arXiv:2603.14376v1 [math.CO] 15 Mar 2026

量子与泊松 CGL 扩张的极大绿色序列

MILEN YAKIMOV

Dedicated to Dan Nakano on his 60th birthday with admiration

Abstract. 我们证明，按公理定义的对称量子与泊松 Cauchon–Goodearl–Letzter 扩张类中的所有成员，其量子与经典簇代数都具有 Keller 意义下的极大绿色序列。此前，人们已针对簇代数的显式族构造了极大绿色序列；其中许多序列都可以由 CGL 扩张的一般性结果得到。

1. Introduction

1.1. 设置。簇代数由 Fomin 和 Zelevinsky 于 2001 年发明，最初被设想为研究量子群的典范基以及代数簇中全正性的定性工具 [18]。在很短时间内，它们便在数学和数理物理的许多领域中获得了广泛应用。极大绿色序列由 Keller 于 2010 年发明，并被 Gaiotto、Moore 和 Neitzke 在 [23] 中含蓄地使用。它们具有简单的组合定义：极大绿色序列是一个在交换矩阵的绿色指标（即具有非负 c-向量）处进行变异的序列，直到所有指标都变为红色（即具有非正 c-向量）。变红序列（也称为绿色到红色序列）是一个更为一般的概念，指在绿色和红色指标处进行变异的序列，直到所有顶点都变为红色。这些概念具有多方面的应用：

(1) Keller [34] 证明，具有相同初始种子和末端种子的变红序列对会导出二对数恒等式。(2) Gross、Hacking、Keel 和 Kontsevich [25] 证明，如果一个簇代数存在变红序列，那么 Fock–Goncharov 对偶猜想 [15]对它成立。因此，相应的上簇代数具有一个以簇泊松簇的热带点为参数的基。(3) 存在变红序列等价于单射可达性，这在 Qin 构造公共三角基 [47, 第 2 节3]时起着关键作用。关于这两个概念，已有若干一般性质得到证明，包括以下几点：(1') Muller [43] 证明，变红序列的存在性在变异下保持不变，但极大绿色序列并非如此。(2') Br¨ustle、Hermes、Igusa 和 Todorov [5] 证明，极大绿色序列在循环置换下仍是极大绿色序列。他们还证明了若干重要猜想，其中包括一项有限性结论：与无环箭图变异等价的赋值箭图，其极大绿色序列的数量有限。

2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：13F60，次要分类：17B37，53D17。
Key words and phrases. 簇代数， c-向量，极大绿色序列，量子与 Poisson Cauchon–Goodearl–Letzter 扩张。

(3') Br¨ustle、Dupont 和 P´erotin [4]证明，极大绿色序列的末端箭图在对其顶点进行某种置换后，与原箭图同构。

更多结果请参阅 Keller 的综合综述 [36]。

鉴于极大绿色序列和变红序列的重要性，研究者对许多具体簇代数族中此类序列的构造进行了大量研究：

(a) 有限突变箭图与 Teichmuller 理论 [6, 9, 24, 41],(b) 双 Bruhat 胞腔与格拉斯曼流形 [51, 52]。(c) 双重 Bott–Samelson 胞腔 [50]。

[20] 对 A_n 箭图的极大绿色序列进行了分类。研究证明，极大绿色序列和变红序列的存在性在取子箭图时得以继承 [43]。此外，研究证明了一个逆向结论：具有极大绿色序列的箭图的三角扩张也具有这一性质 [10]。文献 [7, 8]还给出了粘合方法。

1.2. **CGL 扩张**。对称量子与泊松 Cauchon–Goodearl–Letzter（CGL）扩张是以公理方式定义的一大类非交换代数和泊松代数，它们具有 PBW 基 $\{x_1^{m_1} \dots x_N^{m_N} \mid m_1, \dots, m_N \in \mathbb{N}\}$，使得对所有 $j < k$,

$$x_k x_j \in \lambda_{kj} x_j x_k + \mathrm{Span}\{x_{j+1}^{m_{j+1}} \dots x_{k-1}^{m_{k-1}} \mid m_{j+1}, \dots, m_{k-1}\} \quad \text{and}$$
$$\{x_k, x_j\} \in \lambda_{kj} x_j x_k + \mathrm{Span}\{x_{j+1}^{m_{j+1}} \dots x_{k-1}^{m_{k-1}} \mid m_{j+1}, \dots, m_{k-1}\},$$

分别对应于来自环面作用的某些标量 λ_{kj}。

这两类 CGL 扩张似乎都非常庞大。除了维数极低的情形外，目前尚无已知的分类结果。文献 [39] 证明，源自李理论的泊松 CGL 扩张仅涵盖泊松 CGL 扩张这一类中的一小部分。第 3 节简要回顾 CGL 扩张理论。

文献 [27, 29, 32] 证明，每个满足温和假设的对称量子或泊松 CGL 扩张都具有量子（经典）簇代数结构，且该结构与相应的上量子（经典）簇代数一致，见定理 3.4 和 3.8。我们的主要结果是，这些庞大的公理化簇代数类别中的每个成员都具有（多个）极大绿色序列。

定理 A. 每个定义在维数为 N 的对称量子（泊松）*CGL* 扩张上的量子（经典）簇代数，都具有由对称群 S_N 的最长元素的所有约化表达式 $\boldsymbol{w}$ 参数化的极大绿色序列；这些表达式的初始子词满足：对于所有 $2 \leq j$、$k \leq N-1$，$\boldsymbol{w}_{\leq k}(\{1, \dots, j\})$ 是 $\{1, \dots, N\}$ 中的一个区间。

该定理表明，许多明确的（量子）簇代数族都存在极大绿色序列，这些代数族已受到广泛关注：

(1) 所有可对称化卡茨–穆迪代数的量子化包络代数中，量子幺幂胞腔的整形式都是对称量子 CGL 扩张的整形式 [31]。(2) 复单代数群的所有量子化坐标环中的量子双 Bruhat 胞腔都是对称量子 CGL 扩张 [30]。(3) 所有完全旗簇的坐标环以及所有类型为 A 的旗簇的坐标环，均可由条目 (1) 中的簇结构通过改变冻结变量[19, 21]得到。

(4) 复单代数群的（量子化）坐标环的（整形式），可由条目 (2) 中的（上）簇结构通过改变冻结变量 [45, 46, 48]得到。(5) 所有 Bott–Samelson 胞都是对称泊松 CGL 扩张 [14]。(6) 混合泊松结构（包括双 Bott–Samelson 簇）的泊松几何已在 [40] 中得到详细研究。它们很可能会带来大量对称泊松 CGL 扩张。

定理 A 在第 5 节中得到证明，并且源于关于变异序列的一个更一般的结果，我们称之为完全分层 T-系统。这些是赋值箭图的变异序列，其顶点集 S 是全序的并被划分为若干层，并且具有以下性质：(1) 在每个步骤中，指向变异顶点的入箭头来自同一层中的直接前驱和直接后继；(2) 给定层中各顶点的变异步骤 S' 是 $|S'|(|S'|-1)/2$，并按照某种 A-型变异模式组织，参见定义 4.1 和 4.3。下文中，$|S'|$表示有限集的基数。

定理 B。 每个完全分层 T-系统都是极大绿色序列。

定理 B 在第 4 节中得到证明。

注。(1) 由定理 4.10 和注 4.11 可知：(i) 每个完全分层 T-系统都是 Bucher、Machacek、Runburg、Yeck 和 Zewde 意义下的分支保持突变序列 [8], ；(ii) 在每个步骤中，赋值箭图都是若干 A型 Dynkin 图的并，它们带有某些定向以及其间的各种额外赋值箭；(iii) 分层 T-系统本身是 A-型变异序列的交错。注意，具有 (ii) 中所述性质的箭图集合非常一般，包含双 Bruhat 胞腔的所有箭图 [1]；事实上，如果取最细划分，则所有赋值箭图都可以通过这种方式得到。

(2) 定理 B 不能由 [8, 定理 3.11 和推论 3.12] 推出，原因有二。首先， [8]中分量保持突变序列的定义要求了解每个步骤中的变异顶点与冻结顶点之间的箭（*）。而在分层 T-系统的定义中，我们只有关于可交换顶点之间箭的（**）假设。性质（*）仅在定理 4.10 的证明中得到；对于归纳论证而言，定理 4.10 是定理 A 的一个必要的更强形式。其次，我们并未对变异的每个步骤中赋值箭图的导出子箭图（即顶点划分的各个层）作任何假设。对于验证 [8] 中分量保持突变序列定义的另一部分而言，这一必要性质同样只有在定理 4.10 中才能得到。

(3) 应用 [8, 定理 3.11 和推论 3.12] 似乎颇为困难，因为这需要了解变异顶点与冻结顶点之间的箭；这实质上是对框架箭图执行一系列变异，并检验其是否满足极大绿色序列的条件。与此同时，定理 B 很容易“应用，因为它处理的是原始箭图 Q，而不是其框架箭图 Q。例如，Keller 猜想 [36] 认为，Geiß–Leclerc–Schr¨oer 针对对称 Kac–Moody 代数 [22]的每个幺幂元胞的坐标环上的簇代数结构中的某些种子所给出的变异序列，可以通过简短应用定理 B 得证，见例 4.7。

(4) 为了从 [27, 29, 32], 中的结果推出定理 A，我们必须对簇代数的冻结变量进行手术。 [27, 29, 32] 中的结果提供了关于 CGL 扩张上的簇结构的信息，其中冻结变量的选取非常特殊。这些结果借助非交换代数和泊松代数方法（非交换唯一分解整环和泊松唯一分解整环）得以证明。移除所有冻结指标后，这些信息便转化为组合信息，供定理 A 使用。随后，通过应用组合学定理 A 插入主系数。

给定一个对称量子 CGL 扩张 R，我们可以考虑局部化商 $(R/I)[E^{-1}]$ ，其中 I 是一个环面不变素理想，而 E 是商代数中非零齐次正规元的集合。在泊松侧，我们可以考虑这类商，其中 I 是谱 R 的辛叶的一个环面轨道的消失理想，而 E 是非零泊松正规元的集合。可以按照如下思路构造这类代数的簇：收集 R 的饱和子代数链像中的正规元序列；这一做法已用于可对称化 Kac–Moody 群的量子 Richardson 簇，见 [38]。我们猜想，对于比定理 A 中情形更一般的这些情形，像定理 A 中那样重新排序生成元并重新计算正规元的过程，是一个变红序列。

记号。 对于正整数 $j \leq k$，令 $[j,k] := \{j, j+1, \dots, k\}$。对于有限指标集 I 和环 A，用 $M_{I,\ I'}(A)$ 表示元素取自 A、行和列分别由 I 和 I' 标记的矩阵所构成的阿贝尔群。当 $I = I' = [1,N]$ 时，我们通常将该群记作 $M_{N,\ N}(A)$。

