arXiv:2603.14378v1 [math.CO] 15 Mar 2026

群与代数超行列式

ALIMZHAN AMANOV

摘要。1896年，Dedekind向Frobenius提出了非阿贝尔情形下群行列式的因式分解问题。Frobenius给出的解答开启了有限群表示论的诞生。早在几十年前，Cayley就引入了组合超行列式的概念，它作用于d阶张量，是普通行列式最自然的推广。在本文中，我们解决了群超行列式的因式分解问题。我们将群超行列式的计算化归为矩阵乘法张量的超行列式计算，并推导出一个优美的闭式公式。此外，我们将这一概念推广到结合代数张量，并证明该多项式非零当且仅当该代数是半单的。

1. 引言

设 $G = \{g_1, \ldots\ldots, g_n\}$ 是一个阶为 $|G| = n$的有限群。群行列式是关于交换变量 $\{x_g \mid g \in G\}$ 的 n次多项式，定义为 $n \times n$ 矩阵$C^G_{ij}(x) = x_{g_i g_j}$的行列式。该矩阵表示 G的群代数的乘法表，其中群元素被交换变量替代。群行列式由Dedekind引入。他证明了在阿贝尔情形下，群行列式可以分解为线性形式；但对于非阿贝尔群，这一结论并不成立。1896年，他将这一问题提交给Frobenius。Frobenius解决了该问题，并由此发现了特征标理论（综述见 [12]）。

定理 1.1 (Frobenius [14])。对于任意有限群 G，群行列式可分解如下：

$$\det_2(C^G(x)) = \pm \prod_{\rho \in \widehat{G}} \det_2 \left(\sum_g \rho(g) x_g \right)^{n_\rho},$$

其中 $\widehat{G}$ 是一个完备的互不等价不可约酉表示集合，并且每个多项式因子都是总次数为 $n_\rho :=$ 维数 ρ 的不可约多项式，且出现的重数为 n_ρ。

多项式的总次数为 $n = \sum_\rho n_\rho^2$。此外，在该不可约因子中，$(x_{\mathrm{id}})^{n_\rho - 1} x_g$ 的系数等于 $\mathrm{tr}(\rho(g))$，即不可约特征标的值。其他系数称为 k-特征标。注意，群行列式决定了群 [15]。

张量 X 是向量空间 $(\mathbb{C}^n)^{\otimes d}$的一个元素。固定每个模式中的基后，$X$可与超矩阵 $(X_{i_1,\ldots,i_d})_{i_k \in [n]}$对应，其元素由 $(i_1, \ldots, i_d)$索引。本文始终假设 d 为偶数。

日期：2026年3月17日。

组合超行列式 由 Cayley 于 [9, 10] 1845年引入（也称为凯莱第一超行列式），是将矩阵行列式自然推广到d维超矩阵的一种方式。如果 $X \in (\mathbb{C}^n)^{\otimes d}$ 是一个 d路张量（超矩阵），那么

$$\det_d(X) := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma_1,\ldots,\sigma_d \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma_1)\cdots\operatorname{sgn}(\sigma_d) \prod_{i=1}^{n} X_{\sigma_1(i),\ldots,\sigma_d(i)}. \tag{1}$$

当 d 为奇数时，上述求和显然为零；而当 d 为偶数时，它是多项式环中张量上的最低次数唯一 $\mathrm{SL}(n\text{-}\mathbb{C})^{\times d}$不变量 n，参见第 2 节。

我们研究如何在群（从而也包括代数）超矩阵的一种自然推广上计算这一超行列式。定义群张量或超矩阵 $C^G(x)$

$$(C^G(x))_{g_1,\ldots,g_d} := x_{g_1\cdot\ldots\cdot g_d},$$

将其视为 $(\mathbb{C}G)^{\otimes d}$ 中系数为形式变量 $\{x_g \mid g \in G\}$ 的元素。与 $d = 2$ 的情形类似，该张量由群代数 $\mathbb{C}G$ 中的 d元乘法表构造而成，方法是将 h 替换为 x_h。此张量包含群代数的全部信息：切片 $(C^G(1、0、\ldots))_{a、b、c、1、1}$.....描述了该代数的乘法张量（$abc = 1$ 的解蕴含 $ab = c$ 的解）。事实证明，它具有如下分解。

定理 1.2（主定理）。 对于任意有限群 G 和偶数 d，我们有

$$\det_d(C^G(x)) = H_G \cdot \prod_{\rho\in\widehat{G}} \det{}_2(\rho(x))^{n_\rho}$$

其中 $\rho(x) = \sum_g x_g\rho(g)$、 $n_\rho =$ 维数 ρ 和

$$H_G = (-1)^{\frac{d}{2}(|G|-t)/2} \left(|G|^{|G|} \prod_{\rho\in\widehat{G}} \frac{h_{n_\rho\times n_\rho}}{n_\rho^{n_\rho}} \right)^{\frac{d}{2}-1},$$

其中 $t = \#\{g \in G : \ g = g^{-1}\}$ 和 $h_{k\times k} = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{(k+i)!}{i!}$。特别地，对于 $d = 2$， $H_G = \pm 1$。

该结果运用了标准表示论、超行列式的性质以及代数组合学中的方法。组合超行列式具有许多优良性质：公式、与不同张量秩概念的关系 [1], , 与塞尔伯格积分 [22], 、对称函数 [23], 、哈密顿回路和拟阵交 [5]相关的枚举结果。另一方面，判定超行列式是否为零的问题是 NP困难[5]，而且一般来说，人们对其零点集知之甚少。因此，上述结果是一个数值上的表示论奇迹。我们用一个小例子来说明这一点。

例1.3（循环超行列式）。 设 $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_n$。那么对于 $d = 2$，群矩阵 $(x_{(i+j) \bmod n})$ 称为循环矩阵。它的行列式可分解为 n 个关于 $\mathbb{C}$的线性形式，每个线性形式都对应于 n 个单位根 $\omega^i = e^{2\pi i/n}$ 之一。下面的公式是

这一现象针对任意偶数 d的优美推广：

$$\det_d(x_{(i_1+\ldots+i_d)\bmod n}) = \pm\, n^{n(\frac{d}{2}-1)} \prod_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} x_j \omega^{ij} \right).$$

由于每个不可约表示都是一维的，因此每个 $n_\rho = 1$。这一结果本身就是新的。若能找到一种算法方法来推导这一结果，将会很有意思。

主定理分两步证明。第一步是提取多项式部分，第二步是计算常数 H_G，它有可能为零。接下来的小节将证明其非零，并通过显式计算矩阵乘法张量的超行列式，推导出 H_G 的一个漂亮的闭式公式。

1.1. 矩阵代数。设移位的（d）迭代矩阵乘法张量 $\mathsf{M}_X^{(d)} \in (\mathbb{C}^{n^2})^{\otimes d}$，其中 $X = (x_{ij}) \in \mathsf{End}(\mathbb{C}^n) \cong \mathbb{C}^{n^2}$ 是变量矩阵，则该张量为

$$(\mathsf{M}_X^{(d)})_{(i_1,j_1),\ldots,(i_d,j_d)} = \sum \delta_{j_1=i_2}\, \delta_{j_2=i_3} \cdots \delta_{j_{d-1}=i_d} X_{i_1 j_d} E_{(i_1,j_1)} \otimes \cdots \otimes E_{(i_d,j_d)},$$

