arXiv:2603.14506v1 [math.AC] 15 Mar 2026

分配格的交并二项式代数

BARBARA BETTI 和 TAKAYUKI HIBI

Abstract. 我们研究由有限分配格所产生的并交二项式生成的域上代数的定义理想。在具有标准化律的代数这一框架下，我们研究定义理想何时由二次式生成这一问题。

Introduction

设 L 是一个含有 n 个元素 $x_1, \ldots, x_n$ 的有限格， $S = K[x_1, \ldots, x_n]$ 是域 K上的、以 n 个变量为元的多项式环。我们关注二次二项式

$$f_{ij} = x_i x_j - (x_i \vee x_j)(x_i \wedge x_j), \quad 1 \leq i < j \leq n,$$

称为 L 的并交二项式。显然， f_{ij} 非零当且仅当 x_i 和 x_j 在 L 中不可比较。理想 $I_L = (f_{ij} : 1 \leq i < j \leq n)$ 及其商环 S/I_L 首次在[Hib87]中引入。特别地，根据 Birkhoff [HH11, Theorem 9.1.7] 和 Dedekind [Sta12, Chapter 3, Exercise 30]，的经典结果可知，I_L 是素理想当且仅当 L 是分配格；并且当 L 是分配格时， S/I_L 是正规且 Cohen–Macaulay 的。此后，关于分配格的理想 I_L 及其商环 S/I_L 得到了广泛研究。

本文采用不同的视角，聚焦于有限生成的 K代数

$$\mathcal{R}_K(L) = K[f_{ij} : 1 \leq i < j \leq n, f_{ij} \neq 0] \subset S$$

分配格 L的代数。我们不对域 K施加任何限制。我们将 $\mathcal{R}_K(L)$称为 L的并交代数。这类代数具有重要意义，因为它包含交换代数和代数几何中的重要实例，例如对每个 $m \geq 4$, Grassmann簇 $\mathrm{Gr}_K(2, m)$的齐次坐标环。 $K[\mathrm{Gr}_K(2, m)]$ 的定义理想由众所周知的 Pl¨ucker 二次式生成。一般而言， $\mathcal{R}_K(L)$的定义理想包含独立于 Pl¨ucker 二次式的二次式。例如，秩3布尔格 B_3 （图1）的并交代数 $\mathcal{R}_K(B_3)$的定义理想由以下两个二次式生成:

$$f_{3,6}f_{4,5} + f_{2,7}f_{4,6} - f_{3,5}f_{4,6} - f_{2,6}f_{4,7} \;=\; f_{2,7}f_{3,5} - f_{2,7}f_{4,6} + f_{2,6}f_{4,7} - f_{2,3}f_{5,7} \;=\; 0.$$

关于这类代数的一个相关结果见 [HMT26], ，作者在其中刻画了这样的分配格 L： 其生成元集合 $\mathcal{B}_L = \{f_{ij} : \; 1 \leq i < j \leq n, \;\; f_{ij} \neq 0\}$是关于某个相容项序的 Khovanskii/Sagbi基。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 06A11, 13H10, 13P10, 14M15.*Key words and phrases.*分配格、二项式、Pl¨ucker 二次式、多项式环、具有直化律的代数。本文的研究始于第二作者在莱比锡马克斯·普朗克数学科学研究所访问期间，时间为2025年8月15日至9月8日。

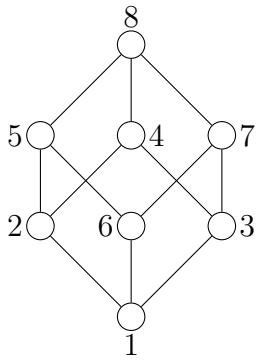


FIGURE 1. 秩3的布尔格 B_3 。

我们项目的最终目标之一，是对满足以下条件的分配格进行分类： L其 $\mathcal{R}_K(L)$ 的定义理想由二次式生成。我们在具有标准化律的代数（ASL）的框架内开展研究 [Eis80]。为此迈出的第一步是，我们对这样的分配格进行分类： L 其并交代数 $\mathcal{R}_K(L)$ 是多项式环（定理3.2），并证明薄分配格的 $\mathcal{R}_K(L)$ 的定义理想由二次式生成（定理3.3）。

在附录中，假设 Pl¨ucker 关系 [Bru+22, p. 73] 已知，我们简要证明经典结论（Hodge [Hod43] 和 Doubilet–Rota–Stein [DRS74]）：格拉斯曼簇 Gr $K[x_iy_j - x_jy_i : 1 \leq i < j \leq n]$（$K$的齐次坐标环$d$， n）对参数化 d的 K^n 维子空间的分配格 K上是一个代数直纹。

1. 偏序集、分配格与 Gr¨obner 基 S

偏序集称为偏序集。有限偏序集 P 的链 是 P的全序子集。链 C 的长度 为 $|C| - 1$，其中 $|C|$ 是 C的基数。 P 的秩是 P中链的最大长度。令 rank(P) 表示 P的秩。若有限偏序集的所有极大链长度相同，则称其为纯 的。

有限格是一个有限偏序集，其中任意两个元素 a, b 都有唯一的最大下界 $a \wedge b$和唯一的最小上界 $a \vee b$，分别称为a 和 b的交 和并 。如果交和并运算彼此满足分配律，则称有限格为分配的。

有限偏序集 P 的子集 I 称为 P 的偏序理想，如果它向下封闭；也就是说，对于满足 $b \leq a$ in P 的每个 $a \in I$ 和 $b \in P$，都有 $b \in I$。特别地， $\emptyset$ 和 P 是 P的偏序理想。令 $\mathcal{J}(P)$表示由 P的所有偏序理想组成、按包含关系排序的有限偏序集。那么 $\mathcal{J}(P)$是一个秩为 $|P|$的分配格。

