T超越 b-除子 II——单调性定理

MINGCHEN XIA

摘要。本文建立 nef b-除子的广义交理论，拓展了可动交理论。我们定义了 b-除子的限制体积，并证明了交积单调性的一个定量版本。由此，我们证明了关于流和上同调类的一些新的体积不等式。

arXiv:2603.14362v1 [math.AG] 15 Mar 2026

目录

1. 引言 1
2. 预备知识 5
3. 广义交理论 14
4. 限制体积 23
5. 定性单调性定理 32
6. 勒隆数意义下的质量损失 39
7. 托里克单调性定理 48
附录 A. 正形式 50
参考文献 53

1. 引言

本文是作者此前论文的续篇 [Xia25b]。

1.1. **研究动机。** 设 X 是一个维数为 n 的紧Kähler流形。本文受到 Witt Nyström 的单调性定理的启发（参见 [WN19b；DDNL18]）：给定闭正$(1,1)$-流

$$T_1,\dots,T_n,S_1,\dots,S_n$$

在 X 上，使得 T_i 和 S_i 属于同一个上同调类，并且对于每个 i，T_i 比 S_i 奇异，则有

$$\mathrm{vol}\,(S_1,\dots,S_n)\geq \mathrm{vol}\,(T_1,\dots,T_n)\,. \tag{1.1}$$

这里的混合体积是按照 Cao 的意义来理解的 [Cao14]。正如此前的论文所证明的 [Xia25b], 该乘积也与 Darvas–Xia 意义下的混合体积一致。

不等式（1.1）表达了这样一个原理：流的奇点越严重，质量损失就越大。然而，单调性定理本身并未对质量损失的多少提供定量或定性的控制。

从直观上看，相对于 T_i，流 S_i的奇点越严重，不等式（1.1）两边的差值就应当越大。本文的主要目标是将这一直觉精确化。

为此，首先必须量化奇点之间的差异。勒隆数是用于此目的的经典不变量。我们的目标是根据流 1.1 的勒隆数之差，对 T_i 与 S_i之间的差异进行定性控制。

Vu、Su 等人此前已研究过相关问题；例如参见[SV25；Su25b；Vu23；Su25a]。他们的方法依赖于相对非多极性乘积和密度流等技术，因此只能为（1.1）中的差值给出非最优下界。与此相反，本文借助 [Xia25b] 和 [DF22]所发展的 nef b-除子理论来研究这一问题。正如我们将要证明的，这种方法使我们能够获得

对（1.1）中的差值进行最优控制。因此，我们得到了一种系统的方法，可以导出涉及体积和可动交积的新不等式。

1.2. **主要结果**。 我们首先拓展超越 b-除子在 X中的交理论，该理论由 [Xia25b]开启。回顾一下， $\mathbb{D}$ 上的 nef b-除子 X 是一族修正 nef 类$\mathbb{D}_Y \in \mathrm{H}^{1,1}(Y,\mathbb{R})$，其中 $Y \to X$ 遍历 X的所有修改。这些类在推前下彼此相容。

在 [Xia25b], 中，我们证明了 nef b-除子可以借助流理论来理解，并定义了 $n =$ 维 X nef b-除子之间的交数。本文的首要目标是发展完整的交理论。特别地，我们证明以下定理：

定理 A。

(1) 存在一个映射，将 p *nef b*-除子 $\mathbb{D}_1, \ldots, \mathbb{D}_p$ 上的 X 映至一个 *nef b*-类 $\mathbb{D}_1 \cap \cdots \cap \mathbb{D}_p$ 上 X。该映射是多重$\mathbb{R}_{\geq 0}$线性的[1] ，并满足交积的预期性质。*(2)* 当 $\mathbb{D}_i = \mathbb{D}(\alpha_i)$ 是由伪有效类 $\alpha_i \in \mathrm{H}^{1,1}(X,\mathbb{R})$按照 定义 *3.11* 对每个 $i = 1, \ldots, p$所诱导的 *nef b*-除子时，乘积

$$(\mathbb{D}_1 \cap \cdots \cap \mathbb{D}_p)_X$$

正是可动交 $\langle \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p \rangle$，其意义见 *[Bou02; BDPP13].*

(3) 一般而言，交积可以通过取可动交的极限来恢复：

$$(\mathbb{D}_1 \cap \cdots \cap \mathbb{D}_p)_X = \lim_{\pi\colon Y \to X} \langle \mathbb{D}_{1,Y} \wedge \cdots \wedge \mathbb{D}_{p,Y} \rangle,$$

其中， $\pi\colon Y \to X$ 遍历 X 的修改。

(4) 假设对于每个 $i = 1$、...、 p， $\mathbb{D}_i$ 都与一个 *I*-良流 T_i 相关联，则

$$(\mathbb{D}_1 \cap \cdots \cap \mathbb{D}_p)_X = \{T_1 \wedge \cdots \wedge T_p\},$$

其中，括号 $\{\bullet\}$ 表示相应的上同调类。*Monge–Ampère* 型乘积是在 *[BT87; GZ07; BEGZ10]* 的非多极性意义下理解。

nef b-类的概念是 nef b-除子的推广。nef b-类 $\mathbb{T}$ 是可移动类 $\mathbb{T}_Y \in \mathrm{H}^{p,p}(Y,\mathbb{R})$的相容选择。详情请参阅 定义 3.2 。

第 (2) 部分表明，b-除子的交理论是更经典的可动交理论的一种推广。后者的缺点是具有非线性，这使得具体应用颇为困难。相比之下，b-除子的交理论是线性的。非线性完全体现在从伪有效类 α 到相应的 nef b-除子 $\mathbb{D}(\alpha)$ 的映射中，而这一映射通常更容易理解。

第 (4) 部分表明，b-除子的交理论也可以视为非极化乘积的一种部分推广。尽管我们只能恢复非极化乘积的上同调类，但这已足以满足大多数应用，因为在实际中，我们通常只需要顶交。

单调性定理（1.1）在 b-除子理论中有如下推广：若另有一个 nef b-除子 $\mathbb{D}'_1$ ，它支配 $\mathbb{D}_1$ ，其意义是，对于每个修改 $\pi\colon Y \to X$， $\mathbb{D}'_{1,Y} - \mathbb{D}_{1,Y}$ 都是伪有效的，那么

$$\mathbb{D}'_1 \cap \mathbb{D}_2 \cap \cdots \cap \mathbb{D}_p \geq \mathbb{D}_1 \cap \mathbb{D}_2 \cap \cdots \cap \mathbb{D}_p,$$

其意义在于，对于 X 的每个修改，差是一个正上同调类，如 定义 2.11 中所定义。

根据交积的线性性，我们可以形式上将差写成

$$(\mathbb{D}'_1 - \mathbb{D}_1) \cap \mathbb{D}_2 \cap \cdots \cap \mathbb{D}_p.$$

然而，这一项根本没有意义，因为 $\mathbb{D}'_1 - \mathbb{D}_1$ 通常不是数值有效的。不过，至少当 $\mathbb{D}_{1,X} = \mathbb{D}'_{1,X}$ 时，可以形式上将其视为 X 上具有非负系数的素除子的线性组合。

[1]在.....意义上可见，乘积对每个变量都是可加的，但仅在非负数倍下是齐次的缩放。

e

为了赋予这些对象严格的含义，我们在第4节中定义 nef b-除子的限制体积，将上同调类的限制体积这一概念加以推广[Mat13；CT22]。更确切地说，给定 nef b-除子 $\mathbb{D}_1$、……、$\mathbb{D}_p$ 位于 X 之上，以及一个位于 D 之上 X 的素除子，我们将定义一个类

$$\mathrm{vol}_{X|D}\left(\mathbb{D}_1,\dots,\mathbb{D}_p\right)\in \mathrm{H}^{p+1,p+1}(X,\mathbb{R}).$$

我们将证明，这些关于各种 X 的类彼此相容，并构成一个 b-类，我们将其记为

$$\mathrm{vol}_{|D}\left(\mathbb{D}_1,\dots,\mathbb{D}_p\right).$$

详细研究限制体积后，在 第5节我们证明以下关键不等式：

定理 B. 设 $\mathbb{D}_1,\dots,\mathbb{D}_p$ 是 X 上的 ***nef b***-除子，且 T,T' 是 X 上属于同一上同调类的闭正$(1,1)$-流，并满足 $T\preceq_{\mathcal{I}} T'$。那么

$$\mathbb{D}_1\cap\cdots\cap\mathbb{D}_p\cap\mathbb{D}(T')-\mathbb{D}_1\cap\cdots\cap\mathbb{D}_p\cap\mathbb{D}(T)\geq\sum_{D/X}\Big(\nu(T,D)-\nu(T',D)\Big)\,\mathrm{vol}_{|D}\left(\mathbb{D}_1,\dots,\mathbb{D}_p\right). \tag{1.2}$$

求和遍及 X 上方的所有素除子。

等式在 (1.2) 成立，当 $\mathbb{D}_i$ 为卡蒂埃除子时。

这里 $\mathbb{D}(T)$ 是由 T 规范构造的一个数值有效 b-除子，正如我们在 [Xia22；Xia25b] 中所研究的那样。记号 $T\preceq_{\mathcal{I}} T'$ 表示 T (在所有修改上)的勒隆数都不小于 T' 的勒隆数。等价地，在定理的设定下，这表示 $\mathbb{D}(T)\leq\mathbb{D}(T')$。

主要不等式 (1.2) 给出了单调性定理的定量版本。当 $\mathbb{D}_1,\dots,\mathbb{D}_p$ 是与流相关联的数值有效 b-除子时，定理 B 结合定理 A(4)，为我们最初的问题提供了解答。举例来说，我们可以表述如下推论：

推论 1.1。设 $T_1,\dots,T_{n-1}$ 是 X 上具有解析奇点的闭正$(1,1)$-流，且 T、T' 是同一上同调类中的闭正$(1,1)$-流，并且 $T\preceq_{\mathcal{I}} T'$，则

$$\begin{aligned}&\mathrm{vol}\left(T_1,\dots,T_{n-1},T'\right)-\mathrm{vol}\left(T_1,\dots,T_{n-1},T\right)\\&=\lim_{\pi:\,Y\to X}\sum_{D\subseteq Y}\Big(\nu(T,D)-\nu(T',D)\Big)\int_{\tilde{D}}\bigwedge_{i=1}^{n-1}\Big(\pi^*T_i-\nu(T_i,D)[D]\Big)\Big|_{\tilde{D}}.\end{aligned} \tag{1.3}$$

此外，右端的网最终为常数。

这里，$\tilde{D}$ 是 D 的正规化。

定理 B 还包含许多关于可动交积的新不等式。我们不打算详尽列举（1.2）的所有推论，而只说明其中一个结果（推论 5.4）。在引言中，我们只提及后者一个非常优美的特殊情形，即推论 5.5。

定理 1.2。设 $[E]$ 是 X 上的一个除子型闭正(1,1)-流，记作

$$[E]=\sum_i c_iE_i,$$

其中，E_i 是 X 上的互不相同的素除子，且 $c_i>0$。考虑修正 ***nef*** 类 $\alpha_1,\dots,\alpha_p,\beta\in\mathrm{H}^{1,1}(X,\mathbb{R})$。假设 $\beta\geq\{E\}$，则

$$\langle\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_p\wedge\beta\rangle-\Big\langle\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_p\wedge(\beta-\{E\})\Big\rangle\geq_X\sum_i\Big(\nu(\beta-\{E\},E_i)+c_i\Big)\,\mathrm{vol}_{X|E_i}\left(\alpha_1,\dots,\alpha_p\right).$$

上同调类的限制体积定义见定义 4.19。使用相对非多极乘积理论，也可以得到一个以 c_i 代替 $\nu(\beta-\{E\}\ E_i)+c_i$ 的较弱估计，至少在 $[E]$ 有有限个素分量时如此。

作为主定理的另一项应用，在第 6 节中，我们将用更传统的表述方式证明以下版本的质量损失定理：

定理 C. 设 $\alpha \in \mathrm{H}^{1,1}(X,\mathbb{R})$ 是一个大类。考虑闭正$(1,1)$-流 $S,T \in \alpha$，满足 $T \preceq_{\mathcal{I}} S$。固定一个位于 X 上方的素除子 D，则

$$\mathrm{vol}\, S - \mathrm{vol}\, T \geq \Big(\nu(T,D) - \nu(S,D)\Big)^n \cdot \frac{\mathrm{vol}\, S}{\Big(\nu_{\max}(\alpha,D) - \nu(\alpha,D)\Big)^n}. \tag{1.4}$$

记号 $\nu_{\max}(\alpha, D)$（分别表示 $\nu(\alpha, D)$）是 α 中闭正流的最大（分别是最小）勒隆数。(1.4) 也有一个关于混合体积的更一般版本，见推论 6.15。

这类问题已由 Vu 和 Su 进行了广泛研究，参见 [Vu23; Su25b; Su25a]。正如我们将在环面例子 例 6.4中看到的，这类估计中的第二个因子不能是通用常数，这与文献中的说法相反。我们的结果改进了这一方向上所有已知的结果。更重要的是，我们的结果是首个带有显式常数的估计。

有趣的是，我们关于 定理 C 的方法依赖于 [DRWN+26] 中超越 Okounkov 体理论的最新进展。基于超越 Okounkov 体的体积公式，我们建立了以下关于限制体积的估计，该估计本身也具有独立的研究价值。

定理 1.3。 设 $\alpha \in \mathrm{H}^{1,1}(X,\mathbb{R})$ 是一个大类。那么对于任意素除子 D，在 X 上有

$$\mathrm{vol}_{X|D}\Big(\alpha - t\{D\}\Big) \geq \frac{\mathrm{vol}\,\alpha}{\Big(\nu_{\max}(\alpha,D) - \nu(\alpha,D)\Big)^n} \cdot \min\Big\{t - \nu(\alpha,D), \nu_{\max}(\alpha,D) - t\Big\}^{n-1}$$

只要 $\nu(\alpha, D) \leq t \leq \nu_{\max}(\alpha, D)$。

从我们的证明可以很容易看出，至少在环面情形下，该估计是尖锐的。

最后，能否将 1.2 中的不等式改进为等式，值得探讨。为此，猜想中的超越莫尔斯不等式似乎不可或缺。对于下一个结果，我们只讨论射影流形，因为在这种情形下，超越莫尔斯不等式已由 Witt Nyström [WN19a]证实。

定理 D。 假设 X 是射影的。

设 $\mathbb{D}$ 是 X 上的大且数值有效的 ***b*-除子**，T, T' 是 X 上同属一个上同调类的闭正 ***(1, 1)*-流**，且满足 $T \preceq_{\mathcal{I}} T'$。则

$$\Big(\mathbb{D}^{n-1} \cap \mathbb{D}(T')\Big) - \Big(\mathbb{D}^{n-1} \cap \mathbb{D}(T)\Big) = \lim_{\pi\colon Y \to X} \sum_{D \subseteq Y} \Big(\nu(T,D) - \nu(T',D)\Big)\, \mathrm{vol}_{Y|D}\left(\mathbb{D}_Y\right). \tag{1.5}$$

如果我们进一步假设超越莫尔斯不等式，那么对于所有紧 ***Kähler*** 流形 X，同样的结论也成立。

One 也可以将（1.5）极化，从而得到一个等式，其中以 $\mathbb{D}_1, \ldots, \mathbb{D}_{n-1}$ 代替单个 $\mathbb{D}$.

在维数 1时，由于超越莫尔斯不等式显然成立，（1.5）可化为以下结论：

推论 1.4。 假设 X 是一条紧黎曼曲面。设 T、T' 是 X 上属于同一上同调类且满足 $T \preceq_{\mathcal{I}} T'$ 的闭正$(1、1)$-流。那么

$$\mathrm{vol}\, T' - \mathrm{vol}\, T = \sum_{x \in X} \Big(\nu(T,x) - \nu(T',x)\Big). \tag{1.6}$$

这已经是一个非平凡的结论。它清楚地表明，黎曼曲面上的质量损失可以分解为勒隆数之差的总和。根据（1.6），自然会想到为 T定义一个新的蒙日-安培测度 $T - \sum_{x\in X} \nu(T,\ x)[x]$。该测度的总质量恰为 体积 T，并且该测度支配 T的非多极测度。一个值得探讨的问题是，能否在更高维数中定义类似的测度。这个问题与部分伯格曼核的收敛密切相关，参见 [DX24b; BD26]。

同样，在2维情形下，超越莫尔斯不等式已在 Y. Deng 的学位论文中得到证实 [Den17], ，因此（1.5）也是一个等式。由于我们对曲面上的除子已有相对完整的理解，因此应该能够从中提取有用的代数几何

关于凯勒曲面的信息。作者希望在不久的将来探索这一点。

C. Favre 指出，式（1.5）右端可解释为在 X 的 Berkovich 解析化上，关于一个支撑在适当骨架上的极限测度取积分。这种新颖的测度或许有助于研究 X 上的动力系统。

考察环面情形尤其能带来启发。在这种情况下，我们将在 第 7 节证明，这个极限测度恰好是经典的凸体混合面积测度，由 Aleksandrov 和 Fenchel–Jenssen 于 20 世纪 30 年代定义。此外，我们的公式（1.5）恰好就是 Minkowski 体积公式，它将凸体混合体积之差表示为支撑函数之差对混合面积测度的积分：

推论 1.5。 设凸体 $P_1, \dots, P_{n-1}, Q', Q \subseteq \mathbb{R}^n$。假设 $Q' \supseteq Q$，则

$$\mathrm{vol}\,(P_1,\dots,P_{n-1},Q') - \mathrm{vol}\,(P_1,\dots,P_{n-1},Q) = \frac{1}{n}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left(\mathrm{Supp}_{Q'} - \mathrm{Supp}_{Q}\right) \mathrm{d}\mathcal{S}\,(P_1,\dots,P_{n-1})\,.$$

这里 Supp 表示支撑函数，而 $\mathcal{S}$ 表示混合面积测度。详情请参见 第 7 节。事实上，我们的 定理 D 给出了混合面积测度的一种新构造。

与混合面积测度类似，一般的极限测度也应当是一个备受关注的对象。

致谢。作者谨向 Chen Jiang、Yangyang Li、Bingyu Zhang、Bo Berndtsson 和 Shuang Su 致谢，感谢他们进行的有益讨论。作者还要感谢 Charles Favre 在中国科学技术大学进行数学讨论，尽管我们在许多其他方面的观点截然不同。

本稿是在作者访问四川大学期间撰写的。作者谨感谢 Huadi Qu 的热情邀请。

作者受到国家重点研发计划 2025YFA1018200 的资助。

2. 预备知识

2.1. 准拟次调和函数。

设 X 是一个维数为 n的连通紧凯勒流形。

我们简要回顾 P 和 $\mathcal{I}$-等价的概念。详情请参见 [Xia，第 3 章、第 6]章。

定义 2.1。 设 φ, ψ 是 X上的准拟次调和函数。我们称 $\varphi \sim_P \psi$ （分别称 $\varphi \preceq_P \psi$），若存在 X 上的闭光滑实 (1,1)-形式 θ，使得 $\varphi, \psi \in \mathrm{PSH}(X,\theta)_{>0}$ 并且

$$P_\theta[\varphi] = P_\theta[\psi] \quad (\mathrm{resp.} P_\theta[\varphi] \leq P_\theta[\psi]).$$

这里，$\mathrm{PSH}(X,\theta)$表示 X 上的 θ-多重次调和函数空间，而 $\mathrm{PSH}(X,\theta)_{>0}$表示由满足 $\int_X \theta_\varphi^n > 0$、具有 $\theta_\varphi = \theta + \mathrm{dd^c}\varphi$ 的 $\varphi \in \mathrm{PSH}(X,\theta)$组成的子集。这里及下文中，Monge–Ampère 型乘积 θ_φ^n 均取 [BT87；GZ07；BEGZ10]所述的非多极性意义。包络 P_θ 定义如下：

$$P_\theta[\varphi] := \sup_{C\in\mathbb{R}}{}^*(\varphi + C) \wedge 0,$$

whe关于 $(\varphi + C)$，$\wedge 0$ 是 $\mathrm{PSH}(X,\theta)$ 中同时受 $\varphi + C$ 和 0.

设 θ 是 X 上的闭光滑实 (1,1)-形式，使得 $\varphi, \psi \in \mathrm{PSH}(X,\theta)$，我们也称 $\theta_\varphi \sim_P \theta_\psi$（分别称 $\theta_\varphi \preceq_P \theta_\psi$），如果 $\varphi \sim_P \psi$ （分别有 $\varphi \preceq_P \psi$）。对于某个常数 C，我们记 $\varphi \preceq \psi$ 为 $\varphi \leq \psi + C$。类似地，我们记 $\theta_\varphi \preceq \theta_\psi$。同样的约定也适用于稍后引入的 $\mathcal{I}$-偏序。

定义 2.2。 设 φ, ψ 是 X 上的拟拟凸函数。若对所有实数 $\lambda > 0$，均有 $\mathcal{I}(\lambda\varphi) = \mathcal{I}(\lambda\psi)$（分别有 $\mathcal{I}(\lambda\varphi) \subseteq \mathcal{I}(\lambda\psi)$），则称 $\varphi \sim_{\mathcal{I}} \psi$ （分别称 $\varphi \preceq_{\mathcal{I}} \psi$）。

这里$\mathcal{I}$ 表示 Nadel 意义下的乘子理想层。

如果 θ 是一个闭光滑实 (1，1)-形式，满足 φ，$\psi \in$拟拟凸函数$(X$，$\theta)$，那么 $\varphi \preceq_{\mathcal{I}} \psi$ 当且仅当

$$P_\theta[\varphi]_{\mathcal{I}} \leq P_\theta[\psi]_{\mathcal{I}},$$

其中

$$P_\theta[\varphi]_{\mathcal{I}} = \sup\{\eta \in \mathrm{PSH}(X,\theta) : \eta \leq 0, \mathcal{I}(\lambda\varphi) \supseteq \mathcal{I}(\lambda\eta) \text{ for all } \lambda > 0\}.$$

等价地，我们可以在此方程中用 $=$ 替换 $\supseteq$。

定义 2.2 的另一种等价表述是：对于任意位于 E 上方的 X 素除子，我们有

$$\nu(\varphi, E) = \nu(\psi, E) \quad \text{resp. } \nu(\varphi, E) \geq \nu(\psi, E).$$

这里 ν 表示一般勒隆数。

我们简要回顾复空间 Z 上方的素除子的概念。Z 上方的素除子是指 Y 上的素除子 E，其中 $\pi\colon Y \to Z$ 是从一个复流形出发的真双亚纯映射。考虑 Y' 上的另一个素除子 E'，其中 $\pi'\colon Y' \to Z$ 是另一个这样的映射。如果存在一个真双亚纯映射 $\pi''\colon Y'' \to Z$，它从一个复流形映至同时支配 π 和 π' 的空间，并且 E 和 E' 在 Y'' 上的严格变换相同，那么我们认为这两个除子等价。宽泛地说，谈及 Z 上方的素除子时，我们有时指的是这样的一个等价类。

给定任意 $\varphi \in$ 拟拟凸函数(X,θ)，我们有

$$\varphi - \sup_X \varphi \leq P_\theta[\varphi] \leq P_\theta[\varphi]_{\mathcal{I}}.$$

运算 $P_\theta[\bullet]_{\mathcal{I}}$ 是幂等的。若 $\varphi \in$ 拟拟凸函数(X,θ) 满足 $P_\theta[\varphi]_{\mathcal{I}} = \varphi$，则称其为$\mathcal{I}$-模型。类似地，在子集拟拟凸函数$(X,\theta)_{>0}$上，运算 $P_\theta[\bullet]$ 也是幂等的。若 $\varphi \in$ 拟拟凸函数$(X,\theta)_{>0}$ 满足 $P_\theta[\varphi] = \varphi$，则称其为模型。

若 φ 是 X 上的一个拟拟凸函数，且存在 X 上的闭光滑实 (1,1)-形式 θ，使得 $\varphi \in$ 拟拟凸函数$(X,\theta)_{>0}$ 并且

$$P_\theta[\varphi] = P_\theta[\varphi]_{\mathcal{I}}.$$

这个概念与 θ 的选取无关。对于任意满足 $\theta' + \mathrm{dd^c}\varphi \geq 0$ 的 X 上的闭光滑实 (1,1)-形式 θ'，我们也称流 θ'_φ 是$\mathcal{I}$-优的。

给定 X 上的闭正 (1,1)-流 T，记 $T = \theta + \mathrm{dd^c}\varphi$，则定义

$$\mathrm{vol}\, T \coloneqq \int_X \left(\theta + \mathrm{dd^c} P_\theta[\varphi]_{\mathcal{I}}\right)^n.$$

这个定义与将 T 分解为 $\theta + \mathrm{dd^c}\varphi$ 的选择无关。一般

$$\mathrm{vol}\, T \geq \int_X T^n,$$

且若 $\int_X T^n > 0$，等式成立当且仅当 T 是$\mathcal{I}$-良好的。更一般地，若 $T_1, \ldots, T_n$ 是 X 上具有正非极化质量的闭正 (1,1)-流，我们定义

$$\mathrm{vol}(T_1, \ldots, T_n) \coloneqq \int_X \left(\theta_1 + \mathrm{dd^c} P_{\theta_1}[\varphi_1]\right) \wedge \cdots \wedge \left(\theta_n + \mathrm{dd^c} P_{\theta_n}[\varphi_n]\right),$$

其中我们对每个 i 都记 $T_i = \theta_i + \mathrm{dd^c}\varphi_i$。一般而言，当质量可能为零时，我们定义

$$\mathrm{vol}(T_1, \ldots, T_n) \coloneqq \lim_{\epsilon \to 0+} \mathrm{vol}(T_1 + \epsilon\omega, \ldots, T_n + \epsilon\omega)$$

对 X 上任意凯勒形式 ω。注意

$$\mathrm{vol}(T) = \mathrm{vol}(T, \ldots, T)$$

对任意闭正的 (1,1)-流 T 于 X。

若闭正的 (1,1)-流 T 具有解析奇点，则称之为解析奇点；局部地，T 可写为 $\mathrm{dd^c} f$，其中 f 是如下形式的多重次调和函数：

$$c \log\left(|f_1|^2 + \cdots + |f_N|^2\right) + R,$$

其中 $c \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$、$f_1, \ldots, f_N$ 是 X 上的全纯函数，且 R 是有界函数。当我们将 $T = \theta + \mathrm{dd^c}\varphi$ 写作某个光滑闭实 $(1,1)$-形式 θ 与 $\varphi \in \mathrm{PSH}(X,\theta)$ 之和时，也称 φ 具有解析奇点。

特别地，若 D 是 X上的有效 $\mathbb{Q}$-除子，则称闭正 (1，1)-流T 沿 D 具有对数奇异性，如果 $T - [D]$ 为正且具有局部有界势。它

很容易看出， T 具有解析奇点。反过来，若从 T 出发，且其具有解析奇点，则总存在一个修改 π: $Y \to X$ 使得 π^*T 沿 $\mathbb{Q}$上的某个有效 Y-除子具有对数奇异性。关于修改的定义，请参见定义 2.3 。

设 θ 是 X 上光滑闭实 (1,1)-形式，且 $\eta \in \in \mathrm{PSH}(X, \theta)$。若一列 $(\eta^j)_j$ 拟拟凸函数满足以下条件，则称其为 η 的准等奇异逼近：

(1) 对每个 j， η^j 都具有解析奇点；(2) $(\eta^j)_j$ 递减且极限为 η;
(3) 对每个 $\lambda' > \lambda > 0$，都可以找到 $j_0 > 0$，使得对于 $j \geq j_0$,

$$\mathcal{I}(\lambda' \eta^j) \subseteq \mathcal{I}(\lambda \eta);$$

(4) 存在 $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 中一个递减且极限为 0 的序列 $(\epsilon_j)_j$ ，以及 X 上的凯勒形式 ω ，使得

$$\eta^j \in \mathrm{PSH}\left(X, \theta + \epsilon_j \omega\right)$$

对每个 $j > 0$。

准等奇异逼近的存在性由 [DPS01] 保证。我们还称$(\theta + \mathrm{dd^c}\eta^j)_j$ 是 $\theta + \mathrm{dd^c}\eta$ 的准等奇异逼近。当 θ_η 是凯勒流时，我们可以（并且总是）在 $\{\theta\}$ 的同一个上同调类中取准等奇异逼近。

假设 $\{\theta\}$ 是大类。在 [DDNL21] 中证明了，在 d_S 上存在一个伪度量$\mathrm{PSH}(X, \theta)$，满足以下不等式：对于任意 $\varphi, \psi \in \mathrm{PSH}(X, \theta)$，都有

$$\begin{aligned} d_S(\varphi, \psi) \leq & \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \left(2 \int_X \theta_{\varphi \vee \psi}^j \wedge \theta_{V_\theta}^{n-j} - \int_X \theta_\varphi^j \wedge \theta_{V_\theta}^{n-j} - \int_X \theta_\psi^j \wedge \theta_{V_\theta}^{n-j} \right) \\ \leq & C_n d_S(\varphi, \psi), \end{aligned} \tag{2.1}$$

其中 $C_n = 3(n+1)2^{n+2}$。这里 $V_\theta = \max\{\varphi \in \mathrm{PSH}(X, \theta) : \varphi \leq 0\}$。此外， $d_S(\varphi, \psi) = 0$当且仅当 $\varphi \sim_P \psi$。特别地， d_S-伪度量下降为 $\{\theta\}$ 中闭正 (1,1)-流空间上的一个伪度量（仍记为 d_S）。

设 T_i 是 $\{\theta\}$ 中闭正 $(1,1)$-流的一个网，另有一个闭正 (1,1)-流T 属于 $\{\theta\}$。则，对于 上的任意凯勒形式 ω， $T_i \xrightarrow{d_S} T$ 当且仅当 $T_i + \omega \xrightarrow{d_S} T + \omega$ 。

一般而言，给定 X 上的闭正 (1,1)-流 T_i 和 T，若能找到 X 上的凯勒形式 ω_i 和 ω，使得 $T_i + \omega_i$与 $T + \omega$ 表示相同的上同调类，且 $T_i + \omega_i \xrightarrow{d_S} T + \omega$，则称 $T_i \xrightarrow{d_S} T$。此定义与 ω_i和 ω的选取无关。准等奇异逼近是 d_S-收敛序列的主要来源。

正如 [Xia]的附录中所述，前述理论可以轻易推广到紧致正规 Kähler 空间。

2.2. 修改与锥。 设 X 是一个维数为 在 n 上。

本文以一种非常不寻常的含义使用“修改 ”一词。

定义 2.3。 X 的修改 是一个双亚纯态射 π: $Y \to X$，它是有限次沿光滑中心进行爆炸的复合。

我们称一个修改 π': $Z \to X$ 支配另一个修改 π: $Y \to X$，如果存在一个态射g: $Z \to Y$ 使下图交换:

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\quad g \quad} & Y \\ & {\scriptstyle \pi'} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \pi} & \\ & X. & \end{array} \tag{2.2}$$

X 的修改连同支配关系构成一个有向集 .