其中求和遍历所有 d 元组的数对 $(i_k,\ j_k) \in [n]^2$，且 $\delta_{x=y}$ 在 $x = y$ 时取 $\mathsf{1}$，否则取 $\mathsf{0}$。这里，$E_{(i,\ j)}$ 是标准矩阵单位。或者，该张量也有如下漂亮的对偶形式

$$(\mathsf{M}_X^{(d)})^*(A_1, \ldots, A_d) = \mathrm{Tr}(X^t A_1 \cdots A_d).$$

另外，设 $\mathsf{M}_n^{(d)} := \mathsf{M}^{(d)}{}_{\mathrm{ID}_n}$，并注意到 $\mathsf{M}_n^{(d)}$ 是 $(d-1)$ 矩阵 $\mu^{(d-1)}{}_{\mathrm{Mat}_{n\times n}}$ 的乘法张量。

从（几何）复杂性理论的角度来看，矩阵乘法张量已得到广泛研究；该理论旨在寻找更快的矩阵乘法算法 [6, 20]。特别是，借助 Cohn–Umans 计划，通过研究群代数张量 $\mu_G^{(2)}$ [11]，得到了乘法次数少于 $O(n^3)$（但并非已知最优）的算法。

为证明定理 1.2，事实上我们证明 $C^G(x) \cong \bigoplus \mathsf{M}_{X_\rho}^{(d)}$，其中 $X_\rho = \sum \rho(g) x_g$；参见定理 3.1。常数 H_G 实际上是某些“正”对象与“负”对象之差，而差值为何不为零往往令人费解。通过显式计算张量 $\mathsf{M}_n^{(d)}$处的超行列式，便可解决这一问题。

定理 1.4. 对于偶数 d以及任意 n：

$$\det_d(\mathsf{M}_n^{(d)}) = \pm \left(\prod_{i=0}^{n-1} \frac{(n+i)!}{i!} \right)^{\frac{d}{2}-1}.$$

该结果是利用杨对称化子 c_λ的幂得到的；这些幂是群代数 $\mathbb{C}S_n$中的幂等元。这有些出人意料，因为最初的问题似乎并未涉及对称群。此外，对于超行列式而言，该定理首次证明了 $\mathsf{M}_n^{(d)}$(或 $\mathsf{M}_X^{(d)}$) 的非零性，不过仅限于偶数 d。其值恰好为 $h_{n\times n}$ ——正方形中的钩长乘积。

事实上，我们将证明一个更一般的结果。

1.2. **半单代数**。 设 A 是一个有限维结合半单代数，具有固定的基 $\{a_1,\dots,a_n\}$ 和乘法规则 $a_{i_1}\cdot\ldots\cdot a_{i_d}=\sum \mu^k_{i_1\dots i_d}a_k$，其中[1] $\mu^k_{i_1,\dots,i_d}\in(\mathbb{C}^n)^{\otimes(d+1)}$。定义代数张量（超矩阵）为以下 $n^{\times d}$ 超矩阵

$$C^A_{i_1,\dots,i_d}(x):=\sum \mu^k_{i_1,\dots,i_d}x_k.$$

对于一般线性形式 $C^A=(\ell_x(a_{i_1}\cdots a_{i_d}))_{i_k\in[n]}\colon\ \ell_x(a)=\sum x_i a_i^*\ A\to\mathbb{C}$ 或者 $\widehat{\ }$.

令 A 为不可约表示（或单模）同构类代表元的集合 $\rho\colon\ A\to\mathsf{End}(V_\rho)$，见 [13]。设 $n_\rho=\dim V_\rho$，并令 $E^\rho_{ij}\in\mathsf{End}(V_\rho)\cong\mathbb{C}^{n_\rho^2}$ 为矩阵单位基。固定一个韦德伯恩代数同构 $\Phi:=\bigoplus_{\rho\in\widehat{A}}\rho\colon\ A\to\bigoplus_{\rho\in\widehat{A}}\mathsf{End}(V_\rho)$。

The定理 1.5. 设 A 为具有给定基 $\{a_1,\ \dots\dots,\ a_n\}$的半单代数。则 ,

$$\det{}_d(C^A(x))=H_A\cdot\prod_{\rho\in\widehat{A}}\big(\det(y^\rho_{ij})\big)^{n_\rho},$$

其中 $y^\rho_{ij}:=\ell_x(Ux)$，且 $H_A=$行列式$(\Phi)^d(n^n\prod_{\rho\in\widehat{A}}h_{n_\rho\times n_\rho}/n_\rho^{n_\rho})^{d/2-1}$。特别地，每个多项式因子均不依赖于$\mathrm{End}(V_\rho)$中矩阵单位的选择。

这一结果细化了先前的定理（相差一个常数）：如果 $A=\mathbb{C}S_n$ 和 $\{a_k\}=S_n$，那么 $C^A(x)=C^G(x)$，而坐标 y^ρ_{ij} 表示缩放后的傅里叶坐标。如果 $A=\mathsf{Mat}(n,\ \mathbb{C})$且 $\{a_k\}=\{E_{ij}\}$，那么 $C^A(x)=\mathbf{M}^{(d)}_X$。这一表述的缺点是，我们没有 A的规范基，因此必须引入一个具体的 Φ。此外，常数 H_A 只能确定到一个因子：它取决于选定基（通过常数 β），但仍然 $H_A\neq 0$。注意，如果 Φ 是一个自同构（即根据斯科伦 – 诺特定理，a- 基与矩阵单位共轭等价），那么 $\det(\Phi)=\pm1$。这是已知的唯一一个在半单张量上非零的具体不变量，但仅当 d为偶数时成立。

1.3. **非半单代数**。 代数超行列式是相对于群 $\mathrm{GL}(A)$的不变量，因此其是否为零与我们为 A所选的基无关；参见引理 5.1。弗罗贝尼乌斯判据指出，$\det_2(C^A(x))\neq 0$（作为多项式）非零，当且仅当该代数是 Frobenius 代数，即存在某个 x 使得相应的双线性型 $ab\mapsto\ell_x(ab)$ 非退化；等价地，存在结合标量积。Brauer、Nakayama 和 Nesbitt 的著作中将其称为转置行列式，属于 A；关于这一概念的其他推广，另见 [24]（及其中的参考文献）。

我们证明，若代数不是半单的，也就是说其雅各布森根非零，则代数超行列式为零。这表明对于 $d>2$，半不变量的限制更严格。

定理 1.6. 设 A 是一个有限维结合代数。对于 $d>2$，行列式$_d(C^A(x))\neq 0$当且仅当代数 A 是半单的。

该结果通过几何方法获得；特别是，我们证明了 $C^A(x)$ 的 $\mathsf{SL}^{\times d}$ 轨道闭包包含 0，这是一个更强的结论。该定理完成了对

[1]典范地 $\mu\in(A^*)^{\otimes d}\otimes A$，等价地说，只要基和 A^* 固定，$\mu\in(\mathbb{C}^n)^d\otimes(\mathbb{C}^n)^*$。

结合代数张量上的组合超行列式为零 $C^A(x)$的刻画。对于迭代乘法张量，也有类似结果 μ_A。组合超行列式为零是一个重要的开放问题，并具有有趣的推论；参见 [18, 19, 25, 26]。

