arXiv:2603.14556v1 [math.GR] 15 Mar 2026

广义 Baumslag-Solitar 群的自相似性

Dessislava H. Kochloukova

摘要。我们证明，定义在有限连通图上的所有秩为$n \geqslant 1$的剩余有限广义 Baumslag-Solitar 群都是自相似的。此外，我们证明，若（有限连通）群图的所有顶点群和边群均无挠且与海森堡群可公度，并且所有边群都真嵌入相应的顶点群，那么该群图的基本群只要是剩余有限的，便都是自相似的。

1. 引言

经典的 Baumslag-Solitar 群最初于 [2] 定义为一个无限循环群的 HNN 扩张，其关联子群非平凡，即$BS(n,m) = \langle a,t \mid ta^nt^{-1} = a^m \rangle$。Forester 在 [9]、Whyte 在 [32] 分别将这类群推广为具有无限循环顶点群和边群的有限群图的基本群，之后 Levitt 于 [13], [14]对其进行了研究。Button [3] 最近将这一概念推广到有限群图这一类，其中顶点群和边群同构于整数环 $\mathbf{Z}^n$，且所有边群在相应顶点群中的指数均有限；他将这类群称为秩为$n \geqslant 1$的广义 Baumslag–Solitar 群。我们只考虑底层图为**连通图**的广义 Baumslag-Solitar 群。在 [4]，Bux、Isenrich 和 Wu 考虑了一类群，这类群由所有满足以下性质的（有限）群图构成：所有边群和顶点群都与G抽象可公度，且边群嵌入顶点群的指数有限。他们将这类群称为BS_G，并证明，若该类中的一个群忠实地作用于其 Bass-Serre 树上，则它可嵌入某个有限呈示单群。

度m 的自相似群（或状态封闭群）是指允许在m进根树上进行忠实自相似作用的群G 。这类群中有一些著名的例子，例如格里戈尔丘克群 [16] 和Gupta-Sidki 群 [15]。自相似群总是剩余有限的，但反过来一般并不成立。根据 Hall 在 [17] 中的一个结果，所有有限生成的阿贝尔-幂零群都是剩余有限的；特别是，每个有限生成的后阿贝尔群都是剩余有限的。然而，正如 Kochloukova 和 Souza 在 [11] 中所展示的，存在并非自相似群的有限呈示后阿贝尔群。尽管如此，Kochloukova 和 Sidki 仍在 [10] 中构造了许多有限生成、后阿贝尔且自相似的群。在 [1] 中，Bartholdi 和 Sunik 证明，当m 、 -1时，鲍姆斯拉格-索利塔群$BS(1,m)$ 是自相似的。不过，对于哪些有限生成后阿贝尔群是自相似群，我们仍远未充分了解。

我们关注哪些秩为$n \geqslant 1$ 的广义鲍姆斯拉格–索利塔群，或更一般的BS_G 类中的群，是自相似的。由于BS_G 类中的群不一定是剩余有限的，因此首先需要弄清楚其中哪些群是剩余有限的。例如，只有在$n = 1$ 或$m = 1$ 或$n = m$ 或 $-m$时，$BS(n,m)$ 才是剩余有限的。Levitt 在 [14] 以及 Raptis、Talleli 和 Varsos 在 [26]研究了秩为$n \geqslant 1$ 的广义 Baumslag-Solitar 群的剩余有限性。最近，Lopez de Gamiz Zearra 和 Shepherd 在 [12] 给出了完整描述

2020 数学主题分类。 主要分类：20E08；次要分类：20E26。1

哪些秩为n 的广义 Baumslag-Solitar 群是剩余有限的；具体而言，它们是以整数环$\mathbb{Z}^n$ 为基群的上升 HNN 扩张，或者是几乎为 $\mathbb{Z}^n$-自由群。

我们通过构造虚拟端同态来证明自相似性。对于传递自相似群，虚拟端同态与自相似性之间的联系由 Nekrashevych 和 Sidki [23] 提出。Dantas、Santos 和 Sidki [5] 将这一结果推广到了（非传递）自相似群。

