arXiv:2603.14359v1 [math.OA] 15 Mar 2026

# 强 1-有界内 amenable 群

BEN HAYES 和 SRIVATSAV KUNNAWALKAM ELAYAVALLI

Abstract. 本文证明，有限表示的 ICC 内 amenable 群会产生强 1-有界的 $\mathrm{II}_1$ 因子。

## 1. Introduction

基于 Voiculescu 的自由熵理论 [Voi02], , Jung 引入了强 1-有界性这一颇具影响力的概念 [Jun07] ，并将其应用于 $\mathrm{II}_1$ 因子的研究。这一性质的一个显著特点是能够在刚性论证中识别 amenable 子代数。这方面的一个例证是，第一作者 [Hay22] 运用其 1-有界熵技巧 [Hay18] ，结合随机矩阵理论中的强收敛论证 [BC22, BC23, CGVvH24, MdlS24, Par24]，解决了 Peterson-Thom 猜想。具体而言，这一解决方案将插值自由群因子的 amenable 子代数精确地刻画为 1-有界熵为零的子代数 [HJK]。这篇短文旨在强调，内 amenability 这一更普遍的现象 [Eff75] 也与强 1-有界性的框架十分契合。2019年 BIRS 研讨会“冯·诺伊曼代数中的分类问题”期间，Y. Ueda 曾向第二作者提出这一问题。

**定理 1.1.** 设 $G$ 是一个有限表示的 *icc* 内 *amenable* 群。那么 $L(G)$是强 *1*-有界的。

上述结果的证明很简短，它结合了多项已有结果，包括 [Hay18、ES05、TD20、Shl21]。我们发表这篇短文的主要动机是，我们觉得论证根据该群是否为 sofic 而分成两种情况，这一点相当可爱。所有可数内 amenable 群是否都 $G$ 满足 $h(L(G)) \leq 0$，目前仍是一个开放问题。我们指出，目前关于与内可约群 $G$ 相关联的冯·诺伊曼代数，已知如下结果：$L(G)$不是适当近端的 [DKEP23]；如果 $G$ 还满足非 amenable 条件，那么 $L(G)$是 $\{\alpha_t\}$-刚性的 [Dri23]。然而，据我们所知，$L(G)$是否在 Peterson [Pet09]意义下为 $L^2$-刚性，仍是一个开放问题。我们还定义了内 amenable $C^*$-概率空间的概念，并猜想其 GNS 闭包应当是强 1-有界的。

**致谢**。我们感谢 Robin Tucker-Drob 提出了富有启发性的建议。

## 2. Proof of the main result

回顾以下定义：若可数离散群 $G$ 通过共轭作用在集合 $X = G \setminus \{1\}$上的作用存在一个不变均值，则称其为内 amenable。若可数离散群 $G$ 的群冯·诺伊曼

代数 $L(G)$ 在 Jung [Jun07] 的意义下是强 1-有界的，则称该群为强 1-有界。我们将关键地需要以下结果：

**命题 2.1** (命题 5.1 的推论，见 [ES05])。 若 $G$ 是内 *amenable* 群，且具有共轭不变均值 $\mu$，并且 $N = \{g \in G : \mu(X_g) = 1\}$ 是平凡的（其中 $X_g$ 是 $g$ 的中心化子，而 $\mu$ 是共轭不变均值），则 $G$ 是 *sofic*。

**定理 2.2**。 若 $G$ 是内 *amenable* 群，且它要么是有限表示且 *sofic*，要么是无限共轭类且非 *sofic*，则 $G$ 是强 *1*-有界的。

证明。若 $G$ 是 sofic 且有限表示，则结合 [TD20，推论 6] 与 [Shl21] 的主要结果即可推出结论（另见 [Jun, HJKE]）。因此，设 $G$ 是无限共轭类且非 sofic。考虑 $G$ 通过共轭作用于 $X = G \setminus \{1\}$，并令 $\mu$ 为共轭不变均值。定义集合 $N = \{g \in G : \mu(X_g) = 1\}$，其中 $X_g$ 是 $g$ 的中心化子。由于 $G$ 非 sofic，由命题 2.1 可知 $N \neq \{1\}$。由于 $G$ 是无限共轭类，可得 $N$ 是无限的。对任意有限集 $F_n = \{h_1, \ldots, h_n\} \subset N$，注意到存在元素 $g_n \in G$，使得对所有 $1 \leq i \leq n$，都有 $g_n h_i = h_i g_n$。事实上，对所有 $1 \leq i \leq n$，都有 $\mu(X_{h_i}) = 1$，因此 $\mu(\cap_{i=1}^n X_{h_i}) = 1$。所以 $\cap_{i=1}^n X_{h_i} \neq \emptyset$。现在，令 $N = \{h_1, h_2, \ldots\}$，并考虑 $N = \bigcup_{i=1}^\infty F_i$，其中 $F_i = \{h_1, \ldots h_i\}$。根据前述过程，我们得到一个由非单位群元素构成的序列 $\{g_i\}_{i=1}^\infty$，该序列中的元素最终会与 $N$ 中的所有元素交换。因此，对于 $\omega \in \beta(\mathbb{N}) \setminus \mathbb{N}$，有 $L(N)' \cap L(G)^\omega$ 是弥散的。根据 [Hay18], 的命题 4.5，我们得到 $h(L(N) : L(G)) = h(L(N) : L(G)^\omega) \leq 0$。然而，容易看出，$N$ 是 $G$ 中的正规子群。因此，由 [Hay18] 的定理 1.3，$h(L(G)) = h(W^*(\mathcal{N}_{L(G)}(L(N))) : L(G)) = h(L(N) : L(G)) \leq 0$。由 [Hay18], 的命题 A.16，我们得出 G 是强 1-有界的。□