众所周知，非半单乘法张量是不稳定的 [7], ，即其轨道闭包包含零张量（等价地说，它们在每个超行列式上都消失）。反过来，半单张量是半稳定的（而且是多稳定的），即它们在某个超行列式上不消失，这可由几何不变式理论的方法得出。从这个角度看，张量 $C^A(x)$表现出类似的行为，不过其一般性略强。

然而，具体的非消失证书此前尚不为人所知。例如，另一种著名的不变量——几何超行列式 （或 GKZ 超行列式）由 Gelfand、Kapranov 和 Zelevinsky 发现， [17], 当张量退化时便会消失；而半单代数乘法张量（以及张量 $C^A(x)$）通常都属于这种情况（少数较小的情形除外）。

本文的结构如下。在第2节中，我们回顾组合超行列式的标准事实和性质。在第3节中，我们证明主定理中群张量的分块对角化部分。在第4节中，我们计算矩阵代数超行列式（定理1.4），并完成主定理的证明。在第5节中，我们考察半单和非半单情形下的代数张量。

2. 预备知识

我们记作 $[n]=\{1、2、\ldots\ldots、n\}$。

2.1. 张量与超矩阵。 空间 $\mathbb{C}^n\otimes\cdots\otimes\mathbb{C}^n=(\mathbb{C}^n)^{\otimes d}$ 中的元素称为张量。群 $G=\mathrm{SL}(n、\mathbb{C})\times\cdots\times\mathrm{SL}(n、\mathbb{C})=\mathrm{SL}(n、\mathbb{C})^{\times d}$ 自然作用于张量空间 $(\mathbb{C}^n)^{\otimes d}$，其作用为 $(g_1、\ldots\ldots、g_d)\cdot v_1\otimes\cdots\otimes v_d=g_1v_1\otimes\ldots\otimes g_dv_d$，其中 $g_i\in\mathrm{SL}(n_i)$ 作用于简单张量，并将该作用多线性延拓。将 $(\mathbb{C}^n)^{\otimes d}$ 中的元素在每个模态的固定基下表示，可对应于由 $(i_1、\ldots\ldots、i_d)\in[n]^d$ 索引的超矩阵$(X_{i_1、\ldots\ldots、i_d})$；我们通常将 $(\mathbb{C}^n)^{\otimes d}$ 中的张量与相应的超矩阵等同起来。

2.2. **超行列式。** A. Cayley 将所有作用于张量的 $\mathrm{SL}(n,\ \mathbb{C})^{\times d}$-不变（齐次）多项式都视为超行列式。在（1）中定义的组合超行列式具有优美的组合公式，还继承了普通行列式的若干性质，这些性质对我们很重要，下面将逐一列出。

命题 2.1 (SL-不变性)。 对于偶数 d 和任意的 n，我们有

$$\det_d((g_1,\ldots,g_d)\cdot X)=\det(g_1)\cdots\det(g_d)\det_d(X)$$

对于任意 $X\in(\mathbb{C}^n)^{\otimes d}$ 和 $g=(g_1,\ \ldots\ldots,\ g_d)\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})^{\times d}$。

设 $Y\in(\mathbb{C}^a)^{\otimes d}$ 和 $Z\in(\mathbb{C}^b)^{\otimes d}$ 满足 $a+b=n$。张量直和 $Y\oplus Z\in(\mathbb{C}^n)^{\otimes d}$是将张量按块对角方式放置后得到的张量，即 Y 占据完整立方体 $[n]^d$的子立方体 $[1,\ a]^d$而 Z 占据子立方体 $[a+1,\ a+b]^d$。

命题 2.2。 对于任意 $Y \in (\mathbb{C}^{n_1})^{\otimes d}$ 和 $Z \in (\mathbb{C}^{n_2})^{\otimes d}$，有

$$\det_d(Y \oplus Z) = \det_d(Y) \cdot \det_d(Z).$$

证明。 设 $X = Y \oplus Z$。我们将定义 $\det_d(X)$ 中涉及的置换元组 $(\sigma_1, \dots, \sigma_d) \in S_n^d$ 视为映射 $\sigma : [n] \to [n]^d$，即超立方体中的车放置，其中每个车都覆盖整个切片。通过令 $\sigma_1 =$ 为恒等置换，展开去掉因子 $(n!)^{-1}$ 后的公式

$$\det_d(X) = \sum_{\sigma:[n+m]\to[n+m]^d, \sigma_1=\mathrm{id}} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n+m} X_{\sigma(i)},$$

其中 $\operatorname{sgn}(\sigma) = \prod_\ell \operatorname{sgn}(\sigma_\ell)$。注意，只要 $\sigma \notin [1,n]^d \cup [n+1, n+m]^d$，项 $X_{\sigma(i)} = 0$ 就为零。因此，任意 σ 都可以双射地分解为一对 $\sigma_y := \sigma([1,n])$ 和 $\sigma_z := \sigma([n+1, n+m]) - n$，其中 $\sigma_y : [n] \to [n]^d$ 且 $\sigma_z : [m] \to [m]^d$，并且 $\operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\sigma_y)\operatorname{sgn}(\sigma_z)$。因此，

$$\det_d(Y \oplus Z) = \sum_{\sigma_y:[n]\to[n]^d} \sum_{\sigma_z:[m]\to[m]^d} \operatorname{sgn}(\sigma_y)\operatorname{sgn}(\sigma_z) \prod_{i=1}^{n} Y_{\sigma_y(i)} \prod_{i=1}^{m} Z_{\sigma_z(i)} = \det_d(Y) \cdot \det_d(Z).$$

至此，证明完成。 □

还有其他一些优良性质，例如柯西–比内公式和按子式展开的拉普拉斯展开，但本文不会用到。另一方面，其他超行列式通常不满足关于直和运算的乘法性。从这个角度来看，不变量行列式$_d$ 很特别，因为它是唯一一个关于切片呈线性的，就像 行列式$_2$ 关于行和列呈线性一样。它仅在 d为偶数时存在。当 d 为奇数时，这个函数恒为零，而 SL上的 $(\mathbb{C}^n)^{\otimes d}$-不变多项式的最低次数至少为 $n\lfloor\sqrt{n}\rfloor$；参见 [2, 8]。特别地，对于 $d = 3$ 和 $n = k^2$，最低次数的不变量 k^3 也是唯一的，这是一种“巧合”：该不变量定义在 $(\mathbb{C}^{k^2})^{\otimes 3}$上，而矩阵乘法张量也属于这个空间。文献 [8, 21], 考察了它在矩阵乘法张量上的取值，但其消失行为尚不清楚。

3. 张量块对角化

本节证明群代数张量的分块对角化，这体现了根据阿廷–韦德伯恩定理，群代数可分解为矩阵代数的直和这一事实。特别地，我们将证明群代数张量 C^G 可分解为矩阵代数张量的直和。

定理 3.1（张量块对角化）。设 G 是一个阶为 n 的有限群，且 $d \geqslant 2$。存在酉变换 $U \in \mathrm{U}(n, \mathbb{C})$ 使得

$$(U, \dots, U) \cdot C^G(x) = \left(\bigoplus_{\rho \in \hat{G}} \gamma_\rho \mathsf{M}^{(d)}_{\rho(x)} \right) \tag{2}$$