设 L 为有限分配格， 0_L （分别为 1_L）是其唯一的极小元（分别为极大元）。若 x 与 $a \in L$中的所有元素都可比较，则称 x 为 L 的顶点。特别地， 0_L 和 1_L 都是 L 的顶点。若有限分配格 L 除 0_L 和 1_L外没有其他顶点，则称其为简单分配格。若 $a = b \vee c$，则称元素 $0_L \neq a \in L$ 为并不可约元；此时 $a = b$ 或 $a = c$。令 P_L 为 L的子偏序集，由L的所有并不可约元组成。Birkhoff 有限分配格基本结构定理 [HH11, 定理 9.1.7] 保证 L 和 $\mathcal{J}$（P_L）作为有限格同构。若对于任意三个并不可约元 a、 b、 $c \in L$，其中有两个在 L中可比较，则称 L 为平面。 $a \in L$ 的秩是形如 $a_{i_0} < a_{i_1} < \cdots < a_{i_r} = a$的链的最大长度。

令 $\mathrm{rank}_L(a)$ 表示 $a \in L$的秩。令 $d = \mathrm{rank}(L) = \mathrm{rank}_L(1_L)$，并用 $\rho_L(i)$表示秩$_L(a) = i$且满足 $0 \leq i \leq d$的元素 $a \in L$的数量。特别地，$\rho_L(0) = \rho_L(d) = 1$。令 $\theta(L) = \max\{\rho_L(i) : 1 \leq i < d\}$。若有限简单分配格 L满足 $\theta(L) = 2$，即对 $1 \leq i < d$有 $\rho_L(i) = 2$，则称其为薄分配格 [HH23, 第 3] 页（或称广义蛇形偏序集 [Bel+22]）。由此可知，薄分配格是平面的。

设 $n > 0$ 是一个整数，D_n 是 n 的所有因子组成的集合，并按整除关系排序。我们称 D_n 为 n 的 因子格。每个因子格都是分配的。若 n 无平方因子，则称因子格 D_n 为 布尔格。当且仅当 $n = pq^s$ 时，因子格 D_n 是薄的，其中 p 和 q 是不同的素数，且 $s \geq 1$。

下一节将用到以下关于 Gr¨obner 基的引理。关于 Gr [HH11 第 2] 章，请参阅其中关于 Gr¨obner 基的基础知识。

引理 *1.1.* 设 $f_1, \ldots, f_s$ 是 $S = K[x_1, \ldots, x_n]$ 中次数相同、次数为 > 0 的齐次多项式，且 $<$ 是 S 上的一个单项式序。考虑 $in_<(f_1) \ldots, in_<(f_s)$ 中的子环 $K[f_1, \ldots, f_s]$ 和 $K[$。设 $A = K[y_1, \ldots, y_s]$ 是一个以 s 个变量为元、系数取自 K 的多项式环。定义满射环同态 $\varphi: A \to K[f_1, \ldots, f_s]$ 和 $\psi: A \to K[in_<(f_1) \ldots, in_<(f_s)]$，令 $\varphi(y_i) = f_i$，且 $\psi(y_i) = in_<(f_i)$。令 $I = Ker(\varphi)$ 表示 $K[$ 在 $<(f_1) \ldots, in_<(f_s)]$ 中的定义理想，$J = Ker(\psi)$ 表示 $K[$ 在 $<(f_1) \ldots, in_<(f_s)]$ 中的定义理想。设 $<^\sharp$ 是 A 上的一个单项式序，且 $G' = \{g_1, \ldots, g_t\}$ 是 J 关于 $<^\sharp$ 的一个 *Gr¨obner* 基。假设对每个 $1 \leq j \leq t$，均有 $in_{<^\sharp}(g_j) \in in_{<^\sharp}(I)$，并选取满足 $in_{<^\sharp}(g_j) = in_{<^\sharp}(h_j)$ 的 $h_j \in I$。那么 $G := \{h_1, \ldots, h_t\}$ 是 I 关于 $<^\sharp$ 的一个 *Gr¨obner* 基。

证明。令 $\mathcal{H}$ 表示满足 $u \notin$ 的那些单项式 $u \in A$ 的集合（in$_{<^\sharp}(h_1) \ldots$,in$_{<^\sharp}(h_t)$）。只需证明 $\{\varphi(u) : u \in \mathcal{H}\}$ 是一个线性无关集。由于

$$(\mathrm{in}_{<^\sharp}(h_1), \ldots, \mathrm{in}_{<^\sharp}(h_t)) = (\mathrm{in}_{<^\sharp}(g_1), \ldots, \mathrm{in}_{<^\sharp}(g_t)) = \mathrm{in}_{<^\sharp}(J),$$

由此可知 $\{\psi(u) : u \in \mathcal{H}\}$ 线性无关。令 $u_1, \ldots, u_\delta$ 为单项式，其中当 $\xi \neq \xi'$ 时，$u_\xi \neq u_{\xi'}$ 属于满足 $\delta > 1$ 的 $\mathcal{H}$。因此，当 $\xi \neq \xi'$ 时，$\psi(u_\xi) \neq \psi(u_{\xi'})$。假设

$$\sum_{\xi=1}^{\delta} c_\xi \varphi(u_\xi) = \sum_{\xi=1}^{\delta} c_\xi f_1^{\alpha_\xi^{(1)}} \cdots f_s^{\alpha_\xi^{(s)}} = 0, \quad 0 \neq c_\xi \in K.$$

我们注意到

$$\mathrm{in}_<(f_1^{\alpha_\xi^{(1)}} \cdots f_s^{\alpha_\xi^{(s)}}) = (\mathrm{in}_<(f_1))^{\alpha_\xi^{(1)}} \cdots (\mathrm{in}_<(f_s))^{\alpha_\xi^{(s)}} = \psi(u_\xi)$$

并且，由于当 $\xi \neq \xi'$ 时 $\psi(u_\xi) \neq \psi(u_{\xi'})$，存在唯一的 $1 \leq \xi_0 \leq \delta$ 使得

$$0 = \mathrm{in}_< \left(\sum_{\xi=1}^{\delta} c_\xi \varphi(u_\xi) \right) = c_{\xi_0} (\mathrm{in}_<(f_1))^{\alpha_{\xi_0}^{(1)}} \cdots (\mathrm{in}_<(f_s))^{\alpha_{\xi_0}^{(s)}} = c_{\xi_0} \psi(u_{\xi_0}).$$