由于群图的基本群包含许多自由子群，因此我们在证明中使用任意有限生成自由群都是自相似群这一事实，也就不足为奇了。这个事实可由一种自动机的具体构造得出，该自动机生成二阶群的自由积。最一般的情形由 Savchuk 和 Vorobets [29] 证明；此前，Glasner 和 Mozes [8], 、Vorobets 和 Vorobets [31] ，以及 Steinberg、Vorobets 和 Vorobets [30] 已证明了这一方向上的若干结果。

我们注意到， [19] 中定义的 Leary-Minasyan 群 $G(A,L')$ 是 HNN 扩张，其基群为 $\mathbb{Z}^n$ ，关联子群是 $\mathbb{Z}^n$的有限指数子群，因此它们是秩 n 的广义鲍姆斯拉格-索利塔群。我们的主要结果表明，对于秩 n 的广义鲍姆斯拉格-索利塔群，剩余有限性足以保证自相似性。因此，剩余有限的 Leary-Minasyan 群是自相似的。

定理 1.1. 设 G 是秩 n 的广义鲍姆斯拉格-索利塔群。以下条件等价：

i) G 是自相似的；

ii) G 是剩余有限的；

iii) G 在有理数域上线性表示。

若群 G 的任意两个不同的有限生成子群在 G的某个有限商群中的像都不同，则称该群为子群可分。在 [22] Raptis、Talelli 和 Varsos 证明，对于一个群图，其顶点群为多循环-有限群，且边群在相应顶点群中具有有限指数，则该群图的基本群子群可分，当且仅当它在整数环上可线性表示。他们证明，当且仅当存在一个H 正规子群G，它作为有限指数子群包含于每个边群中时，上述性质才成立。在下面的结果中，我们在对群图施加更多限制的代价下，为条件列表补充了更多等价条件。

定理 1.2. 设 G 为有限连通图 $(\mathcal{G},X)$ 上有限生成自由阿贝尔群的基本群，其中 G_e 是 $G^{o(e)}$ 的真子群，且 $\phi_e(G_e)$ 对每个 $e \in A$ 都是 $G^{\tau(e)}$ 的真子群。此外，假设所有顶点群和边群的秩相同。那么以下条件等价：

i) G 是自相似的；

ii) G 是剩余有限的；

iii) G 在 整数环 上是线性的；

iv) G 是子群可分的。

上述定理不适用于边群嵌入顶点群后的像并非真子群的群图的基本群。例如，经典的鲍姆斯拉格-索利塔群 $BS(1,m)$ 是后阿贝尔且有限生成的，因此根据 Hall 的结果

[17] 它是剩余有限的，但当m 时， ± 1 它不能在整数环上可线性表示。尽管如此，根据 [1] 或 [10, 定理 C] 的结果，该群仍是自相似的；更一般地，根据定理 1.2，它在 Q 上线性。
接下来，我们陈述定理 1.2 的一个版本：将 $\mathbb{Z}^n$ 替换为海森堡群$\langle x、y \mid [x、y]=z、[z、x]=1=[z、y]\rangle$。

定理 1.3. 设 G 是有限连通图 $(\mathcal{G},X)$ 的基本群，其中各顶点群均为有限生成无挠幂零群；对于每个 $e \in A$，G_e 是 $G^{o(e)}$ 的有限指数真子群，且 $\phi_e(G_e)$ 是 $G^{\tau(e)}$ 的有限指数真子群。进一步假设一个边群（因此每个边群）G_e 都与海森堡群可公度。那么以下陈述等价：

i) G 是自相似的；

ii) G 是剩余有限的；

iii) G 在整数环上是线性的；

iv) G 是子群可分的。

注意，存在一些不是自相似的有限生成无挠幂零群 [28],[25]。虽然自相似群的子群不一定是自相似的，但我们不认为将海森堡群替换为任意有限生成无挠幂零群后，上述定理仍然成立。