对于明确的常数 $\gamma_\rho \in \mathbb{C}^\times$，其中 $\rho(x) = \sum_g x_g \rho(g) \in$ 终$(\mathbb{C}^{n_\rho})$。

证明。 根据 Artin-Wedderburn 分解，我们有：

$$\mathbb{C}G \cong \bigoplus_{\rho\in\hat{G}} \mathrm{End}(\mathbb{C}^{n_\rho}), \qquad \mathrm{End}(\mathbb{C}^{n_\rho}) = \langle E_{ij}^{\rho} \mid i,j \in [n_\rho]\rangle$$

因此，所需空间 $\mathbb{C}G^{\otimes d}$（C 所在的空间）分解如下

$$C^G \in \mathbb{C}G^{\otimes d} \cong \bigoplus_{\rho_1,\ldots,\rho_d\in\hat{G}} \mathrm{End}(\mathbb{C}^{n_{\rho_1}}) \otimes \ldots \otimes \mathrm{End}(\mathbb{C}^{n_{\rho_d}}),$$

也就是说，它分解为矩阵代数张量积的直和。我们在此将 $x_i \in \mathbb{C}$ 视为.....。为了将 C^G 转换为这种形式，我们对张量 C^G 的每个模式应用所谓的 非交换群傅里叶变换 。令 U 为行由三元组 $(\rho,i,j) \in \hat{G} \times [n_\rho]^2$ 索引、列由 $g \in G$ 索引的矩阵：

$$U_{(\rho,i,j),g} := \alpha_\rho^{-1/2} \cdot \rho(g)_{ij}, \quad \text{where } \alpha_\rho = \frac{|G|}{n_\rho}.$$

回顾矩阵形式的舒尔正交关系。对于任意三元组 (ρ,i,j) 和 (σ,k,ℓ):

$$\sum_{g\in G} \rho(g)_{ij}\overline{\sigma(g)_{k\ell}} = \delta_{\rho\sigma}\delta_{ik}\delta_{j\ell}\cdot\alpha_\rho, \tag{3}$$

因此， $UU^* = I$ 和 U 是酉的。特别地， $|$ 行列式$(U)| = 1$。现在，在每个张量分量中作用 U，将结果记为 $B := (U,\ldots,U)\cdot C^G$。令 $C_h^G(x) = \sum_{g_1\cdots g_d=h} x_h g_1 \otimes \ldots \otimes g_d$，使得 $C^G(x) = \sum_{h\in G} x_h C_h^G(x)$。那么， $C_h^G(x)$ 变换为

$$U^{\otimes d}\cdot C_h^G(x) = \prod_{i=1}^{d} \alpha_{\rho_i}^{-1/2} \sum_{g_1\cdots g_d=h} x_h \sum_{(\rho_k,i_k,j_k)} \prod_{k=1}^{d} \rho_k(g_k)_{i_kj_k} \bigotimes_{k=1}^{d} E_{i_kj_k}^{\rho_k}$$

其中求和遍历每个 $k = 1,\ldots,d$对应的三元组 (ρ_k,i_k,j_k)。令 $\beta := \prod_{i=1}^{d} \alpha_{\rho_i}^{-1/2}$。因此， B 的坐标为

$$B_{(\rho_1,i_1,j_1),\ldots,(\rho_d,i_d,j_d)} = \sum_{h\in G} x_h\beta \sum_{g_1,\ldots,g_{d-1}\in G} \rho_d((g_1\cdots g_{d-1})^{-1}h)_{i_dj_d} \prod_{k=1}^{d-1} \rho_k(g_k)_{i_kj_k}.$$

用 c_h 表示后一个求和中 x_h 的系数。由于 ρ 是同态，且 $\rho(g^{-1})_{ij} = \overline{\rho(g)_{ji}}$，我们展开

$$\rho_d((g_1\cdots g_{d-1})^{-1}h)_{i_dj_d} = \sum_{\ell_1,\ldots,\ell_{d-1},\ell_d=i_d} \prod_{k=1}^{d-1} \overline{\rho_d(g_k)}_{\ell_k,\ell_{k+1}} \cdot \rho_d(h)_{\ell_1,j_d},$$

并继续计算系数 c_h

$$\begin{aligned} c_h &= \beta \sum_{\ell_1,\dots,\ell_d=i_d} \rho_d(h)_{\ell_1 j_d} \sum_{g_1,\dots,g_{d-1}} \prod_{k=1}^{d-1} \overline{\rho_d(g_k)}_{\ell_k \ell_{k+1}} \rho_k(g_k)_{i_k j_k} \\ &= \beta \sum_{\ell_1,\dots,\ell_d=i_d} \rho_d(h)_{\ell_1 j_d} \prod_{k=1}^{d-1} \left(\sum_g \overline{\rho_d(g)}_{\ell_k \ell_{k+1}} \rho_k(g)_{i_k j_k} \right) \\ &= \beta \alpha_{\rho_d}^{d-1} \sum_{\ell_1,\dots,\ell_d=i_d} \rho_d(h)_{\ell_1 j_d} \prod_{k=1}^{d-1} \delta_{\rho_d,\rho_k} \delta_{\ell_k,i_k} \delta_{\ell_{k+1},j_k}. \end{aligned}$$

根据舒尔正交关系（3），和中的后一项除非满足 $\ell_1 = i_1$， $j_1 = i_2$， $j_2 = i_3$，……，$j_{d-1} = i_d$ 且 $\rho_k = \rho$，否则为零，因此和式简化为单独一项

$$c_h = \alpha_\rho^{d/2-1} \rho(h)_{i_1,j_d} \prod_{k=1}^{d-1} \delta_{j_k,i_{k+1}}$$

对于任意 $h \in G$。因此，$B_{(\rho_1,\ i_1,\ j_1),\ \dots\dots(\rho_d,\ i_d,\ j_d)}$ 除非 $\rho_k = \rho_1$，否则为零，这意味着 B 是分块对角的。共有 $|\hat{}G|$ 个块，每个块表示一个 $n_\rho^2 \times \ldots \times n_\rho^2$ 阶超矩阵，记为 B^ρ。若令矩阵 $\rho(x) := \sum_{h\in G} x_h \rho(h)$，则坐标为

$$B^\rho_{(i_1,j_1),\dots,(i_d,j_d)} = \alpha_\rho^{d/2-1} \rho(x)_{i_1,j_d} \prod_{k=1}^{d-1} \delta_{j_k,i_{k+1}} = \alpha_\rho^{d/2-1} \mathsf{M}^{(d)}_{\rho(x)}.$$

特别地， $B = \bigoplus_\rho B^\rho = \bigoplus_\rho \alpha_\rho^{d/2-1} \mathbf{M}^{(d)}_{\rho(x)}$，且 $\gamma_\rho = \alpha_\rho^{d/2-1}$，正如所需。 □

注 3.2. 对于 $V := \mathsf{End}(\mathbb{C}^{n_\rho})$，作为关于 $V^{\otimes d}$ 的多重线性形式，一个单独的块等于

$$(B^\rho)^*(A^1,\dots,A^d) = \sum_{i_1,\dots,i_d,j_d} \rho(x)_{i_1,j_d} A^1_{i_1,i_2} \cdot A^2_{i_2,i_3} \cdots A^d_{i_d,j_d} = \mathrm{tr}(\rho(x)^t A^1 \cdots A^d),$$