这就产生了矛盾，因此 G 是相对于 $<^\sharp$ 的 I 的 Gr¨obner 基。 □

注记 1.2. 引理 1.1中，若$<(f_1) \ldots,$ 中$<(f_s)$ 代数独立，则 $f_1, \ldots, f_s$代数独立。

2. Algebras with straightening laws

设 $R = \bigoplus_{n=0}^{\infty} R_n$ 是 K 上的诺特分次代数。设 P 是有限偏序集，并且给定一个单射 $\varphi : P \hookrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n$ ，使得 K- 代数 R 由 $\varphi(P)$ 在 K 上生成。标准单项式是 R 的一个齐次元素，形式为 $\varphi(\gamma_1)\varphi(\gamma_2)\cdots\varphi(\gamma_n)$，其中 $\gamma_1 \le \gamma_2 \le \cdots \le \gamma_n$ 属于 P。若满足以下条件，我们称 R 是 P 上的具有标准化律的代数 [Eis80]：

（ASL -1）标准单项式集合是 R over 的一组基 K;

（ASL -2）若 α 和 β 在 P 中不可比较，且

$$\varphi(\alpha)\varphi(\beta) = \sum_i r_i\, \varphi(\gamma_{i_1})\varphi(\gamma_{i_2})\cdots, \quad 0 \neq r_i \in K, \quad \gamma_{i_1} \le \gamma_{i_2} \le \cdots \tag{2.1}$$

是由（ASL -1）保证的、将 $\varphi(\alpha)\varphi(\beta) \in R$ 表示为不同标准单项式的线性组合的唯一表达式，则对于每个 i， $\gamma_{i_1} \le \alpha$， β。

（ASL-2）中的关系式右端允许为空和（$= 0$）。我们将具有直化律的代数简称为 ASL。

（ASL-2）中的关系称为 R 的标准化关系 。

令 $A = K[x_\alpha : \alpha \in P]$ 表示关于 K 的 $|P|$ 元多项式环，并通过令 $\pi(x_\alpha) = \varphi(\alpha)$ 定义满射 $\pi : A \to R$。 $R = \bigoplus_{n=0}^{\infty} R_n$ 的定义理想 I_R 是 π的核 Ker(π)。若 α 和 β 在 P 中不可比较，则我们引入多项式 A

$$f_{\alpha,\beta} := x_\alpha x_\beta - \sum_i r_i\, x_{\gamma_{i_1}} x_{\gamma_{i_2}} \cdots$$

它由 (ASL-2) 得出并属于 I_R。令 G_R 表示满足以下条件的 $f_{\alpha,\,\beta}$ 的集合： α 与 β 在 P 中不可比较。令 $<_{\mathrm{rev}}$ 表示 A 上由变量排序诱导的反字典序，其中若 $\alpha < \beta$ 在 P 中，则有 $x_\alpha <_{\mathrm{rev}} x_\beta$。由此可知，在 $<_{\mathrm{rev}}$ ($f_{\alpha,\,\beta}$) 中，$= x_\alpha x_\beta$，且 G_R 是 I_R 关于 $<_{\mathrm{rev}}$ 的 Gröbner 基。此外，dim R = rank(P) + 1。

在代数直纹的定义中，若我们只要求满足 (ASL -2)，则称 R 为弱ASL，其定义在 P上，基于 K。寻找判定弱ASL（定义在 P 上，基于 K ）是否为代数直纹（定义在 P 上，基于 K）的准则，将会很有意义。一种可能且标准的方法是计算希尔伯特函数。另一方面，由引理 1.1，我们得到以下结果。

引理 *2.1.* 设 $f_1, \ldots, f_s$ 是 $S = K[x_1, \ldots, x_n]$ 中次数相同的齐次多项式，次数为 > 0，且 $<$ 是 S 上的单项式序。考虑 $<(f_1), \ldots, in_<(f_s)]$ 中的子环 $K[f_1, \ldots, f_s]$ 和 $K[$。设 $P = \{p_1, \ldots, p_s\}$ 是有限偏序集，并定义单射π： $P \to K[f_1, \ldots, f_s]$ 和 π'： $P \to K[in_<(f_1) \ldots, in_<(f_s)]$，令 $\pi(p_i) = f_i$ 且 $\pi'(p_i) = in_<(f_i)$。假设 $K[in_<(f_1) \ldots, in_<(f_s)]$ 是定义在 P 上、基于 K 的代数直纹，并且$K[f_1, \ldots, f_s]$ 是定义在 P 上、基于 K 的弱*ASL*。那么 $K[f_1, \ldots, f_s]$ 是定义在 P 上、基于 K 的代数直纹。

证明。令 $G' = \{f'_{\alpha,\beta} : \alpha, \beta$不可比较$\}$ 为 Ker(π') 的 Gr¨obner 基，它由 $K[$in$_<(f_1) \ldots,$in$_<(f_s)]$ 的标准化关系定义。然后，在 $K[f_1, \ldots, f_s]$ 的标准化关系之后定义的多项式 $f_{\alpha,\beta}$ 与 G' 的多项式具有相同的首项，因此根据引理 1.1，它们构成 Ker(π) 的 Gr¨obner 基。由于 $K[f_1, \ldots, f_s]$ 的定义理想具有由标准化关系组成的 Gr¨obner 基，标准单项式线性无关，并且 $K[f_1, \ldots, f_s]$ 是 P 上的代数直纹，底环为 K。□

例 2.2。令 $P_n = \{(i,\ j) : 1 \le i,\ j \le n\}$ 表示有限偏序集，其偏序定义为：当且仅当 $i \le i'$ 且 $j \le j'$时，$(i,\ j) \le (i',\ j')$。令 $S = K[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n]$ 表示