固定 X 上的一个参考凯勒形式 ω。回忆一下，如果对于任意 $\epsilon > 0$，我们都能找到一个闭的 (1, 1)-流 $T \in \alpha$，使得类 $\alpha \in \mathrm{H}^{1,1}(X, \mathbb{R})$ 是修正 *nef*或可移动的，

(1) $T + \epsilon\omega \geq 0$;

(2) 对任意的 D 上的素除子， $\nu(T+\epsilon\omega,\ D)=0$。
该定义与 ω 的选择无关。这里 $\nu(\bullet,\ D)$ 表示沿 D 的一般勒隆数。

这些类在 *Boucksom* 的博士论文 1 中称为 [Bou02], ，并在那里首次引入。修正 nef 类在 $\mathrm{H}^{1,1}(X,\ \mathbb{R})$中构成一个闭凸锥。注意，修正 nef 类必然是伪有效的。显然，数值有效类是修正 nef 的。

回顾 [Bou02第 2.1 节中定义的上同调类的重数。3]。

定义 2.4。 设 $\alpha\in \mathrm{H}^{1,1}(X,\ \mathbb{R})$ 是一个伪有效类，且 D 是 X 上的一个素除子。我们将勒隆数 $\nu(\alpha,\ D)$ 定义如下：
(1) 当 α 是大类时，对任意具有最小奇异性的闭正 (1, 1)-流 $T\in\alpha$，定义 $\nu(\alpha,\ D)=\nu(T,\ D)$（即， α 中一个比 α 中任意流都不那么奇异的流）。(2) 一般而言，定义

$$\nu(\alpha,D):=\lim_{\epsilon\to 0+}\nu(\alpha+\epsilon\{\omega\},D).$$

当 α 是大类时，(2) 与 (1) 相容，且定义不依赖于 ω的选择。根据定义，伪有效类 α 是修正 nef 的，当且仅当对于 X上的所有素除子 D，都有 $\nu(\alpha,D)=0$。

设 T是 X上的闭正 (1,1)-流。我们将 T的正则部分 Reg T定义为关于 Siu 分解的 T 的正则部分。换言之，我们写作

$$T=\mathrm{Reg}\,T+\sum_i c_i[E_i], \tag{2.3}$$

其中 E_i 是 X 上的素除子的可数集，且 $c_i=\nu(T,E_i)>0$；正则部分 Reg T是一个闭正 (1,1)-流，沿 X 上的每个素除子的一般勒隆数均为 0。

定义 2.5。 若 X 上的闭正 (1,1)-流 T 满足 $T=\mathrm{Reg}\,T$（分别为 Reg $T=0$），则称其为非除子型（分别为除子型）。

非除子型流的上同调类总是修正 nef。反过来，具有最小奇异性的流若属于大且修正 nef 类，则总是非除子型。

2.3. **偏序线性空间**。 设 V 是有限维实向量空间，$C\subseteq V$ 是满足以下假设的凸锥：

(C1) C 是闭的；(C2) C 是尖的，即 $C\cap(-C)=\{0\}$；(C3) C 是满维的，即 $V=C-C$。

严格来说，(C3) 并非必要：我们总可以用 $C-C$替换 V。

给定 x、$y\in V$，若 $y-x\in C$，则定义 $x\leq y$。由(C2)可知， $\leq$ 定义了一个偏序。特别地，我们可以讨论递增网和递减网。这个偏序具有以下性质：

(VO1) 给定 x、y、$z\in V$，若 $x\leq y$，则 $x+z\leq y+z$；
(VO2) 对任意 $\lambda\geq 0$ 和 $x,\ y\in V$，若 $x\leq y$，则 $\lambda x\leq\lambda y$ ·
按照 [AT07] 的术语， $\leq$ 是 向量序 的 V。本节中的结果可以利用 [AT07], 中的更一般理论来证明，但为方便读者，我们将给出初等证明。

Let $V^\vee$ 表示 V的对偶向量空间。令 $C^\vee\subseteq V^\vee$ 为 C的对偶锥，即 ，

$$C^\vee=\{\ell\in V^\vee:\ell|_C\geq 0\}.$$

众所周知，在假设(C1) 和 (C2)成立的条件下， $C^\vee$ 是满维的。参见 [BV04，习题 2。31]。

命题 2.6. 设$(x_i)_{i\in I}$ 是 C 中的一个递减网，则$(x_i)_i$ 收敛到 $x\in C$ 中的某个元素。此外，对于所有 $i\in I$，都有 $x\leq x_i$。

证明。 由于 $C^\vee$ 是满维的，我们可以选取 $\ell_1, \dots, \ell_n \in C^\vee$，使其构成 $V^\vee$ 的一组基。于是线性同构

$$L \coloneqq (\ell_1, \dots, \ell_n) \colon V \to \mathbb{R}^n$$

映射 C 到包含于第一象限的锥 C'。

特别是，$(L(x_i))_{i\in I}$ 是第一象限中的一个网，且每个分量都构成一个递减网。由通常的单调收敛定理可知，$(L(x_i))_i$ 有一个极限 y，且该极限位于第一象限中。于是 $x_i \to x \coloneqq L^{-1}(y)$。由(C1)可得， $x \in C$。

接下来固定 $i \in I$，我们有

$$x_j \le x_i, \quad \forall j \in I, j \ge i.$$

再次使用 (C1)，可得 $x \le x_i$。 □

推论 2.7。 设$(x_i)_{i\in I}$ 是 V 中的一个递增网，且 $y \in V$ 满足：对所有 i，都有 $x_i \le y$。那么$(x_i)_i$ 收敛到某个 $x \le y$。此外，对每个 $i \in I$，都有 $x \ge x_i$。

证明。 只需将 命题 2.6 应用于网 $(y - x_i)_{i\in I}$。 □

命题 2.8。 设$(y_i)_{i>0}$ 是 C 中的一个序列，使得 $\sum_{i=1}^\infty y_i$ 收敛。考虑序列$(x_i^j)_{j>0}$，它们对所有 $i > 0$ 都属于 C，且满足

$$x_i^j \le y_i, \quad \forall i, j > 0;$$
$$\lim_{j\to\infty} x_i^j = x_i, \quad \forall i > 0.$$

那么对所有 $j > 0$， $\sum_{i=1}^\infty x_i^j$ 收敛，并且

$$\lim_{j\to\infty} \sum_{i=1}^\infty x_i^j = \sum_{i=1}^\infty x_i. \tag{2.4}$$

证明。 对每个 $j > 0$，由 $\sum_{i=1}^\infty x_i^j$ 的收敛性可知 推论 2.7。

至于（2.4），与 命题 2.6 的证明一样，假设 $V = \mathbb{R}^n$ 且 $C \subseteq \mathbb{R}^n_{\ge 0}$。在这种情况下，只需对每个分量应用控制收敛定理即可。 □

命题 2.9。 设 $y \in C$。考虑递增序列 $(x_i^j)_{j>0}$，它们对所有 $i > 0$ 都属于 C，且极限为 x_i。假设

$$\sum_{i=1}^\infty x_i^j \le y, \quad \forall j > 0,$$

Then

$$\lim_{j\to\infty} \sum_{i=1}^\infty x_i^j = \sum_{i=1}^\infty x_i.$$

证明。 如命题 2.6的证明中一样，假设 $V = \mathbb{R}^n$ 和 $C \subseteq \mathbb{R}^n_{\ge 0}$。在这种情况下，只需对每个分量应用 Levi 单调收敛定理。 □

命题 2.10。 设 $(x_i)_{i\in I}$, $(y_i)_{i\in I}$, $(z_i)_{i\in I}$是 C中的网，且对于某个 $x \in C$和$z_i \to x$，有 $x_i \to x$。假设对所有 $i \in I$均有 $x_i \ge y_i \ge z_i$，则 $y_i \to x$。

证明。 如命题 2.6的证明中一样，我们可以假设 $V = \mathbb{R}^n$ 和 $C = \mathbb{R}^n_{\ge 0}$。于是，只需对各分量应用夹逼定理。 □

2.4. **上同调中的锥**。 设 X 是一个连通紧致凯勒流形，其维数为 n。在 附录 A中，我们将简要回顾 Lelong 正形式理论。

定义 2.11。 若对 X 上的任意弱正闭 $(n-p, n-p)$-形式 F，均有如下关系，则称类 $\alpha \in \mathrm{H}^{p,p}(X, \mathbb{R})$ 为正

$$\alpha \cap \{F\} \ge 0.$$

在这种情况下，我们写作 $\alpha \ge_X 0$。

这里的 $\{F\}$ 指由 F 表示的 $\mathrm{H}^{n-p,n-p}(X,\mathbb{R})$ 中的上同调类。帽积符号 $\cap$ 指上同调配对。

对于两个类 $\alpha,\beta\in\mathrm{H}^{p,p}(X,\mathbb{R})$，若 $\alpha-\beta\geq_X 0$，则记作 $\alpha\geq_X\beta$。类似地，记号 $\leq_X$ 的含义显而易见。

若 α 含有一个闭的强正 (p,p)流，则它显然是正的。作者不知道反过来一般是否成立。当 $p=n-1$时，反向结论由 [DP04，定理 01]得出。参见 [CT15]，其中给出了一个不依赖于奇异复空间上存疑的 Demailly 正则化的证明。当 $p=1$时，反向结论也成立，即类 $\mathrm{H}^{1,1}(X,\mathbb{R})$ 为正当且仅当它是伪有效的。在这种情况下，我们通常省略下标 X 并写作 $\alpha\geq\beta$。非平凡方向是 Lamari 的一个定理，参见 [Lam99，引理 33]。

非极化乘积给出了正类的一个例子。

命题 2.12. 设 $T_1,\ldots,T_p$ 是 X 上的闭正$(1,1)$-流。则 $T_1\wedge\cdots\wedge T_p$ 是强正的，因此 $\{T_1\wedge\cdots\wedge T_p\}$ 是正的。

此处及下文中，$T_1\wedge\cdots\wedge T_p$表示如前所述的非极化乘积。

尽管专家们肯定熟知这一结果，但它似乎未见于文献。我们借此机会给出一个证明。

证明。只需证明 $T_1\wedge\cdots\wedge T_p$ 是强正的。问题因而是局部的。我们归结为以下情形：设 U 是 $\mathbb{C}^n$ 中的一个区域集，且 $\varphi_1,\ldots,\varphi_p$ 是 U 上的多重次调和函数。假设 $\mathrm{dd^c}\varphi_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{dd^c}\varphi_p$ 定义良好，则它是强正的。

步骤 1。我们首先假设每个 φ_i 都有界。然后对其与 Friedrichs 磨光子作卷积，可假设每个 φ_i 都是光滑的。在这种情况下，$\mathrm{dd^c}\varphi_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{dd^c}\varphi_p$的强正性由 [Dem12，第 169 页，命题 1 得出。11]。

步骤 2。我们处理一般情形。

设 η是 U 上一个紧支撑、光滑、闭且弱正的（$n-p$，$n-p$）形式。我们需要证明

$$\int_U(\mathrm{dd^c}\varphi_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{dd^c}\varphi_p)\wedge\eta\geq 0. \tag{2.5}$$

为此，我们应用 [BEGZ10，引理 1。5]并得到

$$\int_U(\mathrm{dd^c}\varphi_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{dd^c}\varphi_p)\wedge\eta=\lim_{C\to\infty}\int_{\{\varphi_i>-C\}}\left(\bigwedge_{i=1}^{p}\mathrm{dd^c}\left(\varphi_i\vee(-C)\right)\right)\wedge\eta.$$

但由步骤 1 可知，每一项都非负，因此（2.5）得证。 □

命题 2.13。正类锥 $\mathrm{H}^{p,\,p}(X,\ \mathbb{R})$ 满足 *(C1)*、*(C2)* 和 *(C3)*。

特别是，第 2.3 节中证明的抽象结果可以应用。在本文后续部分，我们将直接使用这些结果，不再另行说明。

证明。条件(C1) 显然成立。

下面证明(C2)。设 $\alpha\in\mathrm{H}^{p,p}(X,\mathbb{R})$ 是一个上同调类，它与所有形如$\{F\}$的类的交数均为零，其中 F 是一个闭的弱正（$n-p,n-p$）形式。我们需要证明$\alpha=0$。

固定一个一般的上同调类 $\beta\in\mathrm{H}^{n-p,n-p}(X,\mathbb{R})$，只需证明

$$\alpha\cap\beta=0. \tag{2.6}$$

为此，取一个代表 β 的闭实（$n-p,n-p$）形式 G。固定 X 上的一个凯勒形式 ω。我们注意到

$$G+C\omega^{n-p}$$

当 C 足够大时为正。事实上，由于 X的紧性，这个问题本质上是局部的，我们可以在 X上的一个坐标图中考察它。这只是一个简单的线性代数问题。为后续使用，我们注意到实际上可以保证 $G+C\omega^{n-p}$ 是强正的，这可由 定理 A.6得出。

现在根据我们的假设，

$$\alpha \cap \{C\omega^{n-p}\} = 0, \quad \alpha \cap \{G + C\omega^{n-p}\} = 0.$$

因此，2.6成立。

最后我们来证明 (C3)。这由证明(C2)时的观察可得：一个闭光滑实(p,p)-形式总可以表示为两个闭光滑强正(p,p)-形式之差。□

命题 2.14。设 $f\colon\ Y \to X$ 是从一个凯勒流形出发的适当态射，若 $\alpha \in \mathrm{H}^{p,p}(Y,\mathbb{R})$ 是正的，则 $f_*\alpha$也是正的。

注意，我们并不要求 f 是双亚纯的，也不要求它是满射。

证明。这是因为弱正形式的拉回仍然是弱正的。

□

命题 2.15. 设 $\alpha \in \mathrm{H}^{1,1}(X,\mathbb{R})$ 是一个数值有效类，且 $\beta \in \mathrm{H}^{p,p}(X,\mathbb{R})$ 是一个正类。那么 $\alpha \cap \beta$ 是正的。

证明. 不失一般性，我们可以假设 α 是一个 Kähler 类。于是，由正的 (1,1)-形式与弱正形式的楔积是弱正形式这一事实，可得我们的断言。□

引理 2.16. 设 $\alpha \in \mathrm{H}^{p,p}(X,\mathbb{R})$ 是一个正类。假设对于每个 *Kähler* 类 β，都有 $\alpha \cap \beta^{n-p} = 0$，那么 $\alpha = 0$。

证明. 假设 $\alpha \neq 0$，那么我们可以找到一个闭实 $(n-p,n-p)$-形式 F 使得$\alpha \cap \{F\} < 0$。如同在命题 2.13的证明中，我们可以找到一个凯勒形式 ω 在 X 上，使得$F + \omega^{n-p}$ 是正的。于是根据我们的假设，我们知道 $\alpha \cap \{F + \omega^{n-p}\} < 0$，这就产生了矛盾。□

正类的一个来源是以下单调性定理，该定理由 [WN19b；DDNL18；Vu21]依次在越来越一般的情形下证明：

定理 2.17。设 $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathrm{H}^{1,1}(X,\mathbb{R})$ 为伪有效类。考虑闭正$(1,\ 1)$-流 $T_i, S_i \in \alpha_i$，分别对应于 $i = 1, \ldots, p$。假设对所有 i，都有 $T_i \preceq_P S_i$。那么

$$\{T_1 \wedge \cdots \wedge T_p\} \leq_X \{S_1 \wedge \cdots \wedge S_p\}. \tag{2.7}$$

-偏序的概念回顾于第 2.1 节。特别地，上同调类

$$\{T_1 \wedge \cdots \wedge T_p\}$$

取决于 仅取决于各个 T_i 的 P-等价类以及各个 T_i 的上同调类。

证明。在 X 上取一个凯勒形式 ω，并将 T_i 和 S_i 分别替换为 $T_i + \epsilon\omega$ 和 $S_i + \epsilon\omega$，其中 $\epsilon > 0$ 足够小，这样便可归结为 T_i 和 S_i 均为凯勒流的情形。取一个光滑闭实 (1，1)-形式 $\theta_i \in \alpha_i$，并写作

$$T_i = \theta_i + \mathrm{dd^c}\varphi_i, \quad S_i = \theta_i + \mathrm{dd^c}\psi_i.$$

于是 $\varphi_i \preceq_P \psi_i$。

步骤 1。我们首先证明

$$\Big\{(\theta_1 + \mathrm{dd^c}\psi_1) \wedge \cdots \wedge (\theta_p + \mathrm{dd^c}\psi_p)\Big\} = \Big\{(\theta_1 + \mathrm{dd^c}P_{\theta_1}[\psi_1]) \wedge \cdots \wedge \Big(\theta_p + \mathrm{dd^c}P_{\theta_p}[\psi_p]\Big)\Big\}.$$

该 $\leq_X$ 方向已在 [Vu21定理 4 中证明。4]因此，利用引理 2.16，为了证明等式，我们可以假设 $p = n$。在这种情况下，结论可由通常的单调性定理推出。参见 [Xia，命题 6.1。4]。

步骤 2。由步骤 1，我们可以将 ψ_i 替换为 $P_{\theta_i}[\psi_i]$，并假设 $\varphi_i \preceq \psi_i$ 对每个 $i = 1$，……，p均成立。再次根据 Vu 的结果 [Vu21定理 4，4]我们得出结论（2.7）。□

我们还回顾另一条结果，以备后用。

定理 2.18. 设 $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathrm{H}^{1,1}(X, \mathbb{R})$ 为大类。考虑闭正$(1,1)$-流网 $(T_i^j)^{j\in J}$ 在 α_i 中，对每个 $i = 1, \ldots, p$均成立。假设对每个$i = 1, \ldots, p$，都有 $T_i^j \xrightarrow{d_S} T_i \in \alpha_i$。那么

$$\lim_{j\in J} \left\{T_1^j \wedge \cdots \wedge T_p^j\right\} = \{T_1 \wedge \cdots \wedge T_p\}. \tag{2.8}$$

这直接 逐字 由 [Xia的定理 6.2 的证明得到。1], 其中用 定理 2.17 替代通常的单调性定理。

为后文使用，我们回顾非极化乘积在双亚纯态射下的性质：

命题 2.19。 设 $\pi\colon Y \to X$ 是从凯勒流形出发的适当双亚纯态射。设 T_1、…、T_p 是 X上的闭正$(1, 1)$-流。那么

$$\begin{aligned}\pi^{\diamondsuit}(T_1 \wedge \cdots \wedge T_p) =& \pi^* T_1 \wedge \cdots \wedge \pi^* T_p,\\ \pi_*(\pi^* T_1 \wedge \cdots \wedge \pi^* T_p) =& T_1 \wedge \cdots \wedge T_p.\end{aligned}$$

这里， $\pi^{\diamondsuit}$ 定义如下：取一个最小的 Zariski 闭子集 $Z \subseteq X$，使得 π 在 Z之外是同构。于是，对于 X上的闭正 (p, p)-流 T，令 $\pi^{\diamondsuit}T$ 为 $\pi|^*_{Y\setminus\pi^{-1}(Z)}(T)$ 到 Y上的零延拓。

两个断言都直接由非极化乘积不在真解析集上赋予质量这一事实得到。

定义 2.20. 类 $\alpha \in \mathrm{H}^{p,p}(X, \mathbb{R})$ 若存在一个从凯勒流形 Y 出发的适当双亚纯态射 $\pi\colon Y \to X$，以及 Kähler 类 $\beta_1, \ldots, \beta_p \in \mathrm{H}^{1,1}(Y, \mathbb{R})$，使得

$$\alpha = \pi_*(\beta_1 \cap \cdots \cap \beta_p). \tag{2.9}$$

属于 由严格可移动类生成的闭凸锥中的类称为可移动类 *ss.*

$\mathrm{H}^{p,p}(X, \mathbb{R})$ 中的可移动类所成的锥是一个闭凸锥。显然，可移动类是正的。

例 2.21. 当 $p = 1$ 时，类 $\alpha \in \mathrm{H}^{1,1}(X, \mathbb{R})$ 是可移动的，当且仅当它是修正 *nef*。这是 *[Bou02, 命题 2.1。2]*。

当 $p = 0$ 或 $p = n$时，我们有典范同一 $\mathrm{H}^{p,p}(X, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$。对应于 $t \in \mathbb{R}$ 的类是可移动的，当且仅当 $t \geq 0$。

例 2.22. 在 (2.9) 中，若 $\beta_1, \ldots, \beta_p \in \mathrm{H}^{1,1}(Y, \mathbb{R})$ 均为数值有效的， α 仍然是可移动的。这由 π_* 的连续性立即得出。

命题 2.23. 设 $\pi\colon Y \to X$ 是从凯勒流形Y出发的适当双亚纯态射。假设 $\alpha \in \mathrm{H}^{p,p}(Y, \mathbb{R})$ 是可移动的，则 $\pi_*\alpha$也是可移动的。

证明。 我们可以假设 α 是严格可移动的。于是结论由定义立即得出。□

命题 2.24. 设 $\alpha \in \mathrm{H}^{1,1}(X, \mathbb{R})$ 是一个伪有效类，且 $\beta \in \mathrm{H}^{p,p}(X, \mathbb{R})$ 是一个可移动类。那么

(1) $\alpha \cap \beta$ 是正的；*(2)* 此外，若 α 是数值有效的，

则 $\alpha \cap \beta$ 是可移动的。

证明。 我们可以假设 β 是严格可移动的。取一个适当双亚纯态射$\pi\colon Y \to X$，其中 Y是凯勒流形，并取 Kähler 类 $\gamma_1, \ldots, \gamma_p \in \mathrm{H}^{1,1}(Y, \mathbb{R})$，使得

$$\beta = \pi_*(\gamma_1 \cap \cdots \cap \gamma_p).$$

Then

$$\alpha \cap \beta = \pi_*(\pi^*\alpha \cap \gamma_1 \cap \cdots \cap \gamma_p).$$

(1) 根据命题 2.14，只需证明 $\pi^*\alpha \cap \gamma_1 \cap \cdots \cap \gamma_p$为正，这可由命题 2.15得出。

(2) 由命题 2.23，只需证明 $\pi^*\alpha \cap \gamma_1 \cap \cdots \cap \gamma_p$ 是可移动的。但这显然成立。□

为便于记忆，我们在 命题 2.24和命题 2.15 中表 1总结如下。

$\alpha \in \mathrm{H}^{1,1}(X, \mathbb{R})$	$\beta \in \mathrm{H}^{p,p}(X, \mathbb{R})$	$\alpha \cap \beta$
nef	正	正
nef	可移动	可移动
正	可移动	正

表 1. 交积的正性性质

2.5. **可动交理论**。设 X 是一个维数为 n的连通紧凯勒流形。考虑伪有效的 (1，1)-类 $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathrm{H}^{1,1}(X, \mathbb{R})$。

定义 2.25. 可动交 $\langle \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p \rangle \in \mathrm{H}^{p,p}(X, \mathbb{R})$ 定义如下：

(1) 当 α_i 都是大类时，我们在每个 α_i 中取具有最小奇点的闭正 (1，1)-流$T_{i,\min}$ 并令

$$\langle \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p \rangle = \{T_{1,\min} \wedge \cdots \wedge T_{p,\min}\};$$

(2) 一般情况下，定义

$$\langle \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p \rangle = \lim_{\epsilon \to 0+} \Big\langle (\alpha_1 + \epsilon\beta) \wedge \cdots \wedge (\alpha_p + \epsilon\beta) \Big\rangle,$$

其中 $\beta \in \mathrm{H}^{1,1}(X, \mathbb{R})$ 是一个 Kähler 类。

可动交与我们所作的选择无关。此外，它始终是一个正类。当前定义取自 [BEGZ10]。更传统（但等价）的定义见 [Bou02; BDPP13]。

命题 2.26。设 $\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \alpha_1', \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_p \in \mathrm{H}^{1,1}(X, \mathbb{R})$ 为伪有效类，且$\lambda \geq 0$。我们有以下性质：

(1) 可动交具有对称性：对于 σ *of* $\{1, \ldots, p\}$ 的每个置换，我们有

$$\Big\langle \alpha_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \alpha_{\sigma(p)} \Big\rangle = \langle \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p \rangle.$$

(2) 可动交关于每个变量都是超可加的：

$$\langle (\alpha_1 + \alpha_1') \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_p \rangle \geq_X \langle \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_p \rangle + \langle \alpha_1' \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_p \rangle.$$

(3) 可动交关于每个变量都是齐次的：

$$\langle \lambda\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_p \rangle = \lambda \langle \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_p \rangle.$$

(4) 可动交关于每个变量都是递增的：设 $\alpha_1 \geq \alpha_1'$，则

$$\langle \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p \rangle \geq_X \langle \alpha_1' \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_p \rangle.$$

(5) 我们有

$$\alpha = \langle \alpha \rangle + \sum_{D \subseteq X} \nu(\alpha, D)\{D\}, \tag{2.10}$$

其中 D 遍历 X 上的素除子集。

(6) 我们有

$$\langle \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p \rangle = \lim_{\epsilon \to 0+} \Big\langle (\alpha_1 + \epsilon\beta_1) \wedge \cdots \wedge (\alpha_p + \epsilon\beta_p) \Big\rangle.$$

(7) 当 α_1 是数值有效时，我们有

$$\langle \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p \rangle = \alpha_1 \cap \langle \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_p \rangle$$

参见 [BDPP13，定理 3。5] 大部分内容的证明。第（6）部分见 [Bou02，命题 3.2。4]。

此分解（2.10）通常称为除子型扎里斯基分解或 Boucksom–Nakayama 分解。

伪有效类 $\alpha \in \mathrm{H}^{1,1}(X, \mathbb{R})$ 的体积定义为 $\mathrm{vol}(\alpha) := \langle \alpha^n \rangle$。

3. 广义交理论

设 X 是一个维数为 n 的连通紧凯勒流形。在本节中，p，q表示两个非负整数。

提醒读者，本文中 修改 一词的含义非常非标准，正如我们在定义 2.3中所回顾的那样。

3.1. b-类的概念。

我们引入本文所关注的核心对象——b-类。

定义 3.1。次数为 p 、在 X 上的 （*Weil*）*b*-类 $\mathbb{T}$ 是以下空间中的一个元素：

$$\varprojlim_{\pi\colon Y \to X} \mathrm{H}^{p,p}(Y, \mathbb{R}), \tag{3.1}$$

其中，$\pi\colon Y \to X$ 遍历 X的修改所构成的有向集。这里的极限取在实向量空间范畴中。

等价地，由于 Hironaka 的 Chow 引理 [Hir75，推论 2], 我们可以让 π <style id='12}遍历从凯勒流形出发的适当双亚纯态射的集合。

关于（3.1）的分量记为 $\mathbb{T}_Y \in \mathrm{H}^{p,\,p}(Y, \mathbb{R})$。次数为 p 、在 X 上的 b-类向量空间记为 $\mathrm{Div}^p{}_{\mathrm{b}}(X)$。

向量空间 $\mathrm{Div}^p{}_{\mathrm{b}}(X)$ 赋予射影极限拓扑。换言之，b-类网 $(\mathbb{T}^i)_{i\in I}$ 收敛到 b-类 $\mathbb{T}$，意味着对于每个修改 $\pi\colon Y \to X$，$(\mathbb{T}^i_Y)_{i\in I}$ 关于欧几里得拓扑收敛到 $\mathbb{T}_Y$。

定义 3.2. b-类 $\mathbb{T} \in \mathrm{Div}^p{}_{\mathrm{b}}(X)$ 是 数值有效 的条件是，对于每个修改 $\mathbb{T}_Y$，分量 π $Y \to X$按照定义 2.20的意义是可移动的。

b-类 $\mathbb{T} \in \mathrm{Div}^p{}_{\mathrm{b}}(X)$ 是伪有效的条件是，对于每个修改 π，分量 $\mathbb{T}_Y$ 按照定义 2.11 的意义是正的。

注 3.3。 这里有一个细微之处：我们可以要求 $\pi\colon Y \to X$ 遍历所有修改，或者遍历从 Kähler 流形出发的所有适当双亚纯态射。根据命题 2.14和 命题 2.23，相应的数值有效或伪有效 b-类的概念是相同的。

请注意，数值有效 b-类和伪有效 b-类都是闭条件，即它们在网的极限下保持不变，因为紧Kähler流形上的可动锥和正锥都是闭的。数值有效 b-类是伪有效的。

根据射影极限定义（3.1），对于凯勒流形之间的每个适当双亚纯态射 $\pi\colon Y \to X$，$\mathrm{Div}^p{}_{\mathrm{b}}(X)$ 与 $\mathrm{Div}^p{}_{\mathrm{b}}(Y)$ 之间存在典范识别。我们将始终默认使用这一识别。

本文中定义的所有与 b-除子相关的概念，在将 X 替换为其修改时均保持不变。若这一点并非显而易见，我们会明确加以验证。

此外，利用这一识别，我们可以对任意约化紧Kähler空间 X 定义 $\mathrm{Div}^p{}_{\mathrm{b}}(X)$：只需取一个射影解消 $Y \to X$，并令 $\mathrm{Div}^p{}_{\mathrm{b}}(X) :=\mathrm{Div}^p{}_{\mathrm{b}}(Y)$。

例 3.4。 当 $p = 0$ 时，存在典范识别 $\mathrm{Div}^0_{\mathrm{b}}(X) \cong \mathbb{R}$。元素$t \in \mathrm{Div}^0_{\mathrm{b}}(X)$ 是数值有效或伪有效的，当且仅当 $t \geq 0$。类似地，当 $p = n$ 时，也存在典范识别 $\mathrm{Div}^n_{\mathrm{b}}(X) \cong \mathbb{R}$。元素 $t \in \mathrm{Div}^n_{\mathrm{b}}(X)$ 是数值有效或伪有效的，当且仅当 $t \geq 0$。

当 $p = 1$，$\mathrm{Div}^1_{\mathrm{b}}(X)$ 只是我们在上一篇论文中研究过的位于 X之上的 *b*-除子集合。元素$\mathrm{Div}^1_{\mathrm{b}}(X)$ 按照定义 *3.2* 的意义是数值有效（分别为伪有效），当且仅当

按照 *[Xia25b]*中的定义，它是数值有效（分别为伪有效）的 *b*-除子。详情请参见 *[Xia*，推论 *11.1*。*1]*。

定义 3.5。 给定 $\mathbb{T}$，$\mathbb{T}' \in \mathrm{Div}^p{}_{\mathrm{b}}(X)$，若对每个修改 $\pi\colon Y \to X$，都有 $\mathbb{T}_Y \geq_Y \mathbb{T}'_Y$，则记作 $\mathbb{T} \geq \mathbb{T}'$。

回顾一下，$\geq_Y$ 是在 定义 2.11 之后定义的。

由 命题 2.14，只需对一个共尾的修改集检验此条件。注意，$\geq$ 在 $\mathrm{Div}^p{}_{\mathrm{b}}(X)$ 上定义了一个偏序。

注 3.6。 在 定义 3.5 中，也可以等价地要求 π 遍历来自凯勒流形的双亚纯双有理态射集合 $\pi\colon Y \to X$，这是 命题 2.14 的推论。

回顾一下 [Xia22； Xia25b] 中的以下构造：

定义 3.7. 设 T 是 X 上一个闭正 (1，1)-流，我们如下定义 X 上的数值有效 b-除子 $\mathbb{D}(T)$：

$$\mathbb{D}(T)_Y = \{\mathrm{Reg}\,\pi^* T\} \in \mathrm{H}^{1,1}(Y, \mathbb{R}), \tag{3.2}$$

