-除子 $\mathbb{D}$ 和 $\mathbb{D}'$，若对每个 $\pi \in \mathrm{Modif}(X)$，都有$\mathbb{D}_\pi \le \mathbb{D}'_\pi$，则称 $\mathbb{D} \le \mathbb{D}'$。回顾定义，这意味着类 $\mathbb{D}'_\pi - \mathbb{D}_\pi$ 是伪有效的。

$\mathbb{D}_X$ 的类称为 $\mathbb{D}$的根。 X 上的 Weil b-除子集合具有显然的实向量空间结构。

定义4.2。 X 上的 Weil b-除子 $\mathbb{D}$ 的体积 为

$$\mathrm{vol}\,\mathbb{D} := \lim_{\pi\colon Y\to X} \mathrm{vol}\,\mathbb{D}_Y.$$

根据命题 2.4，右侧是一个递减网，因此极限总是存在。我们称 $\mathbb{D}$ 为大，如果体积 $\mathrm{vol}\,\mathbb{D} > 0$。

引理 4.3。 设$(\mathbb{D}_i)_{i\in I}$ 是一个收敛于 $\mathbb{D}$的 *b*-除子网。那么

$$\overline{\lim_{i\in I}} \mathrm{vol}\,\mathbb{D}_i \le \mathrm{vol}\,\mathbb{D}. \tag{4.1}$$

若该网递减，则

$$\lim_{i\in I} \mathrm{vol}\,\mathbb{D}_i = \mathrm{vol}\,\mathbb{D}.$$

这里，如果对于任意修改 $\pi\colon Y \to X$，我们都有$\mathbb{D}_{i,Y} \to \mathbb{D}_Y$在欧几里得拓扑下收敛于 $\mathbb{D}$，则称$(\mathbb{D}_i)_{i\in I}$ 收敛于 $\mathbb{D}$。

一般而言，我们不能期待等式（4.1）成立， [DF22例 3 表明了这一点。3]。

证明。 设 $\pi\colon Y \to X$ 是一个修改。那么

$$\mathrm{vol}\,\mathbb{D}_Y = \lim_{i\in I} \mathrm{vol}\,\mathbb{D}_{i,Y} \ge \overline{\lim_{i\in I}} \mathrm{vol}\,\mathbb{D}_i.$$

不等式（4.1）得证。至于递减情形，只需注意到（4.1）的两边都可以写成

$$\inf_i \inf_{\pi\colon Y\to X} \mathrm{vol}\,\mathbb{D}_{i,Y}.$$

□

定义 4.4。一个卡蒂埃 *b*-除子 $\mathbb{D}$ over X 是一个 Weil b-除子 $\mathbb{D}$ over X，满足存在一个修改 $\pi\colon Y \to X$ 以及一个类 $\alpha_Y \in \mathrm{H}^{1,1}(Y, \mathbb{R})$，使得对于每个 $\pi'\colon Z \to X$ 支配π的，类 $\mathbb{D}_Z$ 都是 α_Y的拉回。任意这样的（π，α_Y）都称为 $\mathbb{D}$的实现 。

宽泛地说，我们也称 (Y, α_Y) 是 $\mathbb{D}$ 的一个实现。一般而言，这个实现并不唯一。

定义 4.5。 X 上的 Cartier b-除子 $\mathbb{D}$ 称为数值有效，若存在 $\mathbb{D}$ 的一个实现 $(\pi\colon Y \to X, \alpha_Y)$，使得 α_Y 数值有效。

定义 4.6。 X 上的 Weil b-除子 $\mathbb{D}$ 称为数值有效，若存在一个由 X 上 nef Cartier b-除子组成的网 $(\mathbb{D}_i)_i$，收敛到 $\mathbb{D}$。

换言之，对于每个修改 $\pi\colon Y \to X$，都有 $\mathbb{D}_{i,\,Y} \to \mathbb{D}_Y$。

注意，得益于 命题 2.4，每个 $\mathbb{D}_Y$ 必然是修正 nef 的，但一般而言并非 nef。

先验地，对于 Cartier b-除子，数值有效性可能有两种不同的含义，分别由 定义 4.5 或 定义 4.6给出。我们将在 推论 4.13中证明二者实际上等价。在此之前，我们所说的数值有效 Cartier b-除子，始终是指符合 定义 4.5的情形。

我们的定义定义 4.6 相当于将 Weil b-除子的集合定义为 Cartier b-除子集合在 $\varprojlim_{\pi} \mathrm{H}^{1,1}(Y, \mathbb{R})$ 中关于射影极限拓扑的闭包。特别地，数值有效 b-除子的收敛网的极限仍然是数值有效的。

4.2. 流的 b-除子。

令 T 为 X 上一个闭的正 (1,1)-流。

给定任意修改 $\pi\colon Y \to X$，我们定义

$$\mathbb{D}(T)_Y \coloneqq \{\mathrm{Reg}\,\pi^* T\} \in \mathrm{H}^{1,1}(Y, \mathbb{R}). \tag{4.2}$$

b-除子 $\mathbb{D}(T)$ 最早由 [Xia22] 于 2020 年明确引入。该论文鲜少受到关注，而同一对象后来又由 [BBGHdJ22] 和 [Tru24]重新引入。

我们注意到，如果 T' 是 X 上的另一个闭正 $(1,1)$-流，且 $\lambda \geq 0$，则

$$\mathbb{D}(T + T') = \mathbb{D}(T) + \mathbb{D}(T'), \quad \mathbb{D}(\lambda T) = \lambda \mathbb{D}(T).$$

在下文中，我们将隐式地使用这些恒等式。

注意，当 T 具有解析奇点时，$\mathbb{D}(T)$ 是卡蒂埃。

Lemma 4.7. 设 T 是 X 上的闭正$(1,\ 1)$-流。则 $\mathbb{D}(T)$ 是数值有效的。此外，

$$\mathrm{vol}\, T = \mathrm{vol}\, \mathbb{D}(T). \tag{4.3}$$

证明。设 ω 是 X 上的凯勒形式。则 $\mathbb{D}(\omega)$ 是由 $(X,\{\omega\})$ 实现的卡蒂埃 b-除子。我们总可以用 $\mathbb{D}(T + \epsilon\omega) = \mathbb{D}(T) + \epsilon\mathbb{D}(\omega)$ 逼近 $\mathbb{D}(T)$。此外，我们可以找到一个常数 $C > 0$，使得

$$0 \leq \mathrm{vol}\,(\mathbb{D}(T) + \epsilon\mathbb{D}(\omega)) - \mathrm{vol}\, \mathbb{D}(T) \leq C\epsilon. \tag{4.4}$$

因此，我们可以假设 T 是一个凯勒流。

接下来，取一个闭光滑实（1,1）-形式 θ，使其与 T 上同调等价，并记 $T = \theta_\varphi$ 为某个属于 $\varphi \in \mathrm{PSH}(X, \theta)$ 的函数。设 $(\varphi_j)_j$ 是 φ 在 $\mathrm{PSH}(X, \theta)$ 中的准等奇异逼近。于是容易看出，$\mathbb{D}(\theta + \mathrm{dd^c}\varphi_j) \to \mathbb{D}(\theta + \mathrm{dd^c}\varphi)$。详见 [Xia24，定理 9.6] 步骤 2。因此，

$$\mathrm{vol}\, \mathbb{D}(\theta + \mathrm{dd^c}\varphi_j) \to \mathrm{vol}\, \mathbb{D}(\theta + \mathrm{dd^c}\varphi),$$

由于 引理 4.3。

因此，我们可以假设 T 具有解析奇点。令 $\pi\colon Y \to X$ 为一个修改，使得

$$\pi^* T = [D] + R,$$

其中 D 是 $\mathbb{Q}$上的一个有效 Y，且 R 是一个具有局部有界势的闭正 $(1,1)$-流。则 $\mathbb{D}(T)$ 是由 $(\pi, \{R\})$ 实现的 nef Cartier b- 除子。注意，在此情形下，(4.3) 显然成立。 □