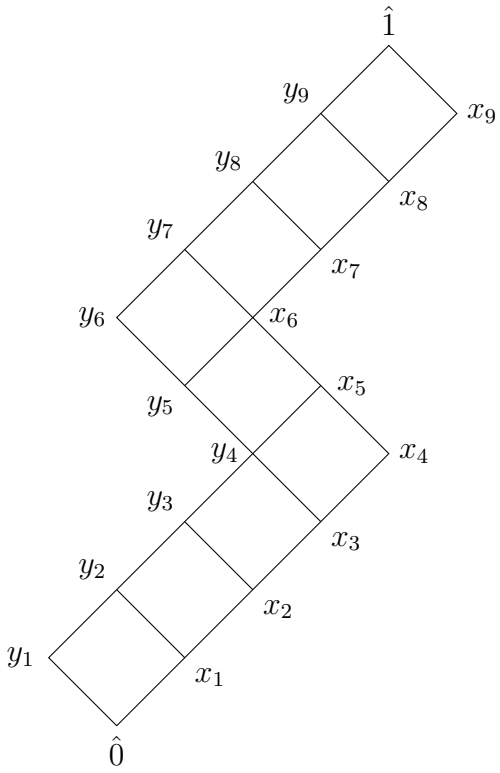


FIGURE 2. 一个薄分配格。

以 $2n$ 个变量构成的多项式环，其系数在 K 上，且 $R_n = K[x_i y_j : \ 1 \le i, \ j \le n]$。定义单射 $\pi : P_n \to R_n$，令 $\pi((i, \ j)) = x_i y_j$，根据 [Hib87，第 98–99] 页中的讨论可知，R_n 是 P_n 上的代数直纹，系数环为 K。

设 $L = \{0_L, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, 1_L\}$ 是一个薄分配格，其 $n+1 =$ 秩为(L)，其中 $0_L < x_1 < \cdots < x_n < 1_L$ 且 $0_L < y_1 < \cdots < y_n < 1_L$(图 2)。注意，一旦 x_1和 y_1 固定，对于 x_i 和 y_i 的 $2 \le i \le n$ 赋值便自动确定。令$S = K[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n]$ 表示以 $2n$ 为变量的多项式环，其中系数取自 K。回顾一下，我们将 x_i 和 y_j 中不可比较的 L 与二次二项式相对应

$$f_{ij} = x_i y_j - (x_i \wedge y_j)(x_i \vee y_j)$$

属于 S。我们在 $<$ 上固定一个单项式序 S，使得对所有 $<(f_{ij}) = x_i y_j$，均有 f_{ij}。我们引入子代数 $\mathcal{R}_K(L)$，它是 S 的子代数，由所有二项式 f_{ij}生成。令 Q_L 为例 P_n 2.2中的子格，由满足 i, j的有序对 ($f_{ij} \in \mathcal{R}_K(L)$ 构成（图 3）。

引理2.3是 Birkhoff 有限分配格基本结构定理的一个简单推论 [HH11，定理 9.1。7]。

引理 2.3。 $\{x_{i-1}, y_{i-1}, x_n, y_n\}$ 上的偏序要么是 $x_{i-1} < x_i, y_{i-1} < y_i, x_{i-1} < y_i$，要么是 $x_{i-1} < x_i$, $y_{i-1} < y_i, y_{i-1} < x_i$。

引理 2.4。 薄分配格的子偏序集 Q_L，其秩为 $L \quad n+1$，是例 P_n 中的偏序集 *2.2* 的链，当且仅当因子格 $D_{2 \cdot 3^3}$ 不是 L的子格。

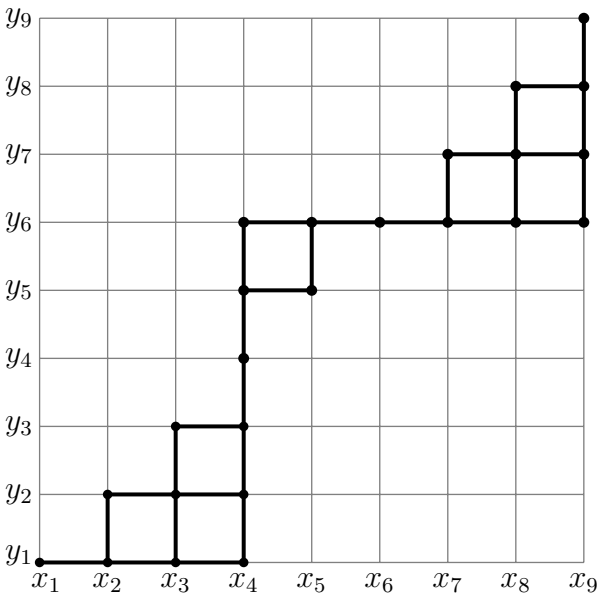


FIGURE 3. 薄分配格的子格 Q_L ，即图 L 2

证明。 假设 $D_{2\cdot 3^3} = \{2^p \cdot 3^q \colon p \in \{0,1\}, q \in \{0,1,2,3\}\}$ 是 L的子格。那么 $(2,3^2) < (2\cdot 3, 3^2) < (2\cdot 3, 3^3)$，且 $(2,3^2) < (2,3^3) < (2\cdot 3, 3^3)$。因此 Q_L 不可能是一条链。

现在，假设因子格 $D_{2\cdot 3^3}$ 不是 L的子格。设 $x_{i-2} < x_{i-1}$， $x_{i-2} < y_{i-1}$， $y_{i-2} < y_{i-1}$。对 n 使用归纳法，使我们可以假设子格 $Q_{L'}$ 中满足 $L' = L \setminus \{x_i, y_i\}$ 的部分是一个链，其极大元为 (x_{i-1}, y_{i-1})。由于 $y_{i-1} < x_i$， $y_{i-1} < y_i$， $x_{i-1} < x_i$，因此 $Q_L = Q_{L'} \cup \{(x_{i-1}, y_i), (x_i, y_i)\}$ 是一个 P_n的链，证毕。□

例2.5。 令 $L = D_{2\cdot 3^{n-1}} = \{\hat{0}, x_1, \ldots\ldots, x_{n-1}, y_1, \ldots\ldots, y_{n-1}, \hat{1}\}$，其中 $2 = y_1$， $3 = x_1$如上所述。如果 $\hat{0} = x_0$和 $\hat{1} = y_n$。若 (ℓ, i) 和 (k, j) 在 Q_L中不可比较，设 $i < j \le k < \ell$，那么经典的 Pl¨ucker 关系给出

$$\begin{aligned} & (y_i x_\ell - y_{\ell+1} x_{i-1})(y_j x_k - y_{k+1} x_{j-1}) \\ = \; & (y_i x_k - y_k x_{i-1})(y_j x_\ell - y_\ell x_{j-1}) - (y_i x_{j-1} - y_j x_{i-1})(y_{k+1} x_\ell - y_{\ell+1} x_k), \end{aligned}$$