对称群元素的单行表示将用方括号表示，以免与变异序列混淆。因此，

$$\sigma = [k_1\, k_2\, \dots\, k_N]$$

是置换 $\sigma \in S_N$ ，满足对所有 $1 \leq i \leq N$， $\sigma(i) = k_i$ 。记简单换位

$$s_k := (k\,(k+1)) \quad \text{for} \quad 1 \leq k \leq N-1.$$

对于一个 置换的约化表达式 $\boldsymbol{w} = s_{k_1} \dots s_{k_l}$，记初始子词 s

$$\boldsymbol{w}_{\leq i} := s_{k_1} \dots s_{k_i} \quad \text{for} \quad 0 \leq i \leq l.$$

致谢。 作者的研究获得了保加利亚科学基金会资助（项目编号 KP-06-N 62/5）、教育与科学部资助（项目编号 DO1-239/10.12.2024）、西蒙斯基金会资助（项目编号 SFI-MPS-T-Institutes-00007697）以及美国国家科学基金会资助（项目编号 DMS-2200762）。

2. Preliminaries on cluster algebras and maximal green sequences

本节回顾有关交换矩阵和赋值冰箭图的变异，以及极大绿色序列的背景知识。

2.1. 簇代数的组合背景。 几何类型的簇代数 [16]和量子簇代数 [2] 的定义始于一个主部可斜对称化的矩形整数矩阵。固定一个有限（指标）集合 I 以及两个互补（不相交）的子集

$$I = \mathbf{ex} \sqcup \mathbf{fr}.$$

ex 中的指标称为可交换（或可变）指标，而**fr** 冻结指标则称为冻结指标。对于一个矩阵

$$\widetilde{B} = (b_{ij}) \in M_{I,\mathbf{ex}}(\mathbb{Z}),$$

其**扩展** × **扩展** 子矩阵记作 B，并称为 ‹ ‹B 的主部。交换矩阵 $B \in M_{I,\ \mathbf{ex}}(\mathbb{Z})$ 是一个矩阵，其主部 B 是斜对称可对称化的；也就是说，存在一个对角矩阵 $D = \mathrm{diag}(d_j,\ j \in$**扩展**$)$，其对角元素为 $d_j \in \mathbb{Z}_+$，使得 $(DB)^T = DB$。假定元素 d_j 互素。

与交换矩阵 B 相关联的几何型簇代数 [16]和量子簇代数 [2], 分别是交换代数和非交换代数，均以迭代方式定义。在量子情形下，还需要假定存在一个与 B, [2]以某种方式相容的斜对称 $I \times I$ 矩阵。簇代数通过对种子进行连续变异来定义，种子由交换矩阵和簇变量 [16], 构成；而量子簇代数则通过对量子种子进行连续变异来定义，量子种子由交换矩阵和环面框架 [2]构成。 [16, 2] 的迭代组合构造在簇变量和交换矩阵层面上采用变异过程。矩阵 B沿方向 $k \in$**扩展** 的变异定义为®

$$\mu_k(\widetilde{B}) = (b'_{ij}) := \begin{array}{ll} -b_{ij} & \text{if } i = k \text{ or } j = k \\ b_{ij} + \frac{|b_{ik}|b_{kj} + b_{ik}|b_{kj}|}{2} & \text{otherwise.} \end{array}$$

有时我们会将变异过程表示为 ‹$B \xrightarrow{k}$ ‹B'。

如果交换矩阵的主部 $\widetilde{B}$ 是斜对称的，则可以用一个具有 N 个顶点的冰箭图 ‹来表示它，该图是一个有向图 $Q(B)$，满足

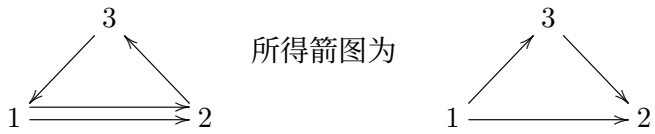
‹(1) $Q(B)$ 没有环和二循环，且 ‹(2) $Q(B)$ 的冻结顶点（标记为**fr**）之间没有箭。

‹箭图 $Q(B)$ 的定义方式是：从顶点 i 到顶点 j 的箭数在 $b_{ij} > 0$ 时等于 b_{ij}，否则等于 $-b_{ij}$。所有冰箭图都可以这样得到。

矩阵的变异对应于冰箭图上的变异过程。在顶点 k 处对 $Q(B)$ 进行变异（这与 $Q(\mu_k(B))$ 相吻合），需要分 3 步完成：‹ ‹

(1) 反转与顶点 k相连的所有箭头；(2) 将经过顶点 k 且至少有一个端点顶点未冻结的二路径补全为三角形（3 个循环）；(3) 消去成对的反向箭头。

例如 ，对下列不含冻结顶点的箭图中顶点 3 进行变异



一般交换矩阵由赋值冰 *quiver* [35, 第 3 节。3], 来编码，这些箭图的顶点由 I索引，并满足以下条件：

(1) 任意两个顶点之间至多有一条箭，且两个冻结顶点之间没有箭头（标记为**fr**）；

(2) 每条箭头 $i \to j$ 都标有一对正整数 (v_{ij}, v_{ji})，存在互素正整数 $d_i \in \mathbb{Z}_+$ 使得 $i \in$ **例如** 对于所有由箭头连接的 $i, j \in I$，都有$d_i v_{ij} = d_j v_{ji}$。此外，如果 $i \in$ **fr** 或$j \in$**fr**，则 $v_{ij} = v_{ji}$。

如果 $v_{ij} = v_{ji} = 1$，则省略相应的标签。通过将每个 b 箭从 i 到 j 转换为 $i \stackrel{(b,-b)}{\longrightarrow} j$，可将普通冰箭图转化为赋值冰箭图。

Le$\widetilde{B}$ 为一个交换矩阵。令 $b_{ji} := -b_{ij}$ 为 $i \in$**fr** 以及 $j \in$**ex**。与 B 对应的赋值‹ ‹ 冰箭图 $Q(B)$ 是这样一个箭图：当且仅当 $b_{ij} > 0$ 时存在一条箭 $i \to j$，其标签为 $(b_{ij}, -b_{ji})$。对于 ‹ ‹$Q(B)$，正整数集合 $\{d_i \mid i \in \mathbf{ex}\}$ 与 B的正整数集合相同。交换矩阵的变异对应于赋值冰箭图的变异，见 [35,第 3 节。3]

赋值箭图是指不含冻结顶点的赋值冰箭图。

2.2. **极大绿色序列**。 记$\mathbf{ex}' := \{i' \mid i \in \mathbf{ex}\}$。设 $B \in M_{\mathbf{ex}\times\mathbf{ex}}(\mathbb{Z})$ 为一个不含冻结变量的簇代数的交换矩阵，或交换矩阵 $B \in M_{I\times\mathbf{ex}}(\mathbb{Z})$ 的主部‹。具有主系数的相应簇代数与交换矩阵相关联

$$\widehat{B} := \begin{bmatrix} B \\ \mathrm{Id} \end{bmatrix} \in M_{\mathbf{ex}\sqcup\mathbf{ex}',\mathbf{ex}}(\mathbb{Z})$$

对于单位矩阵 Id :=$(c_{ij'})_{i,\ j\in\mathbf{ex}}$ 其中 $c_{ij} = \delta_{ij}$。对应的赋值冰“ ’箭图 $Q(B)$ 是箭图 $Q(B)$ 的框架箭图，它是通过添加顶点 $\mathbf{ex}'$ 以及对所有 $i \in$**ex** 添加一条边 $i \to e'$，从箭图 Q (B) 得到的箭图 $Q(B)$。例如， A_3 型箭图 $1 \leftarrow 2 \leftarrow 3$ 的框架箭图是箭图

(2.1)
$$\begin{array}{ccccc} 1 & \longleftarrow & 2 & \longleftarrow & 3 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 1' & & 2' & & 3' \end{array}$$

考虑一个变异序列

$$B' := \mu_{k_i} \dots \mu_{k_1}(B).$$

The c-向量的指标 $j \in$**ex** 是矩阵第 j 列的后半部分

$$\mu_{k_i} \dots \mu_{k_1}(\widehat{B})$$

将其视为 $\mathbb{Z}^{\mathbf{ex}'} \cong \mathbb{Z}^{\mathbf{ex}}$ 中的向量。它取决于变异序列，而不仅仅取决于矩阵 B'。Fomin 和 Zelevinsky [17]猜想，每个 c-向量的坐标要么全都非负，要么全都非正（ c-向量的符号相干猜想）。该猜想在斜对称情形下由 [13, 44, 49] 证明，而在一般情形下由 Gross、Hacking、Keel 和 Kontsevich [25]证明。

定义 2.1. (Keller, [34])

(a) 如果顶点 $i \in \mathbf{ex}$ 的 c-向量所有坐标均非负（分别地，均非正），则称其为 $\mu_{k_i} \dots \mu_{k_1}(B)$ 的绿色（分别地，红色）顶点。(b) 若对于所有 $1 \le i \le n$， k_i 都是 $\mu_{k_{i-1}} \dots \mu_{k_1}(B)$ 的绿色顶点，则变异序列 $k_1, \dots, k_n$ 称为交换矩阵 B 的绿色序列。(c) 若变异序列 $k_1, \dots, k_n$ 是绿色序列，且对于 $\mu_{k_n} \dots \mu_{k_1}(B)$，所有顶点 $i \in \mathbf{ex}$ 均为红色，则称其为交换矩阵 B 的极大绿色序列。

(d) 若对于 $\mu_{k_n}\dots\mu_{k_1}(B)$，所有顶点 $i\in\mathbf{ex}$ 均为红色，则变异序列 $k_1,\dots,k_n$ 称为交换矩阵 B 的变红序列（或由绿变红的序列）。

3. Quantum and Poisson CGL extensions

本节回顾量子与泊松 CGL 扩张的基础知识、子代数链中素元的结构，以及在其上构造量子簇代数和经典簇代数结构的方法。

3.1. 量子 CGL 扩张。设 $\mathbb{K}$ 为任意基域，A 为一个 $\mathbb{K}$-代数，σ为 A 的代数自同构，δ 为 A 的一个 σ-导子（即，$\delta(ab)=\delta(a)b+\sigma(a)\delta(b)$，$\forall a,\ b\in A$）。$\mathbb{K}$-代数 A 的斜多项式扩张是形如以下形式的代数:

$$A[x;\sigma,\delta]:=\oplus_{n\geq 0}Ax^n,$$

其中 A 是一个子代数，并且

$$xa=\sigma(a)x+\delta(a)\quad\text{for all }\ a\in A.$$

考虑一个迭代 Ore 扩张（也称为迭代斜多项式代数）

$$R:=\mathbb{K}[x_1][x_2;\sigma_2,\delta_2]\cdots[x_N;\sigma_N,\delta_N], \tag{3.1}$$