备注 4.8。 还有另一种可能性：用非多极性部分替换 Reg。给定如上所述的 T，我们定义

$$\mathbb{D}'(T)_\pi := [\langle \pi^* T \rangle].$$

但得益于 引理 3.12，我们有

$$\mathbb{D}'(T) = \mathbb{D}(\langle T \rangle),$$

因此没有新的信息。

反过来，我们希望将数值有效 b-除子实现为 $\mathbb{D}(T)$。我们先证明一个连续性结果。

命题 4.9。 设 $(T_i)_{i\in I}$ 是 X 上闭的正$(1,1)$-流的网，且 T 上有一个闭的正$(1,1)$-流，假设 $T_i \Longrightarrow T$，则

$$\mathbb{D}(T_i) \to \mathbb{D}(T).$$

回忆一下，$\Longrightarrow$ 定义见 定义 2.12。

证明。 当上同调类 $\{T_i\}$ 和 $\{T\}$ 全都相同时，证明与代数情形相同，这里略去。参见 [Xia24，定理 9。8]。

一般而言，固定 X 上的一个凯勒形式 ω。于是我们可以找到 $i_0 \in I$，使得对于 $i \geq i_0$，类

$$\omega + \{T\} - \{T_i\}$$

是凯勒的，并且我们可以在此类中找到一个凯勒形式 ω_i。由此可得

$$T_i + \omega_i, \quad T + \omega$$

都属于同一个上同调类，因此

$$\mathbb{D}(T_i + \omega_i) \to \mathbb{D}(T + \omega).$$

但显然

$$\mathbb{D}(\omega_i) \to \mathbb{D}(\omega),$$

因此，我们的断言得证。 □

定理 4.10. 每个定义在 X 上的大且 *nef* 的 *b*-除子 $\mathbb{D}$ 都可以表示为 $\mathbb{D}(T)$，其中 $T \in \mathbb{D}_X$。此外，我们总可以假设 T 是 *I*-良好的。

注意，T 并不唯一。流 T 必然是非除子型的。

证明. 固定一个定义在 X 上的大且 nef 的 b-除子 $\mathbb{D}$。

对于每个 $\pi\colon Y \to X$，我们在 $\mathbb{D}_Y$ 中取一个具有最小奇异性的流 T_Y。我们声称，$\mathbb{D}(\pi_* T_Y)$ 与 $\mathbb{D}$ 在 Y 的层次上相同：对于任意被 π 通过态射 $g\colon Y \to Z$ 支配的修改 $\pi'\colon Z \to X$，我们有

$$\mathbb{D}_Z = \mathbb{D}(\pi_* T_Y)_Z.$$

相关记号总结于以下交换图中：

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\quad g \quad} & Z \\ & {\scriptstyle\pi}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle\pi'} & \\ & X. & \end{array} \tag{4.5}$$

展开定义后，这意味着

$$\mathrm{Reg}(\pi'^* \pi_* T_Y) \in \mathbb{D}_Z.$$

注意

$$\mathrm{Reg}(\pi'^* \pi_* T_Y) = \mathrm{Reg}(\pi'^* \pi'_* g_* T_Y).$$

由于 命题 2.4，我们知道 $\mathbb{D}_Y$ 是修改 nef 且大的。特别地，T_Y 不是除子型的，因此根据 $g_* T_Y$ 和 引理 2.7，引理 3.12推出

$$\mathrm{Reg}(\pi'^* \pi'_* g_* T_Y) = \mathrm{Reg}(g_* T_Y) = g_* T_Y \in \mathbb{D}_Z.$$

注意，

$$\mathrm{vol}\, T_Y \geq \mathrm{vol}\, \mathbb{D} > 0. \tag{4.6}$$

接下来我们断言，网 $(\pi_*T_Y)_Y$ 的 P-奇异性类型是递减的。

为此，固定一个形如（4.5）的图表。我们需要证明

$$\pi_*T_Y \preceq_P \pi'_*T_Z.$$

由于 T_Z 具有最小奇异性，显然 $g_*T_Y \preceq_{\mathcal{I}} T_Z$。特别地，引理 3.17保证了 $\pi_*T_Y \preceq_{\mathcal{I}} \pi'_*T_Z$。但根据推论 3.16， π_*T_Y 和 π'_*T_Z 都是$\mathcal{I}$-良好的，因此在此情形下， P-偏序与$\mathcal{I}$-偏序之间没有区别。断言得证。

接下来我们断言，网 $(\pi_*T_Y)_Y$ 具有一个 d_S-极限。

为此，取 α 中的一个光滑闭实 (1, 1)-形式 θ，并将 π_*T_Y写成 $\theta + \mathrm{dd^c}\varphi_Y$，其中 θ为某个拟次调和函数 φ_Y。只需证明网 $(\varphi_Y)_Y$具有一个 d_S-极限。然而，正如我们先前回顾的， d_S-伪度量对 P-等价势函数赋予 0 距离，因此只需证明递减网 $(P_\theta[\varphi_Y])_Y$ 具有一个 d_S-极限。这由（4.6）以及 [Xia，推论 6.2.6]（后者只是 Darvas–Di Nezza–Lu [DDNL21b，定理 1.1]中的完备性定理的重新表述）得出。

取一个闭正 (1,1)-流 $T \in \mathbb{D}_X$，使得

$$\pi_*T_Y \xrightarrow{d_S} T.$$

由命题 4.9 可知

$$\mathbb{D}(\pi_*T_Y) \to \mathbb{D}(T).$$

因此，我们得出结论：

$$\mathbb{D}(T) = \mathbb{D}.$$

由引理 4.7，体积 $T > 0$。令 $T = \theta + \mathrm{dd^c}\varphi$ 为某个 $\varphi \in$ 拟次调和(X, θ)，则

$$T' \coloneqq \theta + \mathrm{dd^c}P_\theta[\varphi]_{\mathcal{I}}$$

是 $\mathcal{I}$-良好的、非除子型的，并且 $\mathbb{D}(T') = \mathbb{D}(T)$。 □

设 α 是 X 上的一个修正 nef 类。对于由 T 给出的 X 上满足 $T = \mathrm{Reg}\ T \in \alpha$ 且体积为 $T > 0$ 的闭正 (1,1)-流，我们用 $\mathcal{G}(\alpha)$ 表示其集合。

定理 4.11. 存在一个自然双射，将 $\mathcal{G}(\alpha)/\sim_{\mathcal{I}}$ 映到 X 上满足 $\mathbb{D}_X = \alpha$ 的大且 *nef* 的 *b*-除子集合$\mathbb{D}$ 。

证明. 给定 $T \in \mathcal{G}(\alpha)$，我们关联到 b-除子 $\mathbb{D}(T)$。根据 引理 4.7，它是大且 nef 的。此映射显然下降为 $\mathcal{G}(\alpha)/\sim_{\mathcal{I}}$。

由定理 4.10，此映射是满射。现在证明它是单射。设 $T, T' \in \mathcal{G}(\alpha)$。假设 $\mathbb{D}(T) = \mathbb{D}(T')$，我们要证明 $T \sim_{\mathcal{I}} T\prime$。

设 E 是 X 上的一个素除子，只需证明

$$\nu(T, E) = \nu(T', E). \tag{4.7}$$

我们可以假设 E 不是 X 上的素除子，否则两边都为零 h.