对于所有修改 $\pi\colon Y \to X$。

此处 Reg 定义见（2.3）。

注 3.8. 由 Siu 分解显然的函子性可知，对于来自凯勒流形 Y的适当双亚纯态射 $\pi\colon Y \to X$，分量 $\mathbb{D}(T)_Y$由 $\mathbb{D}(T)$ 给出，且恰好由同一公式（3.2）表示。

注意，$\mathbb{D}(T)$ 关于 T 呈线性，具体来说：若 X 上还有另一个闭正 (1，1)-流 T'，且 $\lambda \geq 0$，那么

$$\mathbb{D}(T + T') = \mathbb{D}(T) + \mathbb{D}(T'), \quad \mathbb{D}(\lambda T) = \lambda \mathbb{D}(T). \tag{3.3}$$

回忆一下，若数值有效 b-除子 $\mathbb{D}$ 的体积

$$\mathrm{vol}\,\mathbb{D} := \lim_{\pi\colon Y \to X} \mathrm{vol}\,\mathbb{D}_Y$$

是正的。

Xia25b [中的主要结果] 表明

定理 3.9。固定一个修正的 *nef* 大类 $\alpha \in \mathrm{H}^{1,1}(X, \mathbb{R})$。定义 $\mathbb{D}$ 中的映射定义 *3.7*在以下两者之间诱导出一个典范双射：

(1) α 中具有正体积且模 *I*-等价的非除子型闭正 (1,1)-流的集合，以及 *(2)* X 上具有 $\mathbb{D}_X = \alpha$ 的 *nef* 大 *b*-除子的集合 $\mathbb{D}$。

该对应保持体积不变。

此外，给定任意一个 X上的 *nef* 大 *b*-除子 $\mathbb{D}$，我们总能找到一个非除子型 *I*-良好闭正$(1,\ 1)$-流 T，使得 $\mathbb{D} = \mathbb{D}(T)$。

相关概念已在第 2.1 节中回顾。一般而言，我们不能将 T 取作 Kähler 流；不过，以下有用的观察值得注意：若 $\mathbb{D}$ 是 nef b-除子，ω 是 X 上的凯勒形式，那么 $\mathbb{D} + \mathbb{D}(\omega)$ 可表示为 $\mathbb{D}(T)$，其中 T 是 I-良好非除子型 Kähler 流。只需将 $\mathbb{D} + \mathbb{D}(\omega)$ 写成 $(\mathbb{D} + 2^{-1}\mathbb{D}(\omega)) + 2^{-1}\mathbb{D}(\omega)$，并对括号中的项应用定理 3.9 即可。

回顾一下，$\mathbb{D}$ 上的 nef b-除子 $\mathbb{D}$ 若存在一个 实现，则称其为卡蒂埃除子：一个由适当双亚纯态射 $\pi\colon Y \to X$ 构成的对 $(\pi\colon Y \to X, \alpha)$，其中该态射从凯勒流形 Y 出发，且 $\alpha \in \mathrm{H}^{1,1}(Y, \mathbb{R})$ 是数值有效类；并且对于每个支配 π 的修改 $\pi'\colon Y' \to X$，其值 $\mathbb{D}_{Y'}$ 都是经由态射 $Y' \to Y$ 对 α 的拉回。我们也称 $\mathbb{D}$ 由 α 在 Y 上实现。

注意，我们总可以令 π 为一个修改。

作为推论，我们有：

推论 3.10. 对于任意关于 X 的 *nef b*-除子 $\mathbb{D}$，我们可以找到一个关于 X 的丰 *Cartier b*-除子递减序列 $(\mathbb{D}^i)_i$，其极限为 $\mathbb{D}$。

参见 [Xia25b，推论 4。15]。

定义 3.11. 给定一个伪有效类 $\alpha \in \mathrm{H}^{1,1}(X,\mathbb{R})$，我们定义其上的一个数值有效 b-除子 $\mathbb{D}(\alpha)$ 如下：

$$\mathbb{D}(\alpha)_Y = \langle \pi^*\alpha \rangle,$$

其中 $\pi\colon\ Y \to X$ 是一个修改。

回忆一下，$\langle\bullet\rangle$ 指的是我们在第 2.5 节中回顾过的可动交积。也就是说，$\mathbb{D}(\alpha)_Y$ 是 $\pi^*\alpha$ 关于 Boucksom–Nakayama 分解的可移动部分。

当 α 为大类时，$\mathbb{D}(\alpha) = \mathbb{D}(T_{\min})$，其中 $T_{\min} \in \alpha$ 是具有最小奇异性的流。当 α 为数值有效时，我们有

$$\mathbb{D}(\alpha)_Y = \pi^*\alpha \tag{3.4}$$

对每个修改 $\pi\colon\ Y \to X$。

该算子在以下意义下是凹的：

命题 3.12. 设 $\alpha, \beta \in \mathrm{H}^{1,1}(X,\mathbb{R})$ 是伪有效类。则

$$\mathbb{D}(\alpha) + \mathbb{D}(\beta) \leq \mathbb{D}(\alpha+\beta). \tag{3.5}$$

当 α, β 均为数值有效时，等式成立。

证明。 为了证明 (3.5)，只需证明

$$\mathbb{D}(\alpha)_X + \mathbb{D}(\beta)_X \leq \mathbb{D}(\alpha+\beta)_X.$$

换言之，

$$\sum_{D\subseteq X} \Big(\nu(\alpha,D) + \nu(\beta,D)\Big)\{D\} \geq \sum_{D\subseteq X} \nu(\alpha+\beta,D)\{D\},$$

这可由以下简单观察得到：对于 X 上的任意素除子 D，有

$$\nu(\alpha,D) + \nu(\beta,D) \geq \nu(\alpha+\beta,D).$$

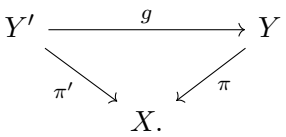
当 α 和 β 均为数值有效时，根据我们在（3.5）中对相关 b-除子的显式描述，等式成立；该描述见（3.4）。□

3.2. **交理论**。我们首先讨论 Cartier 数值有效 b-除子与 nef b-类之间的交积。

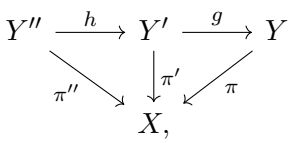
定义 3.13。设 $\mathbb{D}$ 是 X 上的 nef Cartier b-除子，且 $\mathbb{T} \in \mathrm{Div}^{q}{}_{\mathrm{b}}(X)$ 是一个 nef b-类。则我们如下定义 nef 类 $\mathbb{D}\cap\mathbb{T} \in \mathrm{Div}^{q+1}{}_{\mathrm{b}}(X)$：设 $(\pi\colon\ Y \to X, \alpha)$ 是 $\mathbb{D}$ 的一个实现，则对每个支配 π 且通过 g 的修改 $\pi'\colon\ Y' \to X$，定义：$Y' \to Y$，

$$(\mathbb{D}\cap\mathbb{T})_{Y'} := g^*\alpha \cap \mathbb{T}_{Y'} \in \mathrm{H}^{p+1,p+1}(Y,\mathbb{R}). \tag{3.6}$$

此处与前文一样，$\cap$ 右端表示上同调的交积。（3.6）中定义的类由命题 2.24可知是可移动的。相关记号总结在以下交换图中：



根据投影公式，这些类在推前下相容。更准确地说，如果 $\pi''\colon\ Y'' \to X$ 是一个通过 $h\colon\ Y'' \to Y'$ 支配 π' 的修改，如下方交换图所示：



(3.7)

then

$$h_*\Big((g\circ h)^*\alpha\cap\mathbb{T}_{Y''}\Big)=g^*\alpha\cap\mathbb{T}_{Y'}.$$

由于支配 π 的 π"的集合在 X的修改所成的有向集中共尾，上述定义确实给出了 X上的 nef b-类 $\mathbb{D}\cap\mathbb{T}$。

注记 3.14。 完全相同地，如果 $\pi'\colon\ Y'\to X$ 是一个从凯勒流形到 π 并通过 $g\colon\ Y'\to Y$支配 $(\mathbb{D}\cap\mathbb{T})_{Y'}$的真双亚纯映射，则该值由完全相同的公式（3.6）给出。

引理 3.15。 乘积 $\mathbb{D}\cap\mathbb{T}$ 在 定义 *3.13*中与实现的选择无关（$\pi\colon\ Y\to X,\ \alpha$） 对于 $\mathbb{D}$而言。

证明。 令 $(\pi\colon\ Y'\to X,\ \alpha')$ 是 $\mathbb{D}$ 的另一个实现。我们要证明，相对于这两个实现定义的 $\mathbb{D}\cap\mathbb{T}$ 是相同的。为此，不妨假设 π' 通过一个态射 $g\colon\ Y'\to Y$ 和 $\alpha'=g^*\alpha$ 支配 π。

考虑一个修改 $\pi''\colon\ Y''\to X$通过一个态射 $h\colon\ Y''\to Y'$支配 Y'。于是有一个如（3.7）所示的交换图。我们的断言现在意味着

$$\big(h^*\alpha'\big)\cap\mathbb{T}_{Y''}=\big((g\circ h)^*\alpha\big)\cap\mathbb{T}_{Y''},$$

这是显然的。 □

因此，我们有：

推论 3.16. 设 $\mathbb{D}$ 是 X 上的 *nef Cartier b*-除子，且 $\mathbb{T}\in\mathrm{Div}^q{}_{\mathrm{b}}(X)$ 是一个 *nef b*-类。设 $\pi\colon\ Y\to X$ 是从凯勒流形 Y出发的适当双亚纯态射。那么，当 $\mathbb{D}$和 $\mathbb{T}$ 被视为$\mathrm{Div}^1_{\mathrm{b}}(Y)$ 与$\mathrm{Div}^p{}_{\mathrm{b}}(Y)$中的元素时，定义 *3.19* 中的 $\mathbb{D}\cap\mathbb{T}$ 与 $\mathbb{D}\cap\mathbb{T}$ 相同。

我们证明交积的一些初等性质。很快，这些性质将被更一般的版本所取代。

引理 3.17. 设 $\mathbb{D},\mathbb{D}'$ 是 X 上的 *Cartier nef b*-除子，且 $\mathbb{T},\mathbb{T}'\in\mathrm{Div}^p{}_{\mathrm{b}}(X)$ 是 *nef b*-类。

(1) 假设 $\mathbb{D}\geq\mathbb{D}'$，则

$$\mathbb{D}\cap\mathbb{T}\geq\mathbb{D}'\cap\mathbb{T}.$$

(2) 假设 $\mathbb{T}\geq\mathbb{T}'$，则

$$\mathbb{D}\cap\mathbb{T}\geq\mathbb{D}\cap\mathbb{T}'.$$

证明。根据推论 3.16，我们可以假设 $\mathbb{D}$ 和 $\mathbb{D}'$ 均由 X 上的数值有效类 $\alpha,\ \alpha'\in\mathrm{H}^{1,1}(X,\ \mathbb{R})$实现。固定一个修改 $\pi\colon\ Y\to X$。

(1) 我们需要证明，若 $\alpha\geq\alpha'$，则

$$\pi^*\alpha\cap\mathbb{T}_Y\geq_Y\pi^*\alpha'\cap\mathbb{T}_Y.$$

这由命题 2.24得出。

(2) 我们需要证明，若 $\mathbb{T}_Y\geq_Y\mathbb{T}'_Y$，则

$$\pi^*\alpha\cap\mathbb{T}_Y\geq_Y\pi^*\alpha\cap\mathbb{T}'_Y.$$

这由命题 2.15得出。 □

引理 3.18。 设 $\mathbb{D},\mathbb{D}'$ 是 $X,\lambda\geq0$ 上的 *nef Cartier b*-除子，且 $\mathbb{T},\mathbb{T}'\in\mathrm{Div}^p{}_{\mathrm{b}}(X)$ 是 *nef b*-类。那么

(1) $(\mathbb{D}+\mathbb{D}')\cap\mathbb{T}=\mathbb{D}\cap\mathbb{T}+\mathbb{D}'\cap\mathbb{T}$; *(2)* $\mathbb{D}\cap(\mathbb{T}+\mathbb{T}')=\mathbb{D}\cap\mathbb{T}+\mathbb{D}\cap\mathbb{T}'$; *(3)* $(\lambda\mathbb{D})\cap\mathbb{T}=\lambda(\mathbb{D}\cap\mathbb{T})$; *(4)* $\mathbb{D}\cap(\lambda\mathbb{T})=\lambda(\mathbb{D}\cap\mathbb{T})$.

证明。 由推论 3.16，我们可以假设 $\mathbb{D}$ 和 $\mathbb{D}'$ 都由 X实现，此时所有这些断言显然成立。 □

接下来w 我们进入 nef b-除子与 nef b-类之间的一般交理论。

定义 3.19。设 $\mathbb{D}$ 是 X 上的一个 nef b-除子，且 $\mathbb{T} \in \mathrm{Div}^q{}_{\mathrm{b}}(X)$ 是一个 nef b-类。于是我们如下定义 nef b-类 $\mathbb{D} \cap \mathbb{T} \in \mathrm{Div}^{q+1}{}_{\mathrm{b}}(X)$：取一个递减序列 $(\mathbb{D}_i)_i$，其中各项都是 X 上的 nef Cartier b-除子，并且收敛于 $\mathbb{D}$；其存在性由推论 3.10保证。然后令

$$\mathbb{D} \cap \mathbb{T} := \lim_{i\to\infty} \mathbb{D}_i \cap \mathbb{T}. \tag{3.8}$$

由引理 3.17可知，序列 $(\mathbb{D}_i \cap \mathbb{T})_i$ 是递减的。由于我们在 b-类空间上考虑射影极限拓扑，(3.8) 中的收敛意味着各模型上的分量收敛。(3.8) 中极限的存在性则由命题 2.6得出。

引理 3.20。定义 *3.19* $\mathbb{D} \cap \mathbb{T}$ 中的交定义 *3.19*与序列 $(\mathbb{D}_i)_i$的选取无关。

特别地，当 $\mathbb{D}$ 是卡蒂埃时，在 $\mathbb{D} \cap \mathbb{T}$ 定义的 b-类定义 3.19与定义 3.13中定义的相同。

证明。我们继续使用定义 3.19中的记号。

我们断言，对于每个在 X 上满足 $\mathbb{D}' \geq \mathbb{D}$ 的数值有效卡蒂埃 b-除子 $\mathbb{D}'$，都有

$$\lim_{i\to\infty} \mathbb{D}_i \cap \mathbb{T} \leq \mathbb{D}' \cap \mathbb{T}. \tag{3.9}$$

由此断言，引理显然成立。

为了证明（3.9），只需证明

$$\lim_{i\to\infty} (\mathbb{D}_i \cap \mathbb{T})_X \leq_X (\mathbb{D}' \cap \mathbb{T})_X. \tag{3.10}$$

事实上，将（3.10）应用于 $\mathbb{D}$，$\mathbb{D}'$，$\mathbb{D}_i$ 和 $\mathbb{T}$（将它们视为 X的某个修改上的 b-类），即可得出一般性结论（3.9）。

由命题 2.14，为了证明（3.10），我们可以进一步假设 $\mathbb{D}'$ 由数值有效类 $\alpha \in$ 在 $X\, \mathrm{H}^{1,1}(X, \mathbb{R})$上实现。于是剩下要证明

$$\lim_{i\to\infty} (\mathbb{D}_i \cap \mathbb{T})_X \leq_X \alpha \cap \mathbb{T}_X. \tag{3.11}$$

固定一个 Kähler 类 $\beta \in \mathrm{H}^{1,1}(X, \mathbb{R})$。对于每个 $\epsilon > 0$，我们可以找到 $i_0 > 0$，使得当 $i > i_0$ 时，

$$\mathbb{D}_{i,X} \leq \alpha + \epsilon\beta.$$

固定一个 $i > i_0$。那么

$$\mathbb{D}_i \leq \mathbb{D}(\alpha + \epsilon\beta) = \mathbb{D}(\alpha) + \epsilon\mathbb{D}(\beta),$$

其中不等式由引理 3.21 得出，等式由命题 3.12得出。因此，根据引理 3.17和引理 3.18，

$$(\mathbb{D}_i \cap \mathbb{T})_X \leq_X (\mathbb{D}(\alpha) \cap \mathbb{T})_X + \epsilon\, (\mathbb{D}(\beta) \cap \mathbb{T})_X.$$

令 $i \to \infty$，再令 $\epsilon \to 0+$，则（3.11）得证。 □

引理 3.21. 设 $\pi\colon Y \to X$ 是从凯勒流形 Y到 $\alpha \in$ 的适当双亚纯态射。则对任意修正 *nef* 类 $\alpha \in \mathrm{H}^{1,1}(Y, \mathbb{R})$，有

$$\alpha \leq \pi^*\pi_*\alpha.$$

证明。不失一般性，可假设 α 是大类。取具有最小奇异性的流 T $T \in \alpha$。则 $\pi^*\pi_*T$ 是 $\pi^*\pi_*\alpha$ 上的闭正 (1,1)-流，其关于 Siu 分解的正则部分与 T重合。断言得证。□

命题 3.22. 设 $\pi\colon Y \to X$ 是一个修改。设 $\mathbb{D}$ 是 X 上的 *nef b*-除子，且$\mathbb{T} \in \mathrm{Div}^q{}_{\mathrm{b}}(X)$ 是一个 *nef b*-类。若将 $\mathbb{D}$和 $\mathbb{T}$ 视为 $\mathrm{Div}^1_{\mathrm{b}}(Y)$ 和 $\mathrm{Div}^p{}_{\mathrm{b}}(Y)$中的元素，则定义 *3.13* 中的 $\mathbb{D} \cap \mathbb{T}$ 保持不变。

证明。这是已证明的卡蒂埃情形的一个简单推论，见推论 3.16。 □

命题 3.23。设 $\mathbb{D}$、$\mathbb{D}'$ 是 X、$\lambda \geq 0$ 上的 *nef b*-除子，且 $\mathbb{T}$、$\mathbb{T}' \in$ 除^p 子（X）是 *nef b*-类。则

(1) $(\mathbb{D}+\mathbb{D}')\cap\mathbb{T}=\mathbb{D}\cap\mathbb{T}+\mathbb{D}'\cap\mathbb{T}$;
(2) $\mathbb{D}\cap(\mathbb{T}+\mathbb{T}')=\mathbb{D}\cap\mathbb{T}+\mathbb{D}\cap\mathbb{T}'$;
(3) $(\lambda\mathbb{D})\cap\mathbb{T}=\lambda(\mathbb{D}\cap\mathbb{T})$; (4) $\mathbb{D}\cap(\lambda\mathbb{T})=\lambda(\mathbb{D}\cap\mathbb{T})$。

证明。 这些都是由引理 3.18中证明的卡蒂埃情形直接推出的。 □

如果我们有 nef b-除子 $\mathbb{D}_1,\dots,\mathbb{D}_p$，它们定义在 X 上，且有一个 nef b-类 $\mathbb{T}\in\mathrm{Div}^q{}_{\mathrm{b}}(X)$，那么我们可以定义 e

$$\mathbb{D}_1\cap\cdots\cap\mathbb{D}_p\cap\mathbb{T}:=\mathbb{D}_1\cap(\mathbb{D}_2\cap\cdots\cap\mathbb{D}_p\cap\mathbb{T})\in\mathrm{Div}^{p+q}_{\mathrm{b}}(X)$$

归纳地。

例 3.24。 设 $\mathbb{D}_1,\dots,\mathbb{D}_p$ 是定义在 X 上的 *nef b*-除子。考虑 $1\in$除子$^0_{\mathrm{b}}(X)$，并记住例 *3.4* 中的识别。我们有

$$\mathbb{D}_1\cap\cdots\cap\mathbb{D}_p\cap 1=\mathbb{D}_1\cap\cdots\cap\mathbb{D}_p.$$

为说明这一点，对 p 进行归纳，我们可以假设 $p=1$，于是我们的断言变为 s

$$\mathbb{D}_1\cap 1=\mathbb{D}_1.$$

通过逼近，只需证明以下情形即可： $\mathbb{D}_1$ 是卡蒂埃。此外，推论 *3.16*使我们可以将问题归约到以下情形：$\mathbb{D}_1$ 在 X上实现。于是我们的断言显然成立。

当 $p=n$ 时，乘积 $\mathbb{D}_1\cap\cdots\cap\mathbb{D}_n$ 恢复为交积

$$(\mathbb{D}_1,\dots,\mathbb{D}_n)$$

中研究的 *[Xia25b]*，并将$\mathrm{Div}^n_{\mathrm{b}}(X)=\mathbb{R}$ 的典范识别例 *3.4* 纳入考量。

我们证明一个单调性结果:

命题 **命题 3.25.** 设 $\mathbb{D},\mathbb{D}'$ 是 X 上的数值有效 *b*-除子，且 $\mathbb{T},\mathbb{T}'\in\mathrm{Div}^p{}_{\mathrm{b}}(X)$ 是数值有效 *b*-类 *es.*

(1) 假设 $\mathbb{D}\geq\mathbb{D}'$，则

$$\mathbb{D}\cap\mathbb{T}\geq\mathbb{D}'\cap\mathbb{T}.$$

(2) 假设 $\mathbb{T}\geq\mathbb{T}'$，则

$$\mathbb{D}\cap\mathbb{T}\geq\mathbb{D}\cap\mathbb{T}'.$$

证明。 (1) 取 X 上满足 $\mathbb{D}''\geq\mathbb{D}$ 的数值有效 Cartier b-除子 $\mathbb{D}''$。我们需要证明 th at

$$\mathbb{D}''\cap\mathbb{T}\geq\mathbb{D}'\cap\mathbb{T}.$$

这已在以下证明过程中证明引理 3.20.()

2 By 定义，因此我们可以假设 $\mathbb{D}$ 是 Cartier。于是结论由 引理 3.1 7. □

定理 3.26. 设 $(\mathbb{D}^j_i)_{j\in J}$ 是定义在 X 上的 *nef b*-除子递减网，其极限为 $\mathbb{D}_i$，对每个 $i=1,\dots,p$ 均如此。设 $(\mathbb{T}^j)_{j\in J}$ 是 $\mathrm{Div}^q{}_{\mathrm{b}}(X)$ 中的 *nef b*- 类递减网，其极限为 $\mathbb{T}$。那么

$$\lim_{j\in J}\mathbb{D}^j_1\cap\cdots\cap\mathbb{D}^j_p\cap\mathbb{T}^j=\mathbb{D}_1\cap\cdots\cap\mathbb{D}_p\cap\mathbb{T}.$$

证明。 对 $p\geq 1$ 归纳，并利用 命题 3.25，只需在 $p=1$ 的情形下证明我们的断言。在这种情况下，我们省略下标 i，于是只需证明

$$\lim_{j\in J}\mathbb{D}^j\cap\mathbb{T}^j=\mathbb{D}\cap\mathbb{T}. \tag{3.12}$$

我们首先注意到，(3.12) 左端的极限存在，这是 命题 3.25 和命题 2.6 的推论。此外，($\geq$ 3.12) 中的方向成立。

步骤 1。我们首先假设，对于所有 $j\in J$，都有 $\mathbb{T}^j=\mathbb{T}$。在这种情况下，取一个以 $\mathbb{D}$ 为极限的 Cartier 数值有效 b-除子递减序列 $(\mathbb{D}'^k)_{k>0}$。固定 $k>0$，我们需要证明

$$\lim_{j\in J}\mathbb{D}^j\cap\mathbb{T}\leq\mathbb{D}'^k\cap\mathbb{T}. \tag{3.13}$$

为此，我们还可以假设 $\mathbb{D}'^k$ 在 X 上由数值有效类 $\alpha\in \mathrm{H}^{1,1}(X,\ \mathbb{R})$ 实现。固定 X 上的一个 Kähler 类 β，那么对于每个 $\epsilon>0$，我们都可以找到 $j_0\in J$，使得当 $j\geq j_0$ 时，有

$$\mathbb{D}'^j_X\leq \alpha+\epsilon\beta.$$

因此，得益于引理 3.21 和命题 3.12，

$$\mathbb{D}'^j\leq \mathbb{D}'^k+\epsilon\mathbb{D}(\beta),\quad j\geq j_0.$$

利用命题 3.25和命题 3.23，我们得到

$$\mathbb{D}'^j\cap\mathbb{T}\leq \mathbb{D}'^k\cap\mathbb{T}+\epsilon\mathbb{D}(\beta)\cap\mathbb{T},\quad j\geq j_0.$$

先对 j 取极限，然后令 $\epsilon\to 0+$，可得（3.13）。

步骤 2。我们假设对于所有 $j\in J$，都有 $\mathbb{D}'^j=\mathbb{D}$。那么我们需要证明

$$\lim_{j\in J}\mathbb{D}\cap\mathbb{T}'^j\leq \mathbb{D}\cap\mathbb{T}. \tag{3.14}$$

在这种情况下，取一个 $(\mathbb{D}'^k)_{k>0}$ 的数值有效 Cartier b-除子递减序列，其极限为 $\mathbb{D}$。假设我们能够将3.14）中的 $\mathbb{D}'^k$ 替换为 $\mathbb{D}$并证明该式，那么根据命题 3.25 我们有

$$\lim_{j\in J}\mathbb{D}\cap\mathbb{T}'^j\leq\lim_{j\in J}\mathbb{D}'^k\cap\mathbb{T}'^j=\mathbb{D}'^k\cap\mathbb{T}$$

对于每个 $k>0$。令 $k\to\infty$，我们得出结论（3.14）。

因此，在证明（3.14）时，我们可以假设 $\mathbb{D}$ 是卡蒂埃的。将 X 替换为一个修改后，我们还可以进一步假设 $\mathbb{D}$ 在 X 上由一个数值有效类 $\alpha\in\mathrm{H}^{1,1}(X,\ \mathbb{R})$ 实现。那么（3.14）意味着如下内容：设 $\pi\colon\ Y\to X$ 是一个修改，则

$$\lim_{j\in J}\pi^*\alpha\cap\mathbb{T}'^j_Y\leq_Y\pi^*\alpha\cap\mathbb{T}_Y,$$

这是显然的。

步骤 3。我们证明一般情形。

对于每个固定的 $j_0\in J$，根据步骤 1 和 命题 3.25，我们有

$$\mathbb{D}\cap\mathbb{T}'^{j_0}=\lim_{j\in J}\mathbb{D}'^j\cap\mathbb{T}'^{j_0}\geq\lim_{j\in J}\mathbb{D}'^j\cap\mathbb{T}'^j.$$

对 j_0取极限，利用步骤 2，我们得出结论（3.12）。

□

我们总结交积的性质。这些性质推广了命题 2.26中关于可动交积的相应结论。它们还推广了 $p=n$ 在 [Xia25b]中证明的相应性质。

命题 3.27。设 $\mathbb{D}_1$、...、$\mathbb{D}_p$、$\mathbb{D}'_1$、$\mathbb{D}'$ 是 X、$\mathbb{T}$、$\mathbb{T}'\in\mathrm{Div}^q{}_{\mathrm{b}}(X)$ 上的 ***nef b*-除子**，$\alpha\in\mathrm{H}^{1,1}(X$、$\mathbb{R})$ 是一个 ***nef*** 类，且有 $\lambda\geq 0$。我们有以下性质：

(1) 乘积具有对称性：对于 σ 的每个置换 $\{1$、...、$p\}$，我们有

$$\mathbb{D}_1\cap\cdots\cap\mathbb{D}_p\cap\mathbb{T}=\mathbb{D}_{\sigma(1)}\cap\cdots\cap\mathbb{D}_{\sigma(p)}\cap\mathbb{T}.$$

(2) 乘积关于每个变量都是可加的：

$$\begin{aligned}(\mathbb{D}_1+\mathbb{D}'_1)\cap\mathbb{D}_2\cap\cdots\cap\mathbb{D}_p\cap\mathbb{T}=&\mathbb{D}_1\cap\mathbb{D}_2\cap\cdots\cap\mathbb{D}_p\cap\mathbb{T}+\mathbb{D}'_1\cap\mathbb{D}_2\cap\cdots\cap\mathbb{D}_p\cap\mathbb{T},\\ \mathbb{D}_1\cap\cdots\cap\mathbb{D}_p\cap(\mathbb{T}+\mathbb{T}')=&\mathbb{D}_1\cap\cdots\cap\mathbb{D}_p\cap\mathbb{T}+\mathbb{D}_1\cap\cdots\cap\mathbb{D}_p\cap\mathbb{T}'.\end{aligned}$$

(3) 乘积关于每个变量都是齐次的：

$$\begin{aligned}(\lambda\mathbb{D}_1)\cap\mathbb{D}_2\cap\cdots\cap\mathbb{D}_p\cap\mathbb{T}=&\lambda\left(\mathbb{D}_1\cap\mathbb{D}_2\cap\cdots\cap\mathbb{D}_p\cap\mathbb{T}\right),\\ \mathbb{D}_1\cap\cdots\cap\mathbb{D}_p\cap(\lambda\mathbb{T})=&\lambda\left(\mathbb{D}_1\cap\cdots\cap\mathbb{D}_p\cap\mathbb{T}\right).\end{aligned}$$

(4) 乘积关于每个变量都是递增的：若假设 $\mathbb{D}_1\geq\mathbb{D}'_1$，则有

$$\mathbb{D}_1\cap\mathbb{D}_2\cap\cdots\cap\mathbb{D}_p\cap\mathbb{T}\geq\mathbb{D}'_1\cap\mathbb{D}_2\cap\cdots\cap\mathbb{D}_p\cap\mathbb{T}.$$

类似地，如果我们假设 $\mathbb{T}\geq\mathbb{T}'$，那么

$$\mathbb{D}_1\cap\cdots\cap\mathbb{D}_p\cap\mathbb{T}\geq\mathbb{D}_1\cap\cdots\cap\mathbb{D}_p\cap\mathbb{T}'.$$

(5) 我们有

$$\left(\mathbb{D}_1 \cap \cdots \cap \mathbb{D}_p \cap \mathbb{D}(\alpha)\right)_X = \left(\mathbb{D}_1 \cap \cdots \cap \mathbb{D}_p\right)_X \cap \alpha.$$

证明。 (1) 我们可以很容易地将问题归约到情形 $p = 2$，此时只需证明

$$\mathbb{D}_1 \cap \mathbb{D}_2 \cap \mathbb{T} = \mathbb{D}_2 \cap \mathbb{D}_1 \cap \mathbb{T}.$$

利用 定理 3.26的逼近，我们可以很容易地将问题归约到以下情形： $\mathbb{D}_1$ 和 $\mathbb{D}_2$ 都是卡蒂埃的。由 推论 3.16可知，我们还可以进一步假设 $\mathbb{D}_1$ 和 $\mathbb{D}_2$ 由 nef 类实现于X 上 α_1， $\alpha_2 \in \mathrm{H}^{1,1}(X, \mathbb{R})$。此时，我们要证明的断言如下：对于任意修改 π： $Y \to X$，都有

$$\pi^*\alpha_1 \cap (\pi^*\alpha_2 \cap \mathbb{T}_Y) = \pi^*\alpha_2 \cap (\pi^*\alpha_1 \cap \mathbb{T}_Y),$$