即矩阵乘法张量的对偶形式。

注 3.3. 上面的定理与引理 4.1 表明，对于任意齐次超行列式 $\Delta \in \mathbb{C}[(\mathbb{C}^n)^{\otimes d}]^{SL}_{nk}$，我们有

$$\Delta(C^G(x)) = \left(\gamma^n \prod_{\rho\in\widehat{G}} \det{}_2(\rho(x))^{n_\rho} \right)^k \Delta\left(\bigoplus \mathsf{M}_{n_\rho} \right).$$

然而，即使对于单个 M_n，计算 $\Delta(\mathsf{M}_n)$ 也是一个非平凡问题。

注 3.4. 注意，定理 3.1 对于奇数 d 也成立，但本文只关注偶数 d 的情况。原因是奇数 d 路张量的不变量环没有一次不变量。

在下面的引理中，我们讨论对 C^G应用 U 后出现的常数 $\mathsf{det}(U)^d$ 。

引理 3.5. 对于群傅里叶变换的 $|G|\times|G|$ 矩阵 $U_{(\rho,\ i,\ j),\ g}=\left(\frac{n_\rho}{|G|}\right)^{1/2}\rho(g)_{ij}$，有

$$\det_2(U)^2=(-1)^{(|G|-t)/2+\sum\binom{n_\rho}{2}},$$

其中 $t=\#\{g\in G:\ \ g^{-1}=g\}$ 是对合元素的数量。

证明。由于 ρ 是酉的，我们有 $\overline{\rho(g)_{ij}}=\rho(g^{-1})_{ji}$；因此

$$\bar{U}_{(\rho,i,j),g}=U_{(\rho,j,i),g^{-1}}.$$

因此，通过置换行和列即可从 U 得到 $\bar{U}$。具体而言，若 C 是由 $g\mapsto g^{-1}$ 诱导、作用于列的置换矩阵，而 R 是由 $(\rho,\ i,\ j)\mapsto(\rho,\ j,\ i)$诱导、作用于行的置换矩阵，则 $\bar{U}=RUC$。利用 $UU^*=1$，我们得出 $\mathsf{det}_2(U)^2=\mathsf{det}(R)\mathsf{det}(C)=(-1)^r(-1)^c$，其中 r 和 c 分别是 R 和 C执行的交换次数。容易看出 $\mathsf{det}(R)=(-1)^{(|G|-t)/2}$ 和 $\mathsf{det}(C)=(-1)^{\sum(n_\rho^2-n_\rho)/2}$。□

注记 3.6. 对于对称群，量 $\sum_\rho n_\rho=t$ 是对合元素的数量。

4. Matrix algebra tensor

固定偶数 d，并记 $\mathsf{M}_X:=\mathsf{M}_X^{(d)}$。

引理 4.1. 设 $X=(x_{ij})$ 是一个 $n\times n$ 矩阵。张量 $\mathsf{M}_X\in(\mathbb{C}^{n^2})^{\otimes d}$ 满足

$$\det_d(\mathsf{M}_X)=\det(X)^n\det_d(\mathsf{M}_n).$$

证明。不难看出

$$\mathsf{M}_X^*(A_1,\dots,A_d)=\mathsf{M}_{I_n}^*(XA_1,\dots,A_d)=R_X\cdot\mathsf{M}_{I_n}^*(A_1,\dots,A_d),$$

其中 $R_X\in\mathrm{End}(\mathbb{C}^{n^2})$ 是作用于张量 $\mathsf{M}_{I_n}^*$ 的第一模态上的线性算子，作用方式为 $A_1\to X\cdot A_1$。超行列式是一个相对不变量（命题 2.1），因此

$$\det_d(\mathsf{M}_X)=\det_d(R_X\cdot\mathsf{M}_{I_n})=\det(R_X)\cdot\det_d(\mathsf{M}_{I_n}).$$

算子 R_X 对由向量 $\{E_{1,\ j},\ \dots\dots,\ E_{n,\ j}\}$ 张成的列子空间上的矩阵乘法 X 进行作用，对每一列 j 都独立进行，因此 $\mathsf{det}(R_X)=\mathsf{det}(X\otimes I_n)=\mathsf{det}(X)^n$。□

还需计算行列式(M_{n_ρ})。

定理4.2（参见定理1.4）。对于偶数 d 以及任意 n:

$$\det_d(\mathsf{M}_n)=\pm\left(\prod_{i=0}^{n-1}\frac{(n+i)!}{i!}\right)^{\frac{d}{2}-1}.$$

证明。为计算 $\mathsf{det}_d(\mathsf{M}_n)$，我们展开:

$$\det_d(\mathsf{M}_n)=\sum_{\sigma_1=\mathrm{id},\sigma_2,\dots,\sigma_d\in S_{[n]^2}}\mathrm{sgn}(\sigma_1\cdots\sigma_d)\prod_{(i,j)\in[n]^2}(\mathsf{M}_n)_{\sigma_1(i,j),\dots,\sigma_d(i,j)},$$

其中求和遍历 $S_{[n]^2}$ 中的置换。对于给定的元组 (σ_i)，相应的单项式不为零，当且仅当

$$\sigma_i(p)_2 = \sigma_{i+1}(p)_1 \tag{4}$$

对于任意的 $p \in [n]^2$ 和 $i \in [d]$ $(\sigma_{d+1} = \sigma_1)$，即 σ_i 的第二个坐标与σ_{i+1} 的第一个坐标相同。在标准字典序下，我们将每个 σ 表示为一个 2 行数组：

$$\sigma := \begin{bmatrix} \sigma(1,1)_1 & \sigma(1,2)_1 & \dots & \sigma(n,n)_1 \\ \sigma(1,1)_2 & \sigma(1,2)_2 & \dots & \sigma(n,n)_2 \end{bmatrix}.$$

特别地，恒等置换表示为

$$\mathrm{id} = \begin{bmatrix} 11\dots1\dots nn\dots n \\ 12\dots n\dots12\dots n \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} \mathrm{row} \\ \mathrm{col} \end{bmatrix},$$

其中位置 p 由垂直数对 $(i$占据，$j)$ 使得 $(i-1)n+j=p$，而单词行 和 列 分别表示 id 的第一行和第二行。根据（4）中的条件，我们可以写成：

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \qquad \dots, \qquad \sigma_d = \begin{bmatrix} a_d \\ a_1 \end{bmatrix}$$

其中 $a_1 =$行，$a_2 =$列，并且我们遍历单词 a_3、$\dots a_d := S_{n^2} \cdot (1^n \dots n^n)$——即单词 row 的变位词。令 R 和 C 分别为单词 row 和 col 在S_{n^2}中的行稳定子和列稳定子。令 $\tau \in S_{[n]^2}$ 为转置置换，即 $\tau(i、\ j) = \tau(j、\ i)$。那么

$$\sigma_{i-1} = \pi_{i-1} \cdot \tau \cdot \sigma_i, \qquad \text{where} \quad \pi_{i-1} : \begin{bmatrix} a_{i+1} \\ a_i \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a_{i-1} \\ a_i \end{bmatrix}. \tag{5}$$

事实上，图示地表示为：

$$\begin{bmatrix} \mathrm{row} \\ \mathrm{col} \end{bmatrix} \xrightarrow{\sigma_i} \begin{bmatrix} a_i \\ a_{i+1} \end{bmatrix} \xrightarrow{\tau} \begin{bmatrix} a_{i+1} \\ a_i \end{bmatrix} \xrightarrow{\pi_{i-1}} \begin{bmatrix} a_{i-1} \\ a_i \end{bmatrix}.$$

