狄拉克弦的自力：一项显式计算

AlbertoG. Rojo物理系，奥克兰大学，罗切斯特，密歇根州 *48309*

arXiv:2603.14429v1 [physics.class-ph] 15 Mar 2026

麦克唐纳的评论[1] 展示了如何利用参考文献2中推导出的两条弦之间的力，来阐明狄拉克磁单极子模型的一个微妙局限。狄拉克[3] 已经注意到，弦会受到非零的、事实上还是发散的自力。乍看之下，这一结论似乎令人惊讶，因为狄拉克弦与普通螺线管非常相似，而螺线管的自力为零。McDonald 的论证简洁而富有洞察力，但依赖于对双弦结果的一种相当复杂的应用。本着与参考文献2相同的精神——该文对磁单极子间相互作用给出了初等推导——我们在此给出弦的自力的初等推导。

我们将狄拉克弦建模为半径为 a 的半无限螺线管，其中通有电流 I，每单位长度有 n 匝，因此内部的磁通量为 $\Phi = \mu_0 n I \pi a^2$。（在磁单极子极限下，磁荷 $g = \Phi/\mu_0$ 为常数，而 $a \to 0$ 和 $I \to \infty$。）沿轴（z 方向）的自力源于每个电流环与螺线管中所有其他电流环产生的径向磁场 B_ρ 之间的相互作用。

螺线管表面上一点处的磁场径向分量可以通过方位矢量势表示为

$$B_\rho(a,z) = -\frac{\partial A_\phi}{\partial z}. \tag{1}$$

我们将证明，在任意 z 处，该导数都可化简为螺线管末端（$z=0$）处微分小电流环产生的矢势值。

T ˆ 矢势可以通过对电流 $\mathbf{I} = I\boldsymbol{\phi}$ 的积分求得 :

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(a,z) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^\infty n\,dz' \int_0^{2\pi} \frac{I\hat{\boldsymbol{\phi}}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} a\,d\phi' \\ &\equiv \frac{\mu_0 n a}{4\pi}\int_0^\infty dz' \int_0^{2\pi} \frac{I\hat{\boldsymbol{\phi}}' d\phi'}{\sqrt{2a^2(1-\cos\phi') + (z-z')^2}}\end{aligned}$$

根据对称性，该结果将完全沿方位方向。

由于螺线管是半无限的，如图1所示，$\mathbf{A}(a,z)$ 和 $\mathbf{A}(a,z+dz)$ 之差为:

$$\mathbf{A}(a,z+dz) - \mathbf{A}(a,z) = dz\frac{\mu_0 n a}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{I\hat{\boldsymbol{\phi}}' d\phi'}{\sqrt{4a^2\sin^2(\phi'/2) + z^2}} \tag{2}$$

因此，$B_\rho(a,\ z) = -\partial A_\phi/\partial z$ 等于该底部线圈产生的方位角向 A_ϕ :

$$B_\rho(z) = -\frac{\mu_0 n I a}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos\phi'}{\sqrt{4a^2\sin^2(\phi'/2) + z^2}}\,d\phi'. \tag{3}$$

沿轴的总自力可通过对每个载流线圈所受的轴向力积分得到。半径为 a、电流为 $I\boldsymbol{\phi}$、处于径向场 $B_\rho\hat{\boldsymbol{\rho}}$ 中的单个线圈会受到轴向力 $-2\pi a I B_\rho \mathbf{k}$，因此对所有线圈积分可得

$$F_z = -2\pi a\, nI \int_0^\infty B_\rho^{\mathrm{sol}}(z)\, dz \tag{4}$$

$$= \frac{\mu_0 n^2 I^2 a^2}{2} \underbrace{\int_0^\infty dz \int_0^{2\pi} \frac{\cos\phi'}{\sqrt{4a^2\sin^2(\phi'/2)+z^2}}}_{=\,\pi}. \tag{5}$$