并将中间代数记为

$$R_k:=\mathbb{K}[x_1][x_2;\sigma_2,\delta_2]\cdots[x_k;\sigma_k,\delta_k]$$

其中 $0\leq k\leq N$。特别地，$R_0=\mathbb{K}$ 和 $R_N=R$。

定义 3.1。

（a）称迭代 Ore 扩张 R 为（量子）*Cauchon–Goodearl–Letzter*（*CGL*）扩张 [11, 26]，如果它配备了一个 $\mathbb{K}$-环面 T对 $\mathbb{K}$-代数自同构的有理作用，并满足以下条件：（i）元素 $x_1,\dots,x_N$是 T-特征向量。（ii）对于每个 $2\leq k\leq N$，δ_k 都是 R_{k-1}上的局部幂零 σ_k-导子。（iii）对于每个 $1\leq k\leq N$，存在 $h_k\in T$ 使得 $\sigma_k=(h_k\cdot)$，且 x_k的h_k-特征值（记为 λ_k）不是单位根。

（b）如果按相反顺序添加生成元 $x_1,\dots,x_N$时，它仍然是 CGL 扩张，则称 CGL 扩张为对称

$$R=\mathbb{K}[x_N][x_{N-1};\sigma^*_{N-1},\delta^*_{N-1}]\dots[x_1;\sigma^*_1,\delta^*_1].$$

相应的 lambda 标量记为 λ^*_k。

这套公理体系源自 Cauchon [11]和 Goodearl–Letzter [26]的工作，他们率先研究了此类代数的环论性质。

对于 $1\leq j<k\leq N$，令 $\lambda_{kj}\in\mathbb{K}^\times$ 表示 x_j的 h_k-特征值，即 $h_k\cdot x_j=\lambda_{kj}x_j$。CGL 扩张的对称性等价于对 T 的作用施加一个温和条件，以及以下抽象的 Levendorskii–Soibelman 型直化律（见 [29, 定义 3.12]）：

对于所有 $j<k$，元素 $x_kx_j-\lambda_{kj}x_jx_k$ 属于由 $x_{j+1},\dots,x_{k-1}$ 生成的 R含幺子代数，其中某个标量为 $\lambda_{kj}\in\mathbb{K}^\times$。

注 3.2. 定义 3.1(2)中的“对称”一词，并非指那些来源于对称 Kac–Moody 代数的代数，也不是指与箭图而非赋值箭图相关联的量子簇代数；这些情形在此处都自然会出现。这里的“对称”指的是：按直接顺序和反向顺序依次添加生成元时， R 都是一个 CGL 扩张。

若代数 A 带有环面 T 通过代数自同构给出的有理作用，则 A 具有由 T的有理特征格 $X(T)$确定的典范分次。若元素 $a \in A$ 相对于此分次是齐次的，则称其为齐次元素。其权记为

$$\mathrm{wt}(a) \in X(T). \tag{3.2}$$

按照 Chatters [12], 的说法，整环 A （即没有零因子的非交换环）中的非零元素 p 称为素元，如果它是正规元（意即 $Ap = pA$），且商环 A/pA 是整环。诺特整环 A 称为唯一因子分解整环（UFD） [12] ，如果 A 的每个非零素理想都包含一个素元。容易证明，在交换诺特情形下，此定义等价于更常见的定义。若 A 是一个 $\mathbb{K}$-代数，且带有环面 $\mathbb{K}T$通过代数自同构给出的有理作用，则称 A为 T-UFD [37]，如果 A 的每个非零 T-素理想都包含一个齐次素元素。回顾一下，非交换代数 A 的 T-素理想是一个 T-稳定理想，使得

$$IJ \subseteq P \Rightarrow I \subseteq P \text{ or } J \subseteq P \tag{3.3}$$

对于 A的所有 I 和 J，其中 I 和 J 是 T-稳定理想。Launois、Lenagan 和 Rigal 证明了 [37] 每个 CGL 扩张都是 T-唯一分解整环。

对于函数 $\eta\colon [1,N] \to \mathbb{Z}$，考虑前驱 和后继函数

$$[1,N] \to [1,N] \sqcup \{-\infty\} \quad \text{and} \quad [1,N] \to [1,N] \sqcup \{\infty\}$$

针对其由 ® 定义的水平集

$$k[-1] := \begin{array}{ll} \max\{j < k \mid \eta(j) = \eta(k)\}, & \text{if } \exists j < k \text{ such that } \eta(j) = \eta(k) \\ -\infty, & \text{otherwise} \end{array}$$

and

$$k[1] := \begin{cases} \min\{j > k \mid \eta(j) = \eta(k)\}, & \text{if } \exists j > k \text{ such that } \eta(j) = \eta(k) \\ \infty, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

令 $k[0] \colon = k$，并且当后者有定义时令 $k[\pm(m+1)] \colon = k[\pm m][\pm 1]$。定义序函数

$$O_\pm : [1,N] \to \mathbb{N}, \quad O_\pm(k) := \max\{m \in \mathbb{N} | k[\pm m] \neq \pm\infty\}. \tag{3.4}$$

定理 3.3。 [28, 定理 4。3] 以下结论对(3.1)中的每个 *CGL* 扩张 R 均成立：

(a) 对于每个 $1 \leq k \leq N$，子代数 R_k 都有一个唯一的（相差一个标量因子）齐次素元素 p_k，且该元素不属于 R_{k-1}。(b) 存在一个函数 $\eta\colon [1,N] \to \mathbb{Z}$ 以及一些元素

$$c_k \in R_{k-1} \text{ for all } k \in [2,N] \text{ with } \delta_k \neq 0$$

使得齐次素元 p_1、...、p_N（相差缩放因子）由以下递归方式给出

$$p_k := \begin{cases} p_{k[-1]}x_k - c_k, & if\ \delta_k \neq 0 \\ x_k, & if\ \delta_k = 0. \end{cases}$$

（c）具有这些性质的函数 η 并不唯一，但其水平集是唯一的，因此后继函数和前驱函数也是唯一的。此外，$k[-1] = -\infty$ 当且仅当 $\delta_k = 0$。

我们注意到，元素 p_1、.....、p_N不是 R的素元，但 R 的所有齐次素元在经过缩放后都是

$$\{p_k \mid k[1] = \infty\},$$

它们是 R 上的一种量子簇代数结构的冻结变量，该结构在 [27, 29] 中构造，并在下文回顾。

对于我们所知的所有有意义的对称 CGL 扩张，以下两个条件均成立：

条件（A）。基域 $\mathbb{K}$ 包含标量 λ_{kj} 的平方根 ν_{kj}（其中$1 \leq j < k \leq N$），使得由它们生成的 $\mathbb{K}^\times$ 子群不含阶为 2 的元素。

条件（B）。存在正整数 d_n，对 $n \in$ 取遍 η的值域，使得

$$\lambda_k^{d_{\eta(j)}} = \lambda_j^{d_{\eta(k)}}$$

对所有 $k,\ j \in [1, N]$, $p(k) \neq -\infty$, $p(j) \neq -\infty$。

记矩阵

$$\boldsymbol{\nu} := (\nu_{kj})_{k,j=1}^N \in M_{N,N}(\mathbb{K}^\times), \tag{3.5}$$

其中，ν_{kj} 由条件（A）针对 $j < k$, $\nu_{kk} = 1$ 和 ν_{kj} 给出：$= \nu_{jk}^{-1}$ 对 $j > k$。

对于每个置换 $\tau \in S_N$，我们关联另一个置换

$$\tau_\bullet \in \prod_{a \in \mathbb{Z}} S_{\eta^{-1}(a)} \tag{3.6}$$

定义如下。对于 a 属于 η的值域的情形，令 $|a| := |\eta^{-1}(a)|$。考虑集合

$$\eta^{-1}(a) = \{\tau(k_1), \ldots, \tau(k_{|a|}) \mid k_1 < \cdots < k_{|a|}\}$$

并将其元素按递增顺序排列。定义 $\tau_\bullet \in S_N$，令 $\tau_\bullet(\tau(k_i))$ 等于列表中的第 i 个元素（对 a 和 i 的所有取值均成立）。

例如，考虑 $N = 6$ 和 η 的情形：$[1, 6] \to \mathbb{Z}$ 表示为

$$\eta(1) = \eta(4) = \eta(6) = 1, \quad \eta(2) = \eta(5) = 2, \quad \eta(3) = 3.$$

Let

$$\tau := [3\,4\,2\,5\,1\,6] \in S_6$$

用置换的单行表示法表示。于是

$$\eta^{-1}(1) = \{\tau(5) = 1 < \tau(2) = 4 < \tau(6) = 6\}$$

因此，

$$\tau_\bullet(4) = 1, \quad \tau_\bullet(1) = 4, \quad \tau_\bullet(6) = 6.$$

类似地，可以得到，对于 $j = 2$、3 和 5，有 $\tau_\bullet(j) = j$。

记对称群 S_N 的以下子集为:

$$\Xi_N := \{\tau \in S_N \mid \tau(k) = \max \tau([1,k-1]) + 1 \text{ or } \tau(k) = \min \tau([1,k-1]) - 1, \ \forall k \in [2,N]\}. \tag{3.7}$$

等价地， Ξ_N 可定义为

$$\Xi_N = \{\tau \in S_N \mid \tau([1,k]) \text{ is an interval for all } 2 \leq k \leq N\}.$$

S_N 的单位元记为 id。它属于 Ξ_N。

Set

$$\mathbf{fr} := \{1 \leq k \leq N \mid k[1] = +\infty\} \quad \text{and} \quad \mathbf{ex} := [1,N] \setminus \mathbf{fr}. \tag{3.8}$$

对于来自条件（A）的方阵 $\boldsymbol{\nu}$，见（3.5），记 Ω: $\mathbb{Z}^N \times \mathbb{Z}^N \to \mathbb{K}^\times$ 为满足以下条件的乘法双特征标

$$\Omega(e_l, e_j) = \prod_{m=0}^{O_-(l)} \prod_{n=0}^{O_-(j)} \mu_{l[-m],j[-n]}, \quad \forall 1 \leq l,j \leq N,$$

其中 e_1、……、 e_N是 $\mathbb{Z}^N$的标准生成元。

定理 3.4。 [29, 定理 8.2 和命题 8。13] 设 R 是满足条件（*A*）和（*B*）的对称 *CGL* 扩张。则 R 同构于一个量子簇代数，其冻结指标和可交换指标 $\mathbf{fr}$ 和 $\mathbf{ex}$ 由 （3.8）给出；对于来自定理 *3.3* 的函数η： $[1,N] \to \mathbb{Z}$，存在一组（显式构造的）种子子集 Σ_τ，对应于 $\tau \in \Xi_N$，满足以下条件:

(a) 对于每个 $l \in \mathbf{ex}$，都存在唯一的向量 $b^j = (b_i^l) \in \mathbb{Z}^N$ 使得

$$\sum_{i=1}^N b_i^l \mathrm{wt}(x_i) = 0,$$

回顾(3.2)，并且

$$\Omega(b^l, e_j) = 1, \quad \forall 1 \leq j \leq N, j \neq l, \qquad \Omega(b^l, e_l)^2 = (\lambda_l^*)^{-1}.$$

~初始种子 $\Sigma := \Sigma_{\mathrm{id}}$ 的交换矩阵是矩阵 B，其列为 b^j，其中 $j \in \mathbf{ex}$。 Σ 的簇变量是定理 *3.3* 中元素 p_1、. . .、 p_N的缩放形式。

(b) 对于所有满足以下条件的 $\tau, \tau' \in \Xi_N$

$$\tau' = (\tau(k)\, \tau(k+1))\tau = \tau(k\, (k+1))$$

对于某个 $k \in [1, N-1]$，以下结论成立:

(i) 若 $\eta(\tau(k)) \neq \eta(\tau(k+1))$，则 $\Sigma_{\tau'} = \Sigma_\tau$。

(ii) 若 $\eta(\tau(k)) = \eta(\tau(k+1))$，则 $\Sigma_{\tau'} = \mu_{k_\bullet}(\Sigma_\tau)$，其中 $k_\bullet = \tau_\bullet \tau(k)$。

(c)在 *(b)* 部分的情形 *(ii)* 中，种子 Σ_τ 的交换矩阵的第 $k_\bullet$ 行只有在第 $k_\bullet[-1]$ 行和第 $k_\bullet[1]$ 行的元素为负数，而为正数的元素位于第 j 行，其中 $\eta(j) \neq \eta(k)$。

相关量子簇代数的冻结变量不进行求逆。

定理中的量子簇代数是 [29, 第 2]章所发展的多参数量子簇代数。按照 Berenstein 和 Zelevinsky [2] 原始意义下属于量子簇代数的 CGL 扩张，是指标量 λ_k、λ_{kj}为未定元 q的幂的那些 CGL 扩张。

定理 3.4 的 (a) 和 (b) 部分源自 [29]中的定理 8.2。定理 3.4 的 (c) 部分是 [29]中定理 8.2(a) 与命题 8.13(b) 的结合。

注 3.5. 在定理 3.4 中，我们考虑了 [29] 中所用交换矩阵的相反数。当然，这不会改变簇结构。我们选择交换矩阵的符号，是为了得到从 B 到 $B_{w_\circ}$ 的极大绿色序列，而不是反向的序列，其中 $w_\circ$ 是 S_N 的最长元素。更具体地说，这一符号选择确保在每一步中，变异箭图都有从 $k[-1]$ 和 $k[1]$ 指向变异顶点 k 的入箭，而不是出箭。

T-UFD 的作用在于，在这类代数中，每个齐次正规元都可以唯一地表示为齐次素元的乘积（相差相伴元），这一点可用于强制执行 [29, 定理 8.2] 中的变异；交换矩阵的各项记录了某些齐次正规元对应的素元的指数。

3.2. **泊松 CGL 扩张**。设 A 是基域 $\mathbb{K}$ 上的泊松代数。泊松 Ore 扩张是一个泊松代数 $A[x;\sigma,\ \delta]_p$，它包含 A 作为泊松子代数，与 $A[x]$ 作为交换代数同构，并且其泊松括号满足

$$\{x,a\}=\sigma(a)x+\delta(a),\ \ \forall a\in A.$$

这里，σ 是 A 的泊松导子，而 δ 是斜导子，这意味着它是交换代数B的导子，并且

$$\delta(\{a,b\})=\{\delta(a),b\}+\{a,\delta(b)\}+\sigma(a)\delta(b)-\delta(a)\sigma(b),\quad \forall a,b\in A.$$

对于一个迭代泊松 Ore 扩张

$$R:=\mathbb{K}[x_1]_p[x_2;\sigma_2,\delta_2]_p\cdots[x_N;\sigma_N,\delta_N]_p \tag{3.9}$$

并且 $0\le k\le N$，记

$$R_k:=\mathbb{K}[x_1,\dots,x_k]=\mathbb{K}[x_1]_p[x_2;\sigma_2,\delta_2]_p\cdots[x_k;\sigma_k,\delta_k]_p.$$

定义 3.6。

(a) 如上所述的迭代泊松 Ore 扩张 R 称为泊松 *CGL* 扩张，如果它配备了环面 T 的有理泊松作用，使得

(i) 元素 $x_1,\dots,x_N$是 T-特征向量。(ii) 对于每个 $k\in[2,N]$，R_{k-1}的斜导子 δ_k都是局部幂零的。(iii) 对于每个 $k\in[1,N]$，存在 $h_k\in$李T，使得 $\sigma_k=(h_k\cdot)|_{R_{k-1}}$，且 x_k的 h_k-特征值（记作 λ_k）非零。

(b) 如果按相反顺序依次添加生成元 x_1，……，x_N 后仍为泊松 CGL 扩张，则称该泊松 CGL 扩张为对称

$$R=\mathbb{K}[x_N][x_{N-1};\sigma^*_{N-1},\delta^*_{N-1}]_p\dots[x_1;\sigma^*_1,\delta^*_1]_p.$$

相应的 λ-标量记作 λ^*_k。

对称性等价于要求

$$\delta_k(x_j)\in\mathbb{K}[x_{j+1},\dots,x_{k-1}],\quad \forall 1\le j<k\le N$$

T-作用满足一个温和条件，见 [32, 定义 6.1]。

对于 CGL 扩张 R，记由 $h_k.x_j=\lambda_{kj}x_j$ 对 $1\le j<k\le N$ 给出的 h_k-特征值 $\lambda_{kj}\in\mathbb{K}$。令 $\lambda_{kk}=0$，并令 $\lambda_{jk}=-\lambda_{kj}$ 对于 $1\le k<j\le N$。记斜对称矩阵

$$\boldsymbol{\lambda}:=(\lambda_{kj})_{k,j=1}^N\in M_{N,N}(\mathbb{K}). \tag{3.10}$$

泊松整环是指作为交换代数为整环的泊松代数 R。泊松整环 R 的泊松素元是满足以下条件的素元 $p \in R$

$$p \mid \{p, r\}, \quad \forall r \in R.$$

这些条件等价于称理想 (p) 同时是素理想和泊松理想。当基域 $\mathbb{K}$ 不可数且代数闭时，$p \in R$ 是泊松素的，当且仅当 p 是 R 中的素元，并且零点集$V(p) \subseteq$ 极大谱 R 是 [3] 意义下辛核的并。在$\mathbb{K} = \mathbb{C}$的情况下，可以在该表述中用“辛叶”替换“辛核”，见 [32, 第 4 节 1]。

泊松代数 R 的泊松素理想是指满足以下条件的泊松理想 P：对于 R的所有泊松理想 I 和 J，(3.3) 都成立。若 R 的每个非零泊松素理想都包含一个泊松素元，则称泊松整环 R 为泊松唯一分解整环（泊松唯一分解整环）。

在这一概念的等变版本中，考虑一个带有环面 T的泊松作用的泊松整环 R。泊松代数 R 的一个 T- 泊松素理想，是一个满足条件 (3.3) 的 T- 稳定泊松理想 P，其中 (3.3) 对 R的所有 T-稳定泊松理想 I和 J都成立。若泊松整环 R 的每个非零 T-泊松素理想都包含一个齐次（相对于 $X(T)$-分次）泊松素元，则称 R 为 T-泊松唯一分解整环（泊松唯一分解整环）。所有泊松 CGL 扩张都是 T-泊松唯一分解整环 [32, 定理 4.7]。

定理 3.7。 [32, 定理 5。5] 以下结论对每个长度为 N的泊松 *CGL* 扩张R 均成立：

(a) 对于每个 $1 \leq k \leq N$，子代数 R_k 都有唯一的（相差一个标量倍数）齐次泊松素元 y_k 不属于 R_{k-1}。(b) 存在一个函数 $\eta\colon [1, N] \to \mathbb{Z}$ 以及一些元素

$$c_k \in R_{k-1} \ \textit{for all} \ k \in [2, N] \ \textit{with} \ \delta_k \neq 0$$

使得齐次泊松素元 $p_1, \ldots, p_N$（相差一个比例因子）由递归给出

$$p_k := \begin{cases} p_{k[-1]} x_k - c_k, & \textit{if } \delta_k \neq 0 \\ x_k, & \textit{if } \delta_k = 0. \end{cases}$$

(c) 具有这些性质的函数 η 并不唯一，但其水平集是唯一的，因此后继函数和前驱函数也是唯一的。此外，$k[-1] = -\infty$ 当且仅当 $\delta_k = 0$。

对于 (3.10) 中的方阵 $\boldsymbol{\lambda}$，记 $\Theta\colon \mathbb{Z}^N \times \mathbb{Z}^N \to \mathbb{K}^\times$ 为如下定义的加性双特征：

$$\Theta(e_l, e_j) = \sum_{m=0}^{O_-(l)} \sum_{n=0}^{O_-(j)} \mu_{l[-m], j[-n]}, \quad \forall 1 \leq l, j \leq N,$$

回忆 (3.4)。

定理 3.8. [32, 定理 11.1 和命题 11.8] 设 R 是一个对称泊松 *CGL* 扩张，满足

$$\lambda_k / \lambda_j \in \mathbb{Q}_+, \quad \forall 1 \leq j \neq k \leq N. \tag{3.11}$$

那么 R 同构于一个经典簇代数，其冻结指标和可交换指标**fr** 和**ex** 由(3.8) 给出；该代数对应于定理 *3.7* 中的函数 $\eta\colon [1,N]\to\mathbb{Z}$，且存在一组（显式构造的）种子子集 Σ_τ，用于 $\tau\in\Xi_N$，使得以下条件成立：

(a) 对于每个 $l\in$**ex**，存在唯一的元素 $b^j=(b_i^l)\in\mathbb{Z}^N$ 使得

$$\sum_{i=1}^{N} b_i^l \mathrm{wt}(x_i)=0,$$

回忆(3.2)，并且

$$\Theta(b^l,e_j)=-\delta_{j,l}\lambda_l^*,\quad \forall 1\le j\le N.$$

~初始种子 $\Sigma:=\Sigma_{\mathrm{id}}$ 的交换矩阵是矩阵 B，其列为 b^j，其中 $j\in$**ex**。 Σ 的簇变量是定理 *3.7* 中元素 $p_1,\ldots,p_N$的缩放形式。

