空气阻力控制欧拉圆盘的有限时奇异性

Benjamin Thorne, [1,*] Ahmad Zareei, [1] Kausalya Mahadevan, [1] Shmuel M. Rubinstein, [1,2] 和 Ariel Amir[3]1美国马萨诸塞州剑桥，哈佛大学工程与应用科学学院2以色列耶路撒冷，耶路撒冷希伯来大学拉卡物理研究所3以色列雷霍沃特，魏茨曼科学研究院复杂系统物理系（日期：2026年3月17日）

arXiv:2603.14520v1 [cond-mat.soft] 15 Mar 2026

摘要

圆盘侧翻后旋转至静止的运动，是有限时间奇点的经典例子，但主导这一过程的耗散机制仍存在争议。我们利用立体高速成像，研究了不同表面上质量和半径各异的圆盘的动力学。研究表明，奇点附近的晚期运动受圆盘下方边界层中的剪切所产生的黏性空气阻力支配；圆盘质量对动力学的影响、部分真空中的测量结果，以及使用钢环进行的几何对照实验，均为这一结论提供了证据。在较早阶段，耗散主要由滚动摩擦主导；在玻璃表面上，滚动摩擦随圆盘质量增加呈现出意料之外的次线性标度，这表明存在基于黏附的滚动阻力。这些结果阐明了欧拉圆盘奇点背后的耗散机制，并对低负载、光滑表面上的滚动接触系统具有更广泛的启示。

当硬币在桌子上旋转时，会经历一种短暂但独特的运动。它首先绕质心在边缘滚动，随着能量损失，频率迅速升高，最终发出哐当声并突然停止。一种名为 欧拉圆盘（Toysmith，美国）的热门物理玩具，是这一系统的优化版本，由一个沉重的钢制圆盘和一个凹面镜底座组成。其较大的质量和低摩擦设计使其能够持续旋转长达 150 s，频率达到 100 Hz 以上。尽管这一系统结构简单且广受欢迎，但其剧烈加速和突然停止的物理起因仍存在争议。

在无摩擦极限下，圆盘绕质心滚动的运动早已得到理解。角动量守恒给出了接触点的进动频率 Ω 与倾斜角 θ 之间的关系：

$$\Omega^2 \sin\theta = \frac{4g}{R}, \tag{1}$$

其中， R 是圆盘半径， g 是重力加速度 [1, 2]。相应的能量平衡给出了耗散率

$$\dot{E} = \frac{3}{2} mgR\dot{\theta}, \tag{2}$$

其中， m 是圆盘的质量。这里， $1/3$ 的能量为动能，这与维里定理一致。Moffatt [3] 最先研究了能量耗散率，并证明如果耗散率 Φ随 $\theta \to 0$增大，那么系统会趋近于所谓的

有限时奇异性；这解释了为何即使圆盘仍在不断损失能量，Ω 也会表现出发散。Moffatt 进一步提出，能量耗散是由圆盘下方薄间隙中的黏性空气阻力造成的，$\Phi_{gap} = \pi\eta g R^2/\theta^2$，其中 η 是空气黏度。代入方程 2 并积分，可得幂律行为

$$\Omega^{-2} \propto \theta = A(t_f - t)^n, \tag{3}$$

其中 $A = (2\pi\eta R/m)^{1/3}$, $n = 1/3$ 而 $t_f - t$ 表示圆盘停止前剩余时间的近似值。

后续实验证实了奇异行为和方程 3 的一般形式，但对空气阻力机制提出了质疑，发现动力学具有表面敏感性，且指数大于预期。报告的指数包括 $n = 2/3$ [4, 5], $n = 1/2$ [6, 7], ，或是在早期由 $n = 2/3$交叉转变为晚期的 $n = 1/2$ [8]。指数 $n = 2/3$ 通常归因于滚动摩擦，其满足 $\Phi \propto \Omega$ [9]；而 $n = 1/2$则意味着 $\Phi \propto \Omega^2$, ，这与黏性滚动摩擦 [8]或湍流空气阻力 [10]相符。对 Moffatt 理论的进一步修正纳入了黏性边界层厚度，得出 $n = 4/9$ [10]，这在实验上难以与 $n = 1/2$ [11, 12]区分。因此，不同的耗散机制可能产生几乎无法区分的指数，使主导机制仍未确定。尽管 n 仅体现能量耗散对 Ω 的依赖，但方程 3 中与时间无关的前因子 A 取决于物理参数，例如 m 和 R，这些参数可以系统地改变。据我们所知，尚无研究利用这种依赖关系来确定主导耗散机制。

在此，我们通过系统改变圆盘在不同表面上的质量和半径，并利用立体高速成像测量 $\theta(t)$ 和 $\Omega(t)$，确定主要的能量耗散机制。我们表明，晚期动力学与圆盘下方黏性边界层中的空气阻力所致的耗散相符，而运动早期阶段则由滚动摩擦主导。我们通过真空测量以及使用钢环进行的几何对照实验，验证了空气阻力的作用。此外，我们发现，早期由滚动摩擦主导的动力学表现出对圆盘质量的意外敏感性：较重的圆盘比轻圆盘旋转的时间显著更长。

我们通过加工不同厚度和直径的钢圆盘和铝圆盘开展实验，其中一些圆盘的边缘带有半径为 1.6 毫米的圆角，另一些则保留锐边；所有圆盘参数汇总于表 S1。测试

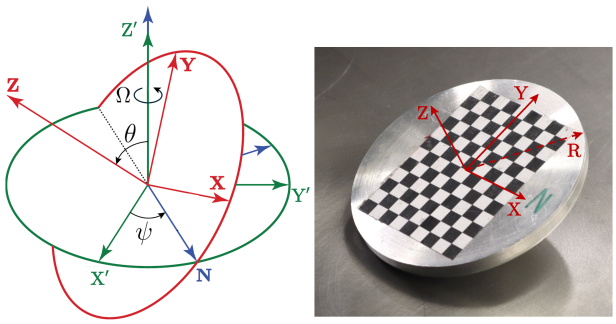

图 1. **左：** 欧拉圆盘系统示意图。进动频率 $\Omega = \dot{\psi}$ 对应于接触点的频率。**右：** 置于钢表面上的 84 克铝圆盘。