在定理 1.1、定理 1.2 和定理 1.3 中，自相似性是通过构造两个虚拟端同态，或引用 [10, 定理 C]（其中该群是传递自相似的）来确立的。因此，在所有情况下，自相似群在相应根树的第一级上的作用至多有两个轨道。

在 [20] 中，Moldovanskii 证明了有限秩自由幂零群的上升 HNN 扩张是剩余有限的。随后，Hsu 和 Wise 在 [18] 中将这一结论推广到多循环-有限群的上升 HNN 扩张。因此，海森堡群的上升 HNN 扩张是剩余有限的，检验这类群是否自相似也很有意思。

定理 1.4。 设 G 是海森堡群的一个升 *HNN* 扩张。那么 G 是传递自相似的。

致谢 作者获得了 CNPq 305457/2021-7 和 FAPESP 2024/14914-9 项目的部分资助。

2. 预备知识

2.1. 群图的基本群与剩余有限性。 我们沿用 [26] 中的记号。设 X 是一个有限图，允许有环，且 $(\mathbb{G},X)$ 是一个群图。设 A 是边$E(X)$ 的一个定向，其中 X 为 $o(e)$ 和 $\tau(e)$ 分别表示边 $e \in A$ 的起点和终点。因此，对于图 X 的顶点集 $V(X)$ 中的每个顶点 v，给定一个群 G_v；对于每条边 $e \in A$，给定 $G^{o(e)}$ 的一个子群G_e 以及一个同构

$$\phi_e : G_e \to \phi_e(G_e) \leqslant G_{\tau(e)}$$

设T 是X的一棵极大子树。那么，群图 $(\mathbb{G},X)$ 的基本群G 记作 $\pi(\mathbb{G},X)$，并由生成元与关系定义如下：

$$G=\pi(\mathcal{G},X)=\langle \{G_v\},\{t_e\} \mid v\in V(X), e\in A, rel(G_v), t_e g_e t_e^{-1}=\phi_e(g_e) \text{ for } g_e\in G_e, t_e=1 \text{ for } e\in A\cap E(T)\rangle$$

群G 的子群B 称为隔离的，如果对于某个$m \in$ 整数环$\backslash\{0\}$，只要 $g^m \in B$，就有 $g \in B$。若G 的子群H，则将H 在G中的隔离子记作$i_G(H)$，也就是所有包含H的G 的隔离子群的交集。

定理 2.1。 [26, 定理。 1] 设 G 是由有限生成无挠幂零群构成的有限图的基本群，其中 G_e 是 $G_{o(e)}$ 的真子群，并且对于每个 $e \in A$，$G_e)$ 是 $G^{\tau(e)}$ 的真子群。则以下陈述等价:

- G 是剩余有限的。
- 存在一个单同态族 $\{\rho_v : G_v \to G_v^* \mid v \in V(X)\}$，其中每个 G_v^* 都是无挠幂零群，且 $G_v)$ 在 G_v^* 中具有有限指数，使得对于每条边 $e \in A$，都存在一个延拓 ϕ_e的同构，其中 $i_{G^*{}_{o(e)}}(\rho_{o(e)}(G_e))$（分别为 $i^{G^*_{\tau(e)}}(\rho_{\tau(e)}(\phi(G_e)))$）是 G $\rho_{o(e)}($（分别为 $\rho_{\tau(e)}(\phi(G_e))$）在 G^* $o(e)$（分别为 $G^*_{\tau(e)}$）中的隔离子。

$$\phi_e^* : i_{G^*_{o(e)}}(\rho_{o(e)}(G_e)) \to i_{G^*_{\tau(e)}}(\rho_{\tau(e)}(\phi_e(G_e)))$$

推论 2.2. [26, 推论 1] 设 G 是有限图 $(\mathcal{G},X)$（其顶点群为有限生成自由阿贝尔群）的基本群，且对于每个 $e \in A$，G_e 是 $G^{o(e)}$ 的真子群，并且 $G_e)$ 是 $G^{\tau(e)}$ 的真子群。那么以下陈述等价:

- G 是剩余有限的。
- 存在一个有限生成自由阿贝尔群 K、一族单同态 $\{\rho_v : G_v \to K \mid v \in V(X)\}$ 以及一族自同构 $\{\theta_e : K \to K \mid e \in A\}$，使得

$$\theta_e \rho_{o(e)}|_{G_e} = \rho_{\tau(e)}\phi_e|_{G_e} \text{ for all } e \in A.$$

定理 2.3. [22]设 $(\mathcal{G},X)$ 是一个顶点群为多循环有限扩张群的群图，且所有边群在相应顶点群中均为有限指数子群。那么，对于群图 $(\mathcal{G},X)$ 的基本群 G，以下陈述等价:

1) G 是子群可分的;

2) 存在 G 的一个正规子群 H，它包含于每个边群中，且在每个边群中的指数有限;

3) G 是整数环-线性的。

广义 Baumslag-Solitar 群中秩为n 且剩余有限的群，其分类最近已由 Lopez de Gamiz Zearra 和 Shepherd [12]完成。

定理 2.4. [12] 设 G 是一个秩 n 的广义 *Baumslag-Solitar* 群。那么，G 剩余有限，当且仅当 G 是以整数环^n 为基群的升 *HNN* 扩张，或者 G 是虚拟整数环^n-自由群。

2.2. **自相似群与虚拟端同态**。 设 T$_m$ 是唯一根的m元树，即该树始于唯一的根，且每个顶点都有 m 个后代。令 T $^{(0)}{}_m$、.....、T $^{(m-1)}{}_m$ 表示 T$_m$ 的m元子树，这些子树始于树 T$_m$第一层（层级）中的各个顶点。设G 是一个以保持后代关系的方式作用于该树上的群。对于每个 $g \in G$

$$g = (g_0, \ldots, g_{m-1})\sigma \tag{1}$$

其中，σ 是对称群S_m 中的一个元素，用来描述 1 在树 T$_m$ 第一层（层级）上的作用；每个 g_i 都通过固定其根以及树 T $^{(i)}{}_m$ 之外的所有顶点来作用于 T$_m$。根据定义，元素 1 的状态为 $g_0, \ldots\ldots g_{m-1}$。

如果对于任意 $g \in G$，其所有状态都属于G，则群G 是自相似的；也就是说，G 是状态封闭的。如果G 在树 T_m的第一层（层级）上传递作用，我们就称G 为传递自相似群。

虚拟端同态是一个群同态

$$f : H \to G,$$

其中 $1 < [G : H] < \infty$。注意，f 不必是单射。若对于任意正规子群 K，只要 G 满足 $K \subseteq H$ 且 $f(K) \subseteq K$，就有 K 是平凡群，则称虚拟端同态 f 是**简单** 的。

定理 2.5。 [23] 群 G 是传递自相似的，当且仅当存在简单虚拟端同态 $f : H \to G$。

注意，根据 [6] $\mathrm{Z} \wr \mathrm{Z}$ 并非传递自相似，也就是说，它不接受简单虚拟端同态。定理 2.5 对非传递作用有一个推广，见下述结果。

定理 2.6。 [5] 群 G 在$\mathcal{T}_m$ 的第一级上以 k 个轨道作用，当且仅当存在虚拟端同态 $f_i : H_i \to G$，其中 $1 \leqslant i \leqslant k$，并且对于任意 G 的正规子群 K，若 $K \subseteq \cap_{1 \leqslant i \leqslant k} H_i$ 且 $f_i(K) \subseteq K$ 对 $1 \leqslant i \leqslant k$ 均成立，则 K 是平凡群。

每个虚拟端同态f_i 都对应于G 在树 T_m第一层上的一个作用轨道。关于自相似群的更多信息，请参阅 [24]。

Kochloukova 和 Sidki 利用虚拟端同态证明了以下结果

定理 2.7. [10, 定理 C] 设 Q 是一个有限生成阿贝尔群，B 是一个 *Krull* 维数为 *1* 的有限生成右 $\mathbb{Z}Q$-模，使得 $C_Q(B) = \{q \in Q \mid B(q - 1) = 0\} = 1$。则 $G = B \rtimes Q$ 可实现为一个传递自相似群。