选取一个爆破序列，其中心是光滑的连通

$$Y \coloneqq X_k \to X_{k-1} \to \cdots \to X_0 \coloneqq X$$

使得 E 是 Y 上关于 $X_k \to X_{k-1}$ 的例外素除子。将复合映射记为 $\pi\colon\ Y \to X$。由 命题 2.2，

$$\mathrm{H}^{1,1}(X_k, \mathbb{R}) = \mathrm{H}^{1,1}(X_{k-1}, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}\{E_k\},$$

其中 $E_k = E$ 是 $X_k \to X_{k-1}$的例外除子。

由归纳法，

$$\mathrm{H}^{1,1}(Y, \mathbb{R}) = \mathrm{H}^{1,1}(X, \mathbb{R}) \oplus \bigoplus_{i=1}^{k} \mathbb{R}\{E_i\},$$

其中 E_i 是 $X_i \to X_{i-1}$的例外除子。现在根据 引理 3.12，

$$\mathrm{Reg}\,\pi^*T = \pi^*T - \sum_{i=1}^{k} \nu(T, E_i)[E_i]. \tag{4.8}$$

In p特别地，Reg π^*T的上同调类决定了 $\nu(T,\ E)$。因此，4.7）成立 . □

推论 4.12。 在 X 上的数值有效 *b*-除子集合可自然地识别为

$$\varprojlim_{\omega}(\mathcal{G}(\alpha+\omega)/\sim_{\mathcal{I}}),$$

其中， ω 遍历 X 上的凯勒形式所组成的有向集（关于反支配的偏序），给定两个凯勒形式 $\omega\leq\omega'$ 后，过渡映射

$$\mathcal{G}(\alpha+\omega)/\sim_{\mathcal{I}}\to\mathcal{G}(\alpha+\omega')/\sim_{\mathcal{I}}$$

由映射 $G(\alpha+\omega)\ \to G(\alpha+\omega')$ 诱导，该映射将 T 发送到 $T+\omega'-\omega$。

推论 4.13。 设 $\mathbb{D}$ 是 上的一个 *Cartier b*-除子 X。则 $\mathbb{D}$ 按照定义 *4.5*是数值有效的，当且仅当它按照定义 *4.6*也是数值有效的。

这一结果是 [DF22，定理 28]的超越版本。

证明。我们只处理非平凡的蕴含。假设 $\mathbb{D}$ 按照定义 4.6的意义是数值有效的。我们要证明 $\mathbb{D}$ 按照定义 4.5的意义是数值有效的。显然，我们可以假设 $\mathbb{D}$ 是大类。取一个非除子型的闭正 (1,1)-流 T，定义在 X 上，并满足$\mathbb{D}=\mathbb{D}(T)$。

不失一般性，我们还可以假设 $\mathbb{D}$ 由某个上同调类 $\alpha\in\mathrm{H}^{1,1}(X,\mathbb{R})$ 对应的 (X,α) 实现。现在， $\mathbb{D}=\mathbb{D}(T)$ 意味着，对于每个修改 $\pi\colon Y\to X$，流π^*T 都是非除子型的。特别地， T 沿着 X 上方的每个素除子的一般 Lelong 数都为零，见 (4.8)。这意味着， T 处处的勒隆数都为零。因此， $\alpha=\{T\}$ 是数值有效的。□

推论 4.14。设 T 和 T' 是定义在 X 上的非除子型闭正(1、1)-流。假设 *{T}* $=${T'}，则以下命题等价：

(1) $\mathbb{D}(T)\leq\mathbb{D}(T')$;
(2) $T\preceq_{\mathcal{I}}T'$.

证明。 这由（4.8）得出。 □

特别地，我们得到了 [DF22，定理 A] 的超越类比。

推论 4.15。 设 $\mathbb{D}$ 是 X 上的数值有效 *b*-除子。那么，存在一个递减序列 $\mathbb{D}_i$，其由 X 上数值有效且大 *Cartier b*-除子构成，且极限为 $\mathbb{D}$。

证明。 取 ω 上的一个凯勒形式 X。根据 定理 4.10，对于每个 $i>0$，我们可以找到一个非除子型 Kähler 流 $T_i\in\mathbb{D}_X+i^{-1}\{\omega\}$ 使得

$$\mathbb{D}(T_i)=\mathbb{D}+i^{-1}\mathbb{D}(\omega).$$

我们注意到

$$T_{i+1}\sim_{\mathcal{I}}T_i.$$

这是将 推论 4.14 应用于 T_i 和 $T_{i+1}+(i^{-1}-(i+1)^{-1})\omega$得出的。令 $(T_i^j)_j$ 为 T_i 的准等奇异近似，使得

(1) T_i^j 是 $\mathbb{D}_X+i^{-1}\{\omega\}$ 中关于 $j\geq j_0(i)$ 的凯勒流，且 (2) (T_i^j)$_i$ 的奇异性类型是常数。

注意，利用准等奇异近似的 Bergman 核构造即可实现 (2)。

只需取 $\mathbb{D}_i=\mathbb{D}(T_i^{j_i})$，其中 j_i 是一个严格递增的正整数序列，且满足 $j_i\geq j_0(i)$。□

5. 交理论

设 X 是一个维数为 n 的连通紧致 Kähler 流形。我们将定义数值有效 b-除子的交数，并证明它们满足与代数类比相同的性质，参见 [DF22，定理 3。2]。

定义 5.1. 设 $\mathbb{D}_1,\dots,\mathbb{D}_n$ 是 X 上的大且 nef 的 b-除子。于是我们定义它们的交为

$$(\mathbb{D}_1,\dots,\mathbb{D}_n) \coloneqq \mathrm{vol}(T_1,\dots,T_n),$$

其中 $T_1,\dots,T_n$ 分别是 $\mathbb{D}_{1,X},\dots,\mathbb{D}_{n,X}$ 上的闭正 $(1,1)$-流，满足$\mathbb{D}(T_i) = \mathbb{D}_i$。

一般而言，如果 $\mathbb{D}_i$ 仅为数值有效，我们定义

$$(\mathbb{D}_1,\dots,\mathbb{D}_n) \coloneqq \lim_{\epsilon\to 0+} (\mathbb{D}_1+\epsilon\mathbb{D}(\omega),\dots,\mathbb{D}_n+\epsilon\mathbb{D}(\omega)),$$

其中 ω 是 X 上的凯勒形式。

由于 定理 4.10，该定义是有意义的。它不依赖于$T_1,\dots,T_n$的选取，因为根据 $\mathcal{I}$-等价，它们唯一确定，这一点已在定理 4.11中证明。

当 $\mathbb{D}_1,\dots,\mathbb{D}_n$ 均为大且数值有效时，以下由引理 5.5可知，这两个定义一致。

我们首先指出，即使 T_i的体积为零，这两个交积仍然相同。

命题 5.2。 设 $T_1,\dots,T_n$ 是 X上的闭正$(1,1)$-流。那么

$$(\mathbb{D}(T_1),\dots,\mathbb{D}(T_n)) = \mathrm{vol}(T_1,\dots,T_n).$$

这是定义的直接推论。

P命题 5.3。 定义 *5.1* 中的乘积是对称且多重$\mathbb{R}_{\geq 0}$-线性的 .