表面由平整的 60 厘米 $\times$ 60-厘米玻璃板（厚 3.2 毫米）、铝板（厚 2.3 毫米）和钢板（厚 3.4 毫米）组成，安装在丁基橡胶上以减少振动；所有表面均采用出厂表面处理，未经改动。

在每个圆盘的顶面贴上印有边长为 4.7 毫米方格的 9×12 棋盘格图案纸张，使用双面胶带固定；见图 1。一对同步高速摄像机（美国 Phantom）从不同视角以每秒 1000 帧的速度记录运动的最后 10 秒。使用 MATLAB 的立体相机标定工具箱[5, 13]重建每个棋盘格方格角点的三维位置。随后将这些点拟合到一个平面，据此提取相对于圆盘静止位置的倾斜角 θ 和进动角ψ；然后通过对 $\psi(t)$ 求导得到频率 $\Omega(t)$。图 1 展示了系统示意图以及其中一个圆盘的照片。以往研究表明，尽管初始条件 [4, 7, 8]存在差异，欧拉圆盘的晚期动力学仍具有可重复性；因此，所有圆盘均用手旋转。

我们将 t_f 定义为方程 3 中渐近幂律的外推坍塌时间。具体而言，选择 t_f，使轨迹最后 0.1 秒在双对数空间中尽可能呈线性（即残差最小）。按照此定义，t_f 通常比圆盘最后一次被追踪到的运动早约 3 毫秒（图 S1 [14]）。我们认为，t_f 之后的短暂运动是圆盘与表面失去接触所致，这与此前的报告一致 [12, 15, 16]。

在运动的最后 10 秒内，$\theta\,(t_f - t)$ 中出现了两种趋势。首先，随着圆盘逐渐静止，幂律指数 n 不断减小，这表明占主导地位的

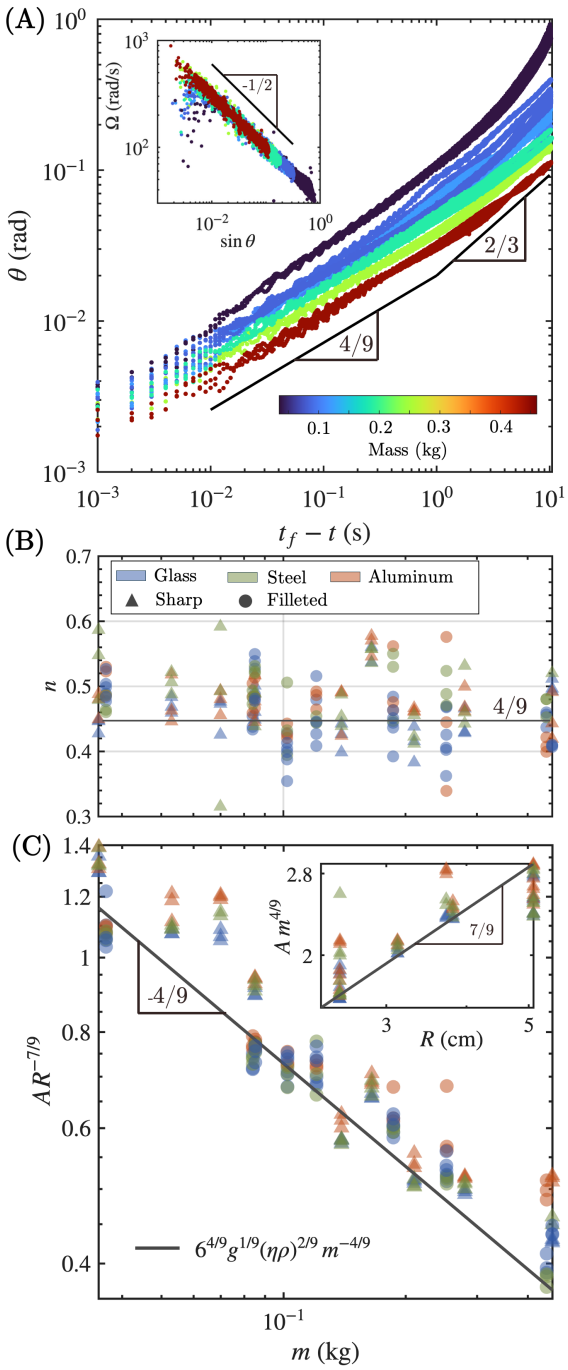

图 2. **A**） θ 与 $t_f - t$ 的关系：不同质量、直径恒定的玻璃表面圆角圆盘。每个圆盘重复测量三次。插图：对应的 Ω 与 sin θ 数据，最佳拟合为 $\Omega \propto (\sin\theta)^{-.49}$。**B**）根据不同表面上锐边圆盘和圆角圆盘运动最后 0.1 s 的数据，拟合式（3）得到的指数 n 。**C**）拟合式（3）得到的前因子 A，按$R^{-7/9}$ 缩放，取运动最后 0.1 s 的数据。插图：不同半径的尖锐圆盘的 A与 R 的关系；按$m^{4/9}$ 缩放。

耗散机制。其次，数据表现出显著的圆盘质量依赖性：如图 2A 所示，在给定的 $t_f - t$ 值下，较重的圆盘达到的倾斜角小于较轻的圆盘。在整个运动过程中，圆盘始终保持良好的滚动接触，并满足公式 1；图 2A（插图）中所有质量对应的 Ω(sin θ) 曲线重合，证明了这一点。这也证实了倾斜角和频率的指数之间存在如下关系： $n_\Omega = -n_\theta/2$。图 S2-S3[14] 展示了钢和铝表面以及锐边圆盘的补充数据。

典型的滚动摩擦模型无法解释图 2A 中观察到的质量依赖性。这是因为模型假设耗散与法向力成正比， $\Phi_{\text{roll}} = \mu m g R\Omega$，其中 μ 是摩擦系数 [4, 5, 8, 9]。由于总机械能也与质量成正比，代入公式 2 后会预测出与质量无关的动力学。相比之下，空气阻力自然会引入质量依赖性：阻力主要取决于圆盘半径，而总机械能则随圆盘质量线性增加。因此，预计较重的圆盘比轻的圆盘旋转得更快，这类似于密度较大的物体在流体中下落时具有更高的终端速度。