此外，$\pi_{i-1} \in C$，由于集合 $\{(1,\ c),\ \dots\dots,\ (n,\ c)\}$ 会针对每一列独立地进行置换 c。进一步地，通过反复应用（5）我们得到：

$$\sigma_1 = \pi_1\tau\sigma_2 = \pi_1\tau\pi_2\tau\sigma_3 = \dots = \pi_1\tau\pi_2\tau\cdots\pi_d\tau\sigma_1,$$

从而得到

$$\pi_1 \cdot \tau \cdot \dots \cdot \pi_d \cdot \tau = \prod_{i=1}^{d/2} \pi_{2i-1} \cdot (\tau\pi_{2i}\tau) = \mathrm{id}, \tag{6}$$

其中每个 $\pi_i \in C$。注意，从元组 $(\pi_1, \dots, \pi_d)$ 满足（6）可唯一确定元组 $(\sigma_1, \dots, \sigma_d)$，其中 $\sigma_1 = \mathrm{id}$ 满足（5）。因此，这一变换是双射的。将$\sigma_{2i-1}\sigma_{2i}$ 分组并利用（5），我们可以追踪单项式的符号：

$$\prod_{j=1}^{d} \mathrm{sgn}(\sigma_j) = \prod_{i=1}^{d/2} \mathrm{sgn}(\sigma_{2i-1})\mathrm{sgn}(\sigma_{2i}) = \mathrm{sgn}(\tau)^{d/2} \prod_{i=1}^{d/2} \mathrm{sgn}(\pi_{2i}).$$

对于偶数 $i=1,\dots,d/2$，将 π_{2i} 替换为 $\pi'_{2i}=\tau\pi_{2i}\tau\in R$（6）中的相应项，即将其替换为由对合 $\tau=\tau^{-1}$对其进行共轭所得的结果。这样我们便可将恒等式改写为

$$\prod_{i=1}^{d/2}\pi_{2i-1}\pi'_{2i}=\mathrm{id}.$$

通过 $\mathsf{sgn}(\tau)=(-1)^{\binom{n}{2}}$ 和 $\mathsf{sgn}(\pi'_i)=\mathsf{sgn}(\pi_i)$，我们将初始求和变换为

$$\det(\mathsf{M}_{I_n})=(-1)^{\frac{d}{2}\binom{n}{2}}\cdot\sum_{\pi_i\in C:\ \pi_1\pi'_2\cdots\pi_{d-1}\pi'_d=\mathrm{id}}\mathsf{sgn}(\pi_2\pi_4\cdots\pi_d). \tag{7}$$

我们将证明，这个和出现在杨对称化子的某个幂中。杨对称化子是 $\mathbb{C}S_n$ 中的一个元素，用于构造 S_{n^2} 的不可约表示（见 [16]）。具体而言，考虑群代数 $\mathbb{C}S_{n^2}$ 中对应于 $\lambda=n\times n$的以下元素：

$$a_\lambda=\sum_{g\in C}g,\qquad b_\lambda=\sum_{g\in R}\mathrm{sgn}(g)g,\qquad c_\lambda=a_\lambda b_\lambda.$$

已知 $(c_\lambda)^2=h_\lambda c_\lambda$，其在单位元处的系数为 $c_\lambda(\mathsf{id})=1$，其中 $h_\lambda=\prod_{(i,j)\in\lambda}(i+j-1)$ 是钩长乘积。考虑它的幂：

$$(c_\lambda)^{d/2}=\prod_{i=1}^{d/2}\left(\sum_{\pi_{2i-1}\in C}\pi_{2i-1}\right)\cdot\left(\sum_{\pi'_{2i}\in R}\mathrm{sgn}(g)\pi'_{2i}\right)=\sum_{\pi_i\in C}\mathrm{sgn}(\pi'_2\cdots\pi'_d).$$

因此，在单位元处求值得到

$$(c_\lambda)^{d/2}(\mathrm{id})=(-1)^{\frac{d}{2}\binom{n}{2}}\det(\mathsf{M}_n).$$

另一方面，$(c_\lambda)^{d/2}=h_\lambda^{d/2-1}\cdot c_\lambda$, 因此

$$\det(\mathsf{M}_n)=\pm(h_{n\times n})^{d/2-1}\cdot c_\lambda(1)=\pm(h_{n\times n})^{d/2-1},$$

其中，$h_{n\times n}=\prod_{i=0}^{n-1}\frac{(n+i)!}{i!}$ 是方形分拆中的钩长乘积。 □

注 4.3。诸如（7）这样的更一般的带符号求和，经常出现在对不同张量处其他超行列式的计算中，参见 [2, 8, 21]。

现在我们完成主定理的证明。

定理 *1.2* 的证明。 由定理 3.1，凯莱超表 C^G 酉等价于矩阵乘法张量的直和 $(U,\dots,U)\cdot C^G(x)=\bigoplus\alpha_\rho^{d/2-1}\mathsf{M}_{\rho(x)}\cdot$超行列式的 SL 不变性和直和性质（命题 2.1，命题2.2）以及符号因子的具体计算（引理 3.5）可得：

$$\det_d(C^G(x))=(-1)^{ds/2}\prod_{\rho\in G}\det_d(\alpha_\rho^{d/2-1}\mathsf{M}^{(d)}_{\rho(x)})=(-1)^{ds/2}\prod_{\rho\in G}(\alpha_\rho^{d/2-1})^{n_\rho^2}\det_d(\mathsf{M}^{(d)}_{\rho(x)}),$$

其中 $s = \sum_\rho \binom{n_\rho}{2} + (|G| - t)/2$。回顾一下，$\alpha_\rho = |G|/n_\rho$。由引理 4.1，我们计算每个因子 行列式$_d(\mathsf{M}^{(d)}_{\rho(x)})$ = 行列式$(\rho(x))^{n_\rho}$行列式$_d(\mathsf{M}^{(d)}_{n_\rho})$；再由定理 1.4，每个因子给出符号 $(-1)^{\frac{d}{2}\binom{n_\rho}{2}}$，因此得到

$$\det{}_d(C^G(x)) = (-1)^{\frac{d}{2}(|G|-t)/2} \left(|G|^{|G|} \prod_\rho \frac{h_{n_\rho \times n_\rho}}{n_\rho^{n_\rho}} \right)^{\frac{d}{2}-1} \prod_{\rho \in \hat{G}} \det(\rho(x))^{n_\rho},$$

其中 $\rho(x) = \sum_g x_g \rho(g)$。常数项 H_G 显然不为零。 □

5. Algebra tensor

设 A 是一个结合代数（不一定是半单代数），给定一组基 $\{a_1, \dots, a_n\}$，令 $\{x_1, \dots, x_n\}$ 为与这组基相关联的变量集合，并令 $\mathsf{Aut}(A)$ 为代数自同构群。回忆一下张量 $C^{A,a}(x) = \ell_x(a_{i_1} \cdots a_{i_d})$，其中 $\ell_x = \sum_{i=1}^n x_i a_i^*$。