证明。 多重线性立即由 命题 3.4 得出。对称性显然。□

命题 5.4。 定义 *5.1* 中的乘积关于每个变量都是单调递增的。

证明。令t $\mathbb{D}_1$，..., $\mathbb{D}_n$和 $\mathbb{D}'$是 X上的数值有效 b-除子，满足 $\mathbb{D}_1 \leq \mathbb{D}'$。我们希望证明 tha t

$$(\mathbb{D}_1,\dots,\mathbb{D}_n) \leq (\mathbb{D}',\mathbb{D}_2,\dots,\mathbb{D}_n).$$

我们可以很容易地将情形归约为 $\mathbb{D}_1$，..., $\mathbb{D}_n$和 $\mathbb{D}'$全都是大除子。在这种情况下，取 $\mathcal{I}$-良好的非除子型闭正 $(1,1)$-流 T_1，...， T_n和 T'，使得对于所有$i=1$，...， n， $\mathbb{D}(T_i) = \mathbb{D}_i$，并且 $\mathbb{D}(T') = \mathbb{D}'$。此外，通过扰动论证，我们可以假设这些 T_i 和 T' 是凯勒流。

设 $(T_i^j)_j$是 T_i在 $i=2$，...， n上的准等奇异逼近。由命题 3.10 可得

$$\int_X T_1\wedge\cdots\wedge T_n = \lim_{j\to\infty}\int_X T_1\wedge T_2^j\wedge\cdots\wedge T_n^j.$$

只需证明对于所有 $j\geq 1$,

$$\int_X T_1\wedge T_2^j\wedge\cdots\wedge T_n^j \leq \int_X T'\wedge T_2^j\wedge\cdots\wedge T_n^j.$$

因此，我们归结为以下情形： T_2，....., T_n具有解析奇点。经过解消后，我们可以假设它们沿 $\mathbb{Q}$-除子具有对数奇点。由定理 3.13，我们还可进一步归结为以下情形： T_2，....., T_n具有有界局部势。对T_2，....., T_n添加一个凯勒形式作扰动后，我们还可假设$\{T_2\}$.....，$\{T_n\}$是凯勒类。由命题 3.6，最终可归结为以下情形： T_2，....., T_n是凯勒形式。在这种情况下，结论显然成立。□

引理 5.5。设 ω 是 X 上的一个凯勒形式。取一个紧集 $K \subseteq \mathrm{H}^{1,1}(X, \mathbb{R})$。设 $\mathbb{D}_1, \ldots\ldots, \mathbb{D}_n$ 是 X 上的数值有效 b-除子，满足对每个 $i = 1, \ldots\ldots, n$，都有 $\mathbb{D}_i, x \in K$。那么存在一个常数 C，仅依赖于 X、K、$\{\omega\}$，使得对任意 $\epsilon \in [0, 1]$，有

$$0 \leq (\mathbb{D}_1 + \epsilon\mathbb{D}(\omega), \ldots, \mathbb{D}_n + \epsilon\mathbb{D}(\omega)) - (\mathbb{D}_1, \ldots, \mathbb{D}_n) \leq C\epsilon.$$

证明。这是线性性的一个简单推论命题 5.3。 □

我们首先进行一致性检验。

命题 5.6。设 $\mathbb{D}$ 是 X 上的数值有效 b-除子，则

$$(\mathbb{D}, \ldots, \mathbb{D}) = \mathrm{vol}\,\mathbb{D}.$$

证明。利用引理 5.5 和（4.4），我们可以很容易地将问题归结为 是 nef 且大的情形。在这种情况下，取 （1，1）-流 T，其为 $\mathbb{D}_X$ 中的非除子型闭正 $\mathbb{D}$（T） $= \mathbb{D}$。于是我们需要证明

$$\mathrm{vol}\,\mathbb{D} = \mathrm{vol}\,T,$$

这由引理 4.7证明。 □

命题 5.7。设 $\mathbb{D}_1$，...，$\mathbb{D}_n$ 是位于 X 上的数值有效 b-除子。则

$$(\mathbb{D}_1, \ldots, \mathbb{D}_n) \geq \prod_{i=1}^{n} (\mathrm{vol}\,\mathbb{D}_i)^{1/n}.$$

证明。不妨设 体积 $\mathbb{D}_i > 0$ 对每个 $i = 1$，...，n 均成立，因为否则无事可证。在这种情况下，我们的断言由命题 3.7得出。 □

命题 5.8。定义 *5.1* 中的乘积在以下意义下是上半连续的。设 $(\mathbb{D}_i^j)^{j\in J}$ 是位于 X 上的数值有效 b-除子网，其极限为 $\mathbb{D}_i$ 对每个 $i = 1$，...，n均成立。则

$$\overline{\lim_{j\in J}} \left(\mathbb{D}_1^j, \ldots, \mathbb{D}_n^j\right) \leq (\mathbb{D}_1, \ldots, \mathbb{D}_n).$$

证明。**步骤 1**。首先假设所有 $\mathbb{D}_i^j$ 和 $\mathbb{D}_i$ 都是大除子。

取 $\mathcal{I}$-良好的非除子型闭正 $(1, 1)$-流 T_i^j 和 T_i，使得 $\mathbb{D}(T_i^j) = \mathbb{D}_i^j$ 并且 $\mathbb{D}(T_i) = \mathbb{D}_i$。注意，根据我们的假设以及定理 4.11的证明，对于任意位于E 之上的 X素除子，我们有

$$\lim_{j\in J} \nu(T_i^j, E) = \nu(T_i, E).$$

因此，我们的断言由定理 3.11得出。

步骤 2。接下来处理一般情形。

取一个凯勒形式 ω 在 X上。于是根据引理 5.5，对任意 $\epsilon \in (0, 1]$, ，我们有

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{j\in J}} \left(\mathbb{D}_1^j, \ldots, \mathbb{D}_n^j\right) &\leq \overline{\lim_{j\in J}} \left(\mathbb{D}_1^j + \epsilon\mathbb{D}(\omega), \ldots, \mathbb{D}_n^j + \epsilon\mathbb{D}(\omega)\right) \\ &\leq (\mathbb{D}_1 + \epsilon\mathbb{D}(\omega), \ldots, \mathbb{D}_n + \epsilon\mathbb{D}(\omega)) \\ &\leq (\mathbb{D}_1, \ldots, \mathbb{D}_n) + C\epsilon.\end{aligned}$$

由于 ϵ 是任意的，我们的断言得证。 □

命题 5.9。定义 *5.1*中的乘积在每个变量上对递减网连续。换言之，若$(\mathbb{D}_i^j)^{j\in J}$ $(i = 1, \ldots\ldots, n)$ 是 X上的数值有效 b-除子的递减网 $\mathbb{D}_i$，其极限分别为

$$\lim_{j\in J} \left(\mathbb{D}_1^j, \ldots, \mathbb{D}_n^j\right) = (\mathbb{D}_1, \ldots, \mathbb{D}_n).$$

证明。这直接由命题 5.4和命题 5.8推出。 □

备注 5.10。如 [Xia22 所示；Xia24], 若 X 是射影的，且 $\mathbb{D}_1$，.. .， $\mathbb{D}_n$ 是代数的，则这种交理论与 Dang–Favre 理论一致。

更准确地说，这些论文处理了上同调类 $\mathbb{D}_1$、x、.....、 $\mathbb{D}_n$、x属于 Néron–Severi 群 $\mathrm{NS}^1(X)$的情形。通过缩放，如果这些上同调类属于 $\mathbb{Q}$-spanof$\mathrm{NS}^1(X)$，结论仍然成立。最后，由命题 5.9，一般情形下结论也成立。

6. b-除子的光滑拉回

设 X 是一个维数为 n的连通紧致 Kähler 流形。考虑另一个连通紧致 Kähler 流形 Y到 $Y \to X$ 的相对维数为 m 的光滑态射f。给定一个定义在 X上的数值有效 b-除子 $\mathbb{D}$，我们将定义一个定义在 Y上的函子性拉回 $f^*\mathbb{D}$。

本节纯粹是为了辅助之用。因此，我们不追求最一般的表述。事实上，即使 f 不光滑，也可以利用 [BJ22] 的非阿基米德理论定义拉回。在下一节中，我们将需要本节构造的一个特殊情形，其中 Y 是 X上的一个射影丛。

我们首先假设 $\mathbb{D}$ 是大且数值有效的。根据 定理 4.11，我们可以在 $\mathbb{D}_X$ 中找到一个非除子型闭正 $(1,1)$-流 T，使得 $\mathbb{D}(T) = \mathbb{D}$。此外， T在$\mathcal{I}$-等价意义下唯一。

因此我们可以定义

$$f^*\mathbb{D} \coloneqq \mathbb{D}(f^*T).$$

注意，根据 [Xia，命题 1.45]，， f^*T 的 $\mathcal{I}$-等价类与 T的选择无关。因此， $f^*\mathbb{D}$是定义良好的、位于 Y 上的数值有效 b-除子，与 T的选择无关。