受这种质量依赖性的启发，我们将黏性空气阻力视为支配晚期动力学的一种候选机制。Bildsten [10] 对圆盘下方黏性边界层中剪切产生的耗散进行了建模，表示为 $\Phi_{\text{BL}} = 4g^{5/4}R^{11/4}\sqrt{\eta\rho}\,\theta^{-5/4}$，其中$\rho$ 为空气密度。将其代入方程 2 并积分可得

$$\theta(t) = \frac{6^{4/9} g^{1/9} (\eta\rho)^{2/9} R^{7/9}}{m^{4/9}} (t_f - t)^{4/9} \tag{4}$$

w这解释了观测到的质量依赖性，并预测 $n = 4/9$。

将图 2A 和 S2 中最后 0.1 s 的数据拟合到方程 3，得到所有圆盘的平均衰减指数 $n = 0.46 \pm 0.04$ ，与方程 4 的边界层预测一致。虽然随着圆盘质量增加， n呈现出略微减小的趋势，但这种变化幅度不大，可能反映了较早时刻耗散的残余贡献。拟合指数与 m 的关系图见图 2B。将指数固定为$n = 4/9$ ，并拟合 $\theta(t) = A(t_f - t)^{4/9}$，自由参数 A 紧密符合方程 4 的预测，无需使用可调参数；见图 2C。由于方程 4 是由标度论证推导而来，前因子预计不会完全精确；若要精确验证，则需要对流固耦合问题进行完整的数值求解。尽管如此，对于半径各异的锐边圆盘，我们同样观察到结果与预测的

标度关系 $A \propto R^{7/9}$一致；见图 2C（插图）。此外，钢、玻璃和铝的数据塌缩表明，其表面敏感性与空气阻力耗散相符。相比之下，早期动力学对表面高度敏感（图 S2 和 S5A）。

此前的实验研究通过分析圆盘在部分真空中的运动，考察了空气阻力对欧拉圆盘的作用，并得出结论认为其影响可以忽略不计[4, 17]。这些研究主要关注整体停止时间的变化，并隐含地假设空气阻力在整个运动过程中都占主导地位。然而，如果黏性空气阻力仅在运动的最后阶段变得显著，那么它对总停止时间的影响可能太小而无法检测到，尤其是对于 μ [17] 较大的圆盘。此外，在 Moffatt 空气阻力模型中，耗散率仅取决于空气黏度，因此基本不受压力影响；因此，在部分真空条件下，预计不会出现显著差异。相反，式 4 中的黏性边界层模型预测，空气阻力应随空气密度呈现微弱但可测量的变化$\rho^{2/9}$。

为了检验这一预测，我们研究了在 0.1 atm 部分真空条件下于玻璃上旋转的圆盘的晚期动力学。圆盘先在大气压下用手旋转，随后密封舱室，并在约 30 秒内抽气。使用放置在舱室外的立体摄像机记录最后 10 秒内圆盘的运动。由于旋转总时间通常约为 120 秒，运动的最后阶段实际上是在压力恒定的条件下进行的。环境压力下的对照实验在同一舱室中进行，不施加真空。在部分真空条件下，我们观察到 $\theta(t_f - t)$ 减小，表明耗散减弱，如图 3A 所示。考虑到滚动摩擦与黏性空气阻力共同作用时，这一减小幅度与式 4 的预测一致。

早期动力学由一种对表面敏感的行为主导，其有效指数为 $n \approx 2/3$ ；如图 2A 和 S2 [14]所示，我们将其归因于滚动摩擦。为同时模拟滚动摩擦和空气阻力耗散，我们令 $-E = \Phi_{\mathrm{BL}} + \Phi_{\mathrm{roll}}$ ，由此得到

$$\frac{3}{2} mgR\dot{\theta} = -4g^{5/4}R^{11/4}\frac{\sqrt{\eta\rho}}{\theta^{5/4}} - \mu mgR\cos\theta\,\Omega. \tag{5}$$

对公式5进行数值积分，得到 $\theta(t)$，并据此生成图 3A 所示的理论预测。

该解呈现出从 $n = 2/3$ 的交叉转变：在早期，滚动摩擦

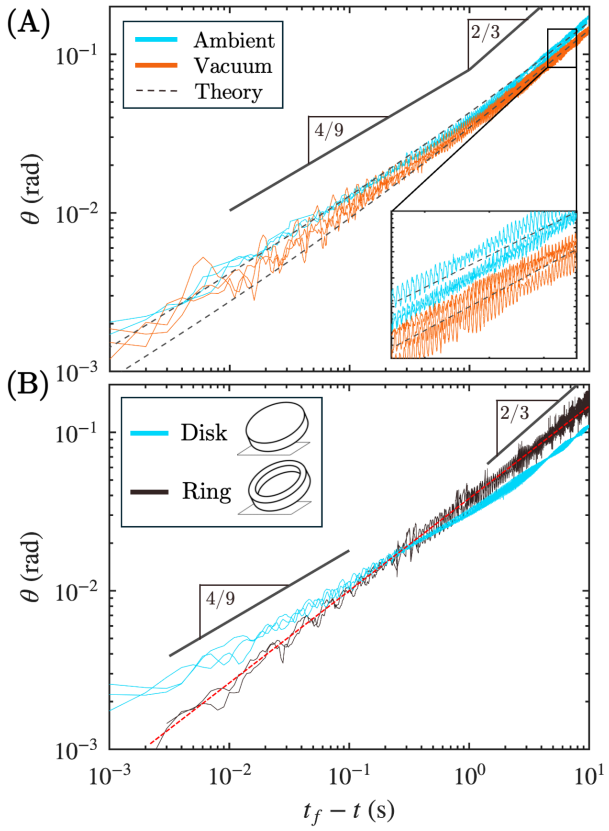

图3. **A)** 在环境条件下和0.1 atm部分真空中，445 克钢制圆盘置于玻璃上时的 θ 与 $t_f - t$ 关系。虚线表示公式5的解，拟合参数为 $\mu = 10^{-4}$，以及 $\rho_{amb.} = 1.18$ kg/m^{3}和 $\rho_{vac} = 0.118$ kg/m^3。插图：放大部分。**B)** 445 克钢制圆盘和740 克钢制环形盘置于玻璃板上时的 θ 与 $t_f - t$ 关系。图中以红色显示幂律拟合，作为视觉参考。频率（Ω）数据见图S4。