5.1. 不变性。 下面证明，$C^{A,a}(x)$ 的消失性质与基的选取无关。设 $a'_1, \dots, a'_n$ 是另一组基，与之相关联的变量为 $x'_1, \dots, x'_n$。

Le引理 5.1。 作为多项式，我们有行列式$(C^{A,a}(x)) \neq 0 \iff$ 行列式$(C^{A',a'}(x')) \neq 0.$

证明。 设 $g \in \mathsf{GL}(n, \mathbb{C})$ 为换基矩阵，即 $a'_i = g \cdot a_i$。那么对于对偶基，我们有 $(a')^*_i = a^* g^{-1}$。因此，相关的线性形式 ℓ_x 和 ℓ'_x 之间的关系如下：$\ell'_{x'}$：
$= \sum_{k=1}^n (a')^*_k x'_k = \sum_{k=1}^n (a^* g^{-1})_k x'_k = \sum_{i=1}^n a_i^* (g^{-1}x')_i = \ell_{g^{-1}x'}$，故有 $x = g^{-1}x'$。此外，

$$C^{A,a'}(x')_{i_1,\dots,i_d} = \ell'_{x'}(a'_{i_1} \cdots a'_{i_d}) = \ell_{g^{-1}x}(g a_{i_1} \cdots g a_{i_d}) = (g^{\otimes d} \cdot C^{A,a}(g^{-1}x'))_{i_1,\dots,i_d}.$$

因此 $\mathsf{det}_d(C^{A,a'}(x')) = \mathsf{det}_2(g)^d \mathsf{det}_d(C^{A,a}(g^{-1}x))$，其中 $\mathsf{det}_2(g) \neq 0$。 □

这就说明了记号 $C^A(x)$ 无需注明所用的基。

5.2. 半单代数。 设 A 为半单代数。根据韦德伯恩定理，存在一个代数同构 U（引言中的$= \Phi$），它将 A 映射为中心单代数的直和

$$U : A \to B := \bigoplus_{\rho \in \hat{A}} B_\rho, \qquad B_\rho = \mathrm{Mat}(n_\rho, \mathbb{C}).$$

$\hat{}$代数 B 具有自然的矩阵单位基 $\{E^\rho_{i,j}\}$ 其指标为三元组 $(\rho,\ i,\ j)$，其中 $\rho \in A$ 且$i, j \in [n_\rho]$。这样的 U 并不唯一。它将 d 重迭乘法张量 μ_A：$A^{\otimes d} \otimes A^*$映射为 B 的乘法张量，映射方式为逐坐标作用：

$$U : \mu_A \mapsto \mu_B, \qquad (U^{\times d}, U^{-T}) \cdot \mu_A = \mu_B.$$

定理 5.2. 我们有：

$$\det{}_d(C^A(x)) = H_A \cdot \prod_{\rho \in \hat{A}} \left(\det{}_2(y^\rho_{ij}) \right)^{n_\rho},$$

其中 $y = Ux$。

证明。回忆ll， $C^A(x)=\sum_{k=1}^n(\mu_A)^k x_k$。然后，在每个 d 模式中进行变换 U s

$$(U^{\times d}\cdot C^A(x))_{i_1,\dots,i_d}=\sum_{j_1,\dots,j_d}\prod_{\ell=1}^d U_{i_\ell j_\ell}\sum_{k=1}^n(\mu_A)^k_{j_1,\dots,j_d}x_k=\left(\sum_{k=1}^n x_k((U^{\times d},\mathrm{I})\cdot\mu_A)^k\right)_{i_1,\dots,i_d},$$

其中 $(U^{\times d},\ \mathrm{I})$ 作用于 $\mu_A\in A^{\otimes d}\otimes A^*$，保持输出坐标不变。将作用补全到 $(U^{\times d},\ U^{-1})$，用新坐标 $y=(y^\rho_{ij})_{\rho,\ i,\ j}=Ux$替换 x 坐标后，我们得到

$$U^{\times d}\cdot C^A(x)=\sum_{k=1}^n x_k((\mathrm{I}^{\times d},U^T)\cdot(U^{\times d},U^{-T})\cdot\mu_A)^k=\sum_{i=1}^n(\sum_{k=1}^n x_kU^T_{ki})(\mu_B)^i=C^B(y).$$

于是 $C^B(y)=\bigoplus_{\rho\in\widehat{A}}C^{B_\rho}(y^\rho_{ij})$，且在基下的形式为：

$$C^{B_\rho}(y)=\sum_{i_1,i_2,\dots,i_d,j_d}E^\rho_{i_1i_2}\otimes E^\rho_{i_2i_3}\dots\otimes E^\rho_{i_dj_d}y^\rho_{i_1,j_d}\in(\mathbb{C}^{n^2_\rho})^{\otimes d}.$$

因此，

$$\det{}_d(C^A(x))=\det(U)^d\cdot\det{}_d(C^B(y))=\det(U)^d\cdot\prod_{\rho\in\widehat{A}}\det{}_d(C^{B_\rho}(y^\rho)).$$

那么根据引理 ma 4.1 和定理 1.4 我们有 行列式$_d(C^{\mathrm{Mat}_{n_\rho}}(y^\rho))=$行列式$_2(y^\rho)^{n_\rho}(h_{n_\rho\times n_\rho})^{d/2-1}$。

此外，根据斯科伦-诺特定理，如果我们在某个固定的 ρ 块中为矩阵单位 $\{E'_{ij}\}$ 选择另一组基，那么存在 $S\in\mathrm{GL}(V_\rho)$，使得 $E'_{ij}=SE_{ij}S^{-1}=\sum_{a,\ b}S_{ai}E_{ab}S^{-1}_{jb}$，其中$E_{ij}:=E^\rho_{ij}$。于是，$y'_{ij}=\ell_y(E'_{ij})=\sum_{a,\ b}S_{ai}y_{ab}S^{-1}_{jb}=Sy_{ij}S^{-1}$，因此行列式按如下方式变化：$\det_2(y'_{ij})=\det{}_2(S^T(y_{ij})S^{-T})=\det_2(y_{ij})$。□

5.3. **非半单代数**。结合代数 A 的雅各布森根 $J(A)$ 是最大的双侧幂零理想。当且仅当 $J(A)=0$ 时，该代数是半单的。我们将使用几何不变式理论中的方法证明，当 $J(A)\neq0$ 时，代数超行列式恒等于零。证明与 [7] 中关于乘法张量 μ_A 的证明相似。

定理5.3。设 $d>2$ 为偶数。则，雅各布森根非平凡 $J(A)\neq0$ 当且仅当多项式行列式 $_d(C^A(x))\equiv0$。

证明。如果雅各布森根平凡，那么代数是半单的，因此根据定理 1.5，多项式 行列式 $_d(C^A(x))$ 不为零。现在，假设 $J(A)\neq0$。根据引理 5.1，要证明其为零，只需在一个特定的基上展示这一点。我们将选择一个适配所谓根滤过的基。

设 $J:=J(A)$，其中 $J^r=0$对应最小的 $r\geqslant2$。考虑滤过

$$A=J^0\supset J^1\supset J^2\supset\dots\supset J^r=0,$$

其中 $J^k=J\cdots J(k次)$。根据韦德伯恩–马尔采夫定理，商 $S_0=A/J(A)$是一个半单子代数。令 S_k为 J^{k+1}在 J^k中的任意补空间，即 $J^k=S_k\oplus J^{k+1}$。设 $j_k=\dim J^k$且 $s_k=\dim S_k$。令 $\{a_1、.....、a_n\}$为一个与该过滤相容的基，即