换言之，我们有一个关于 $\mathcal{R}_K(L)$ 的二项式生成元的二次关系：

$$f_{\ell,i} f_{k,j} = f_{k,i} f_{\ell,j} - f_{j-1,i} f_{\ell,k+1}.$$

由于 $(k,i) < (\ell,i), (j-1,i) < (\ell,i), (k,i) < (k,j), (j-1,i) < (k,j)$，因此 $\mathcal{R}_K(L)$ 是定义在 Q_L 上、系数环为 K 的弱ASL。

定理 2.6。 薄分配格 L 的并交代数 $\mathcal{R}_K(L)$ 是定义在 Q_n 上、系数环为 K 的弱*ASL*。

证明。 假设 $x_1 < x_2, x_1 < y_2, y_1 < y_2$ ，并令 i_0 为满足$x_{i-2} < x_{i-1}, x_{i-2} < y_{i-1}$, $y_{i-2} < y_{i-1}$且 $y_{i-1} < x_i, y_{i-1} < y_i, x_{i-1} < x_i$的最小整数 i 。令 $L_{(-)}$表示 L 的区间 $[\hat{0}, x_{i_0}]$，令 $L_{(+)}$表示 L的区间 $[x_{i_0-2}, \hat{1}]$。则 (x_{i_0-1}, y_{i_0-1}) 是唯一的

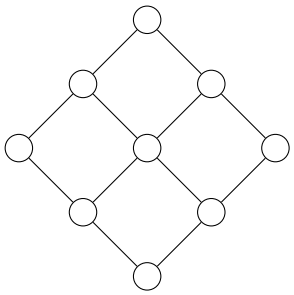


FIGURE 4. 因子格 $D_{2^2.3^2}$。

$Q_{L_{(-)}}$ 的极大元，也是 $Q_{L_{(+)}}$的唯一极小元。此外，在 L中，每个$\alpha \in Q_{L_{(-)}}$ 与每个 $\beta \in Q_{L_{(+)}}$ 都可比较。因此，(x_{i_0-1}, y_{i_0-1}) 是 Q_L的一个顶点。

现在，例 2.5 说明 $\mathcal{R}_K(L_{(-)})$ 是 弱ASL，其底层为 $Q_{L_{(-)}}$，定义在 K 上。此外，对 n应用归纳法，可得 $\mathcal{R}_K(L_{(+)})$ 是 弱ASL，其底层为 $Q_{L_{(+)}}$，定义在 K上。因此 $\mathcal{R}_K(L)$ 是 弱ASL，其底层为 Q_L，定义在 K上，证毕。□

3. RELATIONS OF JOIN-MEET BINOMIALS

设 L 是一个含有 n 个元素 $x_1, \ldots, x_n$ 的有限分配格，$S = K[x_1, \ldots, x_n]$ 是定义在域 K 上、以 n 个变量为元的多项式环。回忆一下，L 的并交二项式为

$$f_{ij} = x_i x_j - (x_i \vee x_j)(x_i \wedge x_j), \quad 1 \leq i < j \leq n.$$

设 $\mathcal{R}_K(L)$ 为并交代数

$$\mathcal{R}_k(L) = k[f_{ij} : 1 \leq i < j \leq n, f_{ij} \neq 0] \subset S$$

属于 L。令 $A = K[y_{i,j} : 1 \leq i < j \leq n, f_{ij} \neq 0]$ 表示 K 上的多项式环，并通过设定 $\pi(y_{ij}) = f_{ij}$来定义满射环同态 $\pi : A \to \mathcal{R}_K(L)$。$\mathcal{R}_K(L)$ 的定义理想$I_{\mathcal{R}_K(L)}$ 是 π 的核。自然会问，对于哪些分配格 L，并交代数 $\mathcal{R}_K(L)$ 同构于多项式环，也就是说，并交二项式是代数独立的。

例 3.1。因子格 $D_{2^2.3^2}$ (图 4) 有 9 个二项式生成元。这些是一个 3×3 矩阵的二阶子式。由 [Bru+22、定理6.4.7 (c)] 可知，并交代数 $\mathcal{R}_K(D_{2,\ 2})$ 是一个多项式环。

定理 3.2。设 L 是一个分配格。当且仅当 L 是平面的，且因子格 $D_{2.3^3}$ 不是 L 的子格时，$\mathcal{R}_K(L)$ 是一个多项式环。

证明。若 L 是非平面的，那么秩3布尔格 B_3 是 L的子格。正如引言中所见，$\mathcal{R}_K(B_3)$不可能是多项式环。因此，$\mathcal{R}_K(L)$不可能是多项式环。设 L 是平面的。若因子格 $D_{2.3^3}$ 是 L的子格，那么定义理想¨中会出现一个 Pl$I_{\mathcal{R}_K(L)}$ucker 关系，该关系属于 $\mathcal{R}_K(L)$，如例2.5所示。

假设 L 是平面的，且 $D_{2.3^3}$ 不是 L的子格。若 L 是薄的，则 $\mathcal{R}_K(L)$ 是多项式环（引理 2.4）。若 L不是薄的，且 $D_{2.3^3}$ 不是 L的子格，则$L = D_{2^2.3^2}$，所需结果即为例 3.1。□

如引言中所述，我们项目的最终目标之一是分类那些分配格 L，使得其定义理想 $I_{\mathcal{R}_K(L)}$ 由 $\mathcal{R}_K(L)$ 的二次式生成。为实现这一目标，我们首先证明薄分配格 L 的定义理想 $I_{\mathcal{R}_K(L)}$ 由二次式生成。回顾一下，有限简单分配格 L 是薄的，当且仅当 $\theta(L) = 2$。