占主导地位；到后期，黏性空气阻力变得显著。由于空气阻力项显式依赖空气密度 ρ，该解在后期对压力越来越敏感。通过令两种耗散率相等，可以估算交叉角，得到 $\theta_c = \left(\frac{2R^{9/4}\sqrt{\eta\rho}}{\mu m g^{1/4}}\right)^{4/3}$。在环境压力下对图 3A 中的数据进行拟合，并将 μ 作为自由参数，可得 $\theta_c \approx 3 \times 10^{-2}$ rad，与实验数据 [18]较为吻合。

在足够低的压力下，由圆盘下方黏性边界层增厚所导致的另一种交叉转变预计会出现。随着空气密度降低，边界层厚度 $\delta \approx \sqrt{2\eta/(\rho\Omega)}$ 会增加，最终可能扩展至圆盘下方的整个间隙。在这一极限下，预计 Moffatt 预测的压力不敏感标度关系将适用。

令 $\delta = R\sin\theta$，在 0.1 atm [10] 下，转变角为 $\theta_{\delta\sim R\theta} = (\eta^2/(4gR^3\rho^2))^{1/3} \approx 0.02$ rad。我们在图 3A 中未观察到明显转变至 Moffat 的 $n = 1/3$状态；不过，我们确实发现，公式5 低估了 $\theta(t)$ 的晚期数值，这表明压力不敏感耗散机制可能在圆盘运动的最后阶段发挥作用。由于雷诺数 $Re = 2\rho\sqrt{gR^3/(\theta\eta^2)}$ 与 ρ 成正比，因此在低压下不太可能转变为湍流。不过，在环境压力 [10] 下仍可能发生这种转变。详细的数值解或许能阐明空气阻力的结构及其在运动最后阶段的演变。

作为最后一项几何对照实验，我们考察钢制环形盘在玻璃上的运动。与实心圆盘不同，环形盘不会出现向 $n = 4/9$ 的交叉转变，如图 3B 所示。相反，在整个运动过程中，滚动摩擦似乎始终主导能量耗散。没有发生交叉转变，说明从圆盘中心去除材料会显著减小黏性空气阻力，这与耗散源于实心圆盘下方空气层中的剪切相一致。这些实验采用与圆盘测量类似的方法进行，不同之处在于，我们在圆环的圆周上贴了三个 5×7 棋盘格，以避免阻碍空气从中心流过。

综上，这些结果表明，黏性空气阻力是运动最后几秒内的主要耗散机制。尽管在运动后期十分重要，但在整个运动轨迹中，滚动阻力仍然造成了大部分能量耗散。例如，450克圆盘在玻璃上的旋转时间比在钢上长 $\sim 400\%$；锐边圆盘与圆角圆盘之间也存在类似差异。值得注意的是，在玻璃表面上，Φ_{roll} 似乎几乎不受圆盘质量影响，这与现有模型 [4, 5, 8, 9]不符。因此，较重圆盘的旋转时间明显长于较轻圆盘；例如，在玻璃上，450克圆盘的旋转时间比100克圆盘长约150%。如补充材料（图 S5 [14]）所述，图 2A 中运动最后 10 秒内可以观察到这一趋势，这与黏附介导的滚动阻力 [19]相符。我们没有在钢或铝上观察到这一趋势；在这些材料上，塑性或滞后等载荷相关性更强的机制可能占主导地位。

我们在此测得的晚期动力学，为一项长期以来的预测提供了定量支持：在欧拉圆盘达到有限时奇异性的最后几秒内，耗散由空气阻力主导 [3, 10, 17]。此外，结果还揭示了早期可能存在一个丰富的滚动摩擦区间，该区间可能由玻璃上的黏附介导。尽管滚动摩擦对机械装置至关重要，

但人们对它仍知之甚少，且往往只能通过经验来描述 [20]。因此，这些结果促使人们系统研究控制滚动接触的参数相关前因子。欧拉圆盘因其简单且可重复，成为开展此类研究的理想平台。

本研究得到美国国家科学基金会通过哈佛大学材料研究科学与工程中心（MRSEC）（DMR-2011754）以及哈佛大学威斯生物启发工程研究所的支持。我们感谢 Tadashi Tokieda 向我们介绍欧拉圆盘，感谢 Lars Bildsten 提供宝贵的反馈，并感谢 Michael Landry 和 Adam Frim 作为本科研究人员所作的贡献。

* bthorne@g.harvard.edu[1] M. G. Olsson, 《硬币在桌面上旋转》, 《美国物理学杂志》**40**, 1543 （1972）。[2] D. Petrie 、 J. L. Hunt 和 C. G. Gray, 《欧拉圆盘在运动过程中会滑动吗？》, 《美国物理学杂志》**70**, 1025（2002）。[3] H. K. Moffatt, 《欧拉圆盘及其有限时奇异性》, 《自然》 **404**, 833（2000）。[4] K. Easwar、F. Rouyer 和 N. Menon, 《加速至停止：旋转圆盘的有限时奇异性》, 《物理评论E》 **66**, 045102（2002）。[5] D. Ma、C. Liu、Z. Zhao 和 H. Zhang, 《旋转圆盘中的滚动摩擦与能量耗散》, 《数学、物理与工程科学论文集》**470**, 1（2014）。[6] A. J. McDonald 和 K. T. McDonald, 《水平面上圆盘的滚动运动》, arXiv:physics/0008227（2000）, arXiv: physics/0008227。[7] H. Caps、S. Dorbolo、S. Ponte、H. Croisier 和 N. Vandewalle, 《欧拉圆盘的滚动与滑动运动》, 《物理评论E》**69**, 056610（2004）。[8] R. I. Leine, 《滚动圆盘在其运动最终阶段能量耗散的实验与理论研究》, 《应用力学档案》 **79**, 1063（2009）。[9] C. Le Saux、R. I. Leine 和 C. Glocker, 《存在干摩擦时滚动圆盘的动力学》, 《非线性科学杂志》 **15**, 27（2005）。[10] L. Bildsten, 《欧拉圆盘的黏性耗散》, 《物理评论E》**66**, 056309（2002）。[11] L. Darmendrail 和 A. M¨uller, 《欧拉圆盘及其动力学有限时间奇异性：用简单方法研究一种引人入胜的声学和力学现象》, 《声学》