我们在补充材料中表明，该二重积分等于 π。

将其表示为磁通量 $\Phi = \mu_0 n I \pi a^2$ 的形式，我们得到如下紧凑结果

$$F_z = \frac{\Phi^2}{2\pi\mu_0 a^2}. \tag{6}$$

在狄拉克弦极限下，$a \to 0$ 当 Φ 保持不变时，自力发散为 $1/a^2$，这证实了 McDonald 的观察[1] 以及狄拉克本人提出的担忧[3]。方程（6）明确揭示了这种发散的性质：这是将有限磁通量集中到趋于零的横截面中所不可避免的代价。这里所考虑的半无限螺线管即使在取狄拉克弦极限之前也会受到非零自力，这一点或许看起来令人惊讶 $a \to 0$。当然，有限螺线管不会受到净自力，因为其两端的磁应力相互抵消。这里得到的非零结果反映出，半无限螺线管是一种理想化：移除一端的同时，也移除了实现整体动量平衡所需的补偿性磁应力[a]。从这个意义上说，半无限构型应被视为一种极限构造，而非物理上可实现的物体。总之，一旦去除了螺线管两端之间的抵消，狄拉克弦的自力便可理解为螺线管的边缘力。在保持磁通量不变的同时缩小横截面，会使相关的磁压力发散，从而导致上述 $1/a^2$ 行为。

致谢

作者感谢 David Garfinkle 提供的有益交流。

[a] 将麦克斯韦应力张量应用于半无限螺线管，可以为水平更高的学生更简洁地推导自力；相关内容见补充材料。

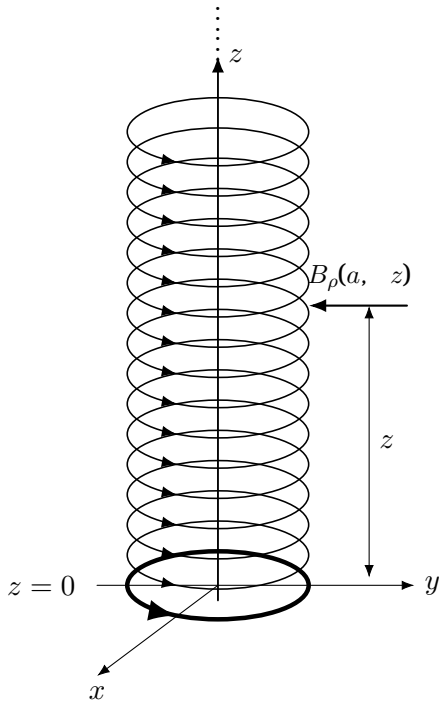


图1. 半无限圆柱表示为一叠电流环。箭头表示大小为 I 的环流电流方向。求 $A(a,\ z)$ 和 $A(a,\ z + dz)$ 的积分几乎相同；二者唯一的区别在于，第二个积分包含了位于范围 $z = 0 \to dz$ 内的圆环。由于 $B_\rho = (\nabla \times \mathbf{A})_\rho = -\partial A_\phi/\partial z$，半无限圆柱表面高度 z 处的磁场径向分量大小 $B_\rho(a,\ z)$，等于圆柱底部圆环产生的矢势 $A_\phi(a,\ z)$ 的大小。

参考文献

[1]K. T. McDonald，《狄拉克磁单极子的自力》，Am. J. Phys.（即将于 2026 年发表）。[2]A. G. Rojo，《两个狄拉克磁单极子之间的库仑力》，Am. J. Phys. 94，65–67（2026）。https://doi.org/10.1119/5.0244845[3]P. A. M. Dirac，《磁极理论》，Phys. Rev. 74，817–830（1948）。https://doi.org/10.1103/PhysRev.74.817[4]I. S. Gradshteyn 和 I. M. Ryzhik，积分、级数与乘积表，第 8 版（Academic Press，2015），公式 1.441.2。