**猜想 2.3**。 所有内 *amenable* 群都是强 *1*-有界的。

虽然尚不清楚群的内 amenability 是否是其生成的冯·诺伊曼代数的不变量，但不难证明，它是赋有典范迹的约化群 $C^*$-代数的不变量。

**定义 2.4**。 设 $(A, \tau)$ 是一个带迹的 $C^*$-概率空间，即一个赋有忠实带迹态 $\tau$ 的含幺 $C^*$-代数$A$。若存在序列 $(\xi_n)_n$，属于 $L^2(A, \tau)$，且满足以下条件，则称 $(A, \tau)$ 是内 amenable

- $\|\xi_n\|_2 = 1$,
- $\tau(\xi_n) = 0$,

对所有 $a \in A$, • $\|a\xi_n - \xi_n a\|_2 \to_{n\to\infty} 0$,

注意到，群 $G$ 是内 amenable 的，当且仅当（$C^*_\lambda$（$G$） $\tau$）是内 amenable 的，其中 $\tau$（$x$） $= \langle x\delta_1, \delta_1 \rangle$.

**猜想 2.5**。 设（$A$、$\tau$）是一个内 *amenable* 的 *tracial* $C^*$-概率空间。那么 $h$（$W^*$（$A$、$\tau$））$\leq 0$.

## References

[BC22] Serban Belinschi 和 Mireille Capitaine。独立 G.U.E. 矩阵张量积的强收敛，2022 年。[BC23] Charles Bordenave 和 Benoit Collins。随机酉元和置换的矩阵值多项式的范数，2023 年。

[CGVvH24] Chi-Fang Chen、Jorge Garza-Vargas 和 Ramon van Handel。一种强收敛的新方法 II：经典系综，2024 年。[DKEP23] Changying Ding、SRIVATSAV KUNNAWALKAM ELAYAVALLI 和 Jesse Peterson。恰当近端冯诺依曼代数。 *Duke Math. J.*，172(15):2821–2894，2023 年。[Dri23] Daniel Drimbe。通过 s-可变形变实现测度等价刚性。 *Compos. Math.* 159 10 2023 2050, 2023 ，( ): – 。[

Eff75] Edward G. Effros。性质 Γ 与内 amenability。 *Proc. Amer. Math. Soc.*，47:483–486，1975 年。[ES05] G´abor Elek 和 Endre Szab´o。超线性性、本质自由作用与 $L^2$-不变量。sofic 性质。 *Math. Ann.*，332(2):421–441，2005 年。[Hay18] Ben Hayes。冯诺依曼代数中的 1-有界熵与正则性问题。*Int. Math. Res. Not. IMRN*，(1):57–137，2018 年。[Hay22] Ben Hayes。Peterson-Thom 猜想的随机矩阵方法。 *Indiana Univ. Math. J.* 71 3 1243 1297, 2022 ，( ): – 。[

HJK] Ben Hayes、David Jekel 和 SRIVATSAV KUNNAWALKAM ELAYAVALLI。Peterson-Thom 猜想的随机矩阵解的推论。 *Anal. PDE*。即将发表。[HJKE] Ben Hayes、David Jekel 和 SRIVATSAV KUNNAWALKAM ELAYAVALLI。冯诺依曼代数的上同调消失与强 1-有界性。 *J. Noncommut. Geom.* 即将发表。[Jun] Kenley Jung。自由熵中的秩定理与 $L^2$-不变量：全局上界。 *arXiv:1602.04726*。[Jun07] Kenley Jung。强 1-有界冯诺依曼代数。 *Geom. Funct. Anal.*，17 4 1180 1200，2007 ( ): – 。[MdlS24] Michael Magee 和 Mikael de la Salle。准指数维表示中 Haar 酉元的强渐近自由性，2024 年。[Par24] F´elix Parraud。随机矩阵与确定性矩阵张量的谱，2024 年。[Pet09] Jesse Peterson。冯诺依曼代数中的 $L^2$ -刚性。 *Invent. Math.* 175 2 417 433, 2009 ，( ): – 。[Shl21] Dimitri Shlyakhtenko。具有 $\beta_1^{(2)} = 0$ 的 sofic 群的冯诺依曼代数是强 1- 有界的。 *J. Operator Theory*，85(1):217–228，2021 年。[TD20] Robin D. Tucker-Drob。内可容群的不变均值与结构。*Duke Mathematical Journal*，169(13):2571–2628，2020 年。[Voi02] Dan Voiculescu。自由熵。 *Bulletin of the London Mathematical Society*，34 3 257 278，2002 ( ): – 。

Department of Mathematics, University of Virginia
141 Cabell Drive, Kerchof Hall P.O. Box 400137, Charlottesville, VA 22904
*Email address*: brh5c@virginia.edu
*URL*: https://sites.google.com/site/benhayeshomepage/

Department of Mathematics, University of Maryland, College Park,
4176 Campus Dr, College Park, MD 20742*Email address*: sriva@umd.edu
*URL*: https://sites.google.com/view/srivatsavke