$S_k =$ 张成 $\{a_i \mid j_k \geqslant i > j_{k+1}\}$。对于每个 i，令 $a_i \in S_{\nu(i)}$，其中 $\nu(i) \geqslant 0$ 表示它所属的分量，也就是它的过滤度。

考虑相对于选定基的张量 $C^A(x) = \sum_k \mu^k x_k$，其中 $\{\mu^k_{i_1,\dots,i_d}\}$ 是乘法张量的坐标。注意

$$\text{if} \quad \mu^k_{i_1,\dots,i_d} \neq 0, \qquad \text{then} \quad \nu(k) \geqslant \nu(i_1) + \ldots + \nu(i_d). \tag{8}$$

事实上，根据定义，乘法满足 $J^k \cdot J^\ell \subseteq J^{k+\ell}$；因此，乘积 $a_{i_1} \cdots a_{i_d}$ 中的任意非零系数，其过滤度都有上述下界。令 $D := \sum_{i=1}^n \nu(i) = \sum_{k=0}^{r-1} k s_k$ 为度数之和。由于 $J \neq 0$，我们有 $D > 0$。考虑变换$g(t) \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$，它通过对每个基向量进行缩放来定义：

$$g(t) : a_i \mapsto t^{w_i} a_i, \quad \text{where } w_i = n \cdot \nu(i) - D.$$

事实上，行列式$(g(t)) = \prod_{i=1}^n t^{\sum(n\cdot\nu(i)-D)} = t^{nD-nD} = 1$。定义 $C^A(x;\ t)$：$= g(t)^{\otimes d} \cdot C^A(x)$。然后，通过类似引理5.1中的计算，

$$C^A(x;t)_{i_1,\dots,i_d} = \sum_k \mu^k_{i_1,\dots,i_d} x_k \cdot t^{w_k - w_{i_1} - \ldots - w_{i_d}},$$

其中 t 的指数由 $w_k - \sum_{\ell=1}^d w_{i_\ell} = n \cdot (\nu(k) - \sum_{\ell=1}^d \nu(i_\ell)) + (d-1)D > 0$ 根据（8）给出，且 $D > 0$。那么极限 $t \to 0$ 存在，且等于 $\lim_{t\to 0} C^A(x,\ t) = 0$。这意味着闭包$\mathrm{SL}(n,\ \mathbb{C})^{\times d}\, C^A(x)$ 包含 0，因此 $C^A(x)$ 在连续函数 行列式$_d$上为零。 □

注 5.4。事实上，这表明张量 $C^A(x)$ 是不稳定的——在任意超行列式上都为零，也就是说，它属于零锥，即所有超行列式的零点集。上述论证类似于证明 [7]中的乘法张量 μ_A 属于零锥的证明。

致谢

作者谨向 Maciej Dołęga、Damir Yeliussizov、Joachim Jelisiejew、Askar Dzhumadildayev 和 Pietro Campochiaro 致谢，感谢他们进行了富有帮助的交流并提出了宝贵意见。本研究部分由国家科学中心资助，项目编号为2021/42/E/ST1/00162。

参考文献

[1] Amanov, A., Yeliussizov, D.（2023）。张量切片秩与凯莱第一超行列式。《线性代数及其应用》，**656**，224–246。[2] Amanov, A., Yeliussizov, D.（2023）。张量、拉丁超立方体与矩形克罗内克系数的基本不变量。国际数学研究札记，**2023**(20)，17552–17599。[3] Amanov, A., Yeliussizov, D.（2025）。克罗内克系数的一些单峰序列。数学杂志，**309**(1)，8。[4] Amanov, A., Yeliussizov, D.（2025）。张量的最高权向量。*arXiv*预印本arXiv:2504.15413。[5] Barvinok, A. I.（1995）。线性 k-拟阵交与拟阵 k-奇偶问题的新算法。数学规划，**69**(1)，449–470。[6] Bläser, M.（2013）。快速矩阵乘法。计算理论，**5**，1–60。（研究生综述）

[7] Bläser, M., Lysikov, V.（2020）。分块张量的切片秩与代数结构张量的不可逆性。载于第45届国际计算机科学数学基础研讨会（MFCS 2020）（第17:1–17:15页）。Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum für Informatik。[8] Bürgisser, P., Ikenmeyer, C.（2017）。轨道闭包的基本不变量。《代数学杂志》，477，390–434。[9] Cayley, A.（1843）。论行列式理论。《剑桥哲学学会汇刊》，8，1–16。[10] Cayley, A.（1845年）。论线性变换理论。《剑桥数学杂志》，4，193–209。[11] Cohn, H., Umans, C.（2003年10月）。快速矩阵乘法的群论方法。载于第44届IEEE计算机科学基础研讨会论文集（第438–449页）。IEEE。[12] Conrad, K.（1998）。表示论的起源。《数学教学》，44，361–392。[13] Etingof, P. I., Golberg, O., Hensel, S., Liu, T., Schwendner, A., Vaintrob, D., Yudovina, E.（2011）。表示论导论。（第59卷）。美国数学学会。[14] Frobenius, G.（1896）。论群特征标。《柏林普鲁士皇家科学院会议录》。[15] Formanek, E., Sibley, D.（1991）。群行列式决定群。《美国数学学会会刊》，112(3)，649–656。[16] Fulton, W.（1997）。杨表：及其在表示论与几何学中的应用。（伦敦数学学会学生文本丛书，第35卷）。剑桥大学出版社。[17] Gelfand, I. M., Kapranov, M. M., Zelevinsky, A. V.（1994）。超行列式。载于《判别式、结式与多维行列式》（第444–479页）。Birkhäuser Boston。[18] Huang, R., Rota, G. C.（1994）。论关于拉丁方与直化系数的各种猜想之间的关系。《离散数学》，128(1–3)，225–236。[19] Kumar, S., Landsberg, J. M.（2015）。阿隆–塔尔西猜想、Hadamard–Howe猜想与特殊酉群上的积分之间的联系。《离散数学》，338(7)，1232–1238。[20] Landsberg, J. M.（2017）。几何学与复杂性理论。（剑桥高等数学研究丛书，第169卷）。剑桥大学出版社。[21] Li, X., Zhang, L., Xia, H.（2025）。张量的两类极小一般基本不变量。《线性代数及其应用》，720，174–212。[22] Luque, J. G., Thibon, J. Y.（2003）。汉克尔超行列式与塞尔伯格积分。《物理学杂志A：数学与一般》，36(19)，5267。[23] Matsumoto, S.（2008）。矩形形状的杰克函数的超行列式表达式。《代数学杂志》，320(2)，612–632。[24] Steinberg, B.（2022）。半群的戴德金–弗罗贝尼乌斯行列式的因式分解。《代数学杂志》，605，1–36。[25] Yeliussizov, D.（2023）。列维-奇维塔张量的稳定性与阿隆–塔尔西型定理。《数学评论》，361(G8)，1367–1373。[26] Zappa, P.（1997）。行列式张量的凯莱行列式与阿隆–塔尔西猜想。《应用数学进展》，19(1)，31–44。

哈萨克-英国技术大学，哈萨克斯坦电子邮箱地址：
alimzhan.amanov@gmail.com