(b) 对于所有满足以下条件的 $\tau,\tau'\in\Xi_N$

$$\tau'=(\tau(k)\,\tau(k+1))\tau=\tau(k\,(k+1))$$

对于某个 $k\in[1,N-1]$，以下结论成立：

(i) 若 $\eta(\tau(k))\neq\eta(\tau(k+1))$，则 $\Sigma_{\tau'}=\Sigma_\tau$。(ii) 若 $\eta(\tau(k))=\eta(\tau(k+1))$，则 $\Sigma_{\tau'}=\mu_{k_\bullet}(\Sigma_\tau)$，其中 $k_\bullet=\tau_\bullet\tau(k)$。(c) 在这种情况下 *(ii)* 在部分 *(b)* ，交换矩阵中种子 Σ_τ 的第 $k_\bullet$行唯一的负项位于第 $k_\bullet[-1]$行和第 $k_\bullet[1]$行，正项则位于满足 $\eta(j)\neq\eta(k)$的第 j 行。

相关量子簇代数的冻结变量不作求逆处理。

定理 3.8 的 (a) 和 (b) 部分出自 [32] 中的定理 11.1，而定理的 (c) 部分则由 [29]中的定理 11.1(a) 和命题 11.8(b) 得出。出于注 3.5 中所述的原因，在定理 3.8 中我们使用了 [29,定理 11.1],所用交换矩阵的相反数，这不会改变簇结构。

备注 3.9。 在 [42]，中，Mi 为每个对称泊松 CGL 扩张构造了一种量子化；按照定义 3.6 的意义，该量子化满足整性，即元素 h_k 属于 T 的余特征格，并证明这种量子化是一个对称（量子）CGL 扩张。这一整性假设蕴含了定理 3.8 中使用的较弱整性条件（3.11）。在前一种假设下，可以证明定理 3.4 和 3.8 中的交换矩阵集合及其之间的变异彼此吻合。在这种情况下，关于量子与泊松 CGL 扩张的极大绿色序列的主要定理可以相互推导。不过，与其将交换矩阵的变异从一种情形转换到另一种情形，不如将证明并行地视为下一节将提出的分层 T-系统这一概念的实例，这样更为自然。

4. Layered T-systems and maximal green sequences

本节将定义一种完整分层 T-系统的一般概念，并证明它们是极大绿色序列。

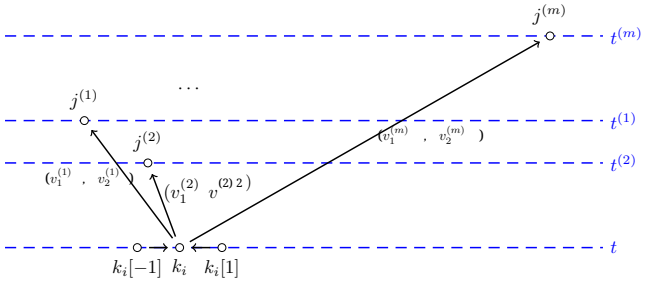


FIGURE 1. 分层 T-系统

4.1. 分层 T-系统。 考虑一个不含冻结变量的交换矩阵变异序列

$$B = B_1 \xrightarrow{k_1} B_2 \xrightarrow{k_2} \ldots \xrightarrow{k_r} B_{r+1} \in M_{\mathbf{ex},\mathbf{ex}}(\mathbb{Z}) \tag{4.1}$$

并假设$\mathbf{ex}$是全序的，即，

$$\mathbf{ex} \subseteq [1, N]$$

对于某个正整数 N。

定义 4.1. 变异序列 (4.1) 称为分层 T-系统，如果存在一个函数

$$\eta : \mathbf{ex} \to \mathbb{Z}$$

满足以下条件：

(1) 对于所有 $1 \leq i \leq r$，顶点 k_i of $Q(B_i)$ 的入箭头都是来自顶点 $k_i[-1]$ and $k_i[1]$ 的简单箭头（无标记）。如果这些指标中一个或两个是 $\pm\infty$，则它没有入箭头。(2) 从 k_i 出发的出箭仅指向顶点 $j \in \mathbf{ex}$，使得$\eta(j) \neq \eta(k_i)$。它们可以带有任意标记。

顶点集由全序集 $\mathbf{ex}$ 编号的赋值箭图，连同一个函数 $\eta : \mathbf{ex} \to \mathbb{Z}$，称为分层赋值箭图。与李理论相关的簇代数中出现的箭图都是分层的，因为它们的簇变量对应于魏尔群中的词，而简单反射（根）的集合提供了分层；例如参见定义 2.2 和 2.3]。

注记 4.2. 每个分层赋值箭图都可以展示在平面上：放置其顶点，使它们的 x 坐标按递增顺序排列，并令 η 函数由 y 坐标给出。箭图的箭可能会相交。定义 4.1 要求，对于所有 $1 \leq i \leq r$，与 k_i 相 incident 的箭图 $Q(B_i)$ 中的箭都如图 1 所示：从 $k_i[-1]$ 和/或 $k_i[1]$（对于有限的那些指标）出发，有（至多两条）简单入箭头，且这些箭头位于同一行；此外，还有若干条指向其他行上顶点的出箭头（带赋值），在图中标记为 $j^{(1)}$、.....、$j^{(m)}$。每行右侧显示 η 的值，即 y 坐标。点线表示 η 的水平集；它们不属于箭图。

对于 $t \in$值域(η)，记作

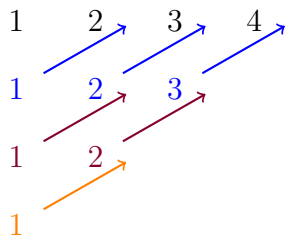
$$\ell(t) := |\eta^{-1}(t)| \quad \text{and set} \quad \eta^{-1}(t) = \{j_{t,1} < j_{t,2} < \ldots < j_{t,\ell(t)}\}. \tag{4.2}$$

定义 4.3. 如果对于每个 $t \in$ 值域(η)，$\eta^{-1}(t)$ 的顶点处的变异都是 $\ell(t)$ 列表的交错，则称分层的 T-系统为完全的

$$\begin{aligned}
&j_{t,1}, j_{t,2}, \dots, j_{t,\ell(t)-1}, j_{t,\ell(t)},\\
&j_{t,1}, j_{t,2}, \dots, j_{t,\ell(t)-1},\\
&\dots\\
&j_{t,1}, j_{t,2},\\
&j_{t,1}.
\end{aligned}$$

满足这样的条件：第 n 行上的索引 $j_{t,\ i}$ 应排在第 $(n-1)$ 行上的索引 $j_{t,\ i+1}$ 之后。

例 4.4。 例如，若$\mathbf{ex} = [1, 4]$ 和 η 是常函数，则变异序列的长度应为 10，并且各行应按照图示交错



其中，每个箭头表示第 n 行上的整数应放在第 $(n-1)$ 行上的整数之后，如图所示。例如，以下是一种允许的交错：

$$1\ 2\ 3\ 1\ 2\ 1\ 4\ 3\ 2\ 1.$$

注 4.5。

(a) T-系统是离散递推关系，通常会导出来自数理物理和表示论的簇代数的变异序列；这些序列具有这样的性质：在每一步中，变异都在某个索引处进行，使得赋值箭图中对应顶点有 0、1 或 2 个入射简单箭头，参见例如 [33, 式 (5)]。据我们所知，定义 4.1 中的分层条件存在于所有这类例子中。

(b) 每个完整分层的 T-系统的长度为

$$\binom{\eta+1}{2} := \prod_{t\in \operatorname{range}\eta} \binom{\ell(t)+1}{2} = \prod_{t\in \operatorname{range}\eta} \binom{|\eta^{-1}(t)|+1}{2} \tag{4.3}$$

因为对于每个 $t \in$值域(η)，突变序列都应当恰好有

$$\ell(t)(\ell(t)+1)/2 = \binom{\ell(t)+1}{2}$$

次在 $\eta^{-1}(t)$ 中顶点处的变异。

定理 4.6. 每个完整分层的 T-系统都是一个极大绿色序列。

例 4.7。 Geiß–Leclerc–Schr¨oer 描述了对对称 Kac–Moody 代数每个幺幂元胞的坐标环上的簇代数结构中某些种子进行变异的一个序列 [22, 第 399-400] 页。Keller 猜想这些变异序列是极大绿色序列 [36, 第 4 节1]。这直接由

定理 4.6 得出，因为这些变异序列是满层 T-系统。根据 [22, 定理 13, 1] 它们是层 T-系统；由于 [22]第 399–400 页上的步骤 1、2，$\dots k$，它们是满的。它们的长度由 [22] 第 401 页的第一个公式计算得出，并且具有形式 (4.3)，因为相应 η 函数的水平集在 [22] 的记号下包含 t_1，t_2，$\dots t_n$ 个元素。

4.2. **箭图的变异**。 A_n **箭图**。证明定理 4.6 需要用到若干关于 A_n 箭图变异的简单事实。记 $\overleftarrow{A}_n$ 为箭图 $1 \leftarrow 2 \leftarrow \dots \leftarrow n$。

引理 4.8. 设

$$Q_1 := \overleftarrow{A}_n \xrightarrow{k_1} Q_2 \xrightarrow{k_2} \dots \xrightarrow{k_r} Q_{r+1}$$

为一个变异序列，它是以下列表的交错

$$\begin{matrix} 1, 2, \dots, n-1, n \\ 1, 2, \dots, n-1, \\ \dots \\ 1, 2, \\ 1 \end{matrix}$$

按照定义 *4.3* 的规则。特别地，$r = \begin{pmatrix} n+1 \\ 2 \end{pmatrix}$。则有以下结论：

(a) 每个箭图 Q_i 都是一张边带有某种定向的 A_n 图，且 k_i是 Q_i的一个汇点。(b) 该变异序列是一个极大绿色序列。

证明。 (a) 我们通过对 i 进行归纳法来证明该命题，$i = 1$ 的情形显然成立。假设在第 i 步之前各步骤中命题均成立。由于根据归纳假设，对于 $0 \leq p \leq i-1$，k_p 是 Q_p 的汇点，因此箭图 Q_{p+1} 是由 Q_p 将所有 $1 \leq p \leq i-1$ 中与 k_p 相邻的箭反向而得到的。对 Q_{i-1} 应用归纳假设可知，Q_i 是边具有某种定向的 A_n 箭图。在经过 $Q_1 \xrightarrow{k_1} Q_2 \xrightarrow{k_2} \dots \xrightarrow{k_{i-1}} Q_i$ 时，箭头 $(k_i - 1) \leftarrow k_i$ 的方向被反转

$$|\{k_p \mid 1 \leq p \leq i-1, k_p = k_i - 1 \text{ or } k_i\}| = 2|\{k_p \mid 1 \leq p \leq i-1, k_p = k_i\}| + 1$$

次，因此 Q_i 有一条从 $k_i - 1$ 指向 k_i 的箭。类似地，在从 Q_1 到 Q_i 的过程中，箭 $k_i \leftarrow (k_i + 1)$ 的方向被反转

$$|\{k_p \mid 1 \leq p \leq i-1, k_p = k_i \text{ or } k_i + 1\}| = 2|\{k_p \mid 1 \leq p \leq i-1, k_p = k_i\}|$$