《科学与技术》 **42**，193（2021）。[12] B. Collins, 《欧拉圆盘与摇摆罐：旋转动力学中三维问题的研究》，布里斯托大学博士论文（2022）。[13] Z. Zhang, 《一种灵活的新型相机标定技术》，IEEE《模式分析与机器智能汇刊》 **22**，1330（2000）。[14] 参见位于 [URL will be inserted by publisher] 的补充材料，以获取完整的倾角和频率数据，以及对基于黏附的滚动摩擦的讨论。[15] P. Kessler 和 O. M. O'Reilly, 《欧拉圆盘的鸣响》，《规则与混沌动力学》，49（2002）。[16] A. V. Borisov、I. S. Mamaev 和 Y. L. Karavaev, 《关于欧拉圆盘失去接触》，《非线性动力学》 **79**，2287（2015）。[17] G. v. d. Engh、P. Nelson 和 J. Roach, 《钱币摆动》，《自然》**408**，540（2000）。[18] 这一交叉转变对 μ 极为敏感，因此数据稍有不同便会产生不同结果。例如，图 2A 中的450克圆盘给出 $\theta_c = 5 \times 10^{-2}$ rad。[19] B. M. Hanrahan、S. Misra、M. I. Beyaz、J. H. Feldman、C. M. Waits 和 R. Ghodssi, 《微型滚珠轴承特有的黏附主导滚动摩擦机制》，《摩擦学快报》**56**，215（2014）。[20] K. L. Johnson, 《接触力学》（剑桥大学出版社，剑桥，1985）。

补充材料

物理参数

材料	直径（毫米）	厚度（毫米）	质量（克）	圆角半径（毫米）
铝	101.8	9.5	210	0
铝	101.7	6.4	139	0
铝	101.7	12.7	280	0
铝	50.8	9.5	53	0
铝	50.8	12.7	70	0
铝	50.8	6.4	35	0
钢	74.4	3.0	102.2	1.6
钢	74.4	13.6	460	0
钢	74.4	7.4	252.3	1.6
铝	74.4	7.4	85.1	1.6
铝	74.4	10.3	120.5	1.6
铝	74.4	3.1	36.5	1.6
铝	74.5	7.3	84	1.6
铝	74.4	15.9	186.5	1.6
铝	62.5	10.2	85	0
铝	76.2	13.4	165	0
钢	75	13.0	445	1.6

表 S1。圆盘物理参数。

材料	直径 外径 (mm)	直径 内径 (mm)	厚度（毫米）	质量（克）	半径 圆角 （毫米）
钢	108	70	17.7	740	1.6

表S2. 圆环物理参数。

运动的最后时刻与 t_f

我们将 t_f 定义为正文中公式 3 所描述的幂律区间的外推终止时间。实际上， t_f 的选择应使轨迹的最后 0.1 秒

在双对数空间中呈现最大程度的线性，从而使幂律拟合的残差最小。通常，这一选择会使 t_f 2 比圆盘停止一切可观测运动早 5 毫秒左右。一般而言，拟合得到的幂律指数 n 对 t_f 的具体选择较为敏感，因为 t_f 的微小变化会在双对数空间中重新缩放横轴。然而，幂律的前因子对这类变化相对不敏感，因此，在 t_f 的合理变化范围内，推断出的耗散机制仍然稳健。

为展示 t_f之后的动力学，我们在图 S1A 中绘制了 θ随 $t_f - t + 0.01$ 的变化，并将数据平移 10 毫秒，以显示 t_f之后的残余运动。在这段短暂的时间内，圆盘不再遵循正文中的公式 1，这表明滚动解所依据的假设已不再成立（图 S1B）。

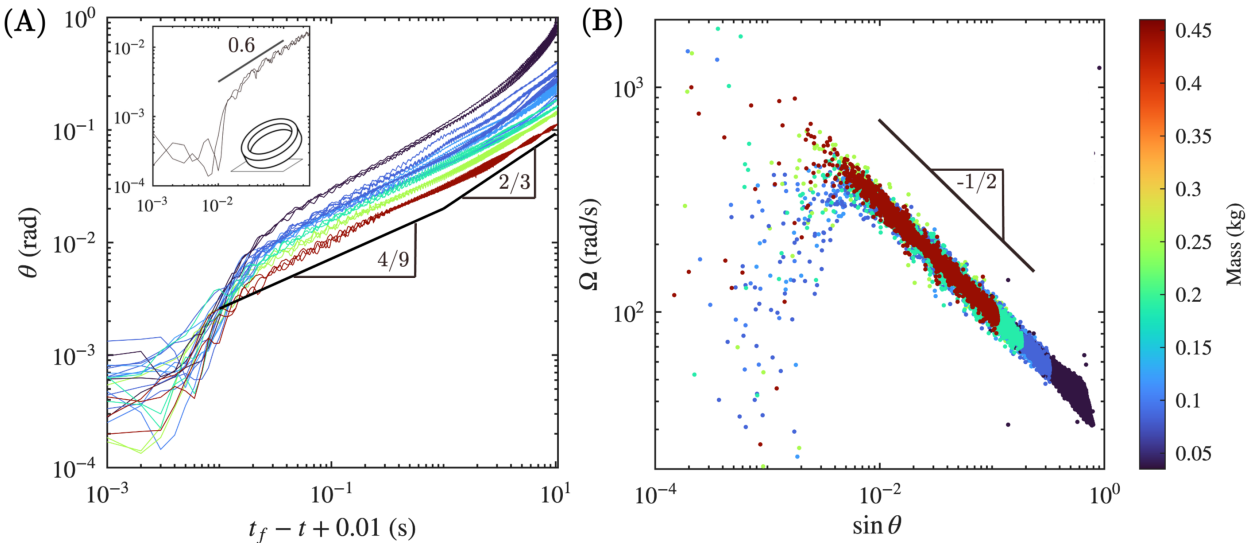

图 S1。**A**） θ 随 $t_f - t + 0.01$ 的变化，展示了玻璃表面上不同质量的圆角圆盘。图中的数据平移了 10 毫秒，以显示 t_f之后发生的运动。 θ 的噪声底在最左侧的数据 $\sim 10^{-4}$ 弧度处清晰可见。插图：钢环的 θ 随 $t_f - t + 0.01$ 的变化。**B**）图**A**所示数据的自旋频率 Ω 随倾斜角 θ 的变化。