这显然成立。

(2) (3) 由命题 3.23可得。(4) 由命题 3.25可得。(5) 由定义 定义 3.13 立即可得。

□

例 3.28。 设 $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathrm{H}^{1,1}(X, \mathbb{R})$ 是数值有效类。那么对于任意修改 π： $Y \to X$，都有

$$\left(\mathbb{D}(\alpha_1) \cap \cdots \cap \mathbb{D}(\alpha_p)\right)_Y = \pi^*\alpha_1 \cap \cdots \cap \pi^*\alpha_p.$$

这是命题 *3.27(5)* 的直接推论。我们将在推论 *3.30*中推广这一结论。

b-除子的交理论与非极化乘积密切相关。

定理 3.29。 设 T_1，...， T_p 是 *I*-良好的闭正 $(1, 1)$-流。则

$$\left(\mathbb{D}(T_1) \cap \cdots \cap \mathbb{D}(T_p)\right)_Y = \{\pi^*T_1 \wedge \cdots \wedge \pi^*T_p\} \tag{3.15}$$

对于所有修改 π： $Y \to X$，均有。

证明。 首先注意到， （3.15）的右端确实定义了一个 nef b-类，这要归功于命题 2.19和 命题 2.12。由于将定理中的假设中的 T_i替换为 π^*T_i中的相应对象后，假设仍然成立，因此只需证明

$$\left(\mathbb{D}(T_1) \cap \cdots \cap \mathbb{D}(T_p)\right)_X = \{T_1 \wedge \cdots \wedge T_p\} \tag{3.16}$$

为了证明（3.16），我们可以很容易地将问题化归到 T_i为凯勒流的情形：取一个凯勒形式 ω，并将 T_i 替换为 $T_i + \epsilon\omega$，其中 $\epsilon > 0$足够小。如果我们能够证明

$$\left(\mathbb{D}(T_1 + \epsilon\omega) \cap \cdots \cap \mathbb{D}(T_p + \epsilon\omega)\right)_X = \{(T_1 + \epsilon\omega) \wedge \cdots \wedge (T_p + \epsilon\omega)\},$$

令 $\epsilon \to 0+$，(3.16) 得证，因为 $\mathbb{D}$和交积都是线性的，见 (3.3) 以及 命题 3.27。

现在假设 T_i 是凯勒流。对每个 $i = 1, \ldots, p$，取 T_i 的准等奇异逼近 $(T_i^j)_{j>0}$。 T_i 的 $\mathcal{I}$-良性保证当 $j \to \infty$ 时， $T_i^j \xrightarrow{dS} T_i$ 对每个 i 都成立。假设我们可以证明

$$\left(\mathbb{D}(T_1^j) \cap \cdots \cap \mathbb{D}(T_p^j)\right)_X = \left\{T_1^j \wedge \cdots \wedge T_p^j\right\}, \quad j > 0.$$

根据 [Xia25b，命题 4.9], 对每个 $i = 1, \ldots, p$，序列 $(\mathbb{D}(T_i^j))_j$ 单调递减，且极限为 $\mathbb{D}(T_i)$。令 $j \to \infty$ 并应用 定理 2.18 和 定理 3.26，我们得到 (3.16)。

因此我们可以假设 T_i具有解析奇点。我们可以用一个修改替换 X，并假设 $T_1, \ldots, T_p$实际上具有对数奇异性。但由于将 3.15 两边的 替换为 $\mathrm{Reg}\, T_i$后等式仍保持不变，因此我们可以假设 T_i 具有有界

势函数，对每个 $i=1,\dots,p$均如此。在这种情况下，$\{T_i\}$ 是数值有效的，且 $\mathbb{D}(T_i)=\mathbb{D}(\{T_i\})$ 对 $i=1,\dots,p$均成立。特别地，由例 3.28可知，

$$\Big(\mathbb{D}(T_1)\cap\cdots\cap\mathbb{D}(T_p)\Big)_X=\{T_1\}\cap\cdots\cap\{T_p\}.$$

根据 Be dford–Taylor 理论，(3.16) 的右端是同一个类，并且(3.16) 得证 . □

推论 3.30。 设 α_1、...、 $\alpha_p\in \mathrm{H}^{1,1}(X、\ \mathbb{R})$ 为伪有效类，则对于任意修改π： $Y\to X$，有

$$\Big(\mathbb{D}(\alpha_1)\cap\cdots\cap\mathbb{D}(\alpha_p)\Big)_Y=\langle\pi^*\alpha_1\wedge\cdots\wedge\pi^*\alpha_p\rangle.$$

换言之，nef b-除子的交理论推广了可动交理论，正如引言中所承诺的那样。

证明。 不妨设 $Y=X$。

固定一个凯勒类 β 于 X 并将每个 α_i 替换为 $\alpha_i+\epsilon\beta$，我们可以假设每个 α_i 都是大类。这是可行的，这归功于命题 2.26(6) 和 命题 3.27。

那么 只需将 定理 3.29 应用于具有 $T_i\in\alpha_i$ 最小奇异性的流即可。 □

作为一个应用，我们证明关于可移动交的以下基本结果。

命题3.31。 设 $\pi\colon\ Y\to X$ 是从凯勒流形Y出发的适当双亚纯态射。设 $\alpha_1,\dots,\alpha_p\in \mathrm{H}^{1,1}(Y,\mathbb{R})$ 为伪有效类。则

$$\pi_*\langle\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_p\rangle\le_X\langle\pi_*\alpha_1\wedge\cdots\wedge\pi_*\alpha_p\rangle. \tag{3.17}$$

证明。 固定一个凯勒类 β 于 Y并将 α_i 替换为 $\alpha_i+\epsilon\beta$，其中 $\epsilon>0$足够小，我们可以假设 α_i均为大类。这是可行的，这归功于 命题 2.26(6)。

根据 [Xia25b，引理 3.12], 可得

$$\mathbb{D}(\pi_*\alpha_i)\ge\mathbb{D}(\alpha_i),\quad i=1,\dots,p.$$

现在由 命题 3.27 可知

$$\mathbb{D}(\pi_*\alpha_1)\cap\cdots\cap\mathbb{D}(\pi_*\alpha_p)\ge\mathbb{D}(\alpha_1)\cap\cdots\cap\mathbb{D}(\alpha_p).$$

特别地，

$$\Big(\mathbb{D}(\pi_*\alpha_1)\cap\cdots\cap\mathbb{D}(\pi_*\alpha_p)\Big)_X\ge_X\Big(\mathbb{D}(\alpha_1)\cap\cdots\cap\mathbb{D}(\alpha_p)\Big)_X.$$

利用 推论 3.30，可将其改写为（3.17）。 □

定理 3.32。 设 $\mathbb{D}_1,\dots,\mathbb{D}_p$ 是 X 上的 ***nef b*-除子**。则

$$\Big(\mathbb{D}_1\cap\cdots\cap\mathbb{D}_p\Big)_X=\lim_{\pi\colon\,Y\to X}\pi_*\Big\langle\mathbb{D}_{1,Y}\wedge\cdots\wedge\mathbb{D}_{p,Y}\Big\rangle, \tag{3.18}$$

其中 $\pi\colon\ Y\to X$ 遍历 X 的所有修改。

我们首先注意到，(3.18) 的右端关于 $\le_X$ 递减，这是由命题3.31得到的，因此根据 命题 2.6，极限存在。

引人注目的是，(3.18) 的左端是线性交叉积，而右端的每一项都是非线性的!

证明。 **步骤 1**。我们首先证明 $\le_X$ 不等式。

为此，只需证明以下结论：

$$(\mathbb{D}_1\cap\cdots\cap\mathbb{D}_p)_X\le_X\langle\mathbb{D}_{1,X}\wedge\cdots\wedge\mathbb{D}_{p,X}\rangle.$$

在对每个 $\mathbb{D}(\omega)$ 加上一个小倍数的 $\mathbb{D}_i$之后，其中 ω 是 X上的凯勒形式，我们可以假设 $\mathbb{D}_i$都是大类，并且 $\mathbb{D}_i=\mathbb{D}(T_i)$ 对于某个$\mathcal{I}$-良好的非除子型Kähler流 T_i（对每个 $i=1$，.....， p）均成立。于是根据定理 3.29，只需证明

$$\{T_1\wedge\cdots\wedge T_p\}\le_X\{T_{1,\min}\wedge\cdots\wedge T_{p,\min}\},$$

其中$T_{i,\min}\in\mathbb{D}_{i,X}$是具有最小奇异性的流。于是，根据单调性定理定理 2.17，即可得出我们的断言。

步骤 2。我们将（3.18）化归为以下情形：$p=n$和$\mathbb{D}_i$均为大，且对每个$\mathbb{D}_i=\mathbb{D}(T_i)$，存在某个非除子型$\mathcal{I}$-良好的凯勒流$T_i$，使得对每个$i=1,\ldots\ldots,p$。

由引理 2.16 和步骤 1 可知，不妨设$p=n$。只需处理$\mathbb{D}_i$也均为大的情形。事实上，取ω上的一个凯勒形式X。假设对于$\epsilon>0$，我们已证明

$$\Big(\big(\mathbb{D}_1+\epsilon\mathbb{D}(\omega)\big)\cap\cdots\cap\big(\mathbb{D}_n+\epsilon\mathbb{D}(\omega)\big)\Big)_X\geq\lim_{\pi\colon Y\to X}\Big\langle(\mathbb{D}_{1,Y}+\epsilon\pi^*\{\omega\})\wedge\cdots\wedge(\mathbb{D}_{n,Y}+\epsilon\pi^*\{\omega\})\Big\rangle,$$

那么由单调性命题 2.26(4)，可得

$$\Big(\big(\mathbb{D}_1+\epsilon\mathbb{D}(\omega)\big)\cap\cdots\cap\big(\mathbb{D}_n+\epsilon\mathbb{D}(\omega)\big)\Big)_X\geq\lim_{\pi\colon Y\to X}\langle\mathbb{D}_{1,Y}\wedge\cdots\wedge\mathbb{D}_{n,Y}\rangle.$$

令$\epsilon\to0+$，则断言（3.18）得证。

步骤 3。我们需要证明

$$\int_X T_1\wedge\cdots\wedge T_n\geq\lim_{\pi\colon Y\to X}\Big\langle\mathbb{D}(T_1)_Y\wedge\cdots\wedge\mathbb{D}(T_n)_Y\Big\rangle. \tag{3.19}$$

当T_i具有解析奇点时，我们可以用修改替换X，从而归结为T_i具有对数奇异性的情形。接着用$\mathrm{Reg}\,T_i$替换T_i，便可假设T_i具有有界局部势。于是，$\{T_i\}$确实是数值有效的，并且

$$\int_X T_1\wedge\cdots\wedge T_n=\{T_1\}\cap\cdots\cap\{T_n\}=\Big\langle\{T_1\}\wedge\cdots\wedge\{T_n\}\Big\rangle.$$

一般而言，对每个T_i取准等奇异逼近$(T_i^j)_{j>0}$。于是我们知道，对每个$j>0$,

$$\int_X T_1^j\wedge\cdots\wedge T_n^j\geq\lim_{\pi\colon Y\to X}\Big\langle\mathbb{D}(T_1^j)_Y\wedge\cdots\wedge\mathbb{D}(T_n^j)_Y\Big\rangle\geq\lim_{\pi\colon Y\to X}\Big\langle\mathbb{D}(T_1)_Y\wedge\cdots\wedge\mathbb{D}(T_n)_Y\Big\rangle.$$

令$j\to\infty$并应用 定理 2.18，我们得到 (3.19)。□

4. 限制体积

设X是一个维数为n的连通紧凯勒流形。在本节中，p表示一个非负整数。

4.1. 迹算子。

我们首先回顾 [DX24a] 中引入的迹算子的概念。详情请参见 [Xia，第 8]章。

假设D是X上的素除子。

定义 4.1。设T是X上的闭正 (1,1)-流，且满足$\nu(T,D)=0$。我们将$\widetilde{\mathrm{Tr}_D\,T}$定义为$D$上的闭正$(1,1)$-流，即$D$在模$P$-等价意义下的正规化。定义如下：

(1) 当T具有解析奇点时，我们可以直接定义$\mathrm{Tr}_D\,T$为$T|_D$；(2) 一般情形下，取T的一个准等奇异逼近$(T_j)_j$，并将$\mathrm{Tr}_D\,T$定义为$(T_j|_{\widetilde{D}})_j$的任意一个d_S-极限。

当T是X上满足$\nu(T,D)=0$的 Kähler 流时，我们可以选取一个代表元$\widetilde{\mathrm{Tr}_D\,T}$，使其成为$\{T\}|_{\widetilde{D}}$上的 Kähler 流。当$D$不光滑时，这意味着我们可以找到一个光滑闭实$(1,1)$-形式$\theta\in\{T\}$，使得$\mathrm{Tr}_D\,T$可表示为$\theta|_{\widetilde{D}}+\mathrm{dd^c}\varphi$，其中$\theta|_{\widetilde{D}}$是某个拟拟凸函数$\widetilde{\ }\varphi$，并且流$\mathrm{Tr}_D\,T$在$D$上支配一个凯勒形式。我们总是选择这样的代表元。

在这种情况下，我们将X上T的限制体积定义为

$$\mathrm{vol}_{X|D}(T):=\mathrm{vol}\left(\mathrm{Tr}_D\,T\right).$$

注意，$\mathrm{vol}_{X|D}(T)$与$\mathrm{Tr}_D\,T$的选择无关，因为任意两个选择都是P-等价的 t.

更一般地，如果 T 是 X 上的一个闭正（1，1）-流，且具有 $\nu(T,\ D) = 0$，我们在 X 上取一个凯勒形式 ω，那么可以定义

$$\mathrm{vol}_{X|D}(T) := \lim_{\epsilon\to 0+} \mathrm{vol}_{X|D}(T+\epsilon\omega) \tag{4.1}$$

当 T 是一个 Kähler 流时，这一定义与前一个定义一致。当体积$_{X|D}(T)$ >0时，我们总能找到一个迹$_D T$在$\{T\}|_{\widetilde{D}}$中的代表元，而限制体积体积$_{X|D}(T)$就是该代表元的体积。详情见 [Xia，例 8.1。6]

当 $\nu(T,\ D) > 0$时，我们定义

$$\mathrm{vol}_{X|D}(T) := 0.$$

接下来回顾一下，[Xia25b]中定义了 nef b-除子的迹算子这一概念。给定一个定义在 $\mathbb{D}$ 上的 X nef b-除子，以及一个定义在 D 上的 X素除子，则可以用一种典范方式定义一个定义在迹$_D\,\mathbb{D}$ 上的 Dnef b-除子。我们不再回顾冗长的定义，而采用 [Xia25b]中证明的以下断言作为定义：

定义 4.2。设 $\mathbb{D}$ 是定义在 X上的 nef b-除子。我们将 $\mathrm{Tr}_D\,\mathbb{D}$ 定义为如下定义在 D 上的 nef b-除子：

(1) 当 $\mathbb{D} = \mathbb{D}(T)$ 对于 X 上的闭正凯勒流 T 成立时，我们令

$$\mathrm{Tr}_D\,\mathbb{D} := \mathbb{D}(\mathrm{Tr}_D\,T).$$

(2) 一般而言，我们定义

$$\mathrm{Tr}_D\,\mathbb{D} := \lim_{\epsilon\to 0+} \mathrm{Tr}_D\Big(\mathbb{D} + \epsilon\mathbb{D}(\omega)\Big)$$

对于任意凯勒形式 ω，在 X 上。

注意，在 (2) 中，$\mathbb{D} + \epsilon\mathbb{D}(\omega)$ 对于任意 $\epsilon > 0$ 满足 (1) 中的条件，这是定理 3.9的推论。

~ ~先验地，$\mathrm{Tr}_D\,T$是 D 上的一个流，因此 $\mathrm{Tr}_D\,\mathbb{D}$ 只是 D 上的一个 nef b-除子。但根据定义，~ D 上的 nef b-除子与 D 上的相同，因此我们也可以将 $\mathrm{Tr}_D\,\mathbb{D}$ 视为 D 上的一个 nef b-除子。

每当 $\mathrm{Tr}_D\,T$在 $\{T\}|_{\widetilde{D}}$ 中有一个代表元（特别是当 $\mathrm{vol}^{X|D}(T) > 0$ 时），我们总有

$$\mathrm{Tr}_D\,\mathbb{D} = \mathbb{D}(\mathrm{Tr}_D\,T), \tag{4.2}$$

其中 Tr $_D\,T$可理解为 $\{T\}|_{\widetilde{D}}$中的一个代表元。此结论证明见 [Xia25b，定理 7。 5].

命题 4.3。设 $\pi\colon Y \to X$ 是一个修改，且 D' 是 D的严格变换，则对任意定义在 X上的 *nef b*-除子 $\mathbb{D}$，有

$$\mathrm{Tr}_D\,\mathbb{D} = \mathrm{Tr}_{D'}\,\mathbb{D}. \tag{4.3}$$

这里，右端的 $\mathbb{D}$ 视为定义在 Y 上的 nef b-除子，而 $\mathrm{Tr}_{D'}\,\mathbb{D}$ 是定义在 D'上的 nef b-除子，可将其规范地认作定义在 D上的 nef b-除子。

证明。取一个凯勒形式 ω于 X上。只需证明带有 4.3 中 $\mathbb{D}+\epsilon\mathbb{D}(\omega)$ 替代 $\mathbb{D}$ 的情形$\epsilon > 0$。于是，对任意 $\mathcal{I}$-good 凯勒流 T于 X 上$\mathbb{D} = \mathbb{D}(T)$，我们可设存在一个非除子型 $\mathrm{I}_D\,T$，使其在 $\{T\}|_{\widetilde{D}}$中可由一个流表示。固定这样一个代表元。

考虑以下交换图

$$\begin{array}{ccccc} \widetilde{D'} & \longrightarrow & D' & \hookrightarrow & Y \\ \downarrow{\scriptstyle \tilde{p}} & & \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ \widetilde{D} & \longrightarrow & D & \hookrightarrow & X. \end{array}$$

注意到 $\nu(\pi^*T,\ D') = 0$ 根据扎里斯基主定理。由迹算子的基本性质 [Xia，引理 8.2。1],我们有

$$\tilde{p}^*\,\mathrm{Tr}_D\,T \sim_P \mathrm{Tr}_{D'}\,\pi^*T.$$

特别是 lar，$\mathrm{Tr}_{D'}\,\pi^*T$可以表示为 $\pi^*\{T\}|_{\widetilde{D'}}$中的一个流，我们固定这样一个代表 e.

取诱导的 b-除子，我们得到

$$\mathbb{D}\left(\tilde{p}^{*}\operatorname{Tr}_{D} T\right)=\mathbb{D}\left(\operatorname{Tr}_{D'} \pi^{*} T\right).$$

这正是（4.3）。 □

我们需要迹算子的几个基本性质。

命题 4.4。 设 $\mathbb{D}, \mathbb{D}'$ 是 X 上的 *nef b*-除子，且 $\lambda \geq 0$。那么我们有以下性质：

(1) 当 $\mathbb{D} \leq \mathbb{D}'$ 且 $\mathbb{D}'_X = \mathbb{D}_X$ 时，我们有

$$\operatorname{Tr}_{D} \mathbb{D} \leq \operatorname{Tr}_{D} \mathbb{D}'.$$

(2) 迹算子具有可加性：

$$\operatorname{Tr}_{D}\left(\mathbb{D}+\mathbb{D}'\right)=\operatorname{Tr}_{D} \mathbb{D}+\operatorname{Tr}_{D} \mathbb{D}'.$$

(3) 迹算子是齐次的：

$$\operatorname{Tr}_{D}(\lambda \mathbb{D})=\lambda \operatorname{Tr}_{D} \mathbb{D}.$$

证明。 这些性质都可由流的迹算子的相应性质推出。参见 [Xia，命题 8.2。1]。

我们只对 (1) 给出详细证明，另外两个断言类似。取 X上的凯勒形式 ω。只需证明对于每个 $\epsilon > 0$, 都有

$$\operatorname{Tr}_{D}(\mathbb{D}+\epsilon \mathbb{D}(\omega)) \leq \operatorname{Tr}_{D}(\mathbb{D}'+\epsilon \mathbb{D}(\omega)).$$

因此，由于 定理 3.9，我们可以假设

$$\mathbb{D}=\mathbb{D}(T), \quad \mathbb{D}'=\mathbb{D}(T')$$

对于 $\mathcal{I}$-良好的非除子型Kähler流 T和 T' 上的 X。注意到，根据 $T \preceq_{\mathcal{I}} T'$ 的推论 [Xia25b，推论 4.1。4]。但是，根据 [Xia，命题 8.2。1], 我们有

$$\operatorname{Tr}_{D} T \preceq_{P} \operatorname{Tr}_{D} T'.$$

然后再次由 [Xia25b，推论 4.1。4] 即可得到我们的断言。 □

定理 4.5。 设 $\alpha \in \mathrm{H}^{1,1}(X, \mathbb{R})$ 是一个大类。假设 $(T_i)_{i\in I}$ 是一个由闭正(1,1)-流构成的网，并且关于 *I*-偏序递减。假设 $T_i \xrightarrow{d_S} T$ 对于某个满足 $\nu(T, \alpha) = 0$的闭正(1,1)-流 $T \in \alpha$ 成立。那么

$$\operatorname{Tr}_{D} T_i \xrightarrow{d_S} \operatorname{Tr}_{D} T.$$

此外，

$$\lim_{i\in I} \operatorname{vol}_{X|D}(T_i) = \operatorname{vol}_{X|D}(T). \tag{4.4}$$

证明。 前一个结论已由 [Xia，命题 8.2 证明。2]。若 体积$^{X|D}(T) > 0$，则 $\operatorname{Tr}_{D} T_i$和 $\operatorname{Tr}_{D} T$都可表示为 $\alpha|_{\widetilde{D}}$ 中的正质量流。在这种情况下，(4.4) 由体积的 d_S-连续性得出。参见 [Xia，定理 6.2。5]。

若 体积$^{X|D}(T) = 0$，取 X 上的一个凯勒形式 ω。取 $\epsilon > 0$，我们可以找到 $\delta > 0$ 使得

$$\operatorname{vol}_{X|D}(T+\delta\omega) \leq \epsilon.$$

在这种情况下，将（4.4）应用于网 $(T_i+\delta\omega)_i$，鉴于 [Xia，推论 6.2。8] 我们得到 t

$$\overline{\lim_{i\in I}} \operatorname{vol}_{X|D}(T_i) \leq \lim_{i\in I} \operatorname{vol}_{X|D}(T_i+\delta\omega) = \operatorname{vol}_{X|D}(T+\delta\omega) \leq \epsilon.$$

由于 $\epsilon > 0$ 是任意的，我们得出

$$\lim_{i\in I} \operatorname{vol}_{X|D}(T_i) = 0.$$

□

推论 4.6. 设 $(\mathbb{D}^i)_{i\in I}$ 是 X 上一个极限为 $\mathbb{D}$ 的 ***nef b*-除子的递减网。假设 $\mathbb{D}^i_X$ 与 $i\in I$ 的选择无关。那么**

$$\lim_{i\in I}\mathrm{Tr}_D\,\mathbb{D}^i=\mathrm{Tr}_D\,\mathbb{D}. \tag{4.5}$$

注意，由于 命题 4.4(1)，$(\mathrm{Tr}_D\,\mathbb{D}^i)_i$ 是递减的，因此该极限存在。 (4.5)

证明。取一个凯勒形式 ω 在 X上。由命题 4.4中证明的迹算子的可加性，只需证明以 4.5) 中的 $\mathbb{D}^i+\mathbb{D}(\omega)$ 和 $\mathbb{D}+\mathbb{D}(\omega)$ 代替 $\mathbb{D}^i$ 和 $\mathbb{D}$即可。因此，由定理 3.9可知，不妨设存在非除子型 $\mathcal{I}$-良好的凯勒流 T_i，$T\in\mathbb{D}_X$满足

$$\mathbb{D}_i=\mathbb{D}(T_i),\quad \mathbb{D}=\mathbb{D}(T)$$

对所有 $i\in I$ 均成立。

由 [Xia25b，推论 4.14] 以及 $\mathcal{I}$-良好性可知，T_i以及 T 的$(T_i)_i$ 关于 P-偏序是递减的，并且 $T\preceq_P T_i$。

由于 T 具有正质量，由 [Xia，推论 6.2。6] 可知，$(T_i)_i$ 存在一个 d_S-极限S，属于 $\{T\}$，于是 $\mathbb{D}(S)=\mathbb{D}(T)$。由 [Xia25b，推论 4.1。4] 可知 $S\sim_P T$。因此$T_i\xrightarrow{d_S}T$。我们的断言随即由定理 4.5 得出。□

让我们先在一些简单情形下理解迹算子。

例 4.7。 设 $\alpha\in\mathrm{H}^{1,1}(X,\mathbb{R})$ 是一个数值有效类。则

$$\mathrm{Tr}_D\,\mathbb{D}(\alpha)=\mathbb{D}\left(\alpha|_D\right).$$

为说明这一点，不妨设 α 是一个 ***Kähler*** 类。取一个凯勒形式 $\omega\in\alpha$，则根据定义，

$$\mathrm{Tr}_D\,\mathbb{D}(\alpha)=\mathbb{D}(\omega|_D)=\mathbb{D}\left(\alpha|_D\right).$$

例 4.8。 设 $\alpha\in\mathrm{H}^{1,1}(X,\mathbb{R})$ 是一个大类。假设 D 是光滑的，且不包含在 α的非凯勒轨迹中。则

$$\mathrm{Tr}_D\,\mathbb{D}(\alpha)=\mathbb{D}\left(\mathrm{Tr}_D\,T_{\min}\right)=\mathbb{D}\left(T_{\min}|_D\right), \tag{4.6}$$

其中，$T_{\min}\in\alpha$ 是一个具有最小奇异性的流。

由 *[Xia，命题 8.3.1]* 可知，$\mathrm{Tr}_D\,T_{\min}$ 由 $T_{\min}|_D$表示。因此，我们可以应用 (4.2)得出结论 (4.6)。

命题 4.9. 设 $\alpha,\beta\in\mathrm{H}^{1,1}(X,\mathbb{R})$ 为修正 ***nef*** 类。则

$$\mathrm{Tr}_D\,\mathbb{D}(\alpha)+\mathrm{Tr}_D\,\mathbb{D}(\beta)\leq\mathrm{Tr}_D\,\mathbb{D}(\alpha+\beta). \tag{4.7}$$

证明。 由于 $\alpha+\beta$ 也是修正 nef 的，我们有

$$\mathbb{D}(\alpha)_X+\mathbb{D}(\beta)_X=\alpha+\beta=\mathbb{D}(\alpha+\beta)_X.$$

根据 命题 4.4，只需证明

$$\mathbb{D}(\alpha)+\mathbb{D}(\beta)\leq\mathbb{D}(\alpha+\beta),$$

这正是命题 3.12。 □

接下来回顾 [CT22;Mat13]中研究的上同调类的限制体积概念。设一个伪有效类 $\alpha\in\mathrm{H}^{1,1}(X,\mathbb{R})$。若 α 是大类，且 D 不包含在 X的非凯勒轨迹中，则定义

$$\mathrm{vol}_{X|D}(\alpha):=\sup\left\{\int_D T|_D^{n-1}:T\in\alpha\text{ is a Kähler current with analytic singularities},\ \nu(T,D)=0\right\}.$$

这里的 $\int_D T|_D^{n-1}$可以理解为 D的正规化$\tilde{D}$ 上的非极化乘积 $\int_{\tilde{D}}T|_{\tilde{D}}^{n-1}$。

一般而言，若 α 是伪有效的，且 D 不包含于 α的非 nef 位中，我们取 X 上的一个凯勒形式 ω，并令

$$\mathrm{vol}_{X|D}(\alpha) \coloneqq \lim_{\epsilon\to 0+} \mathrm{vol}_{X|D}(\alpha+\epsilon\{\omega\}).$$

如果 D 包含于 α的非 nef 位中，则记作

$$\mathrm{vol}_{X|D}(\alpha) \coloneqq 0.$$

限制体积可以表示为 b-除子的交数。

定理 4.10。设 D 是 X的一个素除子。给定一个大类 $\alpha \in \mathrm{H}^{1,1}(X,\mathbb{R})$ *with* $\nu(\alpha, D) = 0$，则

$$\mathrm{vol}_{X|D}(\alpha) = \mathrm{vol}\,\mathrm{Tr}_D\,\mathbb{D}(\alpha). \tag{4.8}$$

由（4.8），我们推得 $\mathrm{vol}^{X|D}(\alpha) = \mathrm{vol}^{X|D}(\langle\alpha\rangle)$。这也在 [CT22，引理 62]中得到证明。

对高余维子空间的限制体积也有类似的表达式。由于本文不需要这些结果，我们省略细节。

证明。**步骤 1**。我们首先假设 D 不包含在 α的非凯勒轨迹中。

设 $\pi\colon Y \to X$ 是一个修改，使得 D' 的 D 的严格变换是光滑的。根据[CT22，引理 4.2、引理 4.3]，

$$\mathrm{vol}_{X|D}(\alpha) = \mathrm{vol}_{Y|D'}(\pi^*\alpha)$$

且 D' 不在 $\pi^*\alpha$的非凯勒轨迹中。另一方面，

$$\mathrm{Tr}_D\,\mathbb{D}(\alpha) = \mathrm{Tr}_{D'}\,\mathbb{D}(\pi^*\alpha)$$

根据命题 4.3。因此

$$\left(\mathrm{Tr}_D\,\mathbb{D}(\alpha)\right)^{n-1} = \left(\mathrm{Tr}_{D'}\,\mathbb{D}(\pi^*\alpha)\right)^{n-1}.$$

因此，我们可以进一步假设 D 是光滑的。在这种情况下，我们的断言由 [Xia，命题 8.3 得出。1]。

步骤 2。接下来我们假设 D 包含在 α的非凯勒轨迹中。
固定一个 Kähler f形式 ω，那么 f对于任意 $\epsilon > 0$，我们有

$$\mathrm{Tr}_D\,\mathbb{D}(\alpha+\epsilon\{\omega\}) \geq \mathrm{Tr}_D\,\mathbb{D}(\alpha)$$

根据 命题 4.9。因此，步骤 1 和 命题 3.27(4) 推出

$$\mathrm{vol}_{X|D}(\alpha) = \lim_{\epsilon\to 0+} \mathrm{vol}_{X|D}(\alpha+\epsilon\{\omega\}) = \lim_{\epsilon\to 0+} \left(\mathrm{Tr}_D\,\mathbb{D}(\alpha+\epsilon\{\omega\})\right)^{n-1} \geq \left(\mathrm{Tr}_D\,\mathbb{D}(\alpha)\right)^{n-1}.$$

由于 [Vu25，定理 1。1]，体积$^{X|D}(\alpha) = 0$，故断言得证。 □

4.2. **限制体积**。设 D 是 X上的一个素除子。受 定理 4.10启发，我们引入如下定义：

定义 4.11. 设 $\mathbb{D}_1,\dots,\mathbb{D}_p$ 是 X 上的 nef b-除子。设 $\pi\colon Y \to X$ 是一个修改，使得 D 是 Y 上的一个素除子。于是我们将 $\mathbb{D}_1,\dots,\mathbb{D}_p$ 对 D 的限制体积 定义为

$$\mathrm{vol}_{X|D}\left(\mathbb{D}_1,\dots,\mathbb{D}_p\right) \coloneqq \pi_*\left(\mathrm{Tr}_D\,\mathbb{D}_1 \cap \cdots \cap \mathrm{Tr}_D\,\mathbb{D}_p\right)_Y \in \mathrm{H}^{p+1,p+1}(X,\mathbb{R}).$$

记号

$$\left(\mathrm{Tr}_D\,\mathbb{D}_1 \cap \cdots \cap \mathrm{Tr}_D\,\mathbb{D}_p\right)_Y \tag{4.9}$$

需要作一些解释。迹 $\mathrm{Tr}_D\,\mathbb{D}_i$'s 是 D 上的 nef b-除子。对于每个解消$W \to D$，我们可以将 $\mathrm{Tr}_D\,\mathbb{D}_i$ 视为 W 上的 nef b-除子。于是，交积 $\mathrm{Tr}_D\,\mathbb{D}_1 \cap \cdots \cap \mathrm{Tr}_D\,\mathbb{D}_p$ 作为 $\mathrm{Div}^p{}_{\mathrm{b}}(W)$ 中的一个 b-类是有意义的。其推前

$$\left(\mathrm{Tr}_D\,\mathbb{D}_1 \cap \cdots \cap \mathrm{Tr}_D\,\mathbb{D}_p\right)_W$$

关于 $W \to D$，$\to Y$ 因此是 H^{p+1} 中的一个定义良好的正类，$^{p+1}(Y,\ \mathbb{R})$，且与 W 的选取无关。我们将此类记作（4.9）。

When $p=0$，$\mathrm{vol}^{X|D}(-)$ 等于$\{D\}$ 若 D 是 X 上的素除子；若 D 在 X 上是例外的，则为 0 .