注意到 f^*T 是非除子型的，因为当 f 为投影或 étale 时，情况就是如此。特别地，$(f^*\mathbb{D})_Y = f^*\mathbb{D}_X$。

一般来说，如果 $\mathbb{D}$ 不一定是数值有效的，我们取 ω 上的一个凯勒形式 X，并定义

$$f^*\mathbb{D} \coloneqq \lim_{\epsilon \to 0+} f^* \left(\mathbb{D} + \epsilon \mathbb{D}(\omega)\right).$$

注意到， $f^* \left(\mathbb{D} + \epsilon \mathbb{D}(\omega)\right)$ 关于 $\epsilon > 0$递增，因此该极限是有意义的。显然，这一定义与 ω的选择无关。注意到

$$(f^*\mathbb{D})_Y = f^*\mathbb{D}_X. \tag{6.1}$$

命题 6.1。 上述定义的拉回 f^* 是 $\mathbb{R}_{\geq 0}$-线性的。此外，对于 X上的任意闭正 $(1,1)$-流 T，有

$$\mathbb{D}(f^*T) = f^*\mathbb{D}(T). \tag{6.2}$$

证明。 $\mathbb{R}_{\geq 0}$-线性是显然的。

我们证明（6.2）。取 ω 上的一个凯勒形式 X。分别处理以下两种情况即可： T 或者是非除子型的，或者是除子型的。在第一种情况下，根据定义，

$$f^*\mathbb{D}(T) = \lim_{\epsilon \to 0+} \mathbb{D}\left(f^*(T + \epsilon\omega)\right) = \mathbb{D}(f^*T).$$

接下来我们假设 T 是除子型的，设 $T = \sum_i c_i [E_i]$。在这种情况下，由（3.12）和 命题 4.9，我们可以假设 T 只有有限个分量。由线性性，只需考虑$T = [E]$ 是定义在 X上的某个素除子 E 的情形。在这种情况下，我们有 $f^*T = [f^{-1}E]$。因此， （6.2）两边均为零。 □

拉回具有预期的函子性。

命题 6.2. 设 $g\colon Z \to Y$ 是从连通紧致 *Kähler* 流形 Z出发的另一个光滑态射。那么对于 X上的任意数值有效 *b*-除子 $\mathbb{D}$，我们有

$$(f \circ g)^*\mathbb{D} = g^* f^* \mathbb{D}. \tag{6.3}$$

证明。 我们可以假设 $\mathbb{D}$ 是大的。于是存在一个非除子型闭正 (1，1)-流$T \in \mathbb{D}_X$，使得 $\mathbb{D}(T) = \mathbb{D}_X$。

由 命题 6.1可知， （6.3）两边都等于 $\mathbb{D}(g^*f^*T)$。 □

命题 6.3. 设 $\pi\colon X' \to X$ 为一个修改。考虑笛卡尔图

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{f'} & X' \\ {\scriptstyle \pi_Y}\downarrow & \square & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ Y & \xrightarrow{f} & X. \end{array} \tag{6.4}$$

，

那么对于任意一个在 X 上的数值有效 b-除子 $\mathbb{D}$，我们有

$$(f^*\mathbb{D})_{Y'} = f'^*\mathbb{D}_{X'}. \tag{6.5}$$

由于 f的光滑性， π_Y 也是一个修改，因此（6.5）的左端有意义。

证明。 不妨假设 $\mathbb{D}$ 是大类。取一个非除子型闭正 (1,1)-流 T，使其属于 $\mathbb{D}_X$且满足 $\mathbb{D} = \mathbb{D}(T)$。由于 f'^*保持非除子流和除子型流不变，我们有

$$f'^* \operatorname{Reg} \pi^* T = \operatorname{Reg} \pi_Y^*(f^*T).$$

因此,

$$\{\operatorname{Reg} \pi_Y^*(f^*T)\} = f'^*\{\operatorname{Reg} \pi^*T\}.$$

断言得证。 □

命题 6.4。 设 $\mathbb{D}, \mathbb{D}'$ 是 X 上的数值有效 b-除子，且满足 $\mathbb{D}_X = \mathbb{D}'_X$。那么以下条件等价:

(1) $\mathbb{D} \leq \mathbb{D}'$; *(2)* $f^*\mathbb{D} \leq f^*\mathbb{D}'$。

证明。 不妨设 $\mathbb{D}$ 和 $\mathbb{D}'$ 都很大。取 $\mathbb{D}_X$ 中的非除子型闭正 (1，1)-流 T 和 T'，使得 $\mathbb{D} = \mathbb{D}(T)$ 且 $\mathbb{D}' = \mathbb{D}(T')$。

(1) $\Longrightarrow$ (2)。假设 (1)。由推论 4.14 可得 $T \preceq_{\mathcal{I}} T'$。根据 [Xia，命题 1.4，5],我们有 $f^*T \preceq_{\mathcal{I}} f^*T'$，因此由（6.1）及推论 4.14 再次可得 $f^*\mathbb{D} \leq f^*\mathbb{D}'$。(2) $\Longrightarrow$ (1)。假设 (2)。取定一个位于 X上方的素除子 E。只需证明

$$\nu(T, E) \geq \nu(T', E). \tag{6.6}$$

取一个修改 π: $X' \to X$ 使得 E 是 X'上的素除子。构造笛卡尔图（6.4）。那么由推论 4.14,

$$\nu(f^*T, f'^{-1}E) \geq \nu(f^*T', f'^{-1}E),$$

得益于 [Xia，命题 1.4。5],这正是（6.6）。 □

命题 6.5。 设 θ 是 X 上表示一个大上同调类的光滑闭实 （1，1）-形式。设 $(\varphi_i)_{i\in I}$ 是 $\mathrm{PSH}(X, \theta)$ 中的一个网，且 $\varphi \in \mathrm{PSH}(X, \theta)$。假设 $\varphi_i \xrightarrow{d_S} \varphi$，则

$$f^*\varphi_i \xrightarrow{d_S} f^*\varphi.$$

证明。 由于 $\mathrm{PSH}(X, \theta)$ 是一个伪度量空间，我们可以假设 $(\varphi_i)_i$ 是一个序列。将 θ 替换为 $\theta + \omega$ 对于某个凯勒形式 ω 在 X 上，我们可以假设这些 φ_i 的非极化质量有一个正的常数下界。于是由 [DDNL18，命题 4。2] 以及 [Xia，推论 6.2。11] 可知，不妨假设 $(\varphi_i)_i$ 是递增的或递减的。

递增情形由 [Xia，推论 6.2 得出。3]。我们假设 $(\varphi_i)_i$ 是一个递减序列。取一个凯勒形式 Ω 于 Y上。由 [Xia，推论 6.2，5], 接下来只需证明

$$\lim_{i\to\infty} \int_Y (f^*\theta + \Omega + \mathrm{dd^c} f^*\varphi_i)^{n+m} = \int_Y (f^*\theta + \Omega + \mathrm{dd^c} f^*\varphi)^{n+m}.$$

经二项式展开后，只需证明对任意 $a = 0$，……， n，都有

$$\lim_{i\to\infty} \int_Y (f^*\theta + \mathrm{dd^c} f^*\varphi_i)^a \wedge \Omega^{n+m-a} = \int_Y (f^*\theta + \mathrm{dd^c} f^*\varphi)^a \wedge \Omega^{n+m-a},$$

或者等价地,

$$\lim_{i\to\infty} \int_X (\theta + \mathrm{dd^c}\varphi_i)^a \wedge f_*\Omega^{n+m-a} = \int_X (\theta + \mathrm{dd^c}\varphi)^a \wedge f_*\Omega^{n+m-a}.$$