定理 3.3。设有限简单分配格 L 是薄的。则 $\mathcal{R}_K(L)$ 的定义理想 $I_{\mathcal{R}_K(L)}$ 由二次式生成，并具有一个二次 *Gr¨obner* 基。特别地，$\mathcal{R}_K(L)$ 是 *Koszul* 代数。此外，$\mathcal{R}_K(L)$ 是 *Gorenstein*。

证明。引理 2.1 与定理 2.6 一起保证，$\mathcal{R}_K(L)$ 的定义理想 $I_{\mathcal{R}_K(L)}$ 由构成 Gr¨obner 基的二次式生成。特别地，根据 Fr¨oberg 的结果，$\mathcal{R}_K(L)$ 是 Koszul [Fr¨o99]。此外，由于偏序集 Q_n（$\mathcal{R}_K(L)$ 在其上是代数直纹）是纯的，根据 Gorenstein 判据，$\mathcal{R}_K(L)$ 是 Gorenstein [Hib87，第 105] 页。□

例 3.4。设 L 和 L' 分别为图 5 和图6中的非平面分配格。它们都满足 $\theta(L) = \theta(L') = 3$。然而，$I_{\mathcal{R}_K(L)}$ 的定义理想$\mathcal{R}_K(L)$由二次式生成，而 $I_{\mathcal{R}_K(L')}$的定义理想 $\mathcal{R}_K(L')$不能由二次式生成。

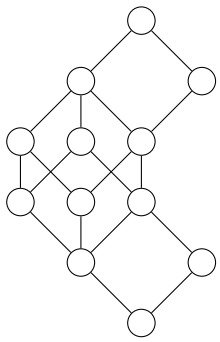


FIGURE 5. 具有 $\theta(L)$ 的非平面分配格 $= 3$

引理 3.5。设 L 为有限简单平面分配格，并假设 $\theta(L) = r$。则因子格 $D_{2^{r-1}.3^{r-1}}$ 是 L的一个区间。

证明。设 P_L 为 L的所有并不可约元构成的偏序集。有 $L = \mathcal{J}(P_L)$。由于L 是平面的，根据迪尔沃思定理 [Sta12，第3章，习题 77]，P_L 可以分解为 P_L的链 C 与 C' 的不交并。令 C : $x_0 < \cdots < x_t$ 且C' : $y_0 < \cdots < y_s$。若 $a \in L$等于 $I \in \mathcal{J}(P_L)$，且 x_p（分别为 y_q）是 $I \cap C$（分别为 $I \cap C'$）的极大元，则记作 $a = (x_p, y_q)$，其中 $p = -1$ 当$I \cap C = \emptyset$时成立。现在，设 $\rho_L(i) = r \geq 2$。令 a_1，.....，a_r 表示属于$\{a \in L$的元素：秩$_L(a) = i\}$。令 $a_j = (x_{p_j}, y_{q_j})$ $1 \leq j \leq r$，其中 $p_j + q_j = i - 2$。令 $p_1 < \cdots < p_r$和 $q_1 > \cdots > q_r$。由于 $a_1 = (x_{p_1}, y_{q_1})$ 和 $a_r = (x_{p_r}, y_{q_r})$ 是 P_L 的偏序理想，因此P_L中满足 $x_{p_1} < x \leq x_{p_r}$ 的每个 $x \in C$ 与满足 $y_{q_r} < y \leq y_{q_1}$ 的每个 $y \in C'$ 都不可比较。特别地，p_1，.....，p_r 以及 q_r，.....，q_1 都是连续整数。此外，

$$I_* = \{x_0, x_1, \ldots, x_{p_1}, y_0, y_1, \ldots, y_{q_r}\}, \quad I^* = \{x_0, x_1, \ldots, x_{p_r}, y_0, y_1, \ldots, y_{q_1}\}$$

是 P_L 的偏序理想。令 $a_* = (x_{p_1}, y_{q_r}) \in L$ 和 $a^* = (x_{p_r}, y_{q_1}) \in L$。由此可得，$L$ 的区间 $[a_*, a^*]$ 是因子格 $D_{2^{r-1}.3^{r-1}}$。□

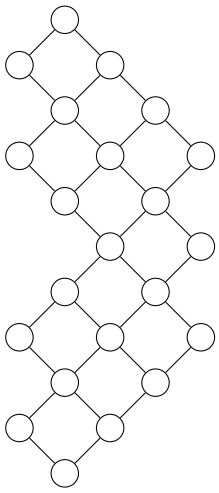


FIGURE 6. 带有 $\theta(L')=3$ 的平面分配格

引理3.6。设 L 是有限简单平面分配格，并假设存在 i_0，使得 $\rho_L(i_0)=\rho_L(i_0+1)=3$。那么因子格 $D_{2^2\cdot 3^3}$ 是 L 的一个区间。

证明。我们沿用引理 3.5 的证明。设 $a=(x_{p-1},y_{q+1})$ $b=(x_p,y_q)$ $c=(x_{p+1},y_{q-1})$ 是 L 中秩为 $_L(a)=$ 秩$_L(b)=$ 秩$_L(c)=i_0$ 的元素。那么 $a'=(x_p,y_{q+1})$ $c'=(x_{p+1},y_q)$ 是 L 中秩为 $_L(a')=$ 秩$_L(c')=i_0+1$ 的元素。由于 $\rho_L(i_0+1)=3$，可知 $a''=(x_{p+2},y_{q-1})$ 或 $c''=(x_{p-1},y_{q+2})$ 必属于 L。设 $a''=(x_{p+2},y_{q-1})\in L$。因此，$x_p<x_{p+1}<x_{p+2}$ 和 $y_q<y_{q+1}$ 是链的不交并。于是，L 的区间 $[f,g]$（其中 $f=(x_{p-1},y_{q-1})$ 且 $g=(x_{p+2},y_{q+1})$）是因子格 $D_{2^2\cdot 3^3}$。□

引理 3.7。设 L 是一个有限分配格，且设 L' 是 L 的一个区间。如果 $\mathcal{R}_K(L)$ 的定义理想 $I_{\mathcal{R}_K(L)}$ 由二次式生成，则 $I_{\mathcal{R}_K(L')}$ 也由二次式生成。