2.3. **生成二阶群自由积的自动机**。设 B_3 为 Bellaterra 自动机

$$\begin{aligned} a &= (c, b), \\ b &= (b, c), \\ c &= (a, a)\sigma. \end{aligned}$$

设B_4 为由以下花环递归定义的自动机

$$\begin{aligned} a &= (c, b), \\ b &= (b, c), \\ c &= (d, d)\sigma, \\ d &= (a, a)\sigma \end{aligned}$$

对于任意的$n > 4$，令B_n 为由花环递归定义的n状态自动机

$$\begin{aligned} a_n &= (c_n, b_n), \\ b_n &= (b_n, c_n), \\ c_n &= (q_{n,1}, q_{n,1})\sigma, \\ q_{n,i} &= (q_{n,i+1}, q_{n,i+1})\sigma_{n,i}, \quad i = 1, \ldots, n-5, \end{aligned}$$

$$q_{n,n-4} = (d_n, d_n)\sigma_{n,n-4},$$
$$d_n = (a_n, a_n)\sigma$$

其中 $\sigma_{n,i}$ 是对称群S_2的任意元素。注意，在上述生成元的平方的递归描述中不存在 σ，因此所有这些生成元的阶均为 2。

定理 2.8。 [31] 若 n 为奇数且所有 $\sigma_{n,\ i} = \sigma$ 则由 $n \geqslant 3$ 的自动机 B_n 生成的群是 n 个 *2* 阶循环群的自由积。

定理 2.9。 [29] 由 $n \geqslant 4$ 的自动机 B_n 生成的群是 n 个 *2* 阶循环群的自由积。

注意，由以下元素生成的群 F_{n-1}

$$x_1 = a_n b_n, x_2 = b_n c_n, x_3 = c_n q_{n,1}, \ldots, x_{3+i} = q_{n,i} q_{n,i+1}, \ldots, x_{n-1} = q_{n,n-4} d_n$$

是一个以 $x_1, \ldots, x_{n-1}$ 为自由基的自由群，因为它是 $C_2 * \ldots * C_2$ 的子群。此外，还有一个递归描述

$$x_1 = (x_2^{-1}, x_2), x_2 = (x_2 x_3, x_3)\sigma, \ldots$$

表明上述自动机生成F_{n-1}。此外，通过适当地选择置换 σ,$\sigma_{n,\ i}$，我们得到 F_{n-1} 在二叉树 T_2 的第一层上的一个传递作用。因此，所有有限秩自由群都是传递自相似的。

关于通过自动机生成某些自由群的另一种构造方法，见 [8]。

3. Proofs

命题 3.1。 设 F 是一个有限秩自由群，A 是一个有限生成自由阿贝尔群。那么，任意半直积 $A \rtimes F$ 都是自相似的，其在相应正则单根树第一层上的作用有两个轨道。