由于 f 是光滑的，形式 $f_*\Omega^{n+m-a}$ 也光滑。因此，我们的断言由 [Xia24，定理 1 得出。9]。 □

推论 6.6. 设$(T_i)_{i\in I}$ 是定义在 X 上的闭正 (1,1) 流网，且 T 是定义在 X 上的闭正 (1, 1) 流。假设 $T_i \Longrightarrow T$，则 $f^*T_i \Longrightarrow f^*T$。

证明. 这直接由命题 6.5得出。 □

7. b-除子的迹算子

设 X 是一个维数为 n 的连通紧致 Kähler 流形， Z 是 X 中一个维数为 m 的光滑不可约解析集。设 $\mathbb{D}$ 是 X 上的数值有效 b-除子。

本节将研究如何将 X 上的数值有效 b-除子限制到 Z 上。解析情形下， [DX24a] 已研究过这个问题。我们将采用与 [Xia 第 8], 章所研究的方法略有不同的方案，该方案在零质量情形下表现更佳。

7.1. 解析理论。设 T 是 X 上一个表示上同调类 α 的闭正 (1，1)-流。假设 $\nu(T,\ Z) = 0$。

考虑 T 的准等奇异逼近 $(T_j)_j$ ，其中流 T_j 不一定属于 α。那么 $\nu(T_j,\ Z) = 0$ ，因此 $T_j|_Z$ 有意义。接着，我们将 $\mathrm{Tr}_Z T$ 定义为 Z 上任意满足 $T_j|_Z \xrightarrow{d_S} \mathrm{Tr}_Z T$ 的闭正 (1，1)-流。

可以证明，$\mathrm{Tr}_Z T$ 在模去 P-等价的意义下总是良定义的，并且与序列 $(T_j)_j$的选取无关。

此外，若 T 是凯勒流，则$\mathrm{Tr}_Z T$ 可由$\alpha|_Z$中的凯勒流表示。

详见 [Xia，第 8]章。

7.2. 余维1情形。我们假设 Z 是一个除子，使得 $m = n -$ 1.

暂且假设 $\mathbb{D}$ 是一个卡蒂埃数值有效 b-除子。令（$\pi\colon\ Y \to X,\ \alpha$）为 $\mathbb{D}$的一个实现。

令 Z_Y 表示 Z 的严格变换， $p_Y\colon\ Z_Y \to Z$ 表示 π的限制。这些记号总结于以下交换图中:

$$\begin{array}{ccc} Z_Y & \hookrightarrow & Y \\ {\scriptstyle p_Y}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ Z & \hookrightarrow & X. \end{array} \tag{7.1}$$

将 π 替换为进一步的修改后，我们可以假设 Z_Y 是光滑的。这可由嵌入消解 [BM97; Wło09] 得出。在这种情况下，我们将 $\mathbb{D}$ 在 Z上的迹 $\mathrm{Tr}_Z \mathbb{D}$ 定义为由（$p_Y, \alpha|_{Z_Y}$）实现的、位于 Z 上的 nef Cartier b-除子。请注意，我们在措辞上略有不严谨，因为一般而言， p_Y 并非修改。更准确地说，这里指的是，对于任何支配 Z_Y的修改 $Z' \to Z$ ，$\mathrm{Tr}_Z \mathbb{D}$ 定义为由（$Z' \to Z, \beta$）实现的、位于 Z上的 nef Cartier b-除子，其中 β 是 $\alpha|_{Z_Y}$的拉回。

引理 7.1. 假设 $\mathbb{D}$ 是一个 *Cartier nef b*-除子，那么上文定义的 迹$_Z \mathbb{D}$ 与 π的选择无关。

证明。 给定 $\mathbb{D}$的另一个实现（$\pi'\colon\ Y' \to X, \alpha'$），我们要证明它定义了相同的 $\mathrm{Tr}_Z \mathbb{D}$。我们可以假设 π' 支配 π ，从而得到如下交换图:

$$\begin{array}{ccccc} & & Z_{Y'} & \hookrightarrow & Y' \\ & & {\scriptstyle \tau}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \sigma} \\ & {\scriptstyle p_{Y'}}\swarrow & Z_Y & \hookrightarrow & Y \ \searrow{\scriptstyle \pi'} \\ & & {\scriptstyle p_Y}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ & & Z & \hookrightarrow & X. \end{array}$$

记号 $\tau, \sigma, p_{Y'}$ 具有显而易见的含义。我们可以假设 Z_Y和 $Z_{Y'}$都是光滑的。

我们的断言可表述如下:

$$\tau^* \left(\alpha|_{Z_Y}\right) = \left(\sigma^* \alpha\right)|_{Z_{Y'}},$$

这显然成立，因为图表中的上方方块是交换的。 □

命题 7.2。 设 $\mathbb{D}'$ 是 X 上另一个数值有效 *Cartier b*-除子。假设 $\mathbb{D}' \leq \mathbb{D}$ 和 $\mathbb{D}'_X = \mathbb{D}_X$，则 $\mathrm{Tr}_Z \mathbb{D}' \leq \mathrm{Tr}_Z \mathbb{D}$。

证明。 我们在同一个修改上取 $\mathbb{D}'$和 $\mathbb{D}$ 的实现$(\pi\colon Y \to X,\ \alpha')$和$(\pi,\ \alpha)$。由假设可知 $\alpha \geq \alpha'$，且 $\alpha - \alpha'$ 由一个有效的 $\mathbb{R}$-除子表示，其支撑不包含Z_Y。因此，$\alpha|_{Z_Y} \geq \alpha'|_{Z_Y}$。于是，我们的断言成立。□

引理 7.3。 设 T 是一个具有解析奇点的闭正$(1,\ 1)$-流。 n

$$\mathrm{Tr}_Z \mathbb{D}(T) = \mathbb{D}\left(\mathrm{Tr}_Z \left(T - \nu(T, Z)[Z]\right)\right). \tag{7.2}$$

证明。 设 $\pi\colon Y \to X$ 是一个修改，使得

$$\pi^* T = [D] + R,$$

其中，D 是一个有效的 $\mathbb{Q}$-除子，且 R 是一个具有局部有界势的闭正$(1,\ 1)$-流。我们可以假设 Z 的严格变换 Z_Y 光滑。根据定义，(7.2)的两边都是由$(Z_Y,\ \{R\}|_{Z_Y})$实现的卡蒂埃数值有效 b-除子。□

一般而言，当 $\mathbb{D}$ 是数值有效且大但不一定是卡蒂埃时，取一个 $\mathcal{I}$-良好的非除子型凯勒流 $T \in \mathbb{D}_X$，使得 $\mathbb{D} = \mathbb{D}(T)$。考虑与 T属于同一上同调类的 T 的准等奇异逼近 $(T_i)_i$，定义

$$\mathrm{Tr}_Z \mathbb{D} = \lim_{i \to \infty} \mathrm{Tr}_Z \mathbb{D}(T_i).$$

由 命题 7.2，右端是一个递减序列，因而极限存在。

引理 7.4。 $_Z \mathbb{D}$ Tr的定义与所作选择无关，并且

$$\mathrm{Tr}_Z \mathbb{D} = \mathbb{D}(\mathrm{Tr}_Z T). \tag{7.3}$$

证明。 只需证明（7.3），但这由 命题 4.9 以及 d_S迹算子沿递减序列的-连续性得到。 □

更一般地，如果 $\mathbb{D}$ 仅是数值有效的，我们取 X上的一个凯勒形式 ω，并令

$$\mathrm{Tr}_Z \mathbb{D} := \lim_{\epsilon \to 0+} \mathrm{Tr}_Z \left(\mathbb{D} + \epsilon \mathbb{D}(\omega)\right).$$