次，因此 Q_i 有一条从 $k_i + 1$ 指向 k_i 的箭。

(b) 部分可以用类似的方法证明。它也可以由 Garver–Musiker 关于 A_n 箭图的极大绿色序列的结果推出。□

4.3. **定理 4.6 的证明**。

定义 4.9。 考虑一个函数 $\eta : \mathbf{ex} \to \mathbb{Z}$ 和 $t \in$ 值域(η)。

(a) 将突变序列 $\boldsymbol{k} = (k_1, \dots, k_l)$ 的 t-截断 定义为属于 $\eta^{-1}(t)$ 的指标所构成的子序列。记作 $\boldsymbol{k}\langle t \rangle$。(b) 对于集合 $\mathbf{ex}$上的赋值箭图 Q，将 t-截断 $Q\langle t \rangle$ 定义为顶点集为 $\eta^{-1}(t)$的完全赋值子箭图。

(c) 对于集合 $\mathbf{ex} \sqcup \mathbf{ex}'$ 上的赋值冰箭图 Q，其可交换顶点为 $\mathbf{ex}$，将 t-截断 $Q\langle t\rangle$ 定义为顶点集为$\eta^{-1}(t) \sqcup \big(\eta^{-1}(t)\big)'$的完全赋值冰子箭图。

对于基数为 n 的全序集 S，记为

$$\overleftarrow{A}(S)$$

将指标集 $[1,n]$ 按相同顺序替换为 S 后得到的箭图 $\overleftarrow{A}_n$。

定理 4.10. 考虑如 (4.1) 中的一个完整分层 T-系统。对于任意 $1 \le i \le r$，记变异子序列为

$$\boldsymbol{k}_i := (k_1, \dots, k_{i-1}).$$

$\widehat{\quad}$箭图 $\mu_{\boldsymbol{k}_i}\big(Q(B)\big)$ 的箭满足以下性质：

(a) 对于所有 $s \neq t \in \mathrm{range}(\eta)$，集合 $\eta^{-1}(s)$ 与 $\big(\eta^{-1}(t)\big)'$ 中任意两个顶点之间都没有箭头。(b) 对于任意 $t \in \mathrm{range}(\eta)$，$t$-截断箭图

$$\Big(\mu_{\boldsymbol{k}_i}\big(\widehat{Q(B)}\big)\Big)\langle t\rangle \quad \textit{is canonically isomorphic to} \quad \mu_{\boldsymbol{k}_i\langle t\rangle}\Big(\widehat{\overleftarrow{A}(\eta^{-1}(t))}\Big)$$

通过顶点索引集之间的典范双射。

证明。我们首先对 i 使用归纳法，证明命题 (a) 和命题

(b') 对任意 $t \in \mathrm{range}(\eta)$，赋值冰 quivers 中，集合 $\eta^{-1}(t)$ 和 $\big(\eta^{-1}(t)\big)'$ 中任意一对顶点之间的箭

$$\Big(\mu_{\boldsymbol{k}_i}\big(\widehat{Q(B)}\big)\Big)\langle t\rangle \quad \text{and} \quad \mu_{\boldsymbol{k}_i\langle t\rangle}\Big(\widehat{\overleftarrow{A}(\eta^{-1}(t))}\Big)$$

都相同。

情形 $i = 1$ 显然。为简便起见，记

$$t_i := \eta(k_i).$$

分层 T-系统的定义、归纳假设和引理 4.8(b) 表明，箭图 $\mu_{\boldsymbol{k}_i}\big(Q(B)\big)$ 中与 k_i 相 incident 的箭如图 2 所示：

(1) 来自顶点 $k_i[-1]$ 和/或 $k_i[1]$ 的入简单箭头；若这些指标中有一个或两个是 $\pm\infty$，则它们没有入箭头。(2) 指向 η 值与 t_i 不同的顶点的赋值出箭头。(3) 指向某些顶点 j'_1，j'_2，……，$j'_u \in \big(\eta^{-1}(t_i)\big)^{-1}$ 的简单出箭头，而这些箭头是

箭图 $\mu_{\boldsymbol{k}_i\langle t_i\rangle}\Big($ 中 k_i 与 $\big(\eta^{-1}(t_i)\big)'$ 之间的箭头 $\overleftarrow{A}(\eta^{-1}(t_i))\Big)$。

特别地，k_i 是箭图 $\mu_{\boldsymbol{k}_i}\big(Q(B)\big)$ 的一个绿色顶点。

’ 性质 (1)–(3) 表明，在对 μ_{k_i} 进行变异以得到 $\mu_{\boldsymbol{k}_i}\big(Q(B)\big)$ 时，应反转与 k_i 相邻的箭，并添加从 $k_i[\pm 1]$ 指向 $j^{(1)}$，$j^{(2)}$，$\dots j^{(m)}$ 和 j'_1，……，j'_u 的箭头（第一组箭头应为赋值箭头，第二组则不赋值），并消去成对的反向箭头。

因此，变异

$$\mu_{\boldsymbol{k}_i}\big(\widehat{Q(B)}\big) \xrightarrow{k_i} \mu_{k_i}\mu_{\boldsymbol{k}_i}\big(\widehat{Q(B)}\big) \tag{4.4}$$

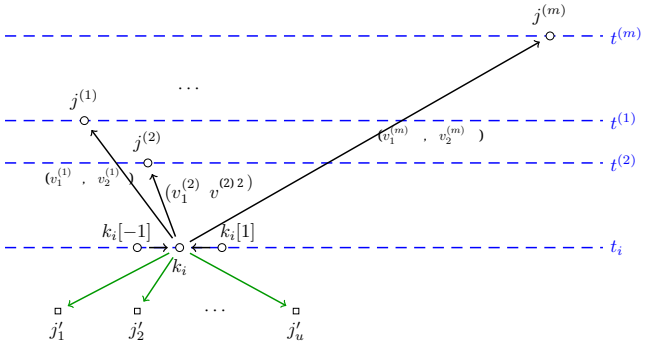


FIGURE 2. 变异处的局部图

对箭图的箭没有影响

(i) 在顶点集合$\mathbf{ex}\backslash\eta^{-1}(t_i)$ 与 $\mathbf{ex}'$之间，以及 (ii) 在$\mathbf{ex}\backslash\eta^{-1}(t_i)$内部。

由 (i) 可知，(a) 对 $i-1$ 成立意味着它对 i 也成立。由 (ii) 可知，(b') 对 $i-1$ 和 $t \neq t_i$ 成立意味着它对 i 和 $t \neq t_i$ 也成立。

剩下要证明的是关于 $t = t_i$ 的陈述 (b') 的归纳步骤。性质 (1)–(3) 表明，变异 (4.4) 对顶点集 $\eta^{-1}(t_i)$ 与 $\big(\eta^{-1}(t_i)\big)$ 之间的箭的作用，与变异 μ_{k_i} 对箭图 $\mu_{\boldsymbol{k}_i\langle t_i\rangle}\Big(\overleftarrow{A}$ ¤ $(\eta^{-1}(t_i))\Big)$ 中属于同一集合的顶点对之间的箭的作用相同。因此，(b') 对 $i-1$ 和 $t = t_i$ 成立意味着它对 i 和 $t = t_i$ 也成立。

最后，性质 (1)–(3) 表明，变异 (4.4) 对 $\eta^{-1}(t_i)$ 内箭头的影响是：所有关联于 t_i 的箭头都会反向。这一事实、性质 (b') 和 (ii)，以及引理4.8(a) 推出了定理的 (b) 部分。□

定理 *4.6* 的证明。在定理 4.10 的证明中已经指出，对于所有 $1 \leq i \leq r$， k_i 都是箭图 $\mu_{\boldsymbol{k}_i}\big(Q(B)\big)$ 的绿色顶点。

$\mu_{\boldsymbol{k}_r}\big(Q(B)\big)$ 的每个顶点都属于某个 t-截断 $\Big(\mu_{\boldsymbol{k}_r}\big('Q(B)\ \big)\Big)\langle t\rangle$。根据定理 4.10(b)，$t$-截断与 $\mu_{\boldsymbol{k}_i\langle t\rangle}\Big(\overleftarrow{A}\ \eta^{-1}\ t\quad (\ (\ ))\Big)$ 同构，而后者是引理 4.8(b) 中与极大绿色序列相关联的最后一个成员。因此，对于每个 $t \in$ 值域(η)， t-截断 $\big(\mu_{\boldsymbol{k}_r}(Q(B))\big)\langle t\rangle$ 的所有顶点都是红色的。根据定理 4.10(a)，我们得到 $\mu_{\boldsymbol{k}_r}\big(Q(B)\big)$ 的所有顶点都是红色的。（在最后这一步，我们本可以利用 c-向量的符号相容性，但这里给出的论证更为初等，而且其组成部分在证明余下内容时也会用到。）□

注 4.11. 定理 4.10 表明，每个完整分层的 T 系统都是由保持分量的突变构成的序列（其含义见 [8] ），并且在每一步中都满足 [8, 定义 3.6]中的第一个条件。

5. MAXIMAL GREEN SEQUENCES FOR QUANTUM AND POISSON CGL EXTENSIONS

本节将证明本文的主要定理，为对称量子与泊松 CGL 扩张上的量子与经典簇代数结构构造极大绿色序列。

5.1. 中的路径 Ξ_N。回忆一下， $w_\circ$表示 S_N的最长元素，

$$w_\circ = [N\,(N-1)\,\ldots\,1] \in S_N.$$

显然，它是 Ξ_N 的一个元素。给定 $0 \le k < N$ 和一个序列

$$k < j_k \le \cdots \le j_1 \le N,$$

定义

$$\tau_{(j_k,\ldots,j_1)} := (k\,(k+1)\,\ldots\,j_k)\ldots(2\,3\,\ldots\,j_2)(1\,2\,\ldots\,j_1) \in S_N,$$

其中右边使用了 S_N 中循环的标准记号。对于 S_N 中元素的单行表示，

$$\tau_{(j_k,\ldots,j_1)} = [\ldots k\ldots(k-1)\ldots 1\ldots], \tag{5.1}$$

其中省略号表示整数列表 $(k+1)$，$(k+2)$……，n（按此顺序），而整数 k，$k-1$，……，1 位于位置 j_k-k+1，……，j_2-1，j_1。(5.1) 中的元素属于 Ξ_N，且 Ξ_N 中的每个元素都具有这种形式 [29, 引理 5.5]。例如，

$$w_0 = \tau_{(N,N,\ldots,N)}, \quad \text{where } k = N-1.$$

注 5.1。在 [29] 中采用了略有不同的约定（见该文第 5.2 节）：允许 $j_k = k$，但要求 $k \ge 0$。很容易验证，该文与本文中的 τ 集合相同。在 [29], 的约定下，将恒等置换 id 表示为一个 τ 时并不唯一；Ξ_N 中的其他所有元素都可以唯一地表示为 τ。在本文采用的约定下，Ξ_N 中的每个元素都可以唯一地表示为 τ，这可由 (5.1) 立即得出。来自 $k=0$ 情形的唯一元素是单位元

$$\mathrm{id} = \tau_\varnothing.$$

定义 5.2. A 连续路径是 S_N 中形如

$$\boldsymbol{\nu} := \{\mathrm{id} = \nu_1 \mapsto \nu_2 \mapsto \ldots \mapsto \nu_{M+1} = w_0\} \tag{5.2}$$