证明。 由于 F 是传递自相似的，因此存在一个简单虚拟端同态

$$f : \widetilde{F} \to F,$$

~ ~即 F 是F 的有限指数子群，并且若 F 的正规子群K 满足$K \subseteq F$ 且$f(K) \subseteq K$，那么$K = 1$。令

$$\pi : A \rtimes \widetilde{F} \to \widetilde{F}$$

~为核是A 、在F 上为恒等映射的投影

$$i : F \to A \rtimes F$$

为包含映射。接着考虑复合映射

$$\beta = i \circ f \circ \pi : A \rtimes \widetilde{F} \to A \rtimes F$$

注意，β 是一个虚拟端同态。

~设 M 是 A ⋊F 的正规子群，且 M 包含于 A ⋊ F，并满足 $\beta(\mathrm{M}) \subseteq \mathrm{M}$。~ ~将 F 与 i(F) 对应起来，我们有： $\beta(\mathrm{M}) \subseteq \mathrm{M}$ 意味着 $\mathrm{f}(\pi(\mathrm{M})) \subseteq \mathrm{M} \cap \mathrm{F} \subseteq (\mathrm{A} \rtimes \mathrm{F}) \cap \mathrm{F} = \mathrm{F}$；利用 $\pi|_{\widetilde{F}} = \mathrm{id}^{\widetilde{F}}$ 可得 $\mathrm{f}(\pi(\mathrm{M})) \subseteq \mathrm{M} \cap \mathrm{F} = \pi(\mathrm{M} \cap \mathrm{F}) \subseteq \pi(\mathrm{M})$。由于 f 是单纯端同态，因此 $\pi(\mathrm{M})$ 是平凡群，即 $\mathrm{M} \subseteq \mathrm{Ker}(\pi) = \mathrm{A}$。

Let

$$\mu : (2A) \rtimes F \to A \rtimes F$$

是一个虚拟端同态，它在 F 上是恒等映射，在 $2A$ 上则是乘以 $1/2$，（注意，我们对群 A的运算使用加法记号）。设正规子群 M 还满足：M 包含于 $(2A) \rtimes F$，且 $\mu(M) \subseteq M$。但是，$M \subseteq A$ 意味着 $\mu(M) = \frac{1}{2}M \subseteq M$，因此 M 是平凡群。最后，我们可以对虚拟端同态 β和 μ 应用定理 2.6，从而得出 $A \rtimes F$ 是自相似的。□

定理 3.2. 设 $G = N \rtimes F$ 是一个群，其中 F 是有限生成自由群，$N = \langle x_1, x_2 \rangle$ 海森堡群。则 G 是自相似的，其在相应正则单根树第一层上的作用有两个轨道。此外，若 F 是循环的，则 G 是传递自相似的。

证明。 设 p 是一个固定的素数。令

$$z = [x_1, x_2] = x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_2.$$

令 N_1 为 N 中由 $\{x^p\ i \mid 1 \leqslant i \leqslant 2\}$生成的子群。注意，$N_1 \cap N'$ 是交换子 N' 中所有 p^2次幂元素构成的子群，且 $[N : N_1] = p^4$。注意，由于 N 是有限生成的，N 中指数为 $[N : N_1]$ 的子群只有有限多个，而 F 会置换这些子群（通过其在 N 上的共轭作用）。因此，F 中存在一个有限指数子群 F_1，使得对每个 $f \in F_1$，都有 $f N_1 f^{-1} = N_1$。令 $t_1, \ldots, t_n$为 F_1作为自由群的自由生成元

考虑 $G_1 = N_1 \rtimes F_1$。我们声称存在一个虚拟端同态

$$f : G_1 \to G$$

由下式给出：$f(x^{p\ i}) = x_i$，$f(z^{p^2}) = z$，$f(t_i) = t_i u_i$，其中$u_i \in N$取适当的值。

为了使f定义良好，我们需要选择u_i，使得

$$f(^{t_i}(x_j^p)) =^{f(t_i)} f(x_j^p) \text{ for } j = 1, 2 \tag{2}$$

注意到

$$^{f(t_i)}f(x_j^p) =^{t_i u_i} f(x_j^p) =^{t_i u_i} x_j =^{t_i} (x_j(x_j^{-1}u_i x_j u_i^{-1})) =^{t_i} (x_j)\ ^{t_i}(x_j^{-1}u_i x_j u_i^{-1})$$

Let

$$^{t_i}(x_j^p) = x_1^{\alpha_{ij1}} x_2^{\alpha_{ij2}} z^{\beta_{ij}}$$

对于某些 α_{ij1}、α_{ij2}、$\beta_{ij} \in \mathbb{Z}$。由于 $x^p{}_j \in N_1$，我们有 $^{t\ i}(x^p{}_j) \in {}^{t_i}N_1 = N_1$，由此得出$\alpha_{ij1}$、$\alpha_{ij2} \in p\mathbb{Z}$，$\beta_{ij} \in p^2\mathbb{Z}$。