我们将 t_f 之后这段短暂的运动解释为圆盘与 [12, 15, 16]表面失去接触。通过估算圆盘与表面之间的法向力何时消失，可以预测这种失去接触的情况。法向力近似为

$$N \approx mg - mR\ddot{\theta},$$

因此，当 $R\theta = g$ [3] 时，接触便会消失。利用正文中的公式 4，此条件预测

接触消失于

$$t_f - t \approx 0.68 \frac{R^{8/7}(\eta\rho)^{1/7}}{g^{4/7}m^{2/7}}.$$

对于最重的圆盘（0.45 千克），这一估算给出 $t_f - t \approx 1.6$ 毫秒；而对于最轻的圆盘（36 克），则预测为 $t_f - t \approx 3.2$ 毫秒，这与观测到的 2–5 毫秒残余¨运动时间相符。由于测量轨迹存在噪声，若不通过函数拟合，很难直接根据数据估算 θ 。

如参考文献 [12], 所述，圆盘下方的薄空气层会减缓其最后阶段向表面的下降。因此，较轻且较宽的圆盘预计会与表面保持分离更长时间。与这一预期一致，我们观察到钢环在 t_f 之后的运动时间间隔较短（图 S1A 插图）。与圆盘相比，空气更容易从钢环中逸出，因此钢环下落得更快。

附加 $\theta(t_f - t)$ 和 $\Omega(\theta)$ 图

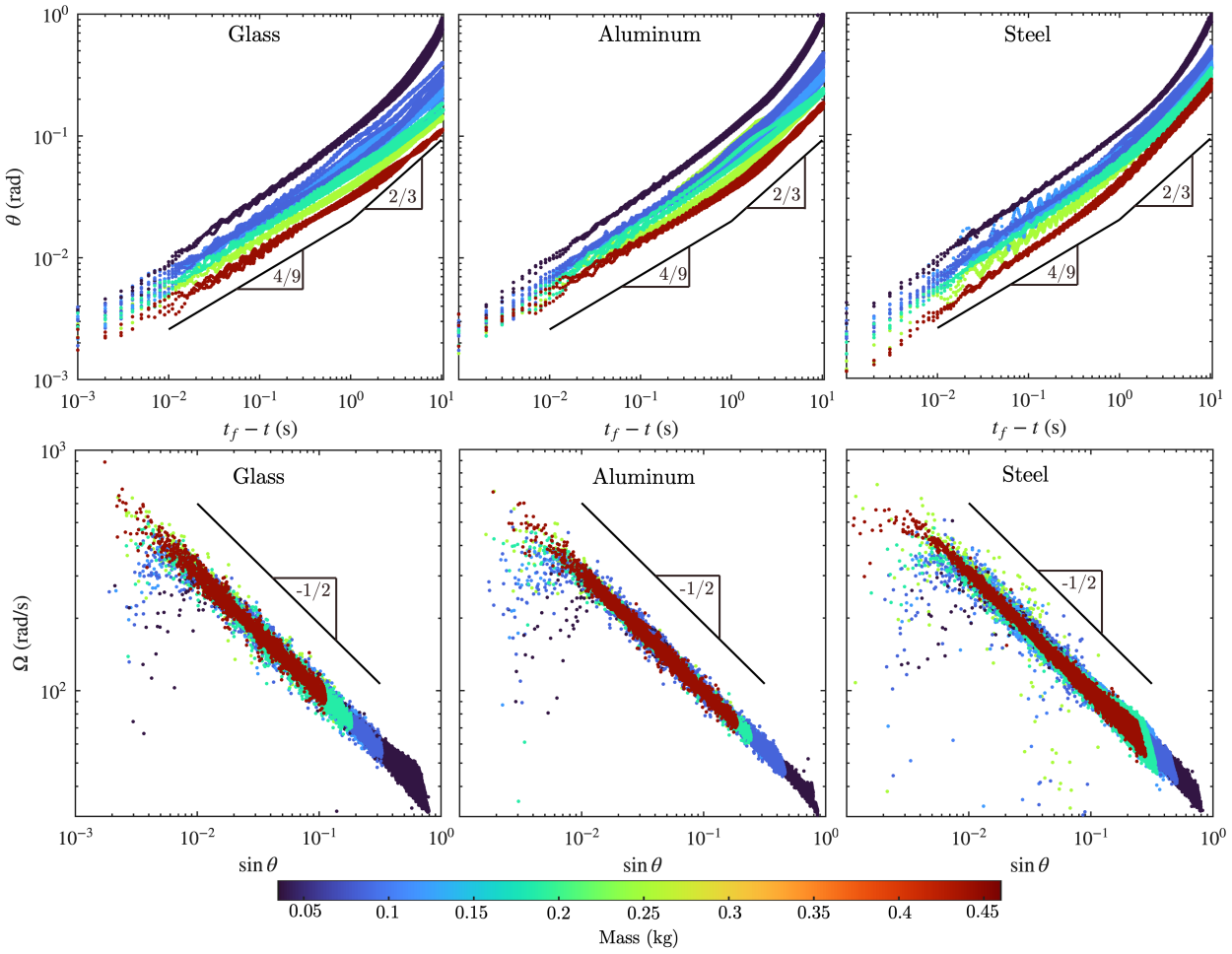

图 S2。**上图：** θ 与 $t_f - t$ 的关系，展示质量各异、直径恒定的圆角圆盘在玻璃、铝和钢板上的情况。每个圆盘重复测量三次。**下图：** 上图所示数据的进动频率 Ω 与 $\sin\theta$的关系。