该定义与 ω的选择无关。

定理 7.5。 设 T 是一个闭正 $(1,\ 1)$-流，使得 $\mathrm{Tr}_Z (T - \nu(T,\ Z)[Z])$ 可以由 $\{T - \nu(T,\ Z)[Z]\}|_Z$ 中的一个闭正 $(1,\ 1)$-流表示。取这样一个代表元。于是

$$\mathrm{Tr}_Z \mathbb{D}(T) = \mathbb{D}\left(\mathrm{Tr}_Z \left(T - \nu(T, Z)[Z]\right)\right).$$

证明。 将 T 替换为 $T + \epsilon\omega$，其中取某个 $\epsilon > 0$ 和某个凯勒形式 ω，我们可以假设 $\mathbb{D}(T)$ 是大类。

将 换 T 为 $T - \nu(T,\ Z)[Z]$，我们可以假设 $\nu(T,\ Z) = 0$。然后我们需要证明 t

$$\mathrm{Tr}_Z \mathbb{D}(T) = \mathbb{D}\left(\mathrm{Tr}_Z T\right).$$

这里，$\mathrm{Tr}_Z T$ 属于 $\{T\}|_Z$。

设 $(T_j)_j$ 是 T 在与 T相同的上同调类中的准等奇异逼近。于是 $T_j \xrightarrow{d_S} T$。因此，由 命题 4.9，可得

$$\mathbb{D}(T_i) \to \mathbb{D}(T).$$

根据定义和命题 4.9，

$$\mathrm{Tr}_Z \mathbb{D}(T) = \lim_{i \to \infty} \mathrm{Tr}_Z \mathbb{D}(T_i), \quad \mathbb{D}\left(\mathrm{Tr}_Z T\right) = \lim_{i \to \infty} \mathbb{D}(T_i|_Z).$$

因此我们的断言由引理 7.3得出。

□

7.3. 高余维情形。 现在假设 Z 的余维至少为 2。在这种情况下，与解析理论类似，我们无法限制一般的数值有效 b-除子。我们考虑以下交换图：

$$\begin{array}{ccc} E & \hookrightarrow & \mathrm{Bl}_Z X \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ Z & \hookrightarrow & X, \end{array} \tag{7.4}$$

其中，$p\colon \mathrm{Bl}_Z X \to X$ 是沿着 Z 对 X 进行的爆破，E 是例外除子。注意，$q\colon E \to Z$ 可自然地识别为 X中 Z 的射影化法丛。

设 $\mathbb{D}$ 是 X 上的数值有效 b-除子，使得

$$\mathbb{D}_{\mathrm{Bl}_Z X} = p^*\mathbb{D}_X. \tag{7.5}$$

假设（7.5），则可以定义迹。为此，我们将借助解析理论。

命题 7.6。 *设 $\mathbb{D}$ 是 X 上的数值有效 b-除子，且满足 (7.5)。那么存在唯一的数值有效 b-除子 迹$_Z\,\mathbb{D}$，定义在 Z 上，使得*

$$q^*\,\mathrm{Tr}_Z\,\mathbb{D} = \mathrm{Tr}_E\,\mathbb{D}, \tag{7.6}$$

其中，$\mathbb{D}$ 以显然的方式视为Bl爆破$_Z\,X$ 上的数值有效 b-除子。

拉回 q^* 定义见第 6 节。

我们先回顾以下分解：

$$\mathrm{H}^{1,1}(E,\mathbb{R}) = \mathrm{H}^{1,1}(Z,\mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}\zeta, \tag{7.7}$$

其中 ζ 是射影丛的典范类 q。例如，参见 [RYY19，命题 3。3]这一分解也说明了我们为何需要施加条件（7.5）。

证明。由命题 6.3、（7.5）和（7.7），$\mathrm{Tr}_Z\,\mathbb{D}$ 的根必然是$(\mathrm{Tr}_E\,\mathbb{D})_E$ 关于分解（7.7）的第一分量。由命题 6.4，数值有效 b-除子$\mathrm{Tr}_Z\,\mathbb{D}$ 若存在则唯一。

取 ω 上的一个凯勒形式 X。只需证明对任意$\mathrm{Tr}_Z(\mathbb{D}+\epsilon\mathbb{D}(\omega))$ 均存在 $\epsilon>0$。事实上，若已证明这些对象存在，那么由命题 6.4可知$\mathrm{Tr}_Z(\mathbb{D}+\epsilon\mathbb{D}(\omega))$ 关于 ϵ递增，因此可定义

$$\mathrm{Tr}_Z\,\mathbb{D} \coloneqq \lim_{\epsilon\to 0+} \mathrm{Tr}_Z\left(\mathbb{D}+\epsilon\mathbb{D}(\omega)\right)$$

便足够了。

因此，我们可以假设存在一个非除子型 Kähler 流 T 在 $\mathbb{D}_X$ 中，使得$\mathbb{D}=\mathbb{D}(T)$。于是（7.5）可化为 $\nu(T,Z)=0$。特别地，$\mathrm{Tr}_Z\,T$有定义，并且可由 $\{T\}|_Z$中的一个凯勒流表示。我们固定这样一个代表元。事实上，我们断言

$$\mathrm{Tr}_E\,\mathbb{D} = q^*\mathbb{D}(\mathrm{Tr}_Z\,T). \tag{7.8}$$

事实上，由于命题 6.1，我们知道

$$q^*\mathbb{D}(\mathrm{Tr}_Z\,T) = \mathbb{D}(q^*\,\mathrm{Tr}_Z\,T).$$

根据定理 7.5，（7.8）可化为

$$\mathbb{D}(q^*\,\mathrm{Tr}_Z\,T) = \mathbb{D}(\mathrm{Tr}_E(p^*T)). \tag{7.9}$$

现在，推论 6.6 和命题 4.9 使我们可以归结为如下情形：T 具有解析奇点，而（7.9）最终化为

$$\mathbb{D}\left(q^*(T|_Z)\right) = \mathbb{D}\left((p^*T)|_E\right),$$

这由（7.4）的交换性立即得出。 □

定义 7.7。 设 $\mathbb{D}$ 是定义在 X 上满足（7.5）的数值有效 b-除子。则 $\mathrm{Tr}_Z\,\mathbb{D}$ 定义为定义在 Z 上的唯一数值有效 b-除子，满足（7.6）。