通过在 $= [1\,2\,\ldots\,N]$ 的单行表示中依次将 1、2 等向右移动，并遵循以下规则得到的路径

(1) 只有当 $1, \ldots, k-1$ 已经被移到整数 k 的右侧时，我们才能开始将整数 k 向右移动；(2) 每一步中，我们只交换两个相邻整数 m 和 n，使得 $m < n$ 和 m 保持在 n 的左侧。

注记 5.3. 在引理 5.4 中，我们证明每条连续路径都是 Ξ_N 中的一条路径。选择“连续”一词，是为了体现 Ξ_N 中的元素具有这样的性质：它们将每个区间 $[1,k]$ 映射为一个连续的整数集合。

由定义 5.2 中的条件 (2) 可知，每条连续路径的长度为

$$M = \binom{N}{2}.$$

最简单的连续路径是路径

$$\begin{aligned}\mathrm{id} =&[\textcircled{1}\,\textcircled{2}\,3\,\dots\,N]\mapsto\dots\mapsto\\ &[\textcircled{2}\,3\,\dots\,N\,\textcircled{1}]\mapsto\dots\mapsto\\ &[3\,\dots\,N\,\textcircled{2}\,\textcircled{1}]\mapsto\dots\mapsto\\ &[(N-1)\,N\,\dots\,2\,1]\mapsto\dots\mapsto\\ &[N\,(N-1)\,\dots\,2\,1]=w_\circ\end{aligned} \tag{5.3}$$

圆圈标出了正在向右移动的整数。

引理 5.4. 所有连续路径都是 Ξ_N 中的路径。

证明。 我们对 $1\leq i\leq M+1$ 进行归纳，验证对于 (5.2) 中的每条连续路径， $\nu_i\in\Xi_N$；$i=1$ 的情形显然。若 $\nu_i\in\Xi_N$，则

$$\nu_i=\tau_{(j_k,\dots,j_1)}$$

对于某些 $0\leq k<N$ 和 $k<j_k\leq\ldots\leq j_1$。定义 5.2 中的条件 (1)–(2) 意味着以下情况之一成立：

$$\nu_{i+1}=\tau_{(j_k,\dots,(j_s+1),\dots,j_1)}$$

且 $j_{s-1}\geq j_s+1$，或者

$$\nu_{i+1}=\tau_{(k+2,j_k,\dots,j_1)}$$

以及 $j_k\geq k+2$，这就证明了归纳步骤。 □

考虑一条如 (5.2) 所示的连续路径 $\boldsymbol{\nu}$。定义 5.2 中的条件 (2) 表明，对于每个步骤 $1\leq i\leq M$，都存在整数 $1\leq m_i<n_i\leq N$ 和 $1\leq p_i\leq N$，使得

$$\begin{aligned}\nu_i&=[\dots m_i\,n_i\dots],\\ \nu_{i+1}&=[\dots n_i\,m_i\dots],\end{aligned}$$

其中 m_i 和 n_i 在 ν_i 中分别位于位置 p_i 和 p_i+1，而 ν_i 和 ν_{i+1} 在其他位置均无差异。因此，

$$\nu_{i+1}=(m_i\,n_i)\nu_i=\nu_i s_{p_i}. \tag{5.4}$$

对 (5.4) 迭代应用可得

$$\nu_i=s_{p_1}s_{p_2}\dots s_{p_{i-1}}$$

并且，特别地，

$$w_\circ=\nu_{M+1}=s_{p_1}s_{p_2}\dots s_{p_M}. \tag{5.5}$$

由于 $w_\circ$ 的长度为 $M=\binom{N}{2}$，$\boldsymbol{w}:=s_{p_1}s_{p_2}\dots s_{p_M}$ 是 $w_\circ$ 的约化表达式，而 ν_i 是其中的初始子词：

$$\nu_i=\boldsymbol{w}_{\leq i-1},\quad\forall 1\leq i\leq M+1.$$

反过来，如果 $\boldsymbol{w}:=s_{p_1}s_{p_2}\dots s_{p_M}$ 是 $w_\circ$ 的一个约化表达式，并且它的所有初始子词都属于 Ξ_N，也就是说

$$\boldsymbol{w}_{\leq i}\in\Xi_N,\quad\forall 1\leq i\leq M-1,$$

那么很容易证明

$$\mathrm{id}=\boldsymbol{w}_{\leq 0}\mapsto\boldsymbol{w}_{\leq 1}\mapsto\boldsymbol{w}_{\leq 2}\mapsto\dots\mapsto\boldsymbol{w}_{\leq M}=w_\circ \tag{5.6}$$

是一个连续路径。事实上，由于 $\boldsymbol{w}$ 是一个约化表达式，

$$\boldsymbol{w}_{\le i-1}(p_i) < \boldsymbol{w}_{\le i-1}(p_i+1).$$

若 $n_i < m_i$ 表示这两个整数，则 $\boldsymbol{w}_{\le i} = (n_i\, m_i)\boldsymbol{w}_{\le i-1}$ 和 $\boldsymbol{w}_{\le i}$ 是通过在单行表示中将 n_i 移到 m_i 右侧，从 $\boldsymbol{w}_{\le i-1}$ 得到的，这表明定义 5.2 中的条件 (2) 成立。定义 5.2 中的条件 (1) 可利用关于初始子词的假设递归验证。

由此可得连续路径的以下刻画：

命题 5.5. 连续路径（在 Ξ_N 中）的集合与最长元素 $w_\circ \in S_N$ 的约化表达式 $\boldsymbol{w}$ 之间存在双射，使得每个初始子词 $\boldsymbol{w}_{\le i}$ 对于 $1 \le i \le M-1$ 都属于 Ξ_N。该双射将 $\boldsymbol{w}$ 映射为路径 (5.6)。

5.2. **由连续路径得到极大绿色序列**。设 R 是一个量子或泊松 CGL 扩张，并分别满足定理 3.4 和 3.8 中的温和假设。根据这两个定理，我们有一组量子（经典）种子 Σ_τ，其以子集 $\Xi_N \subset S_N$ 中的元素 τ 为索引。记每个种子 Σ_τ 的交换矩阵 B_τ 的主部为 B_τ，并令 $B := B_{\mathrm{id}}$ 表示初始种子。

考虑 如 (5.2) 中的连续路径 $\boldsymbol{\nu}$。根据上一小节的结果，

$$\nu_i = \nu_{i-1}s_{p_i}, \quad \forall 1 \le i \le M = \binom{N}{2}$$

对于序列 p_1、……、p_M，其中 $[1,\mathbf{N}]$，使得 $\boldsymbol{w} := s_{p_1}\dots s_{p_M}$ 是 $w_\circ$ 的约化表达式（因此，$\nu_i = \boldsymbol{w}_{\le i-1}$）。回顾记号 (3.6)。定理 3.4 和 3.8 的 (b) 部分推出如下结论：

(i) 若 $\eta(\nu_{i-1}(p_i)) \ne \eta(\nu_{i-1}(p_i+1))$，则 $\Sigma_{\nu_i} = \Sigma_{\nu_{i-1}}$。特别地，

$$\eta(\nu_{i-1}(p_i)) \ne \eta(\nu_{i-1}(p_i+1)) \quad \Rightarrow \quad B_{\nu_i} = B_{\nu_{i-1}}. \tag{5.7}$$

(ii) 若 $\eta(\nu_{i-1}(p_i)) = \eta(\nu_{i-1}(p_i+1))$，则 $\Sigma_{\nu_i} = \mu_{p_{i,\bullet}}(\Sigma_{\nu_{i-1}})$，其中

$$p_{i,\bullet} = (\nu_i)_\bullet \nu_i(p_i).$$

特别地，

$$\eta(\nu_{i-1}(p_i)) = \eta(\nu_{i-1}(p_i+1)) \quad \Rightarrow \quad B_{\nu_i} = \mu_{p_{i,\bullet}}(B_{\nu_{i-1}}) \tag{5.8}$$

记

$$\mathrm{seq}(\boldsymbol{\nu})_i := \begin{cases} (\nu_i)_\bullet \nu_i(p_i), & \text{if } \eta(\nu_{i-1}(p_i)) = \eta(\nu_{i-1}(p_i+1)) \\ \varnothing, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

最后，对于每条连续路径 $\boldsymbol{\nu}$，定义突变序列

$$\mathrm{seq}(\boldsymbol{\nu}) = \mathrm{seq}(\boldsymbol{\nu})_1\, \mathrm{seq}(\boldsymbol{\nu})_2\, \dots\, \mathrm{seq}(\boldsymbol{\nu})_M.$$

定理 5.6. 设 R 是满足定理 *3.4* 和 *3.8* 中温和假设的量子或泊松 *CGL* 扩张。那么，对于每条连续路径 $\boldsymbol{\nu}$，突变序列$\mathrm{seq}(\boldsymbol{\nu})$ 都是定理 *3.4* 和 *3.8* 中该量子或经典簇代数结构在 R 上的初始种子 Σ 的交换矩阵主部 B 的极大绿色序列。所有这类极大绿色序列的长度均为

$$\binom{\eta+1}{2}$$

在记号 (4.3) 中。

例如，最简单的连续路径 (5.3) 产生一个极大绿色序列。

定理 5.6 由定理 4.6、注 4.5(b) 以及以下结果推出 :

命题 5.7. 对于满足定理 *3.4* 和 *3.8* 假设的量子或泊松 *CGL* 扩张的任意连续路径 $\boldsymbol{\nu}$，突变序列 $\mathrm{seq}(\boldsymbol{\nu})$ 是定理 *3.4* 和 *3.8* 中函数 η 的一个完全分层 T-系统。

证明. 根据定理 3.4(c) 和 3.8(c)，突变序列 seq($\boldsymbol{\nu}$) 是一个分层 T-系统。这些定理中交换矩阵的符号选择在此处起着作用，相关讨论见注 3.5。否则，我们会有从变异顶点 k 指向 $k[-1]$ 和 $k[1]$ 的出箭，而不是入箭。

剩下要证明的是 seq($\boldsymbol{\nu}$) 的完全性。固定一个整数 $1 \leq k \leq N$。考虑路径 $\boldsymbol{\nu}$ 中使 k 在置换的单行表示中向右移动一位的步骤。根据定义 5.2 的条件 (2)，在这些步骤发生之前，整数 1，2、.....、$k-1$ 已经被移到 k的右侧。根据该定义的条件 (1)，我们正在考虑的步骤会按相同顺序将 k移到 $k+1$、$k+2$、.....、N的右侧（但其间可能还有其他步骤）。根据等式 (5.7)，将 k 移过 $j > k$ 和 $\eta(k) \neq \eta(j)$ 的步骤不会导致任何变异。记

$$\eta^{-1}(\eta(k)) = \{j_1 < j_2 < \ldots < j_l\} \subseteq \{k, k[1], \ldots, k[O^+(k)]\},$$