证明。我们首先回顾，由于 L' 是 L 的一个区间，因此当且仅当 $\alpha\wedge\beta$ 和 $\alpha\vee\beta$ 属于 L' 时，α、$\beta\in L$ 才属于 L'。我们断言 $\mathcal{R}_K(L')\subset\mathcal{R}_K(L)$ 是一个代数回缩[OHH00，第 747] 页。设 $S=K[x_i:x_i\in L]$ 和 $S'=K[x_j:x_j\in L']$ 是 K 上的多项式环。我们考虑自然的满同态 $p:S\to S'$：若 x_i 属于 L'，则固定 x_i；否则将 x_i 映射为 0。如果 α、β 属于 L'，则 $p(f_{ij})=f_{ij}$；否则，$x_{\alpha\vee\beta}$ 和 $x_{\alpha\wedge\beta}$ 中至少有一个不属于 L'，且 $p(f_{ij})=0$。因此，$\mathcal{R}_K(L)$ 在 p 下的像为 $\mathcal{R}_K(L')$，而 p 对 $\mathcal{R}_K(L')$ 的限制是恒等映射。由此可知，$\varepsilon=p_{|\mathcal{R}_K(L')}$ 是 $\mathcal{R}_K(L')\subset\mathcal{R}_K(L)$ 的回缩映射。通过比较 $\mathcal{R}_K(L')$ 和 $\mathcal{R}_K(L)$ 的定义理想的分次贝蒂数，即可得到所需结论 [OHH00，推论 2.5]。□

定理 3.8. 设 L 是一个有限简单平面分配格，并假设满足以下条件之一：

(i) $\theta(L)>3$; *(ii)* $\theta(L)=3$ 且存在 i_0，使得 $\rho_L(i_0)=\rho_L(i_0+1)=3$。

则 $I_{\mathcal{R}_K(L)}$ 的定义理想 $\mathcal{R}_K(L)$ 不能由二次式生成。

证明。引理 3.6 和 3.5 保证 L的一个区间是因子格 $D_{2^2\cdot 3^3}$.

在 [BCV13] 中，作者证明理想 $I_{\mathcal{R}_K(D_{2^2\cdot 3^3})}$ 具有极小三次关系，与 Pl¨ucker 二次式共同构成生成元系 [Hua+21]。

由引理 3.7 可知，$I_{\mathcal{R}_K(L)}$ 不能由二次式生成。 □

我们以如下猜想结束本文。

猜想 3.9。 设 L 是一个简单平面分配格。那么， $\mathcal{R}_K(L)$ 的定义理想 $I_{\mathcal{R}_K(L)}$由二次式生成，当且仅当至多有一个区间是 $D_{2^2\cdot 3^2}$。

Appendix

我们简要证明如下经典结果：Grassmann簇 $\mathrm{Gr}_K(d,\ n)$ 的齐次坐标环是一个定义在 K上的分配格的代数直纹。

设 $2 \le d \le n$ 为整数。令 L 表示满足 $1 \le i_1 < \cdots < i_d \le n$的那些符号 $[i_1 \cdots i_d]$ 的集合。我们在 L 上定义偏序，规定若$i_1 \le i'_1,\ \ldots,\ i_d \le i'_d$，则 $[i_1 \cdots i_d] \le [i'_1 \cdots i'_d]$。由此可知， L 是一个分配格，并且 $[i_1 \cdots i_d] \in L$ 是并不可约的，当且仅当 $[i_1 \cdots i_d]$ 属于以下情形之一：

- $[a, a+1, \ldots, a+(d-1)], 1 < a \le n-d+1$;
- $[1, 2, \ldots, a, a+b, a+b+1, \cdots, b+d-1], 1 < a < d, 1 < b \le n-d+1$.

令 $X = \{x_{ij}\}_{1\le i\le d, 1\le j\le n}$ 表示变量矩阵 $d \times n$ 和 $[i_1, \ldots, i_d]$，其中$1 \le i_1 < \cdots < i_d \le n$ 是由 X 中第 i_1、.....、i_d 列组成的 $d \times d$ 子矩阵的行列式。令 $S = K[x_{ij}\colon 1 \le i \le d, 1 \le j \le n]$ 表示域 K 上以 dn 个变量为元的多项式环。令 A 表示由满足$1 \le i_1 < \cdots < i_d \le n$ 的那些行列式 $[i_1, \ldots, i_d]$ 在 S 中生成的子环。现在，以显而易见的方式将 L 视为 A 的子集。Pl¨ucker 关系保证 A 是定义在 L 上的域 K 上的弱ASL。由于存在一个 $<$单项式序，使得在 S 中，$\mathrm{in}_<([i_1, \ldots, i_d]) = x_{1,i_1}x_{2,i_2}\cdots x_{d,i_d}$ [Bru+22，第 80] 页；根据引理 2.1，要证明 A 是定义在 L 上的域 K 上的 ASL，只需证明以下引理。

引理 3.10。 定义单射 $\psi\colon\ L \to S$，令 $\psi([i_1, \ldots, i_d]) = \prod_{j=1}^{d} x_{j,\ i_j}$。于是，环面环 $K[\psi(\xi)\colon \xi \in L]$ 是 L 上的代数直纹，其基环为 K。

证明。 令 P 表示 L的并不可约元集合。则 P 可分解为链 P_1、P_2..... P_d的不交并，其中

$$\begin{aligned}
P_1 &= \{[2,3,\ldots,d+1],[3,4,\ldots,d+2],\ldots,[n-d+1,n-d+2,\ldots,n]\},\\
P_2 &= \{[1,3,4,\ldots,d+1],[1,4,5,\ldots,d+2],\ldots,[1,n-d+2,n-d+3,\ldots,n]\},\\
P_3 &= \{[1,2,4,5,\ldots,d+2],[1,2,5,6,\ldots,d+3],\ldots,[1,2,n-d+3,\ldots,n]\},\\
&\vdots\\
P_d &= \{[1,2,3,\ldots,d-1,d+1],[1,2,3,\ldots,d-1,d+2],\ldots,[1,2,3,\ldots,d-1,n]\}.
\end{aligned}$$