利用迹算子的解析理论，可以轻易推导出迹 $\mathrm{Tr}_Z \mathbb{D}$ 的基本性质。这里省略这些显而易见的转换。

b-除子的迹算子可以用非阿基米德度量自然地解释，参见 [Xia25a]。

参考文献

[BBGHdJ22] A. M. Botero、J. I. Burgos Gil、D. Holmes 和 R. de Jong。奇异厄米线丛的陈-韦伊公式与希尔伯特-塞缪尔公式。Doc. Math. 27（2022年），第 2563–2624 页。网址：https://doi.org/10.4171/dm/x36。[BBJ21] R. J. Berman、S. Boucksom 和 M. Jonsson。丘-田-唐纳森猜想的变分方法。J. Amer. Math. Soc. 34.3（2021年），第 605–652 页。网址：https://doi.org/10.1090/jams/964。[BDPP13] S. Boucksom、J.-P. Demailly、M. Păun 和 T. Peternell。紧凯勒流形的伪有效锥与负柯达伊拉维数的簇。J. Algebraic Geom. 22.2（2013年），第 201–248 页。网址：https://doi.org/10.1090/S1056-3911-2012-00574-8。[BEGZ10] S. Boucksom、P. Eyssidieux、V. Guedj 和 A. Zeriahi。大上同调类中的蒙日-安培方程。Acta Math. 205.2（2010年），第 199–262 页。网址：https://doi.org/10.1007/s11511-010-0054-7。[BFJ08] S. Boucksom、C. Favre 和 M. Jonsson。赋值与拟凸奇点。Publ. Res. Inst. Math. Sci. 44.2（2008年），第 449–494 页。网址：https://doi.org/10.2977/prims/1210167334。[BJ22] S. Boucksom 和 M. Jonsson。平凡赋值域上的全局多重势理论。Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) 31.3（2022年），第 647–836 页。网址：https://doi.org/10.5802/afst.170。[BM97] E. Bierstone 和 P. D. Milman。通过爆破局部不变量的最大层，在零特征下进行典范消奇。Invent. Math. 128.2（1997年），第 207–302 页。网址：https://doi.org/10.1007/s002220050141。[Bou02] S. Boucksom。《紧复流形的正锥》。博士论文。约瑟夫·傅里叶大学（格勒诺布尔一大），2002年。[BT87] E. Bedford 和 B. A. Taylor。细拓扑、希洛夫边界与（dd^c）。J. Funct. Anal. 72.2（1987年），第 225–251 页。网址：https://doi.org/10.1016/0022-1236(87)90087-5。[Cao14] J. Cao。紧凯勒流形上的数值维数与川俣-维赫韦格-纳德尔型消失定理。Compos. Math. 150.11（2014年），第 1869–1902 页。网址：https://doi.org/10.1112/S0010437X14007398。[CT22] T. C. Collins 和 V. Tosatti。Kähler 流形上的限制体积。Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) 31.3（2022年），第 907–947 页。网址：https://doi.org/10.5802/afst.170。[DDNL18] T. Darvas、E. Di Nezza 和 C. H. Lu。非多重极化乘积的单调性与具有给定奇性的复蒙日-安培方程。Anal. PDE 11.8（2018年），第 2049–2087 页。网址：https://doi.org/10.2140/apde.2018.11.2049。[DDNL21a] T. Darvas、E. Di Nezza 和 C. H. Lu。体积的对数凹性与具有给定奇性的复蒙日-安培方程。Math. Ann. 379.1-2（2021年），第 95–132 页。网址：https://doi.org/10.1007/s00208-019-01936-y。[DDNL21b] T. Darvas、E. Di Nezza 和 H.-C. Lu。奇异性类型的度量几何。J. Reine Angew. Math. 771（2021年），第 137–170 页。网址：https://doi.org/10.1515/crelle-2020-0019。[Dem12a] J.-P. Demailly。复解析与微分几何。https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/manuscripts/agbook.pdf。2012年。[Dem12b] J.-P. Demailly。代数几何中的解析方法。第 1 卷。现代数学综述。International Press，马萨诸塞州萨默维尔；高等教育出版社，北京，2012年，第 viii+231 页。

[Dem85] J.-P. Demailly。蒙日-安培测度与仿射代数簇的几何刻画。Mém. Soc. Math. France (N.S.) 19（1985年），第 124 页。[DF21] N.-B. Dang 和 C. Favre。动力次数的谱解释及其应用。Ann. of Math. (2) 194.1（2021年），第 299–359 页。网址：https://doi.org/10.4007/annals.2021.194.1.5。[DF22] N.-B. Dang 和 C. Favre。数值有效除子类的交理论。Compos. Math. 158.7（2022年），第 1563–1594 页。网址：https://doi.org/10.1112/s0010437x22007515。[DPS01] J.-P. Demailly、T. Peternell 和 M. Schneider。紧致 Kähler 流形上的伪有效线丛。Internat. J. Math. 12.6（2001年），第 689–741 页。网址：https://doi.org/10.1142/S0129167X01000861。[DRWN+26] T. Darvas、R. Reboulet、D. Witt Nyström、M. Xia 和 K. Zhang。超越奥孔科夫体。J. Differential Geom. 132.1（2026年），第 135–178 页。网址：https://doi.org/10.4310/jdg/1766433802。[DX22] T. Darvas 和 M. Xia。测试配置的闭包与代数奇点类型。Adv. Math. 397（2022年），论文编号 108198，共 56 页。网址：https://doi.org/10.1016/j.aim.2022.108198。[DX24a] T. Darvas 和 M. Xia。紧凯勒流形上拟多重次调和函数的迹算子。Trans. Amer. Math. Soc.（即将出版）（2024年）。arXiv：2403.08259 [math.DG]。[DX24b] T. Darvas 和 M. Xia。伪有效线丛的体积与部分平衡。《几何与拓扑》28.4（2024年），第 1957–1993 页。网址：https://doi.org/10.2140/gt.2024.28.1957。[DXZ25] T. Darvas、M. Xia 和 K. Zhang。研究伪有效类的非阿基米德度量的一种超越方法。Comment. Math. Helv. 100.2（2025年），第 269–322 页。网址：https://doi.org/10.4171/cmh/586。[Ful98] W. Fulton。交理论。第二版。第 2 卷。数学及其边缘领域成果。第 3 辑。现代数学综述系列[数学及相关领域成果。第 3 辑。现代数学综述系列]。Springer-Verlag，柏林，1998年，第 xiv+470 页。网址：https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1700-8。[GZ07] V. Guedj 和 A. Zeriahi。拟拟凸函数的加权蒙日-安培能量。J. Funct. Anal. 250.2（2007年），第 442–482 页。网址：https://doi.org/10.1016/j.jfa.2007.04.018。[Hir75] H. Hironaka。复解析几何中的平坦化定理。Amer. J. Math. 97（1975年），第 503–547 页。网址：https://doi.org/10.2307/2373721。[McC21] N. McCleerey。紧凯勒流形上的多重次调和支撑流。2021年。arXiv：2106.12017 [math.CV]。[MM07] X. Ma 和 G. Marinescu。全纯莫尔斯不等式与伯格曼核。第 254 卷。数学进展。Birkhäuser Verlag，巴塞尔，2007年，第 xiv+422 页。[RWN14] J. Ross 和 D. Witt Nyström。解析测试配置与测地线射线。J. Symplectic Geom. 12.1（2014年），第 125–169 页。网址：https://doi.org/10.4310/JSG.2014.v12.n1.a5。[RYY19] S. Rao、S. Yang 和 X. Yang。复流形爆破的多尔博上同调。J. Math. Pures Appl. (9) 130（2019年），第 68–92 页。网址：https://doi.org/10.1016/j.matpur.2019.01.016。[Tru24] A. Trusiani。相对丘-田-唐纳森猜想与稳定性阈值。Adv. Math. 441（2024年），论文编号 109537，共 95 页。网址：https://doi.org/10.1016/j.aim.2024.109537。[Wło09] J. Włodarczyk。解析空间的奇点消解。2008 年 Gökova 几何-拓扑会议论文集，Gökova 几何/拓扑会议（GGT）。2009年，第 31–63 页。

[WN19] D. Witt Nyström. 非极化 Monge-Ampère 质量的单调性。《印第安纳大学数学杂志》68.2 (2019), pp. 579–591. url: https://doi.org/10.1512/iumj.2019.68.7630.[Xia] M. Xia. 全局多重势理论中的奇点。url: https://mingchenxia.github.io/Lectures/SGPT2.pdf.[Xia22] M. Xia. 多重势理论稳定性阈值。IMRN (2022). url: https://doi.org/10.1093/imrn/rnac186.[Xia24] M. Xia. 向量丛上的非极性乘积与陈-韦伊公式。Math. Ann. 390.3 (2024), pp. 3239–3316. url: https://doi.org/10.1007/s00208-024-02838-4.[Xia25a] M. Xia. 超越非阿基米德度量上的运算。凸与复：几何中正性的视角。Vol. 810.《当代数学》美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2025, pp. 271–293. url: https://doi.org/10.1090/conm/810/16216.[Xia25b] M. Xia. 非阿基米德度量的部分 Okounkov 体与 Duistermaat-Heckman 测度。《几何与拓扑》29.3 (2025), pp. 1283–1344. url: https://doi.org/10.2140/gt.2025.29.1283.[Xia25c] M. Xia. 超越 b-除子 II。链接。2025。Mingchen Xia，查尔姆斯理工大学与中国科学技术大学几何与物理研究所。电子邮箱地址，xiamingchen2008@gmail.com主页，https://mingchenxia.github.io/。