回顾 (3.4)。等式 (5.8) 表明，当 k 连续移动到 $k[1]$、$k[2]$、.....、$k[O_+(k)]$, 的右侧时，所对应的步骤给出了突变序列

$$j_1\, j_2\, \cdots\, j_{O_+(k)}.$$

（注意，若 $O_+(k) = 0$，则此序列为空。）换言之，突变序列 seq($\boldsymbol{\nu}$) 是所有对应于整数 $1 \leq k \leq N$ 的此类序列的交错。突变序列满足定义 4.3 中交错规则这一性质，是由定义 4.3 的条件 (1) 和 (2) 推出的。□

References

[1] A. Berenstein、S. Fomin 和 A. Zelevinsky, *Cluster algebras. III. Upper bounds and double Bruhat cells*, Duke Math. J.（ ），第 126 2005 1, 1 52 – 期。[2] A. Berenstein 和 A. Zelevinsky, *Quantum cluster algebras*, Adv. Math. **195**（2005），405–455。[3] K. A. Brown 和 I. Gordon, *Poisson orders symplectic reflection algebras and representation theory*, J. Reine Angew. Math.（ ），**559** 2003 193 216 –。[4] T. Br¨ustle、G. Dupont 和 M. P´erotin, *On maximal green sequences*, Int. Math. Res. Not. IMRN 2014，第 16 期，4547–4586。[5] T. Br¨ustle、S. Hermes、K. Igusa 和 G. Todorov, *Semi-invariant pictures and two conjectures on maximal green sequences*, J. Algebra（ ），**473** 2017 80 109 –。[6] F. Bucher, *Maximal green sequences for cluster algebras associated to orientable surfaces with empty boundary*, Arnold Math. J.（ ），**2** 2016 4, 487 510 – 期。[7] E. Bucher 和 J. Machacek, *Reddening sequences for Banff quivers and the class $\mathcal{P}$*, SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. **16**（2020），论文编号 049，共 11 页。[8] E. Bucher、J. Machacek、E. Runburg、A. Yeck 和 E. Zewde, *Building maximal green sequences via component preserving mutations*, Ars Math. Contemp.（ ），**19** 2020 2, 249 275 – 期。[9] E. Bucher 和 M. R. Mills, *Maximal green sequences for cluster algebras associated with the n-torus with arbitrary punctures*, J. Algebraic Combin.（ ），**47** 2018 3, 345 356 – 第 — 期。[10] P. Cao 和 F. Li, *Uniform column sign-coherence and the existence of maximal green sequences*, J. Algebraic Combin. **50**（2019），第 4 期，403–417。[11] G. Cauchon, *Effacement des dérivations et spectres premiers d'algébres quantiques*, J. Algebra **260**（2003），第2期，476–518。

[12] A. W. Chatters, *Non-commutative unique factorisation domains*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 95（1984），49–54。[13] H. Derksen、J. Weyman 和 A. Zelevinsky, *Quivers with potentials and their representations II: Applications to cluster algebras* **23** 2010 749 790 , J. Amer. Math. Soc.（），–。[14] B. Elek 和 J.-H. Lu, *Bott–Samelson varieties and Poisson Ore extensions*, Int. Math. Res. Not. IMRN 2021，第 14 期，10745–10797。[15] V. V. Fock 和 A. B. Goncharov, *Cluster ensembles, quantization and the dilogarithm*, Ann. Sci. ´Ec. Norm. Sup´r.（4）42（2009），第 6 期，865–930。[16] S. Fomin 和 A. Zelevinsky, *Cluster algebras I: Foundations*, J. Amer. Math. Soc. 15（2002），497–529。[17] S. Fomin 和 A. Zelevinsky, 《簇代数 IV：系数》, Compos. Math. 143 (1)（2007）112–164。[18] S. Fomin, *Total positivity and cluster algebras*, 载于：Proc. Int. Cong. Math.，第 II 卷，第 125–145 页，Hindustan Book Agency，新德里，2010。[19] L. Francone, *Cluster structures on Cox rings*, 预印本 arXiv:2412.04173。[20] A. Garver 和 G. Musiker, *On maximal green sequences for type A quivers*, J. Algebraic Combin. 45（2017），第 2 期，553–599。[21] C. Geiß、B. Leclerc 和 J. Schr¨oer, *Partial flag varieties and preprojective algebras*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 58（2008），第 3 期，825–876。[22] C. Geiß、B. Leclerc 和 J. Schr¨oer, *Kac–Moody groups and cluster algebras*, Adv. Math. 228（2011），329–433。[23] D. Gaiotto、G. W. Moore 和 A. Neitzke, *Wall-crossing Hitchin systems and the WKB approximation* **234** 2013 239 403 , Adv. Math.（），–。[24] A. Goncharov 和 L. Shen, *Donaldson–Thomas transformations of moduli spaces of G-local systems* **327** 2018 225 348 , Adv. Math.（），–。[25] M. Gross、P. Hacking、S. Keel 和 M. Kontsevich, *Canonical bases for cluster algebras*, J. Amer. Math. Soc. 31（2018），第 2 期，497–608。[26] K. R. Goodearl 和 E. S. Letzter, *The Dixmier–Moeglin equivalence in quantum coordinate rings and quantized Weyl algebras* **352** 2000 1381 1403 , Trans. Amer. Math. Soc.（），–。[27] K. R. Goodearl 和 M. T. Yakimov, *Quantum cluster algebras and quantum nilpotent algebras* Proc. Natl. Acad. Sci. USA 111（2014），第 27 期，9696–9703。[28] K. R. Goodearl 和 M. T. Yakimov, *From quantum Ore extensions to quantum tori via non-commutative UFDs* **300** 2016 672 716 , Adv. Math.（），–。[29] K. R. Goodearl 和 M. T. Yakimov, *Quantum cluster algebra structures on quantum nilpotent algebras* **247** 2017 1169, + 119 , Memoirs Amer. Math. Soc.（），第 vii 页。[30] K. R. Goodearl 和 M. T. Yakimov, *The Berenstein–Zelevinsky quantum cluster algebra conjecture* **22** 2020 8, 2453 2509 , 欧洲数学会杂志（JEMS）（），第 – 期。[31] K. R. Goodearl 和 M. T. Yakimov, *Integral quantum cluster structures*, Duke Math. J. 170（2021），1137–1200。[32] K. R. Goodearl 和 M. T. Yakimov, *Cluster algebra structures on Poisson nilpotent algebras*, Memoirs Amer. Math. Soc. 290（2023），第 1445 号，v + 100页。[33] D. Hernandez 和 B. Leclerc, *Cluster algebras and quantum affine algebras*, Duke Math. J. 154（2010），第 2 期，265–341。[34] B. Keller, *On cluster theory and quantum dilogarithm identities*, 载于：代数表示及相关主题。编者 A. Skowro´nski 和 K. Yamagata，第 85–116 页，Eur. Math. Soc. 2011。[35] B. Keller, *Cluster algebras and derived categories*, 载于：代数几何中的导出范畴，编者 Kawamata，第 123–183 页，Eur. Math. Soc. 2012。[36] B. Keller, *A survey on maximal green sequences* 附录由 L. Demonet 撰写，载于：Repre- sentation theory and beyond，编者 J. ˇStov´ıˇcek 和 Jan Trlifaj，第 267–286 页，Contemp. Math., 758，Amer. Math. Soc. 2020。[37] S. Launois、T. H. Lenagan 和 L. Rigal, *Quantum unique factorisation domains*, J. London Math. Soc.（2）74（2006），321–340。[38] T. H. Lenagan 和 M. T. Yakimov, *Prime factors of quantum Schubert cell algebras and clusters for quantum Richardson varieties* **750** 2019 123 156 , J. Reine Angew. Math.（），–。[39] J.-H. Lu 和 M. Matviichuk, *Deformations of 1-log-symplectic log-canonical Poisson structures and symmetric Poisson CGL extensions* 2503 05644 , 预印本 arXiv: . .

[40] J.-H. Lu 和 V. Mouquin, *Mixed product Poisson structures associated to Poisson Lie groups and Lie bialgebras* 2017, 19, 5919 5976 , Int. Math. Res. Not. IMRN no. –。[41] M. R. Mills, *Maximal green sequences for quivers of finite mutation type*, Adv. Math. 319 (2017), 182–210。[42] Y. Mi, *Quantization of Poisson CGL extensions*, 博士论文, 香港大学, 2017年11月。[43] G. Muller, *The existence of a maximal green sequence is not invariant under quiver mutation*, 电子组合学杂志 **23** (2016), 第 2 期, 论文 2.47, 共 23 页。[44] K. Nagao, *Donaldson-Thomas theory and cluster algebras* **162** 2013 7, , Duke Math. J. ( ), no. –。[45] H. Oya, *A note on a cluster structure of the coordinate ring of a simple algebraic group*, 美国数学会会刊 2026, doi: 10.1090/proc/17551。[46] H. Oya、F. Qin 和 M. Yakimov, *Integral cluster structures on quantized coordinate rings*, 预印本 arXiv:2512.05228。[47] F. Qin, *Bases for upper cluster algebras and tropical points*, 欧洲数学会杂志 (JEMS) **26** (2024), 第 4 期, 1255–1312。[48] F. Qin 和 M. Yakimov, *Partially compactified quantum cluster structures on simple algebraic groups and the full Berenstein–Zelevinsky conjecture* 2504 05134 , 预印本 arXiv: . . [49] P.-G. Plamondon, *Cluster algebras via cluster categories with infinite-dimensional morphism spaces* **147** 2011 1921 1954 , 组合数学 ( ), –。[50] L. Shen 和 D. Weng, *Cluster structures on double Bott–Samelson cells*, 数学论坛 Sigma **9** (2021), 论文编号 e66, 共 89 页。[51] D. Weng, *Donaldson–Thomas transformation of double Bruhat cells in semisimple Lie groups*, Ann. Sci. ´Ec. Norm. Sup´er. (4) **53** (2020), 第 2 期, 353–436。[52] D. Weng, *Donaldson-Thomas transformation of Grassmannian*, Adv. Math. **383** (2021), 论文编号 107721, 共 58 页。

Department of Mathematics, Northeastern University, Boston, MA 02115 and International Center for Mathematical Sciences, Institute of Mathematics and Informatics, Bulgarian Academy of Sciences Sofia 1113 Bulgaria , Acad. G. Bonchev Str., Bl. 8, ,*Email address*: m.yakimov@northeastern.edu