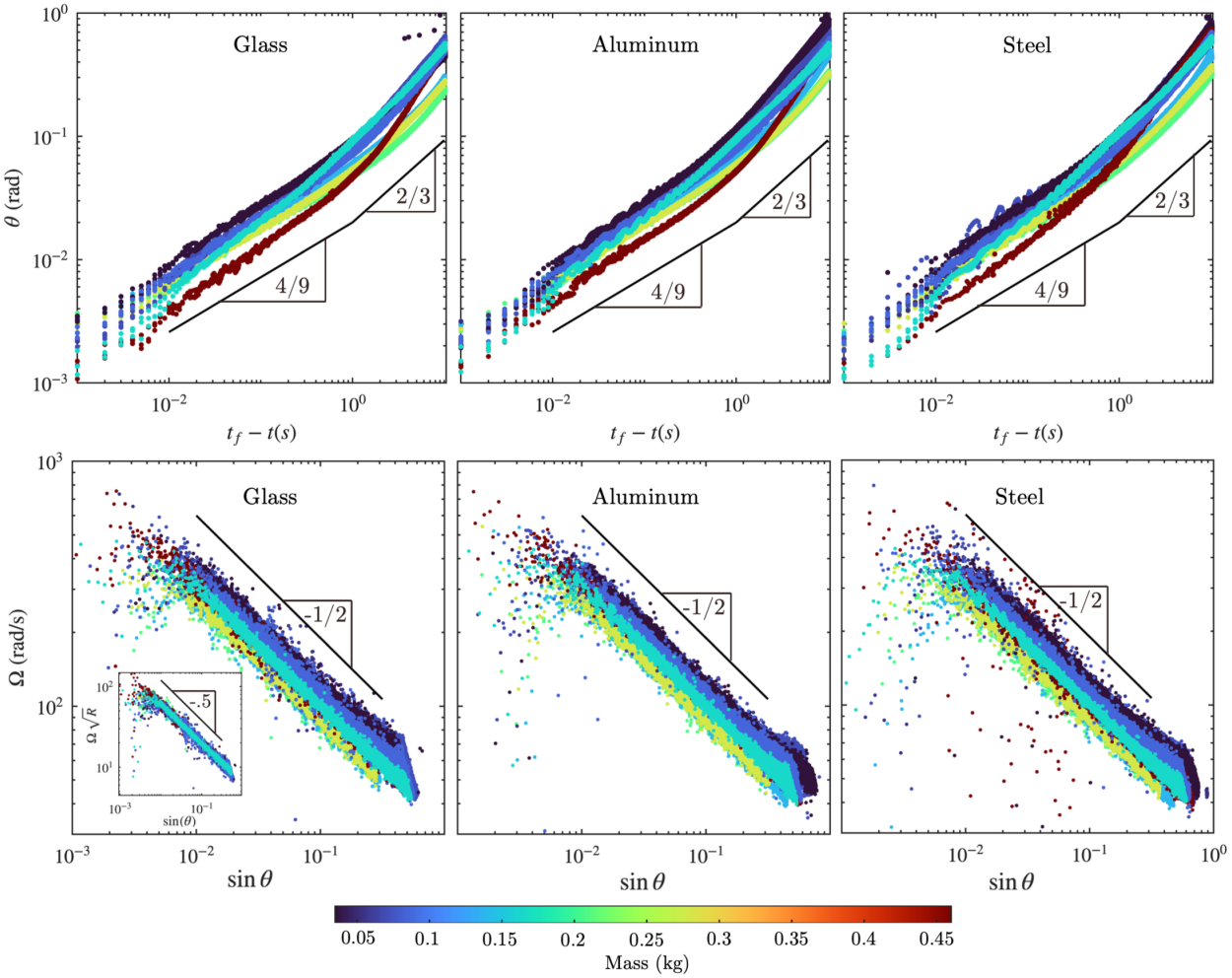

图 S3. **上图：** θ 与 $t_f - t$ 的关系，展示不同质量和直径的圆盘放置在玻璃、铝和钢板上时的情况。每个圆盘重复测量三次。**下图：**上图所示数据的进动频率 Ω 与 $\sin\theta$ 的关系。左侧插图显示，按 $\sqrt{R}$ 缩放后，各曲线重合，这与正文中的公式 1 一致。

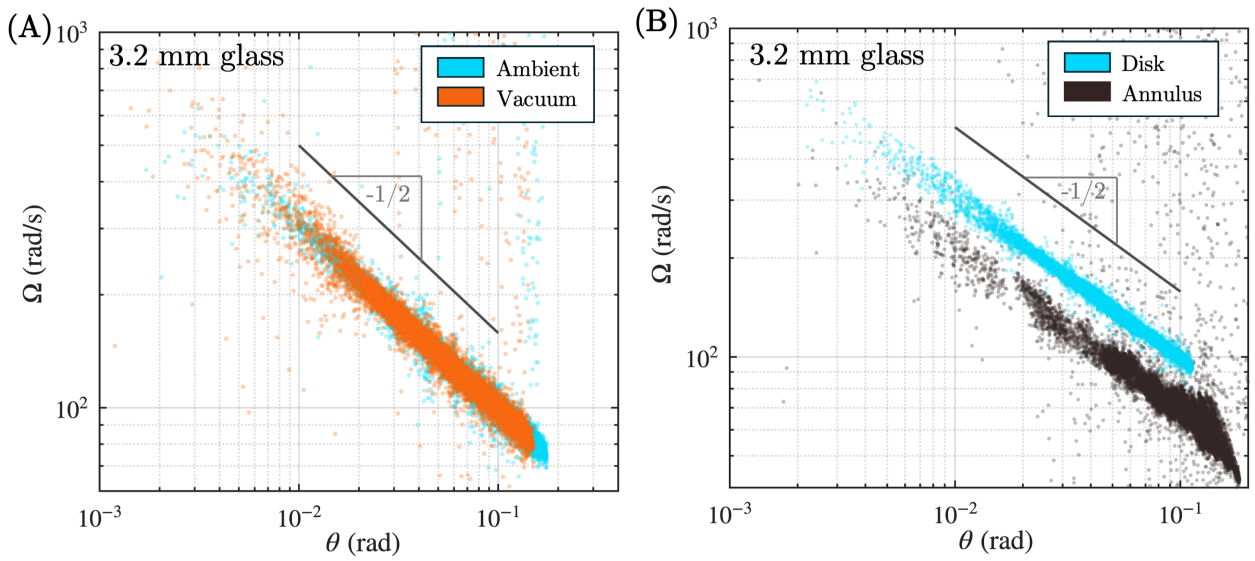

图 S4。**A)** 在真空内外，445 克圆盘在 3.2 毫米玻璃上的进动频率 Ω 与倾斜角 θ 的关系。**B)** 445 克圆盘和 740 克圆环在玻璃上的自旋频率 Ω 与倾斜角 θ 的关系。