我们引入符号 x_{ij}、$1 \le i \le d$、$1 \le j \le n$，并将每个 P_i 表示为如下形式

$$P_i : x_{i,i+1} < x_{i,i+2} < \cdots < x_{i,n-d+i}.$$

例如，在图7中，有$[1345] = x_{2,3}$ 和$[1256] = x_{3,5}$。此外，我们向 P添加一个^唯一极小元 $0 = x_{1,1}x_{2,2}\cdots x_{d,d}$。我们将单射 $\varphi\colon\ L \to S$定义为令 $\varphi([i_1, \ldots, i_d]) = f_1 f_2 \cdots f_d$, 其中

$$f_j = x_{j,j}x_{j,j+1}x_{j,j+2}\cdots x_{j,i_j}.$$

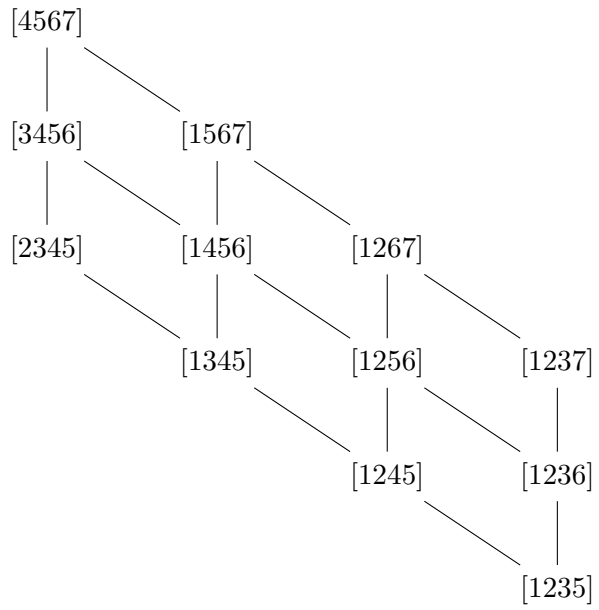


FIGURE 7. 偏序集 P 及其 $d = 4$ 和 $n = 7$

由于$x_{j,j+q} = [1, 2, \ldots, j-1, j+q, j+q+1, \ldots] \leq [i_1, \ldots, i_d]$当且仅当 $j+q \leq i_j$，环面环 $K[\varphi(p) : p \in L]$ 与 $\mathcal{R}_K(L)$中引入的 [Hib87]一致。特别地，$K[\varphi(\xi) : \xi \in L]$ 是定义在 K上的、以 L 为基的代数直纹。另一方面，将单射 $\psi : L \to S$定义为令 $\psi([i_1, \ldots, i_d]) = \prod_{j=1}^{d} x_{j,i_j}$，显然有 $K[\varphi(\xi) : \xi \in L] = K[\psi(\xi) : \xi \in L]$。□

REFERENCES

[BCV13] Winfried Bruns、Aldo Conca 和 Matteo Varbaro。“一般矩阵子式之间的关系”。载于：《数学进展》244（2013），第 171–206 页。[Bel+22] Matias von Bell 等。“三角剖分、序多面体和广义蛇形偏序集”。载于：组合理论2（2022）。[Bru+22] Winfred Bruns 等。行列式、*Gr¨obner* 基与上同调。《数学专著丛书》。Springer 国际出版公司，2022。[DRS74] Peter Doubilet、Gian-Carlo Rota 和 Joel Stein。“组合理论基础：IX 不变量理论中的组合方法”。载于：应用数学研究53.3（1974），第 185–216 页。[Eis80] David Eisenbud。“具有标准化律的代数导论”。载于：环论与代数 *III*。Bernard R. McDonald 编。第 55 卷。《纯粹与应用数学讲义》。纽约：Marcel Dekker，1980，第 243–268 页。[Fr¨o99] Ralf Fr¨oberg。“Koszul 代数”。载于：交换环理论进展。第205

《纯数学与应用数学讲义》。1997年非斯会议论文集。纽约：Marcel Dekker，纽约，1999年，第337–350页。[HH11] J¨urgen Herzog 和 Takayuki Hibi。《单项式理想》。第260卷。数学研究生教材。Springer，2011年。

[HH23] J¨urgen Herzog 和 Takayuki Hibi。“有限分配格、多米诺多格与 König 型理想”。载于：《国际数学杂志》34（2023）。[Hib87] Takayuki Hibi。“分配格、仿射半群环与具有标准化直化关系的代数”。载于：《交换代数与组合学》。Masayoshi Nagata 和 Hideyuki Matsumura 编。第11卷。纯数学高级研究。阿姆斯特丹：North-Holland，1987年，第93–109页。[HMT26] Akihiro Higashitani、Koji Matsushita 和 Koichiro Tani。“有限分配格所产生子代数的霍瓦茨基基”。载于：《代数杂志》693（2026），第805–823页。[Hod43] W. V. D. Hodge。“形式理论中的若干计数结果”。载于：《剑桥哲学学会数学学报》39.1（1943），第22–30页。[Hua+21] Hang Huang 等。“泛矩阵子式之间的关系”。载于：《数学进展》386（2021）。[OHH00] Hidefumi Ohsugi、J¨urgen Herzog 和 Takayuki Hibi。“组合纯子环”。载于：《大阪数学杂志》37（2000），第745–757页。[Sta12] Richard Stanley。《计数组合学，第一卷，第二版》。第49卷。剑桥高级数学研究丛书。剑桥大学出版社，2012年。

作者地址：

(Barbara Betti) Otto-von-Guericke-University Magdeburg Institut für Algebra und Ge- ,, ometrie Universitätsplatz 2 Magdeburg Germany.
„*Email address*: barbara.betti@ovgu.de

(Takayuki Hibi) Department of Pure and Applied Mathematics Graduate School of Informa- ,, tion Science and Technology Osaka University Suita Osaka 565–0871 Japan.
„ ,*Email address*: hibi@math.sci. 大阪 -u.ac.jp