引理 4.12. 量 $\mathrm{vol}^{X|D}(\mathbb{D}_1,\ldots,\mathbb{D}_p)$ 在 定义 *4.11* 中定义，与 Y 的选择无关。

证明。 取另一个修改 $\Pi\colon\ Z\to X$，使得 D 是 Z上的一个素除子。我们要证明，相对于 π 和 Π定义的量 $\mathrm{vol}^{X|D}(\mathbb{D}_1,\ldots,\mathbb{D}_p)$相同。为此，我们可以假设 Π 通过态射 $p\colon\ Z\to Y$支配 π。设 D' 是 D 在 Z上的严格变换。于是我们需要证明

$$\pi_*\left(\mathrm{Tr}_D\,\mathbb{D}_1\cap\cdots\cap\mathrm{Tr}_D\,\mathbb{D}_p\right)_Y=\Pi_*\left(\mathrm{Tr}_{D'}\,\mathbb{D}_1\cap\cdots\cap\mathrm{Tr}_{D'}\,\mathbb{D}_p\right)_Z.$$

为此，只需证明

$$\left(\mathrm{Tr}_D\,\mathbb{D}_1\cap\cdots\cap\mathrm{Tr}_D\,\mathbb{D}_p\right)_Y=p_*\left(\mathrm{Tr}_{D'}\,\mathbb{D}_1\cap\cdots\cap\mathrm{Tr}_{D'}\,\mathbb{D}_p\right)_Z.$$

我们的断言随即由命题 4.3 和 命题 3.22 得出。 □

我们先考察这个量在修改下的变化：

命题 4.13. 设 $\pi\colon\ Y\to X$ 是一个修改。则

$$\mathrm{vol}_{X|D}(\mathbb{D}_1,\ldots,\mathbb{D}_p)=\pi_*\,\mathrm{vol}_{Y|D}(\mathbb{D}_1,\ldots,\mathbb{D}_p).$$

这里在右端，我们将 $\mathbb{D}_i$ 视为 Y 上的 ***nef b*-除子**。

特别地，我们可以将

$$\left(\mathrm{vol}_{Y|D}(\mathbb{D}_1,\ldots,\mathbb{D}_p)\right)_{\pi\colon Y\to X}$$

视为 $\mathbf{Div}^{p+1}{}_{\mathrm{b}}(X)$ 中的一个元素。我们将其记为 $\mathbf{vol}^{|D}(\mathbb{D}_1,\ldots,\mathbb{D}_p)$。

证明。 取一个修改 $\Pi\colon\ Z\to Y$ 使得 D 是 Z上的一个素除子。根据引理 4.12，我们只需证明

$$\pi_*\Pi_*\left(\mathrm{Tr}_D\,\mathbb{D}_1\cap\cdots\cap\mathrm{Tr}_D\,\mathbb{D}_p\right)_Z=(\pi\circ\Pi)_*\left(\mathrm{Tr}_D\,\mathbb{D}_1\cap\cdots\cap\mathrm{Tr}_D\,\mathbb{D}_p\right)_Z,$$

这显然成立。 □

命题 4.14. 设 $\mathbb{D}_1,\ldots,\mathbb{D}_p$ 是 X 上的 ***nef b*-除子**。考虑一个数值有效类 $\alpha\in\mathrm{H}^{1,1}(X,\mathbb{R})$。则

$$\mathrm{vol}_{X|D}\Big(\mathbb{D}_1,\ldots,\mathbb{D}_p,\mathbb{D}(\alpha)\Big)=\mathrm{vol}_{X|D}(\mathbb{D}_1,\ldots,\mathbb{D}_p)\cap\alpha.$$

证明。 根据 命题 4.13，我们可以将 X 替换为一个修改，并假设 D 是 X 上的光滑素除子。于是，由投影公式和 例 4.7 可知，我们要证明的断言即为

$$\Big(\mathrm{Tr}_D\,\mathbb{D}_1\cap\cdots\cap\mathrm{Tr}_D\,\mathbb{D}_p\cap\mathbb{D}(\alpha|_D)\Big)_X=\left(\mathrm{Tr}_D\,\mathbb{D}_1\cap\cdots\cap\mathrm{Tr}_D\,\mathbb{D}_p\right)_X\cap\alpha|_D,$$

这可由 命题 3.27(5) 立即推出。 □

迹算子的基本性质蕴含限制体积具有以下性质：

命题 4.15. 设 $\mathbb{D}_1,\ldots,\mathbb{D}_p,\mathbb{D}'_1$ 是 X 上的 ***nef b*-除子**，且 D 是 X 上的素除子。考虑 $\lambda\geqslant 0$。则有以下性质：

(1) 限制体积具有对称性：设 σ 是 $\{1,\ldots,p\}$ 的一个置换，则

$$\mathrm{vol}_{|D}\left(\mathbb{D}_{\sigma(1)},\ldots,\mathbb{D}_{\sigma(p)}\right)=\mathrm{vol}_{|D}(\mathbb{D}_1,\ldots,\mathbb{D}_p).$$

(2) 限制体积关于每个变量都是可加的：

$$\mathrm{vol}_{|D}(\mathbb{D}_1+\mathbb{D}'_1,\mathbb{D}_2,\ldots,\mathbb{D}_p)=\mathrm{vol}_{|D}(\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2,\ldots,\mathbb{D}_p)+\mathrm{vol}_{|D}(\mathbb{D}'_1,\mathbb{D}_2,\ldots,\mathbb{D}_p).$$

(3) 限制体积对每个变量都是齐次的：

$$\mathrm{vol}_{|D}(\lambda\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2,\ldots,\mathbb{D}_p)=\lambda\,\mathrm{vol}_{|D}(\mathbb{D}_1,\ldots,\mathbb{D}_p).$$

(4) 限制体积对每个变量都是递增的，具体而言：若 $\mathbb{D}'_1 \geq \mathbb{D}_1 \mathbb{D}'_1,\ X = \mathbb{D}_1,\ X$ 和 $D \subseteq X$，则

$$\mathrm{vol}_{X|D}\left(\mathbb{D}'_1, \ldots, \mathbb{D}_p\right) \geq \mathrm{vol}_{X|D}\left(\mathbb{D}_1, \ldots, \mathbb{D}_p\right).$$

证明。 根据 命题 4.13，我们可以将 X 替换为一个修改，并假设 D 是 X上的光滑素除子。

(1) 这由命题 3.27(1) 立即推出。(2) 这由命题 3.27(2) 和 命题 4.4(2) 立即推出。(3) 这由命题 3.27(3) 和 命题 4.4(3) 立即推出。(4) 这由 命题 4.4(1) 和 命题 3.27(4) 推出。 □

命题 4.16。 设 $(\mathbb{D}_i^j)^{j\in J}$ 是 $X(i = 1, \ldots, p)$ 上的 ***nef b***-除子递减网。假设对于每个 $i = 1, \ldots, p$，类 $\mathbb{D}_{i,X}^j$ 不依赖于 $j \in J$ 的选取。将$(\mathbb{D}_i^j)^j$ 的极限记为 $\mathbb{D}_i$。考虑 X 上的一个素除子 D 。那么我们有一个递减极限

$$\lim_{j\in J} \mathrm{vol}_{X|D}\left(\mathbb{D}_1^j, \ldots, \mathbb{D}_p^j\right) = \mathrm{vol}_{X|D}\left(\mathbb{D}_1, \ldots, \mathbb{D}_p\right).$$

证明。 由 推论 4.6 和 命题 4.4(1) 可知，对每个 $i = 1, \ldots, p$，网$(\mathrm{Tr}_D \mathbb{D}_i^j)^j$ 单调递减，其极限为 $\mathrm{Tr}_D \mathbb{D}_i$。我们的断言由 定理 3.26 和命题 4.15(4) □

在一些特殊情形下，限制体积很容易理解。

例 4.17。 当对所有 $i = 1, \ldots, p$， $\mathbb{D}_i = \mathbb{D}(\alpha_i)$ 属于某些数值有效类 $\alpha_i \in \mathrm{H}^{1,1}(X, \mathbb{R})$ 时，我们有

$$\mathrm{vol}_{X|D}\left(\mathbb{D}_1, \ldots, \mathbb{D}_p\right) = \begin{cases} 0, & \text{if } D \text{ is exceptional;} \\ \alpha_1 \cap \cdots \cap \alpha_p \cap \{D\}, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

为证明这一点，设 $\pi\colon Y \to X$ 是一个修改，使得 D 是 Y上的光滑素除子。于是根据定义和例 4.7，

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}_{X|D}\left(\mathbb{D}_1, \ldots, \mathbb{D}_p\right) =& \pi_*\left(\mathrm{Tr}_D \mathbb{D}_1 \cap \cdots \cap \mathrm{Tr}_D \mathbb{D}_p\right)_Y \\ =& \pi_*\Big(\mathbb{D}(\pi^*\alpha_1|_D) \cap \cdots \cap \mathbb{D}(\pi^*\alpha_p|_D)\Big)_Y \\ =& \pi_*\left(\pi^*\alpha_1 \cap \cdots \cap \pi^*\alpha_p \cap \{D\}\right) \\ =& \alpha_1 \cap \cdots \cap \alpha_p \cap \pi_*\{D\}. \end{aligned}$$

我们的断言得证。

例 4.18。 设 D 是 X 上的一个素除子。令 $\alpha \in \mathrm{H}^{1,1}(X, \mathbb{R})$ 为一个大类，且$\nu(\alpha, D) = 0$。那么

$$\mathrm{vol}_{X|D}\left(\mathbb{D}(\alpha)^{n-1}\right) = \mathrm{vol}_{X|D}(\alpha).$$

这正是我们在定理 4.10中证明的内容。

受这个例子的启发，我们引入以下定义：

定义 4.19。 设 D 是 X 上的一个素除子。设 $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathrm{H}^{1,1}(X, \mathbb{R})$ 是伪有效类，且对所有 $i = 1, \ldots, p$， $\nu(\alpha_i, D) = 0$。固定一个 Kähler 类 $\beta \in \mathrm{H}^{1,1}(X, \mathbb{R})$。我们定义

$$\mathrm{vol}_{X|D}(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \coloneqq \lim_{\epsilon\to 0+} \mathrm{vol}_{X|D}\Big(\mathbb{D}(\alpha_1 + \epsilon\beta), \ldots, \mathbb{D}(\alpha_p + \epsilon\beta)\Big) \in \mathrm{H}^{p+1,p+1}(X, \mathbb{R}). \tag{4.10}$$

若对于某个 $i \in \{1, \ldots, p\}$， $\nu(\alpha_i, D) > 0$，则令

$$\mathrm{vol}_{X|D}(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \coloneqq 0.$$

特别地，

$$\mathrm{vol}_{X|D}\Big(\underbrace{\alpha, \ldots, \alpha}_{n-1}\Big) = \mathrm{vol}_{X|D}(\alpha)$$

对于任意伪有效类 $\alpha \in \mathrm{H}^{1,1}(X, \mathbb{R})$。

我们首先注意到，限制体积定义良好：

引理 4.20。（4.10）中的极限存在，且与所选的 β无关。

证明。由于 $\nu(\alpha_i, D) = 0$，对于任意 $\epsilon' > \epsilon > 0$，我们知道，对每个 i，D 都不在$\alpha_i + \epsilon\beta$ 的非凯勒轨迹中。我们希望证明

$$\mathrm{vol}_{X|D}\Big(\mathbb{D}(\alpha_1 + \epsilon\beta), \ldots, \mathbb{D}(\alpha_p + \epsilon\beta)\Big) \leq_X \mathrm{vol}_{X|D}\Big(\mathbb{D}(\alpha_1 + \epsilon'\beta), \ldots, \mathbb{D}(\alpha_p + \epsilon'\beta)\Big). \tag{4.11}$$

对每个 $\epsilon > 0$ 以及 $i = 1$、.....、p，令 T_i^ϵ 为 $\alpha_i + \epsilon\beta$ 中具有最小奇异性的流。那么

$$\left\{\bigwedge_{i=1}^p T_i^\epsilon|_{\tilde{D}}\right\} \leq_X \left\{\bigwedge_{i=1}^p T_i^\epsilon|_{\tilde{D}} + (\epsilon' - \epsilon)\omega|_{\tilde{D}}\right\} \leq_X \left\{\bigwedge_{i=1}^p T_i^{\epsilon'}|_{\tilde{D}}\right\},$$

这里我们应用了定理 2.17 和命题 2.12。这里一如既往，我们省略了显然的推前。

注意到，[Xia的命题 8.31] 表明

$$\mathrm{Tr}_D\, \mathbb{D}(\alpha_i + \epsilon\beta) = \mathbb{D}\left(T_i^\epsilon|_{\tilde{D}}\right),$$

其中，T_i 是 $\alpha_i + \epsilon\beta$上的具有最小奇异性的流。因此，4.11）由此可得 .

类似地，可以证明4.10）与 β的选取无关。 □

这个混合限制体积的基本性质总结如下：

命题 4.21。假设 D 是 X上的素除子。设 $\alpha_1, \alpha_1', \ldots, \alpha_p \in \mathrm{H}^{1,1}(X, \mathbb{R})$ 为伪有效类，$\lambda \geq 0$。则有以下结论：

(1) 限制体积具有对称性：对于任意置换 σ *of* $\{1, \ldots, p\}$, 有

$$\mathrm{vol}_{X|D}\left(\alpha_{\sigma(1)}, \ldots, \alpha_{\sigma(p)}\right) = \mathrm{vol}_{X|D}\left(\alpha_1, \ldots, \alpha_p\right).$$

(2) 限制体积对每个变量都是齐次的：

$$\mathrm{vol}_{X|D}\left(\lambda\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p\right) = \lambda\, \mathrm{vol}_{X|D}\left(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p\right).$$

(3) 限制体积对每个变量都是凹的，具体如下：设ν（α_1, D）$= \nu$（α_1', D）$= 0$，则

$$\mathrm{vol}_{X|D}\left(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p\right) + \mathrm{vol}_{X|D}\left(\alpha_1', \alpha_2, \ldots, \alpha_p\right) \leq_X \mathrm{vol}_{X|D}\left(\alpha_1 + \alpha_1', \alpha_2, \ldots, \alpha_p\right).$$

若 D 不属于这些 α_i的非 *Kähler* 轨迹，则

$$\mathrm{vol}_{X|D}\left(\alpha_1, \ldots, \alpha_p\right) = \mathrm{vol}_{X|D}\Big(\mathbb{D}(\alpha_1), \ldots, \mathbb{D}(\alpha_p)\Big).$$

(4) 限制体积是上半连续的：设（α_i^j）$_{j>0}$ 是$\mathrm{H}^{1,1}$（$X, \mathbb{R}$）中伪有效类的序列，其极限为 $\alpha_i \in \mathrm{H}^{1,1}$（$X, \mathbb{R}$）。那么，对于 X 上任意弱正的（$n-p-1, n-p-1$）-形式 F，有

$$\overline{\lim_{j\to\infty}}\, \mathrm{vol}_{X|D}\left(\alpha_1^j, \ldots, \alpha_p^j\right) \cap \{F\} \leq \mathrm{vol}_{X|D}\left(\alpha_1, \ldots, \alpha_p\right) \cap \{F\}. \tag{4.12}$$

(5) 假设对所有 $i = 1, \ldots, p$，均有 ν（α_i, D）$= 0$。则

$$\mathrm{vol}_{X|D}\left(\alpha_1, \ldots, \alpha_p\right) = \mathrm{vol}_{X|D}\Big(\langle\alpha_1\rangle, \ldots, \langle\alpha_p\rangle\Big). \tag{4.13}$$

正如 [CT22 的例 5 所示，限制体积通常并非连续函数。6]。

证明。(1) (2) 这显然成立。(3) 我们可以假设 $\nu(\alpha_i, D) = 0$ for $i = 2, \ldots, p$，否则便无事可证。

令 $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{H}^{1,1}(X,\mathbb{R})$ 为这样的大类集合：其非 Kähler 轨迹不包含 D。那么$\mathcal{A}$ 是开且凸的，证明见 [Mat13，命题 4。10]只需证明，对于α_1， $\alpha_1', \ldots, \alpha_p \in \mathcal{A}$，有

$$\begin{aligned} &\mathrm{vol}_{X|D}\Big(\mathbb{D}(\alpha_1), \mathbb{D}(\alpha_2), \ldots, \mathbb{D}(\alpha_p)\Big) + \mathrm{vol}_{X|D}\Big(\mathbb{D}(\alpha_1'), \mathbb{D}(\alpha_2), \ldots, \mathbb{D}(\alpha_p)\Big) \\ \leq_X\ &\mathrm{vol}_{X|D}\Big(\mathbb{D}(\alpha_1+\alpha_1'), \mathbb{D}(\alpha_2), \ldots, \mathbb{D}(\alpha_p)\Big). \end{aligned} \tag{4.14}$$

令 $T_1, \ldots, T_p, T_1', T$是在 $\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \alpha_1', \alpha_1+\alpha_1'$上具有最小奇异性的流。由 定理 2.17，我们得到

$$\{T_1|_{\tilde{D}} \wedge T_2|_{\tilde{D}} \wedge \cdots \wedge T_p|_{\tilde{D}}\} + \{T_1'|_{\tilde{D}} \wedge T_2|_{\tilde{D}} \wedge \cdots \wedge T_p|_{\tilde{D}}\} \leq_X \{T|_{\tilde{D}} \wedge T_2|_{\tilde{D}} \wedge \cdots \wedge T_{n-p}|_{\tilde{D}}\},$$

并且（4.14）随即成立。

(4) 不失一般性，我们可以假设对每个 $i=1,\ldots,p$， $\nu(\alpha_i, D) = 0$，因为否则无需证明。此外，我们可以假设对所有 $i=1,\ldots,p$以及所有 $j>0$，都有 $\nu(\alpha_i^j, D) = 0$。

固定一个 Kähler 类 $\gamma \in \mathrm{H}^{1,1}(X,\mathbb{R})$。那么对于任意 $\epsilon>0$，我们可以找到 $j_0>0$，使得当 $j \geq j_0$时，各个类 $\alpha_i + \epsilon\gamma - \alpha_i^j$' 都是 Kähler 类，其中 $i=1,\ldots,p$。然后由 **(3)**，我们得到

$$\mathrm{vol}_{X|D}\left(\alpha_1^j, \ldots, \alpha_p^j\right) \leq_X \mathrm{vol}_{X|D}\left(\alpha_1+\epsilon\gamma, \ldots, \alpha_p+\epsilon\gamma\right).$$

因此，

$$\overline{\lim_{j\to\infty}}\ \mathrm{vol}_{X|D}\left(\alpha_1^j, \ldots, \alpha_p^j\right) \cap \{F\} \leq \mathrm{vol}_{X|D}\left(\alpha_1+\epsilon\gamma, \ldots, \alpha_p+\epsilon\gamma\right) \cap \{F\}.$$

令 $\epsilon \to 0+$，我们得到（4.12）。

(5) 我们先假设所有 α_i都为大，且 D 不属于这些 α_i的非 Kähler 轨迹。在这种情况下， D 也不属于$\langle\alpha_i\rangle$的非 Kähler 轨迹，如 [CT22，引理 61]所示。在这种情况下，令 $T_1, \ldots, T_p$为 $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$中具有最小奇异性的流。则

$$T_i - \sum_{E\subseteq X} \nu(\alpha_i, E)[E]$$

在 $\langle\alpha_i\rangle$中具有最小奇异性。因此， （4.13）可改写为

$$\left\{\bigwedge_{i=1}^p T_i|_{\tilde{D}}\right\} = \left\{\bigwedge_{i=1}^p \left(T_i - \sum_{E\subseteq X} \nu(\alpha_i, E)[E]\right)\Big|_{\tilde{D}}\right\},$$

这是显然的。

接下来我们处理一般情形。取一个 Kähler 类 $\gamma \in \mathrm{H}^{1,1}(X,\mathbb{R})$。首先注意到（$\geq_X$ 4.13）中的方向可由（3）直接推出。只需证明反向不等式。根据我们已经证明的结果，对于任意 $\epsilon>0$，都有

$$\mathrm{vol}_{X|D}\left(\alpha_1+\epsilon\gamma, \ldots, \alpha_p+\epsilon\gamma\right) = \mathrm{vol}_{X|D}\Big(\langle\alpha_1+\epsilon\gamma\rangle, \ldots, \langle\alpha_p+\epsilon\gamma\rangle\Big). \tag{4.15}$$

由命题 2.26可知，对每个 $i=1,\ldots,p$，都有

$$\lim_{\epsilon\to 0+} \langle\alpha_i+\epsilon\gamma\rangle = \langle\alpha_i\rangle,$$

因此，在 ($\epsilon \to 0+$ 中令4.15，并应用 **(4)**，即可推出 ($\leq_X$ 中的方向4.13)。 □

例 4.22。 假设 D 是 X上的一个素除子。设 T 是 X 上的闭正(1,1)-流，且 $\nu(T, D) = 0$。那么

$$\mathrm{vol}_{X|D}\left(\mathbb{D}(T)^{n-1}\right) = \mathrm{vol}_{X|D}(T). \tag{4.16}$$

为证明这一点，我们首先假设 T是一个 *Kähler* 流。取一个代表元$\mathrm{Tr}_D T \in \{T\}|_D$。那么我们的断言等价于

$$\mathbb{D}(\mathrm{Tr}_D T)^{n-1} = \mathrm{vol}(\mathrm{Tr}_D T).$$

这是定理 *3.9*的一部分。

现在让 现在回到一般情形。取 ω 上的一个凯勒形式 X。那么我们知道 t

$$\mathrm{vol}_{X|D}\Big(\big(\mathbb{D}(T)+\epsilon\mathbb{D}(\omega)\big)^{n-1}\Big)=\mathrm{vol}_{X|D}(T+\epsilon\omega).$$

感谢 命题 *4.15* 和 (4.1)，当 $\epsilon\to 0+$时，极限给出 (4.16)。

受上述例子的启发，我们引入以下定义：

定义 4.23。设 T_1，...，T_p 是 X 上的闭正 (1，1)-流，D 是 X 上的素除子。假设对于所有 i，$\nu(T_i,\ D)=0$，则我们定义

$$\mathrm{vol}_{X|D}(T_1,\dots,T_p):=\mathrm{vol}_{X|D}\Big(\mathbb{D}(T_1),\dots,\mathbb{D}(T_p)\Big)\in \mathrm{H}^{p+1,p+1}(X,\mathbb{R}).$$

如果对于某个 i，$\nu(T_i,\ D)>0$，我们就简单地设

$$\mathrm{vol}_{X|D}(T_1,\dots,T_p):=0.$$

接下来我们需要以下布伦–明可夫斯基不等式。

命题 4.24。假设 $n>1$。令 $\mathbb{D}_1,\dots,\mathbb{D}_{n-1}$ 为 X 上的数值有效 b-除子，且 D 是 X 上的一个素除子。那么

$$\mathrm{vol}_{X|D}\left(\mathbb{D}_1,\dots,\mathbb{D}_{n-1}\right)\geq\prod_{i=1}^{n-1}\left(\mathrm{vol}\,\mathrm{Tr}_D\,\mathbb{D}_i\right)^{1/(n-1)}.$$

证明。这可由 [Xia25b 中证明的布伦–明可夫斯基不等式推出，命题 5。7]。 □

5. 定性单调性定理

设 X 是一个维数为 n 的连通紧凯勒流形。固定一个非负整数 p。我们将利用 b-除子理论推导一个定性单调性定理。

引理 5.1。设 $T_1,\dots,T_p$ 是 X 上具有解析奇点的闭正 $(1,1)$-流。假设 T,T' 是 X 上同一上同调类中具有正体积的 I-良好闭正 $(1,1)$-流。假设 $T\preceq T'$。那么

$$\begin{aligned}&\{T_1\wedge\cdots\wedge T_p\wedge T'\}-\{T_1\wedge\cdots\wedge T_p\wedge T\}\\ \geq_X&\sum_{D\subseteq X}\Big(\nu(T,D)-\nu(T',D)\Big)\left\{\bigwedge_{i=1}^{p}\Big(T_i-\nu(T_i,D)[D]\Big)\Big|_{\widetilde{D}}\right\}.\end{aligned}\tag{5.1}$$

~这里的 D 遍历 X上的所有素除子，而 $D\to D$ 是 D的正规化。

注意，这个和是可数和。我们省略了从$\sim D$ 到 X的显然推前映射。

证明。**步骤 1**。我们首先假设 $T_1,\dots,T_p,T,T'$都具有对数奇异性。于是我们可以将 T_i替换为其非因子部分，从而归结为 $T_1,\dots,T_p$都具有有界局部势的情形。进一步正则化后，我们可以归结为 $T_1,\dots,T_p$都是凯勒形式的情形，记作 $\omega_1,\dots,\omega_p$。那么，我们的断言（5.1）意味着

$$\begin{aligned}&\{\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_p\wedge\mathrm{Reg}\,T'\}-\{\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_p\wedge\mathrm{Reg}\,T\}\\ \geq_X&\sum_{D\subseteq X}\Big(\nu(T,D)-\nu(T',D)\Big)\left\{\omega_1|_D\wedge\cdots\wedge\omega_p|_D\right\}.\end{aligned}$$

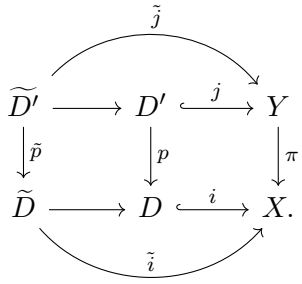
这显然成立。在这种情况下，我们甚至有等式。

步骤 2。我们假设 T和 T'都具有解析奇点。将 T_i替换为 Reg T_i后，可以假设每个 T_i 都是非除子型。

令 $\pi\colon\ Y\to X$为一个修改，它消解了 T_1，……，T_p以及 T，T'的奇点。于是，由步骤 1 和命题 2.12，可得

$$\begin{aligned}
&\{\pi^*T_1\wedge\cdots\wedge\pi^*T_p\wedge\pi^*T'\}-\{\pi^*T_1\wedge\cdots\wedge\pi^*T_p\wedge\pi^*T\}\\
\geq_Y&\sum_{E\subseteq Y}\Big(\nu(T,E)-\nu(T',E)\Big)\left\{\bigwedge_{i=1}^{p}\Big(\pi^*T_i-\nu(T_i,E)[E]\Big)\Big|_{\tilde{E}}\right\}\\
\geq_Y&\sum_{D\subseteq X}\Big(\nu(T,D)-\nu(T',D)\Big)\tilde{j}_*\left\{\bigwedge_{i=1}^{p}(\pi^*T_i)\,|_{\widetilde{D'}}\right\}\\
=&\sum_{D\subseteq X}\Big(\nu(T,D)-\nu(T',D)\Big)\tilde{j}_*\left\{\bigwedge_{i=1}^{p}\tilde{p}^*\left(T_i|_{\widetilde{D}}\right)\right\}.
\end{aligned}$$

这里，D' 表示 Y上 D 的严格变换。记号总结如下列交换图所示：



取推前并应用 命题 2.19，可得

$$\begin{aligned}
&\{T_1\wedge\cdots\wedge T_p\wedge T'\}-\{T_1\wedge\cdots\wedge T_p\wedge T\}\\
\geq_X&\sum_{D\subseteq X}\Big(\nu(T,D)-\nu(T',D)\Big)\pi_*\tilde{j}_*\left\{\bigwedge_{i=1}^{p}\tilde{p}^*\left(T_i|_{\widetilde{D}}\right)\right\}\\
=&\sum_{D\subseteq X}\Big(\nu(T,D)-\nu(T',D)\Big)\tilde{i}_*\tilde{p}_*\left\{\bigwedge_{i=1}^{p}\tilde{p}^*\left(T_i|_{\widetilde{D}}\right)\right\}\\
=&\sum_{D\subseteq X}\Big(\nu(T,D)-\nu(T',D)\Big)\tilde{i}_*\left\{\bigwedge_{i=1}^{p}\left(T_i|_{\widetilde{D}}\right)\right\}.
\end{aligned}$$

所需的不等式（5.1）由此得出。

步骤 3。我们处理一般情形。

将 T 和 T' 替换为

$$T-\sum_{D\subseteq X}\nu(T',D)[D],\quad T'-\sum_{D\subseteq X}\nu(T',D)[D],$$

我们可以先假设 T' 是非除子型的。我们需要证明

$$\{T_1\wedge\cdots\wedge T_p\wedge T'\}-\{T_1\wedge\cdots\wedge T_p\wedge T\}\geq_X\sum_{D\subseteq X}\nu(T,D)\left\{\bigwedge_{i=1}^{p}\Big(T_i-\nu(T_i,D)[D]\Big)\Big|_{\widetilde{D}}\right\}.\tag{5.2}$$