滚动摩擦的质量依赖性

滚动摩擦造成的耗散通常建模为摩擦力矩与 Ω 的乘积,

$$\Phi_{\text{roll}} = \mu m g R \cos(\theta)\, \Omega, \tag{S1}$$

其中 μ是摩擦系数 [4, 5, 8, 9]。将其与正文中的方程 1 和 2 积分结合可得

$$\theta(t) = \mu^{2/3} \left(\frac{4g}{R}\right)^{1/3} (t_f - t)^{2/3} \tag{S2}$$

值得注意的是，它与圆盘质量无关。

玻璃表面早期动力学的一个有趣特点是，滚动摩擦对圆盘质量的依赖性出乎意料。包括方程 S2 在内的当代滚动摩擦模型均与质量无关，但图 2A/S2 中的早期数据仍显示出明显的质量梯度，其程度超过了单靠空气阻力所能解释的范围。我们可以通过从总机械能中减去空气阻力耗散的能量 W_{drag}，估算运动最后 10 秒内滚动摩擦耗散的能量 W_{roll}，即

$$W_{\text{roll}} = \frac{3}{2} m g R \sin(\theta(t_i)) - W_{\text{drag}}.$$

我们根据图 S2 中的数据得到 $t_f - t = 10$ 秒时的倾斜角 $\theta(t_i)$，而 W_{drag} 则通过对图 S2 中的数据积分计算得出，即

$$W_{\text{drag}} = \int_{t_f-10}^{t_f} 4 g^{5/4} R^{11/4} \sqrt{\eta \rho}\, \theta(t)^{-5/4}\, dt.$$

W_{roll} 对于铝制和钢制圆盘，在所研究的范围内，随圆盘质量呈线性增加，这与方程 S1 一致。相比之下， W_{roll} 对于玻璃圆盘，似乎完全不依赖于圆盘质量；见图 S5A。停止时间测量进一步证实了这一发现。在塑料或钢等高摩擦表面上，较重的圆盘比较轻的圆盘旋转时间略长；例如，450克圆盘的旋转时间通常比100克圆盘长约20%，这一因素可能可由空气阻力解释。相反，在玻璃表面上，同样的质量增加会使停止时间增加约150%。

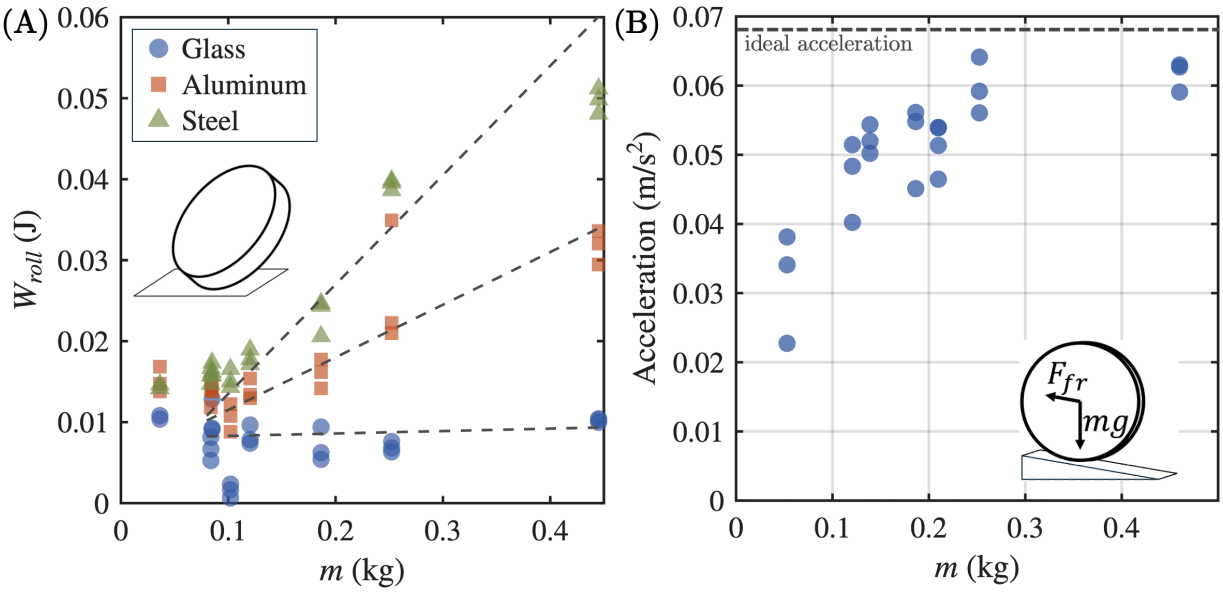

图 S5。**A**）圆角圆盘在运动最后 10 秒内因滚动摩擦而耗散的能量 $W_{roll} = W_{tot} - W_{drag}$。请注意，最轻的圆盘因其较大的$n$ 而偏离趋势（见图 S2）。**B**）不同质量的圆盘沿倾斜玻璃板滚下时的平均加速度。虚线表示无摩擦时估算的加速度$a = \frac{2}{3} g \sin\ \alpha$ =0.068 m/s^2

作为独立比较，我们研究了圆盘沿边缘在倾角为 $\alpha = 0.6 \pm 0.1°$ 的玻璃板上向下滚动时的加速度。七个质量不同的圆盘从斜面顶端由静止释放，并以每秒240帧的速度记录其运动。通过跟踪棋盘格点的质心，获得圆盘速度随时间的变化，并通过线性拟合提取平均加速度。在这种配置下，观察到较重的圆盘比较轻的圆盘加速更快，如图 S5B 所示；这与从图 S5A 的圆盘实验中推断出的质量次线性依赖关系一致。这些测试中的圆盘最大速度约为0.15米/秒，在此速度下，空气阻力预计比观测到的滚动阻力小几个数量级。我们未观察到加速度对圆盘半径或厚度存在系统性依赖。

综合来看，这些结果独立表明，玻璃表面上的滚动摩擦对法向载荷的依赖较弱。一般而言，滚动摩擦可能由多种机制共同产生，包括滞后、塑性变形、微滑移、

微冲击和黏附 [20]。其中，黏附预计对法向载荷的依赖尤其弱 [19] ，因此可能是玻璃上观察到的次线性标度的成因之一。对于载荷较大或表面较粗糙的滚动接触系统，我们预计，滞后或塑性变形等载荷相关性更强的机制将占主导地位 [20]。