取 X上的凯勒形式 ω。将 T和 T'分别替换为 $T+\omega$和 $T'+\omega$后，我们可以假设二者都是凯勒流。取 T和 T'的准等奇异逼近 $(S_k)_k$，$(S'_k)_k$，使得 $S_k\preceq S'_k$。由步骤 2可知，对每个 $k>0$,

$$\{T_1\wedge\cdots\wedge T_p\wedge S'_k\}-\{T_1\wedge\cdots\wedge T_p\wedge S_k\}\geq_X\sum_{D\subseteq X}\nu(S_k,D)\left\{\bigwedge_{i=1}^{p}\Big(T_i-\nu(T_i,D)[D]\Big)\Big|_{\widetilde{D}}\right\}.\tag{5.3}$$

注意，在上述所有类似 $\sum_{D\subseteq X}$ 的表达式中，我们只需考虑满足 $\nu(T,\ D)>0$ 的可数个素除子 D。

接下来，对于每个 $k>0$，我们有

$$\sum_{D\subseteq X}\nu(S_k,D)\left\{\bigwedge_{i=1}^{p}\left(T_i-\nu(T_i,D)[D]\right)\Big|_{\widetilde{D}}\right\}\leq_X\{T_1\wedge\cdots\wedge T_p\wedge S_1'\}$$

由（5.3）以及单调性定理 定理 2.17。因此，单调收敛定理 命题 2.9 适用。令 $k\to\infty$ 在（5.3）中，并应用 定理 2.18，即可得到所需的不等式（5.2）。□

现在使用 b-除子的语言，我们推导出主要定理：

定理 5.2。设 $\mathbb{D}_1,\ldots,\mathbb{D}_p$ 是 X 上的数值有效 b-除子，且 T,T' 是 X 上同一上同调类中的闭正 $(1,1)$-流，使得 $T\preceq_{\mathcal{I}}T'$。则

$$\begin{aligned}&\left(\mathbb{D}_1\cap\cdots\cap\mathbb{D}_p\cap\mathbb{D}(T')\right)_X-\left(\mathbb{D}_1\cap\cdots\cap\mathbb{D}_p\cap\mathbb{D}(T)\right)_X\\&\geq_X\sum_{D/X}\left(\nu(T,D)-\nu(T',D)\right)\mathrm{vol}_{X|D}\left(\mathbb{D}_1,\ldots,\mathbb{D}_p\right).\end{aligned}\tag{5.4}$$

当 $\mathbb{D}_1,\ldots,\mathbb{D}_p$ 为卡蒂埃除子时，等式（(5.4)）中也成立。

（5.4）的右端应解释为以下极限：

$$\lim_{\pi\colon Y\to X}\sum_{D\subseteq Y}\left(\nu(T,D)-\nu(T',D)\right)\mathrm{vol}_{X|D}\left(\mathbb{D}_1,\ldots,\mathbb{D}_p\right).$$

用 b-除子表述，也可以将（5.4）表述为

$$\begin{aligned}&\left(\mathbb{D}_1\cap\cdots\cap\mathbb{D}_p\cap\mathbb{D}(T')\right)-\left(\mathbb{D}_1\cap\cdots\cap\mathbb{D}_p\cap\mathbb{D}(T)\right)\\&\geq\sum_{D/X}\left(\nu(T,D)-\nu(T',D)\right)\mathrm{vol}_{|D}\left(\mathbb{D}_1,\ldots,\mathbb{D}_p\right).\end{aligned}$$

证明。 根据我们假设的双亚纯不变性，只需证明以下内容：

$$\begin{aligned}&\left(\mathbb{D}_1\cap\cdots\cap\mathbb{D}_p\cap\mathbb{D}(T')\right)_X-\left(\mathbb{D}_1\cap\cdots\cap\mathbb{D}_p\cap\mathbb{D}(T)\right)_X\\&\geq_X\sum_{D\subseteq X}\left(\nu(T,D)-\nu(T',D)\right)\left(\mathrm{Tr}_D\,\mathbb{D}_1\cap\cdots\cap\mathrm{Tr}_D\,\mathbb{D}_p\right)_X.\end{aligned}$$

固定 ω上的凯勒形式 X，并将 T和 $T_\prime$替换为 $T+\omega$和 $T'+\omega$，于是可以假设二者都是凯勒流。

取一个闭光滑实（1，1）-形式 $\theta\in\{T\}$并写成

$$T=\theta+\mathrm{dd^c}\varphi,\quad T'=\theta+\mathrm{dd^c}\varphi'.$$

于是，我们可以分别将 φ 和 φ' 替换为 $P_\theta[\varphi]_{\mathcal{I}}$和 $P_\theta[\varphi']_{\mathcal{I}}$，并假设 T 和$T_\prime$都是$\mathcal{I}$-良好的，且满足 $T\preceq T'$。

将 T 和 T' 替换为

$$T-\sum_{D\subseteq X}\nu(T',D)[D],\quad T'-\sum_{D\subseteq X}\nu(T',D)[D],$$

我们还可以进一步假设 T' 是非除子型，因此只需证明

$$\begin{aligned}&\left(\mathbb{D}_1\cap\cdots\cap\mathbb{D}_p\cap\mathbb{D}(T')\right)_X-\left(\mathbb{D}_1\cap\cdots\cap\mathbb{D}_p\cap\mathbb{D}(T)\right)_X\\&\geq_X\sum_{D\subseteq X}\nu(T,D)\left(\mathrm{Tr}_D\,\mathbb{D}_1\cap\cdots\cap\mathrm{Tr}_D\,\mathbb{D}_p\right)_X.\end{aligned}\tag{5.5}$$

我们首先证明（5.5）在 $\mathbb{D}_i=\mathbb{D}(T_i)$ 对某个非除子型 $\mathcal{I}$-良好的 Kähler 流 T_i 对所有$i=1,\ldots,p$成立。在此情形下，由于定理 3.29，（5.5）可化为

$$\{T_1\wedge\cdots\wedge T_p\wedge T'\}-\{T_1\wedge\cdots\wedge T_p\wedge T\}\geq_X\sum_{D\subseteq X}\nu(T,D)\{\mathrm{Tr}_D\,T_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{Tr}_D\,T_p\}.$$

~在此，如通常那样，我们省略了从 D 到 X的显然推前。

取准等奇异逼近 $(T_i^j)_{j>0}$的 T_i对每个 $i=1,\dots,p$，然后我们可以应用 引理 5.1 ，从而得到对于每个 $j>0$,

$$\left\{T_1^j\wedge\cdots\wedge T_p^j\wedge T'\right\}-\left\{T_1^j\wedge\cdots\wedge T_p^j\wedge T\right\}\geq_X\sum_{D\subseteq X}\nu(T,D)\left\{\mathrm{Tr}_D\,T_1^j\wedge\cdots\wedge\mathrm{Tr}_D\,T_p^j\right\}.$$

令 $j\to\infty$，利用 定理 3.26 和 命题 2.8，我们得到结论。

现在回到一般情形。对于每个 $\epsilon>0$，我们都有

$$\begin{aligned}&\Big(\big(\mathbb{D}_1+\epsilon\mathbb{D}(\omega)\big)\cap\cdots\cap\big(\mathbb{D}_p+\epsilon\mathbb{D}(\omega)\big)\cap\mathbb{D}(T')\Big)_X\\&-\Big(\big(\mathbb{D}_1+\epsilon\mathbb{D}(\omega)\big)\cap\cdots\cap\big(\mathbb{D}_p+\epsilon\mathbb{D}(\omega)\big)\cap\mathbb{D}(T)\Big)_X\\\geq_X&\sum_{D\subseteq X}\nu(T,D)\Big(\mathrm{Tr}_D\big(\mathbb{D}_1+\epsilon\mathbb{D}(\omega)\big)\cap\cdots\cap\mathrm{Tr}_D\big(\mathbb{D}_p+\epsilon\mathbb{D}(\omega)\big)\Big)_X\\\geq_X&\sum_{D\subseteq X}\nu(T,D)\left(\mathrm{Tr}_D\,\mathbb{D}_1\cap\cdots\cap\mathrm{Tr}_D\,\mathbb{D}_p\right)_X.\end{aligned}$$

令 $\epsilon\to0+$，我们得到（5.5）。

最后，还需证明最后一个断言。假设 $\mathbb{D}_1,\dots,\mathbb{D}_p$都是卡蒂埃。将 X 替换为一个修改后，我们可以假设 $\mathbb{D}_i=\mathbb{D}(\alpha_i)$ 对于某个数值有效类 $\alpha_i\in\mathrm{H}^{1,1}(X,\mathbb{R})$对每个 i成立。于是，得益于 命题 3.27(5) 和 例 4.17，所需的等式变为

$$\alpha_1\cap\cdots\cap\alpha_p\cap\{\mathrm{Reg}\,T'\}-\alpha_1\cap\cdots\cap\alpha_p\cap\{\mathrm{Reg}\,T\}=\sum_{D\subseteq X}\Big(\nu(T,D)-\nu(T',D)\Big)\alpha_1\cap\cdots\cap\alpha_p\cap\{D\},$$

这是显然的。 □

虽然在建立 b-除子的一般理论之后，定理 5.2 中的最后一个断言很容易证明，但若用流来表述，则远非显然：

推论 5.3. 设 $T_1,\dots,T_{n-1}$ 是定义在 X 上具有解析奇点的闭正 $(1,1)$-流，且 T,T' 是同一上同调类中的闭正 $(1,1)$-流，满足 $T\preceq_{\mathcal{I}}T\prime$，则

$$\begin{aligned}&\mathrm{vol}\left(T_1,\dots,T_{n-1},T'\right)-\mathrm{vol}\left(T_1,\dots,T_{n-1},T\right)\\&=\lim_{\pi\colon Y\to X}\sum_{D\subseteq Y}\Big(\nu(T,D)-\nu(T',D)\Big)\int_{\tilde{D}}\bigwedge_{i=1}^{n-1}\Big(\pi^*T_i-\nu(T_i,D)[D]\Big)\Big|_{\tilde{D}}.\end{aligned}\tag{5.6}$$

此外，右端的网最终为常数。

即使在可动交理论中，我们也能得到一些有趣的新不等式：

推论 5.4. 设 $[E]$ 是定义在 X 上的除子型闭正 $(1,1)$-流，例如

$$[E]=\sum_i c_iE_i,\tag{5.7}$$

其中，E_i 是 X 上互不相同的素除子，且 $c_i>0$。考虑伪有效类$\alpha_1,\dots,\alpha_p,\beta\in\mathrm{H}^{1,1}(X,\mathbb{R})$。假设 $\beta\geq\{E\}$，则

$$\begin{aligned}&\langle\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_p\wedge\beta\rangle-\Big\langle\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_p\wedge(\beta-\{E\})\Big\rangle\\&\geq_X\sum_i\Big(\nu\left(\beta-\{E\},E_i\right)+c_i-\nu(\beta,E_i)\Big)\,\mathrm{vol}_{X|E_i}\Big(\langle\alpha_1\rangle,\dots,\langle\alpha_p\rangle\Big).\end{aligned}\tag{5.8}$$

这里我们用到了定义 4.19中定义的混合限制体积。至少在 $\alpha_1=\cdots=\alpha_p$的情形下，这个不等式完全可以用可动交积和限制体积的传统语言来表述。但若不了解 b-除子，这一点远非显而易见。

证明。 我们先作一个简单的观察： （5.8）中的系数非负 :

$$\nu\left(\beta-\{E\}, E_i\right)+c_i-\nu(\beta, E_i) \geq 0,$$

作为由下述凸性的一个简单推论： $\nu(\bullet, E_i)$ ，该凸性已在 [Bou02，命题 2.1 中证明。8]。由于将 5.8 式两边的 α_j 替换为$\langle\alpha_j\rangle$后，两边仍保持不变，因此我们可以假设每个 α_j 都是修正 nef 的。

我们可以假设（5.7）中的指标集具有如下形式：$\{1, 2, \ldots, N\}$，其中 N可以是 ∞。

步骤 1。我们首先将问题归结为 N 有限的情形。假设这一情形已知，下面处理 $N=\infty$ 的情形。对于每个正整数 M，我们定义

$$E^M=\sum_{i=1}^M c_i E_i.$$

于是，利用命题 2.26(4)，可得

$$\begin{aligned}
&\langle\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p \wedge \beta\rangle-\left\langle\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p \wedge(\beta-\{E\})\right\rangle \\
\geq_X &\langle\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p \wedge \beta\rangle-\left\langle\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p \wedge\left(\beta-\left\{E^M\right\}\right)\right\rangle \\
\geq_X &\sum_{i=1}^M\left(\nu\left(\beta-\left\{E^M\right\}, E_i\right)+c_i-\nu(\beta, E_i)\right) \operatorname{vol}_{X|E_i}\left(\alpha_1, \ldots, \alpha_p\right).
\end{aligned}$$

注意， $\nu\left(\beta-\left\{E^M\right\}, E_i\right)$ 是关于 M的递增函数，只要 $M \geq i$，因此我们可以应用单调收敛定理命题 2.9，从而得出

$$\begin{aligned}
&\langle\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p \wedge \beta\rangle-\left\langle\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p \wedge(\beta-\{E\})\right\rangle \\
\geq_X &\sum_{i=1}^\infty\left(\lim_{M \to \infty} \nu\left(\beta-\left\{E^M\right\}, E_i\right)+c_i-\nu(\beta, E_i)\right) \operatorname{vol}_{X|E_i}\left(\alpha_1, \ldots, \alpha_p\right).
\end{aligned}$$

但是函数 $\nu(\bullet, E_i)$ 如 [Bou02，命题 2.1 所证，是下半连续的。8], (5.8) 随即得证。

步骤 2。假设 N 有限，并证明 (5.8)。取一个 Kähler 类 $\gamma \in \mathrm{H}^{1,1}(X, \mathbb{R})$

我们可以对所有 $\epsilon>0$，将 α_j 替换为 $\alpha_j+\epsilon\gamma$。如此一来，我们就归结为这样的情形：所有 α_i 都是大类，并且没有任何一个 E_i 落在 α_i 的非 Kähler 轨迹中，因此可以应用 命题 4.21。

注意，

$$\lim_{\epsilon \to 0+} \nu\left(\beta+\epsilon\gamma-\{E\}, E_i\right)=\nu\left(\beta-\{E\}, E_i\right), \quad \lim_{\epsilon \to 0+} \nu\left(\beta+\epsilon\gamma, E_i\right)=\nu\left(\beta, E_i\right), \quad \forall i.$$

因此，鉴于 命题 2.26(6)，我们可以将 β 替换为 $\beta+\epsilon\gamma$，其中 $\epsilon>0$，并假设 β 和 $\beta-\{E\}$ 都是大类。

我们将 定理 5.2 应用于以下情形： $\mathbb{D}_i=\mathbb{D}(\alpha_i)$，且 T' 是 β中的具有最小奇异性的流，并且 $T-[E]$ 是 $\beta-\{E\}$中的具有最小奇异性的流。于是得到

$$\begin{aligned}
&\left(\mathbb{D}(\alpha_1) \cap \cdots \cap \mathbb{D}(\alpha_p) \cap \mathbb{D}(\beta)\right)_X-\left(\mathbb{D}(\alpha_1) \cap \cdots \cap \mathbb{D}(\alpha_p) \cap \mathbb{D}\left(\beta-\{E\}\right)\right)_X \\
\geq_X &\sum_{D \subseteq X}\left(\nu(\beta-\{E\}, D)-\nu(\beta, D)+\nu([E], D)\right) \operatorname{vol}_{X|D}\left(\mathbb{D}(\alpha_1), \ldots, \mathbb{D}(\alpha_p)\right) \\
\geq_X &\sum_i\left(\nu(\beta-\{E\}, E_i)-\nu(\beta, E_i)+c_i\right) \operatorname{vol}_{X|E_i}\left(\mathbb{D}(\alpha_1), \ldots, \mathbb{D}(\alpha_p)\right).
\end{aligned}$$

由推论 3.30 和 命题 4.21(3)，这个不等式立即转化为（5.8）。□

下面这个特殊情形已经相当不平凡：

推论 5.5. 设 $[E]$ 是 X 上的除子型闭正$(1,1)$流，记为

$$[E]=\sum_i c_i E_i,$$

其中， E_i是 X 和 $c_i>0$上的互异素除子。考虑修正 *nef* 类$\alpha_1,\dots,\alpha_p,\beta\in \mathrm{H}^{1,1}(X,\mathbb{R})$。假设 $\beta\geq\{E\}$，则

$$\langle\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_p\wedge\beta\rangle-\Big\langle\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_p\wedge(\beta-\{E\})\Big\rangle\geq_X\sum_i\Big(\nu(\beta-\{E\},E_i)+c_i\Big)\operatorname{vol}_{X|E_i}(\alpha_1,\dots,\alpha_p).$$

将 c_i 替换为 $\nu(\beta-\{E\}\ E_i)\ +c_i$ 也可通过 Vu 的相对非极性积理论证明一个较弱的结果。这个较弱的不等式已在 Su 和 Vu 的研究中发挥了重要作用。

尽管当 $\mathbb{D}_1,\dots,\mathbb{D}_p$全都是卡蒂埃除子时，(5.4) 是一个等式，但一般而言，它并非等式，这一点在环面设置中很容易看出。因此，我们将给出 (5.4) 的一个变体。

为了进一步推进，我们需要著名的猜想性超越莫尔斯不等式 [BDPP13]:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}\operatorname{vol}(\alpha+t\beta)=n\langle\alpha^{n-1}\rangle\cap\beta \tag{5.9}$$

对所有大类 $\alpha,\beta\in \mathrm{H}^{1,1}(X,\mathbb{R})$ 满足 α 为大类的情形。若 X 是射影的，则这一猜想已由 Witt Nyström 在 [WN19a]中证明。当 $n=1,2$时，这一猜想也已得到证明，参见 [Den17]。

我们将需要以下推论:

定理 5.6. 假设超越莫尔斯不等式在 X 上成立。那么，对于 X 上的任意素除子 D 以及任意大类 $\alpha\in \mathrm{H}^{1,1}(X,\mathbb{R})$，有

$$\operatorname{vol}_{X|D}(\alpha)=\langle\alpha^{n-1}\rangle\cap\{D\}. \tag{5.10}$$

注意， $\leq$ （5.10）中的方向显然成立。

备注 5.7。 作者不确定混合版本是否也成立:

$$\operatorname{vol}_{X|D}(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1})=\langle\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_{n-1}\rangle\cap\{D\}.$$

一个看似较弱（但实际上等价）的表述是：当 D 为丰沛时，$\mathrm{vol}^{X|D}(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1})$ 仅取决于 D 的线性等价类。

证明。 这是（5.9）以及 [WN24的主要定理的推论；Vu25]。 □

定理 5.8。 设 $\mathbb{D}$ 是 X上的大且数值有效的 *b*-除子， T、T' 是 X 上的同一上同调类中的闭正 $(1,1)$-流，且满足 $T\preceq_{\mathcal{I}}T'$。则

$$\Big(\mathbb{D}^{n-1}\cap\mathbb{D}(T')\Big)-\Big(\mathbb{D}^{n-1}\cap\mathbb{D}(T)\Big)\geq\varprojlim_{\pi\colon Y\to X}\sum_{D\subseteq Y}\Big(\nu(T,D)-\nu(T',D)\Big)\operatorname{vol}_{Y|D}(\mathbb{D}_Y). \tag{5.11}$$

此外，如果 X 是射影的，或者 $n=1$，2，则极限存在，并且等式（(5.11)）成立。

射影性假设（或 $n=1$，2 假设）只是为了确保我们可以应用定理 5.6。如果已知超越莫尔斯不等式（或者无条件地已知更弱得多的断言（5.10）），那么同样的证明也无需这一假设即可成立。

证明。 **步骤 1**。我们先作一些初步约化。

给 T 和 T'加上一个凯勒形式后，(5.11) 的两边都不变，因此我们可以假设 T和 T'都是凯勒流。取一个光滑闭实 $(1,1)$-形式 $\theta\in\{T\}$，则我们可以表示 $T=\theta+\mathrm{dd}^{\mathrm{c}}\varphi$ 和 $T'=\theta+\mathrm{dd}^{\mathrm{c}}\varphi'$。将 T 和 T' 分别替换为 $\theta+\mathrm{dd}^{\mathrm{c}}P_\theta[\varphi]_{\mathcal{I}}$和$\theta+\mathrm{dd}^{\mathrm{c}}P_\theta[\varphi']_{\mathcal{I}}$后，我们可以假设它们都是 $\mathcal{I}$-良好的。最后，再给它们加上一个凯勒形式，我们便归结到 T 和 T' 都是 $\mathcal{I}$-良好凯勒流的情形。

接下来注意到， $\geq_X$ 方向由（5.11）定理 5.2推出。事实上，对于每个固定的修改 $\pi\colon Y\to X$，我们有

$$\begin{aligned}&\Big(\mathbb{D}\left(\mathbb{D}_Y\right)^{n-1}\cap\mathbb{D}(T')\Big)_X-\Big(\mathbb{D}\left(\mathbb{D}_Y\right)^{n-1}\cap\mathbb{D}(T)\Big)_X\\ \geq&\sum_{D\subseteq Y}\Big(\nu(T,D)-\nu(T',D)\Big)\operatorname{vol}_{Y|D}\Big(\mathbb{D}\left(\mathbb{D}_Y\right)^{n-1}\Big)\\ =&\sum_{D\subseteq Y}\Big(\nu(T,D)-\nu(T',D)\Big)\operatorname{vol}_{Y|D}\Big(\mathbb{D}_Y\Big).\end{aligned}$$

根据 [Xia25b，定理 4.10] 可知 $(\mathbb{D}(\mathbb{D}_Y))_{\pi\colon Y\to X}$ 是一个递减网，其极限为$\mathbb{D}$。因此，关于 π 取极限： $Y\to X$ 并应用 定理 3.26，我们得到（ $\geq$ 5.11）中的方向。于是，我们的断言变为

$$\Big(\mathbb{D}^{n-1}\cap\mathbb{D}(T')\Big)_X-\Big(\mathbb{D}^{n-1}\cap\mathbb{D}(T)\Big)_X\leq\varlimsup_{\pi\colon Y\to X}\sum_{D\subseteq Y}\Big(\nu(T,D)-\nu(T',D)\Big)\operatorname{vol}_{Y|D}\left(\mathbb{D}_Y^{n-1}\right). \tag{5.12}$$

步骤 2。将 $\mathbb{D}$ 表示为 $\mathbb{D}(S)$ ，其中 $\mathcal{I}$-良好的闭正 (1,1)-流 S定义在 X上。这可由 定理 3.9保证。鉴于定理 3.29，只需证明

$$\int_X S^{n-1}\wedge T'-\int_X S^{n-1}\wedge T\leq\varlimsup_{\pi\colon Y\to X}\sum_{D\subseteq Y}\Big(\nu(T,D)-\nu(T',D)\Big)\operatorname{vol}_{Y|D}\left(\mathbb{D}(S)_Y\right). \tag{5.13}$$

进一步化简后，我们可以任意向 T 和 T'中加上凯勒形式，从而可以假设 $\{T\}$ 是一个 Kähler 类，记其代表凯勒形式为 ω。由 定理 5.2，有

$$\begin{aligned}&\int_X S^{n-1}\wedge\omega-\int_X S^{n-1}\wedge T\\ =&\int_X S^{n-1}\wedge\omega-\int_X S^{n-1}\wedge T'+\int_X S^{n-1}\wedge T'-\int_X S^{n-1}\wedge T\\ \geq&\varlimsup_{\pi\colon Y\to X}\sum_{D\subseteq Y}\Big(\nu(T,D)-\nu(T',D)\Big)\operatorname{vol}_{Y|D}\left(\mathbb{D}(S)_Y\right)+\varlimsup_{\pi\colon Y\to X}\sum_{D\subseteq Y}\nu(T',D)\operatorname{vol}_{Y|D}\left(\mathbb{D}(S)_Y\right)\\ =&\varlimsup_{\pi\colon Y\to X}\sum_{D\subseteq Y}\nu(T,D)\operatorname{vol}_{Y|D}\left(\mathbb{D}(S)_Y\right)\\ \geq&\varliminf_{\pi\colon Y\to X}\sum_{D\subseteq Y}\nu(T,D)\operatorname{vol}_{Y|D}\left(\mathbb{D}(S)_Y\right).\end{aligned}$$

为了证明（5.13），只需证明外侧的等式，也就是说，可以假设$T'=\omega$，而剩下的只需证明

$$\int_X S^{n-1}\wedge\omega-\int_X S^{n-1}\wedge T\leq\varlimsup_{\pi\colon Y\to X}\sum_{D\subseteq Y}\nu(T,D)\operatorname{vol}_{Y|D}\left(\mathbb{D}(S)_Y\right). \tag{5.14}$$

接下来取一个准等奇异逼近 $(T_j)^{j>0}$ ，其 T。假设我们可以证明（5.14），其中用 T_j 替代 T，即

$$\int_X S^{n-1}\wedge\omega-\int_X S^{n-1}\wedge T_j\leq\varlimsup_{\pi\colon Y\to X}\sum_{D\subseteq Y}\nu(T_j,D)\operatorname{vol}_{Y|D}\left(\mathbb{D}(S)_Y\right).$$

令 $j\to\infty$ 并应用命题 2.9和定理 2.18，我们得到（5.14）。特别地，我们已将问题归结为 T 具有解析奇点的情形。

取一个修改 $\pi\colon Y\to X$，以解析 T的奇点。于是，只需证明当 T 具有对数奇异性时的（5.14）。

经过所有这些化简，我们最终归结为以下断言：设 E 是 X上的素除子，则

$$\{S^{n-1}\}\cap\{E\}\leq\varlimsup_{\pi\colon Y\to X}\sum_{D\subseteq Y}\nu([E],D)\operatorname{vol}_{Y|D}\left(\mathbb{D}(S)_Y\right). \tag{5.15}$$

这里 S 是一个$\mathcal{I}$-良好流，且具有正体积。注意，反向不等式已知，即可由定理 5.2得出。

步骤 4。我们最终利用超越莫尔斯不等式证明（5.15）。只有在这一步，我们才需要假设 X 是射影的，或者 $n=1,\ 2$。

若 $\pi\colon Y\to X$ 是一个修改，则 定理 5.6 表明

$$\pi_*\Big\langle \mathbb{D}(S)_Y^{n-1}\Big\rangle \cap \{E\} = \Big\langle \mathbb{D}(S)_Y^{n-1}\Big\rangle \cap \pi^*\{E\} = \sum_{D\subseteq Y} \nu([E],D)\,\mathrm{vol}_{Y|D}\Big(\mathbb{D}(S)_Y\Big). \tag{5.16}$$

根据 定理 3.32 和 定理 3.29，式（5.16）左侧的极限不过是 t

$$\Big(\mathbb{D}(S)^{n-1}\Big)_X \cap \{E\} = \{S^{n-1}\}\cap\{E\}.$$

因此，式（5.15）得证。 □

当 $n=1$时，定理 5.8 可化为以下优雅的公式：

推论 5.9。 假设 X 是一个紧黎曼曲面。设 T, T' 是 X 上同一上同调类中的闭正$(1,\ 1)$-流，且满足 $T\preceq_{\mathcal{I}} T'$。那么

$$\mathrm{vol}\,T' - \mathrm{vol}\,T = \sum_{x\in X}\Big(\nu(T,x)-\nu(T',x)\Big). \tag{5.17}$$

特别地，

$$\mathrm{vol}\,T = \mathrm{vol}\{T\} - \sum_{x\in X}\nu(T,x).$$

6. 勒隆数意义下的质量损失

设 X 是一个维数为 n 的连通紧凯勒流形。

在一系列论文中，Vu 和 Su [Vu23; Su25b; Su25a] 建立了以下类型的估计：考虑一个大上同调类 $(1,\ 1)$-流 $T\mathrm{H}\ \alpha\in$ 中的大上同调类 $^{1,1}(X,\ \mathbb{R})$，那么

$$\mathrm{vol}\,\alpha - \mathrm{vol}\,T \geq c\Big(\nu(T,x)-\nu(\alpha,x)\Big)^n,\quad \forall x\in X \tag{6.1}$$

以及类似的估计，从下方界定两个流的体积之差。在这些工作中，常数 c 都未被明确给出。在本节中，基于第5节中证明的单调性定理，我们将在一个更为一般的框架下给出一个显式常数。

由于一点处的勒隆数与该点爆破后例外除子上的一般勒隆数相同，我们将转而考虑沿除子的勒隆数。

6.1. 大类的宽度。

设 X 是一个维数为n的连通紧凯勒流形，且 $\alpha\in \mathrm{H}^{1,1}(X,\mathbb{R})$ 是一个大类。

定义 6.1。 设 D 是 X上的一个素除子。我们定义

$$\nu_{\max}(\alpha,D) := \sup\left\{\nu(T,D) : T \text{ is a closed positive } (1,1)\text{-current} \in \alpha\right\}.$$

类似地，将 D-宽度 定义为 α 的

$$\mathrm{width}(\alpha,D) := \nu_{\max}(\alpha,D) - \nu(\alpha,D).$$

这些量的基本性质总结如下：

命题6.2。 设 D 是 X上的一个素除子。则有：

(1) 对于每个修改 $\pi\colon\ Y\to X$，有

$$\nu_{\max}(\alpha,D) = \nu_{\max}(\pi^*\alpha,D),\quad \mathrm{width}(\alpha,D) = \mathrm{width}(\pi^*\alpha,D).$$

(2) 有宽度$(\alpha,D)\ >0$。

(3) 假设 $D\subseteq X$，那么对于任意 $t\geq 0$，我们有

$$\nu_{\max}(\alpha,D) = \nu_{\max}\left(\alpha+t\{D\},D\right) - t. \tag{6.2}$$

(4) 假设 $D \subseteq X$，那么

$$\operatorname{width}(\alpha, D) = \operatorname{width}\left(\alpha - \nu(\alpha, D)\{D\}, D\right).$$

(5) $\nu_{\max}(\bullet, D)$ 在大锥中是齐次且凹的：若 $\beta \in \mathrm{H}^{1,1}(X, \mathbb{R})$ 是另一个大类，且 $\lambda > 0$，则

$$\nu_{\max}(\lambda\alpha, D) = \lambda\nu_{\max}(\alpha, D), \quad \nu_{\max}(\alpha + \beta, D) \geq \nu_{\max}(\alpha, D) + \nu_{\max}(\beta, D).$$

(6) 宽度$(\bullet, D)$ 在大锥中连续。

证明。 (1) 只需注意到，π^* 是从 α 中闭正 (1,1)-流的集合到 $\pi^*\alpha$ 中闭正 (1,1)-流的集合的双射。

(2) 由 (1) 可知，不妨设 D 是 X上的素除子。由于 $\langle\alpha\rangle$ 是大类，我们可以取足够小的 $\epsilon > 0$，使得 $\langle\alpha\rangle - \epsilon\{D\}$ 是大类。因此

$$\alpha - (\nu(\alpha, D) + \epsilon)\{D\}$$

是大类。将 $(\nu(\alpha, D) + \epsilon)[D]$ 加到该类中具有最小奇异性的流上，得到一个闭正 $(1,1)$-流 $T \in \alpha$，满足 $\nu(T, D) > \nu(\alpha, D)$。

(3) 固定 $t \geq 0$。取一个闭正 (1，1)-流 $T \in \alpha$，则 $T + t[D]$ 是 $\alpha + t\{D\}$ 中的流。由于

$$\nu(T + t[D], D) = \nu(T, D) + t,$$

我们得出

$$\nu_{\max}(\alpha, D) \leq \nu_{\max}\left(\alpha + t\{D\}, D\right) - t.$$

特别地，鉴于 (2)，(6.2) 的右端恒为正。

接下来固定 $\epsilon \in (0, \nu_{\max}(\alpha + t\{D\}\ D) - t)$，取一个闭正 (1，1)-流 $T \in \alpha + t\{D\}$，其 h

$$\nu(T, D) \geq \nu_{\max}(\alpha + t\{D\}, D) - \epsilon.$$

根据我们对 ϵ 的选取，$\nu(T,\ D) > t$。于是 $T - t[D] \in \alpha$ 是一个闭正 (1，1)-流，并且

$$\nu_{\max}(\alpha, D) \geq \nu(T - t[D], D) = \nu(T, D) - t \geq \nu_{\max}(\alpha + t\{D\}, D) - t - \epsilon.$$

令 $\epsilon \to 0+$，反向不等式即得。

(4) 由 (3)，我们有

$$\nu_{\max}\left(\alpha - \nu(\alpha, D)\{D\}, D\right) = \nu_{\max}(\alpha, D) - \nu(\alpha, D) = \operatorname{width}(\alpha, D).$$

(5) 这是显然的。(6) 由

(5) 可得。 □

6.2. **环面情形**。 为了了解我们应当期待何种不等式，我们先考虑环面情形。关于设定的详细内容，请参阅 [Xia，第 12]章。

设 T 是一个维数为 n 的复环面。设 N（分别为 M）是 T 的余特征格（分别为特征格）。固定一个扇 Σ，它对应于一个光滑射影托里克簇 X。固定一个环面不变大除子

$$H = \sum_{\rho \in \Sigma(1)} a_\rho D_\rho,$$

其中 $\Sigma(1)$ 是 Σ 中射线的集合，D_ρ 是 X 上通过轨道-锥对应与 ρ 对应的环面不变除子，并且 $a_\rho \in \mathbb{Z}$。令 P_H 表示 H 的牛顿多面体：

$$P_H = \left\{m \in M_{\mathbb{R}} : \langle m, u_\rho\rangle \geq -a_\rho \quad \forall \rho \in \Sigma(1)\right\},$$

其中 $u_\rho \in N$ 是 ρ 的射线生成元。

回顾 [Xia 第 12] 章证明的以下关键定理。

定理 6.3。 α 中环面不变的闭正$(1,1)$-流的 *I*-等价类与包含在 P_H 中的凸体之间存在自然双射。

这里的凸体指紧的非空凸集。

给定这样的流 T，相应的凸体（称为 T 的牛顿体）记作 $\Delta(T)$。我们有

$$\operatorname{vol} T = n! \operatorname{vol} \Delta(T).$$

两个环面不变流 T，S 在 α 中满足 $T \preceq_{\mathcal{I}} S$，当且仅当 $\Delta(T) \subseteq \Delta(S)$。现在固定一个环面不变素除子 D。在丰情形中，D 对应于 P_H 的一个面，但在大情形中这一点不成立。不过，如果 $\rho \in \Sigma(1)$ 是对应于 D 的射线，那么我们有

$$\nu(T, D) = \inf \{\langle m, u_\rho \rangle + a_\rho : m \in \Delta(T)\}.$$

因此最终，我们要寻找这样的不等式：

$$\operatorname{vol} \Delta(S) - \operatorname{vol} \Delta(T) \geq c\left(\inf\left\{\langle m, u_\rho \rangle : m \in \Delta(T)\right\} - \inf\left\{\langle m, u_\rho \rangle : m \in \Delta(S)\right\}\right)^n. \tag{6.3}$$

注意，不可能为所有 S 和 T 找到统一的 c，这与文献中的说法相悖。

例 6.4。考虑单纯形 Q，其顶点如下，且位于 $\mathbb{R}^n$ 中：

$$(0, \ldots, 0), (1, 0, \ldots, 0), (1, \epsilon, 0, \ldots, 0), (1, 0, \epsilon, 0, \ldots, 0), \ldots, (1, 0, \ldots, 0, \epsilon)$$

对某个 $\epsilon > 0$。它是包含在 $[0,1]^n$ 中的一个多面体，$[0,1]^n$ 是 $O(1, \ldots, 1)$ 在 $(\mathbb{P}^1)^n$ 上的牛顿多面体。现在令

$$Q_t = \{x \in Q : x_1 \geq t\},$$

其中 $t \in (0,1)$。于是

$$\operatorname{vol} Q - \operatorname{vol} Q_t = \frac{t^n}{n!}\epsilon^{n-1}.$$

若取 $u_\rho = (1, 0, \ldots, 0)$ 对应于面 $\{x_1 = 0\}$，我们发现常数 c 在(6.3) 对应于

$$\frac{\epsilon^{n-1}}{n!},$$

它可以任意小。

现在我们来寻找 c在 (6.3) 中的最优常数。我们先作一些简化。由于u_ρ是 N的一组基的一部分，经过 $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$中的线性变换后，不妨设 $N = \mathbb{Z}^n$,$u_\rho = (1, 0, \ldots, 0)$。给定一个有理多面体 P_H，其体积为正，且包含于 $\{x_1 \geq 0\}$，以及两个次凸体 $Q_1 \subseteq Q_2$。我们希望找到 c 使得

$$\operatorname{vol} Q_2 - \operatorname{vol} Q_1 \geq c\left(\inf_{x \in Q_1} x_1 - \inf_{x \in Q_2} x_1\right)^n. \tag{6.4}$$

不失一般性，我们可以假设 Q_2 与$\{x_1 = 0\}$相切。也就是说，$\inf_{x \in Q_2} x_1 = 0$.

现在我们固定 Q_2 和 $t := \inf_{x \in Q_1} x_1$，并考虑最优的 Q_1，也就是左边取最小值时的情形。显然，它由下式给出

$$Q_1 := \{(x_1, y) \in Q : x_1 \geq t\}.$$

最优情形见 图1。

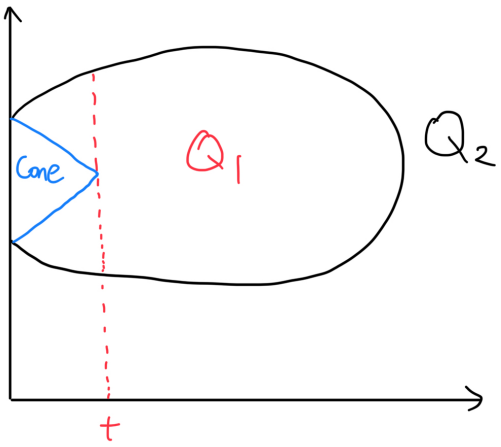
剩余部分的体积于是有如下下界：底面为 $Q_2 \cap \{x_1 = 0\}$、顶点为 $x_1 = t$ 的锥的体积：

$$\frac{t}{n} \operatorname{vol}\{y \in \mathbb{R}^{n-1} : (0, y) \in Q_2\}.$$

但我们 希望得到阶为 t^n 的某个量，为此，只需注意到 t

$$t \leq \max_{x \in P_H} x_1.$$

图 1. 最优情形



综合以上各点，我们得到

$$\operatorname{vol} Q_2 - \operatorname{vol} Q_1 \geq \frac{1}{n\left(\max_{x\in P_H} x_1 - \min_{x\in P_H} x_1\right)^{n-1}} \left(\inf_{x\in Q_1} x_1 - \inf_{x\in Q_2} x_1\right)^n \operatorname{vol}\{y \in \mathbb{R}^{n-1} : (0,y) \in Q_2\}.$$

将所有内容转换回流的语言，我们得到

命题 6.5. 设 S, T 是同一上同调类 α 中的环面不变闭正 $(1,1)$-流，且具有 $S \succeq_{\mathcal{I}} T$，则对于任意位于 X 上的环面不变素除子 D，我们有

$$\operatorname{vol} S - \operatorname{vol} T \geq \frac{1}{\operatorname{width}(\alpha, D)^{n-1}} \cdot \Big(\nu(T,D) - \nu(S,D)\Big)^n \cdot \operatorname{vol}_{X|D}\Big(S - \nu(S,D)[D]\Big).$$

参见 定义 6.1以了解 $\nu_{\max}$ 的定义。

这个证明仅适用于环面情形。一般而言，我们将依赖于牛顿体的非环面推广，即 Okounkov 体。

6.3. **超越 Okounkov 体**。设 X 是一个维数为 n 的连通紧凯勒流形。

回顾一下，X 上的光滑旗是由光滑解析子空间组成的链 $Y_\bullet = (Y_1 \supseteq \cdots \supseteq Y_n)$，使得每个 Y_i 在 X中都是余维为 i 的不可约子空间。给定一个大类 $\alpha \in \mathrm{H}^{1,1}(X, \mathbb{R})$，有一种自然的方法可以构造与 $Y_\bullet$ 和 α相关联的凸体 $\Delta_{Y_\bullet}(\alpha) \subseteq \mathbb{R}^n$，称为 Okounkov 体。Okounkov 体包含于第一象限。此处不再赘述冗长的定义，详情请参阅 [Den17；DRWN+26]。

我们需要用到 Okounkov 体的一些基本性质，这些性质已在 [DRWN+26] 和[Xia第 10]章中证明。

定理 6.6。设 $\alpha \in \mathrm{H}^{1,1}(X, \mathbb{R})$ 是一个大类，且 $Y_\bullet$ 是 X上的一面光滑旗，则有如下结论：

(1) Okounkov 体的体积与类的体积成正比：

$$\operatorname{vol} \alpha = n! \operatorname{vol} \Delta_{Y_\bullet}(\alpha). \tag{6.5}$$

(2) 如果考虑由豪斯多夫度量诱导的拓扑，*Okounkov* 体 $\Delta_{Y_\bullet}(\alpha)$ 关于 α 是连续的。*(3)* 两端具有多重势理论解释：

$$\min_{x\in\Delta_{Y_\bullet}(\alpha)} x_1 = \nu(\alpha, Y_1), \qquad \max_{x\in\Delta_{Y_\bullet}(\alpha)} x_1 = \nu_{\max}(\alpha, Y_1).$$

(4) 对于所有的 $t \in (\nu(\alpha, Y_1)\ \nu_{\max}(\alpha, Y_1))$，我们有

$$\operatorname{vol}_{X|Y_1}(\alpha - t\{Y_1\}) = (n-1)! \operatorname{vol}\left\{y \in \mathbb{R}^{n-1} : (t,y) \in \Delta_{Y_\bullet}(\alpha)\right\}.$$

事实上，(4) 中的截面是 [Xia25a] 和[Xia第 10] 章中研究的部分 Okounkov 体的一个例子。

我们需要几个辅助引理。

引理 6.7. 设 $A>0$。设 $f\colon [0,A]\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ 是一个连续凹函数。那么对于任意 $n\in\mathbb{Z}_{>0}$，以及任意 $t_0\in(0,A)$，有

$$\int_0^A f(t)^n\,\mathrm{d}t\leq\frac{f(t_0)^nA^{n+1}}{n+1}\min\{t_0,A-t_0\}^{-n}.$$

证明。固定 $t_0\in(0,A)$，假设 $f(t_0)=C\geq 0$，我们来计算 $\int_0^A f(t)^n\mathrm{d}t$ 的最大值。由于 f 是凹函数，最大化问题立即化简为 f 为仿射函数的情形。因此，我们需要计算下式的最大值

$$\int_0^A (B(t-t_0)+C)^n\,\mathrm{d}t=\frac{(B(A-t_0)+C)^{n+1}-(-Bt_0+C)^{n+1}}{(n+1)B}$$

满足以下约束条件

$$-Bt_0+C\geq 0,\quad B(A-t_0)+C\geq 0.$$

注意到积分关于 B 是凸的，因此最大值在区间边界处取得，换言之，积分的最大值为

$$\max\left\{\frac{C^nA^{n+1}}{(n+1)t_0^n},\frac{C^nA^{n+1}}{(n+1)(A-t_0)^n}\right\}=\frac{C^nA^{n+1}}{n+1}\min\{t_0,A-t_0\}^{-n}.$$

□

引理 6.8. 假设 $n>1$。设 $P\subseteq\mathbb{R}^n$ 是一个凸体。假设

$$\min_{x\in P}x_1=0,\quad \max_{x\in P}x_1=A\geq 0.$$

那么对于任意 $t_0\in[0,A]$，我们有

$$\operatorname{vol}\left\{y\in\mathbb{R}^{n-1}:(t_0,y)\in P\right\}\geq\frac{n}{A^n}\operatorname{vol}P\cdot\min\{t_0,A-t_0\}^{n-1}.$$

证明是在与 Yangyang Li 的讨论中得出的。

证明. 我们不妨假设 $t_0\in(0,A)$，否则无需证明。记

$$g(t)\coloneqq\operatorname{vol}\left\{y\in\mathbb{R}^{n-1}:(t,y)\in P\right\}.$$

由布伦–明可夫斯基不等式，函数 $g^{1/(n-1)}$ 是凹的。因此，由于引理6.7，我们有

$$\operatorname{vol}P=\int_0^A g(t)\,\mathrm{d}t\leq\frac{g(t_0)A^n}{n}\min\{t_0,A-t_0\}^{-n+1}.$$

□

以下关于限制体积的下界似乎是新的。

推论 6.9. 设 $\alpha\in\mathrm{H}^{1,1}(X,\mathbb{R})$ 为一个大类。那么，对于 X上的任意素除子 D，我们有

$$\operatorname{vol}_{X|D}(\alpha-t\{D\})\geq\frac{\operatorname{vol}\alpha}{\operatorname{width}(\alpha,D)^n}\cdot\min\{t-\nu(\alpha,D),\nu_{\max}(\alpha,D)-t\}^{n-1}\tag{6.6}$$

只要 $\nu(\alpha,D)\leq t\leq\nu_{\max}(\alpha,D)$。

特别地，当 $\nu(\alpha,D)<t<\nu_{\max}(\alpha,D)$ 时，我们有 $\nu(\alpha-t\{D\},D)=0$。

*Pro*的。 不等式（6.6）在 t 取边界值时是平凡的。我们可以假设 tha t

$$\nu(\alpha, D) < t < \nu_{\max}(\alpha, D).$$

由于将 X 替换为一个修改，并将 D 替换为其严格变换后，问题保持不变，因此不妨设 D 光滑，且是光滑旗 $Y_\bullet$ 中的第一个分量，该旗标位于 X上。于是，由 引理 6.8和定理 6.6可得所述结论。更准确地说，有

$$\begin{aligned}
&\operatorname{vol}_{X|D}(\alpha - t\{D\}) \\
\geq &(n-1)! \operatorname{vol}\left\{y \in \mathbb{R}^{n-1} : (t, y) \in \Delta_{Y_\bullet}(\alpha)\right\} \\
\geq &(n-1)! \cdot \frac{n}{\Big(\nu_{\max}(\alpha, D) - \nu(\alpha, D)\Big)^n} \operatorname{vol} \Delta_{Y_\bullet}(\alpha) \cdot \min\{t - \nu(\alpha, D), \nu_{\max}(\alpha, D) - t\}^{n-1} \\
= &\frac{\operatorname{vol} \alpha}{\Big(\nu_{\max}(\alpha, D) - \nu(\alpha, D)\Big)^n} \cdot \min\{t - \nu(\alpha, D), \nu_{\max}(\alpha, D) - t\}^{n-1}.
\end{aligned}$$

□

6.4. 质量损失问题。 现在固定一个维数为 n 的连通紧凯勒流形 X 。

定理 6.10. 设 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathrm{H}^{1,1}(X, \mathbb{R})$ 为大类。考虑满足 $S_i \succeq_{\mathcal{I}} T_i$ 的闭正 $(1, 1)$- 流 $S_i, T_i \in \alpha_i$ 。固定一个位于 X 上方的素除子 D 。则

$$\begin{aligned}
&\operatorname{vol}(S_1, \ldots, S_n) - \operatorname{vol}(T_1, \ldots, T_n) \\
\geq &\max_{i=1,\ldots,n} \left(\frac{1}{\prod_{j \neq i} \operatorname{width}(\alpha_j, D)} \cdot \operatorname{vol}_{X|D}\left(\mathbb{D}(S_1), \ldots, \widehat{\mathbb{D}(S_i)}, \ldots, \mathbb{D}(S_n)\right) \right) \\
&\cdot \prod_{i=1}^{n} \Big(\nu(T_i, D) - \nu(S_i, D)\Big).
\end{aligned}$$

证明。 注意到

$$\operatorname{vol}(S_1, \ldots, S_n) - \operatorname{vol}(T_1, \ldots, T_n) \geq \operatorname{vol}(S_1, S_2, \ldots, S_n) - \operatorname{vol}(T_1, S_2, \ldots, S_n).$$

我们应用定理 5.8得到

$$\operatorname{vol}(S_1, \ldots, S_n) - \operatorname{vol}(T_1, \ldots, T_n) \geq \Big(\nu(T_1, D) - \nu(S_1, D)\Big) \operatorname{vol}_{X|D}\Big(\mathbb{D}(S_2), \ldots, \mathbb{D}(S_n)\Big).$$

接下来注意，对于 $j > 1$,

$$\nu(T_j, D) - \nu(S_j, D) \leq \nu_{\max}(\alpha_j, D) - \nu(\alpha_j, D),$$

因此

$$\begin{aligned}
&\operatorname{vol}(S_1, \ldots, S_n) - \operatorname{vol}(T_1, \ldots, T_n) \\
\geq &\prod_{j=2}^{n} \frac{\nu(T_j, D) - \nu(S_j, D)}{\nu_{\max}(\alpha_j, D) - \nu(\alpha_j, D)} \cdot \Big(\nu(T_1, D) - \nu(S_1, D)\Big) \cdot \operatorname{vol}_{X|D}\Big(\mathbb{D}(S_2), \ldots, \mathbb{D}(S_n)\Big),
\end{aligned}$$

由对称性即可得到我们的断言。 □

为了解我们的结果，下面考虑以下特殊情形。

推论 6.11. 设 $\alpha \in \mathrm{H}^{1,1}(X, \mathbb{R})$ 是一个大类。考虑闭正$(1, 1)$-流$T, S \in \alpha$ ，满足 $T \preceq_{\mathcal{I}} S$。则

$$\operatorname{vol} S - \operatorname{vol} T \geq \frac{1}{\operatorname{width}(\alpha, D)^{n-1}} \cdot \Big(\nu(T, D) - \nu(S, D)\Big)^n \cdot \operatorname{vol}_{X|D}\Big(S - \nu(S, D)[D]\Big).$$

我们得到了环面情形下所预期的结论 命题 6.5。

证明。 只需应用 定理 6.10。注意，b-除子的限制体积就是体积$^{X|D}(S - \nu(S,\ D)[D])$ 根据 例 4.22。 □

推论 6.12。 设 $\alpha \in \mathrm{H}^{1,1}(X, \mathbb{R})$ 是一个大类，且 $T_1, \ldots, T_n \in \alpha$ 是闭的正$(1,1)$-流。假设 D 是 X上的一个素除子。那么

$$\mathrm{vol}\,\alpha - \mathrm{vol}(T_1, \ldots, T_n) \geq \frac{1}{\mathrm{width}(\alpha, D)^{n-1}} \mathrm{vol}_{X|D}\Big(\langle \alpha \rangle\Big) \cdot \prod_{i=1}^{n} \Big(\nu(T_i, D) - \nu(\alpha, D)\Big). \tag{6.7}$$

证明。根据命题 6.2(4)，将 α 替换为 $\alpha - \nu(\alpha, D)\{D\}$，并将 T_i 替换为 $T_i - \nu(\alpha, D)[D]$，不会改变 (6.7) 的任一侧，因此我们不妨假设 $\nu(\alpha, D) = 0$。我们应用定理 6.10，其中所有 S_i 都是 α 中具有最小奇异性的流。根据例 4.18，b-除子的限制体积就是 $\mathrm{vol}^{X|D}(\alpha) = \mathrm{vol}^{X|D}(\alpha)$。□

注意，在推论 6.12的情形下，可能会出现$\mathrm{vol}^{X|D}(\langle \alpha \rangle) = 0$。为在这种情况下得到有意义的下界，我们将沿用相同思路推导出另一种估计。

定理 6.13. 假设 $n > 1$。令 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathrm{H}^{1,1}(X, \mathbb{R})$ 为大类。考虑对所有 $i = 1, \ldots, n$ 的闭正$(1,1)$-流 $T_i \in \alpha_i$。固定一个位于 X 上方的素除子 D。那么

$$\begin{aligned} &\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle - \mathrm{vol}(T_1, \ldots, T_n) \\ \geq &\frac{1}{2^{n-1}} \prod_{i=1}^{n} \Big(\nu(T_i, D) - \nu(\alpha_i, D)\Big) \max_{k=1,\ldots,n} \prod_{j \neq k} \left(\frac{\mathrm{vol}\,\alpha_j}{\mathrm{width}(\alpha_j, D)^n} \right)^{1/(n-1)}. \end{aligned} \tag{6.8}$$

在下文的证明中，通过选择更好的 c 值，我们可以略微改进这个不等式；详情留给感兴趣的读者。

证明. 由于将 X 替换为一个修改后问题保持不变，我们不妨假设 D 是 X 上的一个素除子。

将 α_i 替换为 $\alpha_i - \nu(\alpha_i, D)\{D\}$，并将 T_i 替换为 $T_i - \nu(\alpha_i, D)[D]$ 后，我们不妨假设对所有 $i = 1, \ldots, n$, $\nu(\alpha_i, D) = 0$。

由于否则无事可证，我们不妨假设对所有 i， $\nu(T_i, D) > 0$。暂且固定一个常数 $c \in (0,1)$。

现在令 S_i' 为 $\alpha_i - c\nu(T_i, D)\{D\}$中的具有最小奇异性的流。于是，由于 $\nu(S_i', D) = 0$推论 6.9。记 $S_i = S_i' + c\nu(T_i, D)[D] \in \alpha_i$。注意 $T_i \preceq_{\mathcal{I}} S_i$。令$S_{\min} \in \alpha_1$ 为一个具有最小奇异性的流。那么

$$\begin{aligned} &\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle - \mathrm{vol}\,(T_1, \ldots, T_n) \\ \geq &\mathrm{vol}\,(S_{\min}, S_2, \ldots, S_n) - \mathrm{vol}\,(T_1, S_2, \ldots, S_n) \\ \geq &\nu(T_1, D)\, \mathrm{vol}_{X|D}\Big(\mathbb{D}(S_2), \ldots, \mathbb{D}(S_n)\Big) \\ \geq &\nu(T_1, D) \prod_{j=2}^{n} \mathrm{vol}_{X|D}\Big(\alpha_j - c\nu(T_j, D)\{D\}\Big)^{1/(n-1)} \\ \geq &\nu(T_1, D) \prod_{j=2}^{n} \left(\frac{\mathrm{vol}\,\alpha_j}{\nu_{\max}(\alpha_j, D)^n} \cdot \min\Big\{c\nu(T_j, D), \nu_{\max}(\alpha_j, D) - c\nu(T_j, D)\Big\}^{n-1} \right)^{1/(n-1)} \\ = &\nu(T_1, D) \prod_{j=2}^{n} \left(\left(\frac{\mathrm{vol}\,\alpha_j}{\nu_{\max}(\alpha_j, D)^n} \right)^{1/(n-1)} \cdot \min\Big\{c\nu(T_j, D), \nu_{\max}(\alpha_j, D) - c\nu(T_j, D)\Big\} \right). \end{aligned}$$

其中，第一个不等式由 [Xia25b，命题 3 得出；第二个不等式由定理 5.2得出，第三个不等式由 命题 4.24 和 例 4.18得出，第四个不等式由推论 6.9得出。

接下来取 $c = 1/2$，然后由于对于每个 $j = 2, \ldots, n$，我们有

$$\frac{1}{2}\nu(T_j, D) \leq \nu_{\max}(\alpha_j, D) - \frac{1}{2}\nu(T_j, D),$$

我们可以继续进行估计

$$\begin{aligned}&\langle\alpha_1,\dots,\alpha_n\rangle-\operatorname{vol}(T_1,\dots,T_n)\\ \geq&\nu(T_1,D)\prod_{j=2}^{n}\left(\left(\frac{\operatorname{vol}\alpha_j}{\nu_{\max}(\alpha_j,D)^n}\right)^{1/(n-1)}\cdot\frac{1}{2}\nu(T_j,D)\right)\\ =&\frac{1}{2^{n-1}}\prod_{i=1}^{n}\nu(T_i,D)\cdot\prod_{j=2}^{n}\left(\frac{\operatorname{vol}\alpha_j}{\nu_{\max}(\alpha_j,D)^n}\right)^{1/(n-1)}.\end{aligned}$$

所需的不等式由对称性得出。 □

注 6.14. 当所有 T_i 都相同时，实际上可以去掉（ 2^{1-n} 6.8）中的因子。事实上，我们可以假设 D 是 X 上的一个素除子，且是某个光滑旗的首个分量。考虑 Okounkov 体 $\Delta(T)\subseteq\Delta(\alpha)$，所需的不等式便立即转化为以下命题：设 $Q\subseteq P$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的两个凸体，则

$$\operatorname{vol}P-\operatorname{vol}Q\geq\operatorname{vol}P\cdot\left(\frac{\min_{x\in P}x_1-\min_{x\in Q}x_1}{\max_{x\in P}x_1-\min_{x\in P}x_1}\right)^n. \tag{6.9}$$

为了证明（6.9），不失一般性，我们可以假设

$$\min_{x\in P}x_1=0,\quad\max_{x\in P}x_1=1.$$

Let

$$f(t)=\operatorname{vol}\left\{y\in\mathbb{R}^{n-1}:(t,y)\in P\right\}^{1/(n-1)},\quad t\in[0,1].$$

那么 f 是凹且非负的，而（6.9）可由以下初等事实推出：函数 $\frac{\int_0^s f^{n-1}}{s^n}$ 随 $s\in(0,1]$ 递减。

请注意，当 T_i 各不相同时，这个论证并不成立。

推论 6.15。假设 $n>1$。令 $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathrm{H}^{1,1}(X,\mathbb{R})$ 为大类。考虑闭正的 $(1,1)$-流 S_i、$T_i\in\alpha_i$。假设 $T_i\preceq_{\mathcal{I}}S_i$。固定一个位于 X之上的素除子 D。假设对于所有 $j=2,\dots,n$，体积 $S_j>0$。则

$$\begin{aligned}&\operatorname{vol}(S_1,\dots,S_n)-\operatorname{vol}(T_1,\dots,T_n)\\ \geq&\frac{1}{2^{n-1}}\prod_{i=1}^{n}\Big(\nu(T_i,D)-\nu(S_i,D)\Big)\prod_{j=2}^{n}\left(\frac{\operatorname{vol}S_j}{\Big(\nu_{\max}(\alpha_j,D)-\nu(S_j,D)\Big)^n}\right)^{1/(n-1)}.\end{aligned} \tag{6.10}$$

注意到在我们的假设下，对于 $j=2,\dots,n$，有

$$\nu_{\max}(\alpha_j,D)-\nu(S_j,D)>0.$$

事实上，由于

$$\operatorname{vol}\Big(S_j-\nu(S_j,D)[D]\Big)=\operatorname{vol}S_j>0,$$

类 $\alpha_j-\nu(S_j,D)\{D\}$ 是大类。因此，

$$\nu_{\max}\Big(\alpha_j-\nu(S_j,D)\{D\},D\Big)=\nu_{\max}(\alpha_j,D)-\nu(S_j,D)>0$$

根据 命题6.2(2) 和 (3)。

证明。由于该问题在用一个修改替换 X 和 D 后保持不变，我们可以假设 D 是 X 上的一个素除子。

当 $S_1,\dots,S_n$ 具有解析奇点时，由于（6.10）两边均具有双亚纯不变性，我们可以将问题化归为 $S_1,\dots,S_n$ 具有对数奇异性的情形：记

$$S_i=[D_i]+R_i,$$

其中 D_i 是一个有效除子，而 R_i 是一个具有局部有界势的闭正 $(1,1)$-流。注意，对于 $i>0$，体积$\{R_i\}$ =体积 $S_i>0$，因此 宽度$(\{R_i\}\ D)>0$，这由命题6.2(2) 得出。

根据定理 6.13，我们有

$$\begin{aligned}&\operatorname{vol}(S_1,\dots,S_n)-\operatorname{vol}(T_1,\dots,T_n)\\=&\{R_1\}\cap\cdots\cap\{R_n\}-\operatorname{vol}\Big(T_1-[D_1],\dots,T_n-[D_n]\Big)\\\geq&\frac{1}{2^{n-1}}\prod_{i=1}^{n}\Big(\nu(T_i,D)-\nu(S_i,D)\Big)\cdot\prod_{j=2}^{n}\left(\frac{\operatorname{vol}\{R_j\}}{\operatorname{width}(\{R_j\},D)}\right)^{1/(n-1)}\end{aligned}$$

注意，对于 $j=2,\dots,n$,

$$\operatorname{vol}\{R_j\}=\operatorname{vol}S_j,\quad \nu_{\max}(\{R_j\},D)+\nu(S_j,D)\leq\nu_{\max}(\{S_j\},D),$$

我们的断言（6.10）得证。

接下来处理 $S_1,\dots,S_n$ 为凯勒流的情形。取 $(S_i^k)_{k>0}$ 作为 S_i 对每个 $i=1,\dots,n$的准等奇异逼近，则以 S_i^k代替 S_i时，所需的不等式成立。令 $k\to\infty$，便可得出关于 S_i的断言。这里我们应用了 Lelong 数的连续性，该结果已在 [Xia，定理 6.2 中证明。4], 此外，我们还应用了体积的连续性，该结果已在 [Xia25b，命题 3 中证明。10]。

最后，考虑一般情形。在 X 上固定一个凯勒形式 ω。那么对任意 $\epsilon>0$，我们有

$$\begin{aligned}&\operatorname{vol}(S_1+\epsilon\omega,\dots,S_n+\epsilon\omega)-\operatorname{vol}(T_1+\epsilon\omega,\dots,T_n+\epsilon\omega)\\\geq&\frac{1}{2^{n-1}}\prod_{i=1}^{n}\Big(\nu(T_i,D)-\nu(S_i,D)\Big)\prod_{j=2}^{n}\left(\frac{\operatorname{vol}(S_j+\epsilon\omega)}{\Big(\nu_{\max}(\alpha_j+\epsilon\{\omega\},D)-\nu(S_j,D)\Big)^n}\right)^{1/(n-1)}.\end{aligned}$$

令 $\epsilon\to0+$ 并应用 命题6.2(5)，我们得出（6.10）。 □

以下情形或许是应用中最重要的：

推论 6.16. 设 $\alpha\in\mathrm{H}^{1,1}(X,\mathbb{R})$ 是一个大类。考虑闭的正$(1,\ 1)$流$S,T\in\alpha$，满足 $T\preceq_{\mathcal{I}}S$。固定一个位于 X 上方的素除子 D，则

$$\operatorname{vol}S-\operatorname{vol}T\geq\Big(\nu(T,D)-\nu(S,D)\Big)^n\cdot\frac{\operatorname{vol}S}{2^{n-1}\cdot\operatorname{width}(\alpha,D)^n}.\tag{6.11}$$

若使用 备注 6.14，则可以去掉右端的因子 2^{n-1} .

证明。 首先假设 $n>1$。当 $\operatorname{vol}S>0$, (6.11) 可由 推论 6.15立即推出。当 $\operatorname{vol}S=0$时，无需证明。

最后，当 $n=1$，我们考虑相对于旗标 D 的部分 Okounkov 体 $\Delta(S)$ 和 $\Delta(T)$。参见 [Xia25a] 中的代数方法，或 [Xia 第 10] 章中的超越方法。由于维数为 1，上同调类 α 必定是代数的，因此 [Xia25a] 中的代数理论实际上已足够，至少当 α 是有理类时。

令 $\Delta(\alpha)$ 为 α 所对应的 Okounkov 体。则 $\Delta(\alpha)\supseteq\Delta(S)\supseteq\Delta(T)$ 且它们均为（可能退化的）闭区间。图示总结见 图 2。

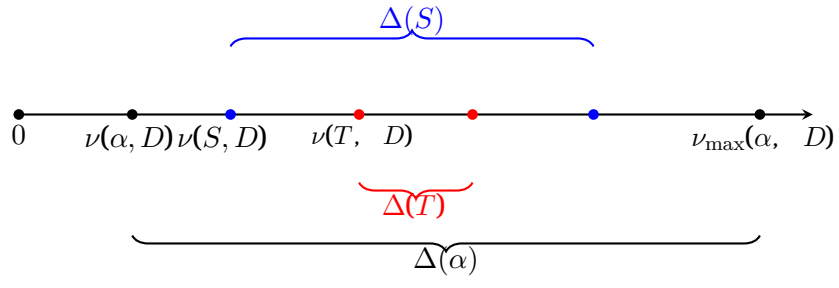


图 2. Okounkov 体

那么，利用 Okounkov 体理论，我们的断言（6.11）可转化为

$$\operatorname{vol}\Delta(S)-\operatorname{vol}\Delta(T)\geq\Big(\nu(T,D)-\nu(S,D)\Big)\cdot\frac{\operatorname{vol}\Delta(S)}{\nu_{\max}(\alpha,D)-\nu(\alpha,D)}.$$

从图中可以清楚地看出

$$\operatorname{vol}\Delta(S)\leq\nu_{\max}(\alpha,D)-\nu(\alpha,D),\quad \operatorname{vol}\Delta(S)-\operatorname{vol}\Delta(T)\geq\nu(T,D)-\nu(S,D),$$

我们的断言由此得证。 □

注意，常数

$$\frac{1}{\operatorname{width}(\alpha,D)^n}$$

在（6.11）中出现的项关于 α连续变化，这由命题6.2(6) 得出。因此，当 [Vu23]取为一点处爆炸的 D 例外除子时，我们的定理便蕴含了 Vu 的主定理。

右侧（$\operatorname{vol}S$ 在（6.11）中的依赖关系似乎是最优的，这可由例 6.4看出。

7. 托里克单调性定理

本节将说明 定理 5.8 在环面情形下的表述。正如我们将看到的，我们的主定理推出了著名的凸体 Minkowski 体积公式，该公式由 Aleksandrov[Ale39] 和 Fenchel–Jessen [FJ38]提出。参见 [Sch14]，了解现代处理方式。我们假定读者熟悉 Xia [Xia第 12]章中发展的托里克多重势。

我们将继续使用 第 6.2 节中的记号。特别地，N 是一个 n维格，M 是它的对偶，X 是与扇 Σ 对应的光滑射影托里克簇，其中 $N_{\mathbb{R}}$。设 T_c 是包含在 X稠密环面中的紧托里克子空间。

我们回顾凸几何中的一些标准术语。给定一个凸体 $P\subseteq M_{\mathbb{R}}$，支撑函数 $\operatorname{Supp}_P\colon N_{\mathbb{R}}\to\mathbb{R}$ 定义为

$$\operatorname{Supp}_P(n):=\max_{m\in P}\langle m,n\rangle.$$

给定 $u\in N_{\mathbb{R}}\setminus\{0\}$，我们将 $F(P,u)$ 记作 P沿 u方向的支撑超平面，即

$$F(P,u):=\{m\in M_{\mathbb{R}}:\langle m,u\rangle=\operatorname{Supp}_P(u)\}.$$

我们首先注意到 定理 5.8 只需要环面不变除子。

定理 7.1。设 S 是 T_c-不变的闭正 $(1,1)$-流，定义在具有正体积的 X 上，T、T' 是 T_c-不变的闭正 $(1,1)$-流，定义在 X 上，且属于同一个上同调类，满足 $T\preceq_{\mathcal{I}}T'$。则

$$\begin{aligned}&\Big(\mathbb{D}(S)^{n-1}\cap\mathbb{D}(T')\Big)-\Big(\mathbb{D}(S)^{n-1}\cap\mathbb{D}(T)\Big)\\&=\lim_{\pi\colon Y\to X}{}'\sum_{D\subseteq Y}{}'\Big(\nu(T,D)-\nu(T',D)\Big)\operatorname{vol}_{Y|D}\Big(\mathbb{D}(S)_Y\Big),\end{aligned}\tag{7.1}$$

其中，撇号表示我们只考虑环面不变修改和环面不变素除子。

证明。该 $\geq$ 方向直接由 定理 5.2 得出。反向不等式几乎可以 逐字 按照 定理 5.8 的论证得到。 □

现在我们可以将所有内容转化为凸体的语言。为清楚起见，我们假设$\{S\}$ 是尼龙-塞维里群中的一个大整类，因此[Xia第 12] 章的结论可以直接应用，无需修改。一般情形可通过简单的逼近得到。

固定 N 的一组基，并通过令该基成为标准正交基，在 $N_{\mathbb{R}}$ 上定义一个范数。如[Xia定理 12.3 所示，3], 式（7.1）左边的混合体积可以表示为相应牛顿体的混合体积:

(7.2)
$$\Big(\mathbb{D}(S)^{n-1}\cap\mathbb{D}(T')\Big)-\Big(\mathbb{D}(S)^{n-1}\cap\mathbb{D}(T)\Big)=n!\bigg(\mathrm{vol}\Big(\Delta(S)^{n-1},\Delta(T')\Big)-\mathrm{vol}\Big(\Delta(S)^{n-1},\Delta(T)\Big)\bigg).$$

至于右端，考虑一个环面不变素除子 $D\subseteq Y$。令 $u_D\in N$ 为与 D 对应的本原向量。那么， $\nu(T,D)-\nu(T',D)$ 就是牛顿体支撑函数之差:

(7.3)
$$\nu(T,D)-\nu(T',D)=\mathrm{Supp}_{\Delta(T')}(-u_D)-\mathrm{Supp}_{\Delta(T)}(-u_D),$$

根据 [Xia，推论 12.21]。

由 [Xia，推论 12.38], ，我们得到

(7.4)
$$\mathrm{vol}_{|D}\Big(\mathbb{D}(S)_Y^{n-1}\Big)=(n-1)!\,\mathrm{vol}\,F\Big(\Delta\left(\mathbb{D}(S)_Y\right),-u_D\Big),$$

其中，右端的体积是$(n-1)$维的体积，取自 u_D 的法超平面，因此，对 M 的限制所得最小立方体的体积为1。注意，后一个立方体的$(n-1)$维豪斯多夫测度恰好等于 u_D的范数。因此，我们可以将支撑函数（7.3）中的变量 $-u_D$ 缩放为单位向量，同时将（7.4）中的体积替换为$(n-1)$维豪斯多夫测度，而不改变（7.1）右端所示的乘积。

因此，结合（7.4）与（7.3），我们可以改写为

$$\begin{aligned}&\sum_{D\subseteq Y}{}'\Big(\nu(T,D)-\nu(T',D)\Big)\,\mathrm{vol}_{Y|D}\Big(\mathbb{D}(T_1)_Y\cap\cdots\cap\mathbb{D}(T_{n-1})_Y\Big)\\=&(n-1)!\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\Big(\mathrm{Supp}_{\Delta(T')}(v)-\mathrm{Supp}_{\Delta(T)}(v)\Big)\,\mathrm{d}\mathcal{S}\Big(\Delta\left(\mathbb{D}(S)_Y\right)\Big)(v),\end{aligned}$$

其中，$\mathrm{S}(\Delta\left(\mathbb{D}(S)_Y\right))$ 是多面体 $\Delta(\mathbb{D}(S)_Y)$ 的面积测度（即 Y 上任意表示类 $\mathbb{D}(S)_Y$ 的环面不变 $\mathbb{Q}$- 除子的牛顿多面体，且在平移意义下良定义），定义见 [Sch14, 第 4 节 2]。对于不熟悉面积公式 S 的读者，只需将简单公式 [Sch14, (4.24)] 作为定义即可。

取 关于 Y 的极限，并利用面积测度的弱连续性，我们得到 d

$$\begin{aligned}&\lim_{\pi\colon Y\to X}{}'\sum_{D\subseteq Y}{}'\Big(\nu(T,D)-\nu(T',D)\Big)\,\mathrm{vol}_{|D}\Big(\mathbb{D}(T_1)_Y\cap\cdots\cap\mathbb{D}(T_{n-1})_Y\Big)\\=&(n-1)!\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\Big(\mathrm{Supp}_{\Delta(T')}(v)-\mathrm{Supp}_{\Delta(T)}(v)\Big)\,\mathrm{d}\mathcal{S}\Big(\Delta(S)\Big)(v),\end{aligned}$$

因此，鉴于（7.2）、（7.1）可转化为

(7.5)
$$\begin{aligned}&\mathrm{vol}\Big(\Delta(S)^{n-1},\Delta(T')\Big)-\mathrm{vol}\Big(\Delta(S)^{n-1},\Delta(T)\Big)\\=&\frac{1}{n}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\Big(\mathrm{Supp}_{\Delta(T')}(v)-\mathrm{Supp}_{\Delta(T)}(v)\Big)\,\mathrm{d}\mathcal{S}\Big(\Delta(S)\Big)(v).\end{aligned}$$

通过极化，我们得到

(7.6)
$$\begin{aligned}&\mathrm{vol}\Big(\Delta(T_1),\ldots,\Delta(T_{n-1}),\Delta(T')\Big)-\mathrm{vol}\Big(\Delta(T_1),\ldots,\Delta(T_{n-1}),\Delta(T)\Big)\\=&\frac{1}{n}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\Big(\mathrm{Supp}_{\Delta(T')}(v)-\mathrm{Supp}_{\Delta(T)}(v)\Big)\,\mathrm{d}\mathcal{S}\Big(\Delta(T_1),\ldots,\Delta(T_{n-1})\Big)(v).\end{aligned}$$

这里我们使用了混合面积测度$\mathcal{S}$，其定义见 [Sch14，定理 5.1.7].

注意，任意凸体 $P_1,\ldots,P_{n-1}$ 都可以实现为 $\Delta(T_1),\ldots,\Delta(T_{n-1})$；同样，任意一对凸体 $Q'\supseteq Q$ 都可以像定理 7.1 中那样实现为 $\Delta(T')\supseteq\Delta(T)$。事实上，只需取某个足够大的 k 对应的 $\mathrm{O}(k)$ 的大环面不变截面 H ，使得相应的牛顿体 $\Delta(H)$ 包含 $P_1,\ldots,P_{n-1},Q',Q$

在内部。因此， $c_1(\mathcal{O}(k))$ 中的流的存在性 [Xia，推论 12.3。3]立即可得。由此得到以下推论：

推论 7.2. 考虑凸体 P_1、…、 P_{n-1}、 Q'、 $Q \subseteq \mathbb{R}^n$。假设 $Q' \supseteq Q$，则

$$\begin{aligned}&\operatorname{vol}(P_1,\dots,P_{n-1},Q') - \operatorname{vol}(P_1,\dots,P_{n-1},Q)\\ =&\frac{1}{n}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left(\operatorname{Supp}_{Q'} - \operatorname{Supp}_{Q}\right) \mathrm{d}\mathcal{S}(P_1,\dots,P_{n-1}).\end{aligned} \tag{7.7}$$

上述论证仅适用于 $P_1,\dots,P_{n-1}$ 为满维的情形。一般情形可通过简单的逼近得到。

因此，我们已经完整地恢复了 [Sch14]第 282 页上的 Minkowski 体积公式。事实上，我们的主定理为凸体本身的混合面积测度 $\mathcal{S}(P_1,\dots,P_{n-1})$提供了一种新的构造方法！

在非环面情形下，我们预计，在定义于 X 的 Berkovich 解析化上的 nef b-除子之间，也存在类似的极限测度。这些测度在多重势理论中应发挥与混合面积测度在凸几何中类似的作用。

附录 A. 正形式

我们简要回顾 Lelong 提出的正形式概念 [Lel68] 以及 Harvey–Knapp [HK74]。Demailly 的教材 [Dem12，第三章] 主要基于后者撰写，但遗憾的是，后者未被列入参考文献。

设 V为维数为 n的有限维复向量空间。令 $V^\vee$ 表示由 $\mathbb{R}$上的 $V \to \mathbb{R}$ -线性泛函组成的复线性空间。对于每一对非负整数p， q，我们将 $\Lambda^{p,\,q}V^\vee$ 记作 $\Lambda^{p+q}(V^\vee \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$ 中 $(p,\ q)$-形式的空间。注意， V 的复对偶为 $\Lambda^{1,\,0}V^\vee$。

下文固定一个整数 $p \in \{0,\ 1,\ \dots\dots,\ n\}$。

定义 A.1. 形式 $\alpha \in \Lambda^{p,\,p}V^\vee$ 称为

(1) 弱正，若对于每个 $\beta_1,\ \dots\dots,\ \beta_{n-p} \in V^\vee$，都有

$$\alpha \wedge \mathrm{i}\beta_1 \wedge \overline{\beta_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{i}\beta_{n-p} \wedge \overline{\beta_{n-p}}$$

给出了 V 的正定向；

(2) 强正 若 α 是若干如下形式的项以 $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 系数作有限线性组合所得：

$$\mathrm{i}\beta_1 \wedge \overline{\beta_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{i}\beta_p \wedge \overline{\beta_p}, \tag{A.1}$$

其中 $\beta_1,\dots,\beta_p \in V^\vee$。形如 (A.1) 的形式称为基本形式。

(3) 正 若对于 $\Lambda^{1,0}V^\vee$ 的某个（因此也是任意）基 $w_1,\dots,w_n$，将 α 展开为

$$\alpha = (-1)^{p(p-1)/2} \sum_{|I|=|J|=p} \alpha_{I,J}\mathrm{i}^p w_I \wedge \overline{w_J}, \tag{A.2}$$

矩阵 $(\alpha_{I,J})_{I,J}$ 是厄米且半正定的。这里 $w_I = w_{i_1} \wedge \cdots \wedge w_{i_p}$，其中 $i_1 < i_2 < \cdots < i_p$ 是 I 中的元素， β_J 类似。

注 A.2。术语需要作一些澄清。在 [Lel68], Lelong 只引入了弱正形式和强正形式的概念。他将弱正形式称为正形式。复几何中的现代学派大多沿用了 Lelong 的术语。

上述正形式的概念由 Harvey–Knapp 引入。相比之下，非阿基米德几何和热带几何领域的人大多沿用 Harvey–Knapp 的术语。

当我们像 (A.2) 那样用矩阵表示弱正形式时，该矩阵总是厄米矩阵。参见 [Dem12，第 167 页，推论 1。5]。

根据定义可立即得知，强正形式是正形式，而正形式是弱正形式。此外，弱正形式构成的锥是强正形式构成的锥的对偶锥。

当 $p=0,\ 1,\ n-1,\ n$ 时，这三个概念等价。对于 p 的其他所有取值，即$p=2,\ 3,$ ……，$n-2$，这三个概念各不相同。这最初是 Lelong 提出的问题，并在 [HK74]中得到证明。

楔积保持各种正性，如表 2所示。一般而言，正形式与弱正形式的乘积不再是弱正形式，这可由 [HK74第 49]页的论证得出。

α	β	$\alpha\wedge\beta$
强正	强正	强正
正	正	正
强正	弱正	弱正

表 2. 楔积的正性性质

很容易看出，弱正形式和正形式构成闭凸锥。至于强正形式的情形，这一直是一个众所周知但未见正式证明的结果。Harvey–Knapp [HK74]曾在第 49 页提及此事，但没有给出细节。我们借此机会沿着 Harvey–Knapp 的思路，按照 MathOverflow 上的回答 [MO]，给出一个完整的证明。

引理 A.3. p 上的强正(p,p)-形式构成一个闭凸锥。

因此，强正形式构成的锥是弱正形式构成的锥的对偶。

在本文正文中，我们需要以下直接推论：复流形上的 (p,p)-形式作为形式是强正的，当且仅当它作为流是强正的，也就是说，它与任意紧支撑的双维数为 (p,p) 的弱正形式的配对均非负。

这一推论已在相关文献中得到广泛应用，但缺乏严格的论证。

注记 A.4. 在非阿基米德情形下，也有一个非常类似的论证，并为关于强正 Lagerberg 形式的断言提供了严格证明（其定义见 [Lag12]）载于 [CLD25第二版第 1.2 节。4]。

证明。 关键之处在于证明强正 (p,p)-形式构成的锥是闭的。固定一个识别 $V\cong\mathbb{C}^n$，使得 V 带有厄米范数。

步骤 1。我们证明

$$C:=\left\{\alpha\in\Lambda^{p,p}V^\vee:\alpha=\mathrm{i}\beta_1\wedge\overline{\beta_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{i}\beta_p\wedge\overline{\beta_p}\text{ for some }\beta_1,\dots,\beta_p\in V^\vee\right\}$$

是闭的。

Let

$$C':=\left\{\alpha\in\Lambda^{p,p}V^\vee:\alpha=\mathrm{i}^{p^2}\gamma\wedge\overline{\gamma}\text{ for some }\gamma\in\Lambda^{p,0}V^\vee\right\}.$$

注意 $C\subseteq C'$。

我们首先证明 C' 是闭的。考虑 C中的一个柯西序列 $(\mathrm{i}^{p^2}\gamma_j\wedge\bar{\gamma_j})_j$。固定 $V^\vee$的一组基$w_1,\ \dots,\ w_n$。于是我们可以写成

$$\gamma_j=\sum_{|I|=p}\gamma_{j,I}w_I.$$

$\mathrm{i}^{p^2}\gamma_j\wedge\bar{\gamma_j}$ 的有界性意味着，对于每个固定的 I，$\gamma_{j,\ I}$ 都有界。因此，减去一个子序列后，我们可以假设，对于某个 $\gamma_I\in\mathbb{C}$，$\gamma_{j,\ I}\to\gamma_I$。接着

$$\mathrm{i}^{p^2}\gamma_j\wedge\bar{\gamma_j}\to\mathrm{i}^{p^2}\gamma\wedge\bar{\gamma}.$$

接下来我们证明 C 是闭的。这意味着，假设γ_j 是可分解的，那么我们要证明 γ 也可分解。但可分解这一条件等价于系数之间有限个多项式关系，这些关系经典地称为 Plücker

关系，它们在取极限时仍成立。详见 [GKZ08，第 3.1.E 节]。[2] 我们的断言得证。

步骤 2。设 S 是 V中的单位球面。由步骤 1 可知，交集 $S \cap C$ 是紧的。我们断言， $S \cap C$ 的凸包不包含原点。若此断言不成立，则可找到 $v_i \in S \cap C$和 $\lambda_i > 0$ （$i = 1$，……， m），使得

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i = 0.$$

但在矩阵表示 (A.2) 下， v_i可以视为严格正矩阵，因此这种情况不可能发生。

现在，我们的断言由引理 A.5得证。 □

引理 A.5。 设 C 是 $\mathbb{R}^n$中的一个凸体， $0 \notin C$，则由 C 与 0的并集生成的凸锥是闭的。

证明。 设 $\lambda_i > 0$ 和 $c_i \in C$。假设 $\lambda_i c_i$ 收敛到 $c \in \mathbb{R}^n$。那么我们需要证明， $c = 0$ 或 c 属于由 c生成的凸锥。

我们可以假设 $c \neq 0$。由于 C 是紧的且 $0 \notin C$，因此 $|c_i|$ 是有界序列，并且同样远离 0。不过， $\lambda_i c_i$ 有一个非零极限，这意味着 λ_i 也有界且远离 0。将所有对象替换为一个子序列后，我们可以假设 $\lambda_i \to \lambda > 0$， $c_i \to c' \in C$。于是 $c = \lambda c'$，我们的断言得证。□

对称形式总可以分解为两个强正形式之差。更一般地，我们有如下结论：

定理 A.6。 固定一个基 w_1，…， w_n，则 $\Lambda^{p,\,p} V^\vee$ 具有一个由如下形式的形式组成的基

$$\mathrm{i}^{p^2} \beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_p \wedge \overline{\beta_1} \wedge \cdots \wedge \overline{\beta_p},$$

其中 β_i 是 $w_i \pm w_j$ 或 $w_i \pm \mathrm{i} w_j$ 中的一个，且 i， $j = 1$，…， n。

这一结果最初由 Harvey–Knapp 证明 [HK74，命题 1。9]另见 Demailly[Dem12，第 167 页，引理 1。4]正如 [CLD25]的第一版中先前所述，在 Lagerberg 形式的框架下，相应的论断并不成立。详见 [Ber25]。

[2]更确切地说,从概念上讲， γ 的可分解性也可由以下事实推出：t 的 Plücker 嵌入格拉斯曼簇-个闭浸入。

参考文献

[Ale39] A. Alexandroff. 关于凸体的表面积函数。（关于论文“凸体混合体积理论”的注记）。Rec. Math. N.S. [Mat. Sbornik] 6/48（1939），第 167–174 页。[AT07] C. D. Aliprantis 和 R. Tourky。《锥与对偶》。第 84 卷。Graduate Studies in Mathematics。美国数学会，普罗维登斯，RI，2007 年，第 xiv+279 页。网址：https://doi.org/10.1090/gsm/084。[BD26] Z. Błocki 和 T. Darvas。Kähler量子化中的尖锐 C^1，ī 估计与非多极点 Radon 测度。2026年。arXiv：2602.03111 [math.DG]。[BDPP13] S. Boucksom、J.-P. Demailly、M. Păun 和 T. Peternell。紧Kähler流形的伪有效锥与负Kodaira维数簇。《代数几何杂志》22.2（2013），第 201–248 页。网址：https://doi.org/10.1090/S1056-3911-2012-00574-8。[BEGZ10] S. Boucksom、P. Eyssidieux、V. Guedj 和 A. Zeriahi。大上同调类中的 Monge-Ampère方程。《数学学报》205.2（2010），第 199–262 页。网址：https://doi.org/10.1007/s11511-010-0054-7。[Ber25] B. Berndtsson。超形式、超流与凸几何。2025年。arXiv：2501.02896 [math.MG]。[Bou02] S. Boucksom。《紧复流形的正锥》。博士论文。Université Joseph-Fourier-Grenoble I，2002年。[BT87] E. Bedford 和 B. A. Taylor。细拓扑、Šilov边界与（dd^c）^{n}。《泛函分析杂志》72.2（1987），第 225–251 页。网址：https://doi.org/10.1016/0022-1236(87)90087-5。[BV04] S. Boyd 和 L. Vandenberghe。《凸优化》。剑桥大学出版社，剑桥，2004年，第 xiv+716 页。网址：https://doi.org/10.1017/CBO9780511804441。[Cao14] J. Cao。紧 Kähler 流形上的数值维数与 Kawamata-Viehweg-Nadel型消失定理。《组合数学》150.11（2014），第 1869–1902 页。网址：https://doi.org/10.1112/S0010437X14007398。[CLD25] A. Chambert-Loir 和 A. Ducros。Berkovich 空间上的实微分形式与流。2025年。arXiv：1204.6277。[CT15] T. C. Collins 和 V. Tosatti。Kähler 流与零轨迹。《发明数学》202.3（2015），第 1167–1198 页。网址：https://doi.org/10.1007/s00222-015-0585-9。[CT22] T. C. Collins 和 V. Tosatti。Kähler 流形上的限制体积。《图卢兹数学学院科学年刊》（第 6 辑）31.3（2022），第 907–947 页。网址：https://doi.org/10.5802/afst.170。[DDNL18] T. Darvas、E. Di Nezza 和 C. H. Lu。非多极点乘积的单调性及具有指定奇异性的复 Monge-Ampère 方程。《分析与偏微分方程》11.8（2018），第 2049–2087 页。网址：https://doi.org/10.2140/apde.2018.11.2049。[DDNL21] T. Darvas、E. Di Nezza 和 H.-C. Lu。奇异性类型的度量几何。《纯粹与应用数学杂志》771（2021），第 137–170 页。网址：https://doi.org/10.1515/crelle-2020-0019。[Dem12] J.-P. Demailly。复解析与微分几何。https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/manuscripts/agbook.pdf。2012年。[Den17] Y. Deng。超越莫尔斯不等式与广义Okounkov体。《代数几何》4.2（2017），第 177–202 页。[DF22] N.-B. Dang 和 C. Favre。数值有效 b-除子类的交理论。《组合数学》158.7（2022），第 1563–1594 页。网址：https://doi.org/10.1112/s0010437x22007515。[DP04] J.-P. Demailly 和 M. Paun。紧Kähler流形的 Kähler锥的数值刻画。《数学年刊》（第 2 辑）159.3（2004），第 1247–1274 页。网址：https://doi.org/10.4007/annals.2004.159.1247。

[DPS01] J.-P. Demailly、T. Peternell 和 M. Schneider. 紧 Kähler 流形上的伪有效线丛. 国际数学杂志 12.6 (2001), 第 689–741 页. 网址:https://doi.org/10.1142/S0129167X01000861.[DRWN+26] T. Darvas、R. Reboulet、D. Witt Nyström、M. Xia 和 K. Zhang. 超越 Okounkov 体. 微分几何杂志 132.1 (2026年), 第 135–178 页. 网址: https://doi.org/10.4310/jdg/1766433802.[DX24a] T. Darvas 和 M. Xia. 紧 Kähler 流形上拟拟凸函数的迹算子. 美国数学会汇刊（即将出版）（2024年）. arXiv:2403.08259 [math.DG].[DX24b] T. Darvas 和 M. Xia. 伪有效线丛的体积与部分平衡. 几何与拓扑 28.4 (2024年), 第 1957–1993 页. 网址: https://doi.org/10.2140/gt.2024.28.1957.[FJ38] W. Fenchel 和 B. Jessen. 集合函数与凸体. Danske Vid. Selskab. Mat.-fys. Medd. 16 (1938).[GKZ08] I. M. Gelfand、M. M. Kapranov 和 A. V. Zelevinsky. 判别式、结式与多维行列式. Birkhäuser现代经典. 1994 年版重印. Birkhäuser Boston, Inc., 马萨诸塞州波士顿, 2008年, 第 x+523.[GZ07] V. Guedj 和 A. Zeriahi. 拟拟次调和函数的加权 Monge-Ampère 能量. 泛函分析杂志 250.2 (2007), 第 442–482 页. 网址: https://doi.org/10.1016/j.jfa.2007.04.018.[Hir75] H. Hironaka. 复解析几何中的平坦化定理. 美国数学杂志 97 (1975), 第 503–547 页. 网址: https://doi.org/10.2307/2373721.[HK74] R. Harvey 和 A. W. Knapp. 正（p, p）形式、Wirtinger 不等式与流. 值分布理论（杜兰大学项目会议录，杜兰大学，路易斯安那州新奥尔良，1972—1973年），A 部分. 第 25 卷. 纯粹与应用数学. Dekker, 纽约, 1974年, 第 43–62 页.[Lag12] A. Lagerberg. 超流与热带几何. 数学杂志 270.3-4 (2012), 第 1011–1050 页. 网址: https://doi.org/10.1007/s00209-010-0837-8.[Lam99] A. Lamari. 凯勒流与紧曲面. 傅里叶研究所年刊（格勒诺布尔）49.1 (1999), 第 vii, x, 263–285 页. 网址: https://doi.org/10.5802/aif.1673.[Lel68] P. Lelong. 多重次调和函数与正微分形式. Gordon & Breach, 巴黎—伦敦—纽约; 由 Dunod Éditeur, 巴黎发行, 1968年, 第 ix+79.[Mat13] S. Matsumura. 限制体积与除子 Zariski 分解. 美国数学杂志 135.3 (2013), 第 637–662 页.[MO] Skywalker. 强正形式的集合是一个闭锥. MathOverflow.[Sch14] R. Schneider. 凸体: Brunn–Minkowski 理论. 第 151 卷. 剑桥大学出版社, 2014年.[Su25a] S. Su. “闭正流的奇点”. 博士论文. 科隆大学, 2025年. 网址: http://kups.ub.uni-koeln.de/79159/.[Su25b] S. Su. 全质量交数流的奇点（2025年）. arXiv: 2503.09233[math.CV].[SV25] S. Su 和 D.-V. Vu. Lelong 上水平集分支的体积 II. 数学年刊 391.4 (2025年), 第 6451–6465 页. 网址: https://doi.org/10.1007/s00208-024-03079-1.[Vu21] D.-V. Vu. 流的相对非极性积. 全球分析与几何年刊 60.2 (2021), 第 269–311 页. 网址: https://doi.org/10.1007/s10455-021-09780-7.[Vu23] D.-V. Vu. 全质量交数流的勒隆数. 美国数学杂志 145.2 (2023), 第 647–665 页.[Vu25] D.-V. Vu. 大上同调类的体积导数. 印第安纳大学数学杂志 74.6 (2025), 第 1531–1560 页.

[WN19a] D. Witt Nyström. 射影流形上伪有效锥与可动锥之间的对偶性. 美国数学会杂志 32.3 (2019). 附录由 Sébastien Boucksom 撰写, 第 675–689 页. 网址: https://doi.org/10.1090/jams/922.[WN19b] D. Witt Nyström. 非极化 Monge-Ampère 质量的单调性. 印第安纳大学数学杂志 68.2 (2019), 第 579–591 页. 网址: https://doi.org/10.1512/iumj.2019.68.7630.[WN24] D. W. Nyström. Kähler 流形向正规丛的变形与大类的限制体积. 微分几何杂志 128.3 (2024年), 第 1177–1223 页. 网址: https://doi.org/10.4310/jdg/1729092457.[Xia] M. Xia. 整体多重势理论中的奇点. 网址: https://mingchenxia.github.io/Lectures/SGPT2.pdf.[Xia22] M. Xia. 多重势论稳定阈值. IMRN (2022). 网址: https://doi.org/10.1093/imrn/rnac186.[Xia25a] M. Xia. 部分 Okounkov 体与非阿基米德度量的 Duistermaat-Heckman 测度. 几何与拓扑 29.3 (2025年), 第 1283–1344 页. 网址: https://doi.org/10.2140/gt.2025.29.1283.[Xia25b] M. Xia. 超越 b-除子 I. 链接. 2025年. Mingchen Xia, 几何与物理研究所, 中国科学技术大学 电子邮件地址, xiamingchen2008@gmail.com主页, https://mingchenxia.github.io/.