注意，由于$^{t\ i}(x^p{}_j) = (^{t_i}x_j)^p$，我们有

$$^{t_i}x_j = x_1^{\frac{\alpha_{ij1}}{p}} x_2^{\frac{\alpha_{ij2}}{p}} b_{i,j}$$

对于某个$b_{i,j} \in N'$。

另一方面

$$f(^{t_i}(x_j^p)) = f(x_1^{\alpha_{ij1}} x_2^{\alpha_{ij2}} z^{\beta_{ij}}) = f(x_1^{\alpha_{ij1}}) f(x_2^{\alpha_{ij2}}) f(z^{\beta_{ij}}) = x_1^{\frac{\alpha_{ij1}}{p}} x_2^{\frac{\alpha_{ij2}}{p}} z^{\frac{\beta_{ij}}{p^2}} = (^{t_i}x_j) b_{i,j}^{-1} z^{\frac{\beta_{ij}}{p^2}}$$

因此 (2) 等价于$^{t\ i}(x^{-1}{}_j\, u_i x_j u^{-1}{}_i) = b^{-1}{}_{i,j}\, z^{\underline{\beta_{ij}}}{}_{p^2} \in N'$ 即

$$[x_j, u_i^{-1}] = x_j^{-1}u_i x_j u_i^{-1} =^{t_i^{-1}} (b_{i,j}^{-1} z^{\frac{\beta_{ij}}{p^2}}) = z^{\gamma_{i,j}} \in N'$$

若$u^{-1}{}_i = x_1^{a_i} x_2^{b_i}$，则 $[x_j, u^{-1}{}_i\ ] = [x_j, x_1^{a_i} x_2^{b_i}]$，所以

$$z^{\gamma_{i,1}} = [x_1, u_i^{-1}] = [x_1, x_1^{a_i} x_2^{b_i}] = [x_1, x_2^{b_i}] = z^{b_i}$$

$$z^{\gamma_{i,2}} = [x_2, u_i^{-1}] = [x_2, x_1^{a_i} x_2^{b_i}] = [x_2, x_1^{a_i}] = z^{-a_i}$$

我们可以选择$a_i = -\gamma_i$, 2 和$b_i = \gamma_i$, 1，因此 (2) 成立。

我们声称，对任意 $g \in \langle x_1^p,\ x_2^p \rangle$都有$f({}^{t_i}g) = {}^{f(t^i)}f(g)$。由此完成了对虚拟端同态$f$ 良定义这一事实的证明。事实上，若 $g = x^{m_1}{}_p\, 1\, x^{m_2}{}_p\, 2\, z^{m_3}{p^2}$, , 则

$$f({}^{t_i}g) = f(({}^{t_i}x_1^p)^{m_1}({}^{t_i}x_2^p)^{m_2}({}^{t_i}z^{p^2})^{m_3}) = f(({}^{t_i}x_1^p)^{m_1})f(({}^{t_i}x_2^p)^{m_2})f(({}^{t_i}z^{p^2})^{m_3})$$

$$= ({}^{f(t_i)}f(x_1^p))^{m_1}({}^{f(t_i)}f(x_2^p))^{m_2}({}^{f(t_i)}f(z^{p^2}))^{m_3} = ({}^{f(t_i)}x_1)^{m_1}({}^{f(t_i)}x_2)^{m_2}({}^{f(t_i)}z)^{m_3} = {}^{f(t_i)}\ (x_1^{m_1}x_2^{m_2}z^{m_3}) = {}^{f(t_i)}\ f(g)$$

为完成证明，我们构造一个映射 β，它与命题 3.1 证明第一段中的映射类似。由于F 是传递自相似的，因此存在一个简单虚拟端同态

$$f_0 : \widetilde{F} \to F.$$

Let

$$\pi : N \rtimes \widetilde{F} \to \widetilde{F}$$

~是核为N 的投影，其在F 上的限制是恒等映射，并且

$$i : F \to N \rtimes F$$

是包含映射。接着考虑复合映射

$$\beta = i \circ f_0 \circ \pi : N \rtimes \widetilde{F} \to N \rtimes F$$

~假设 M 是 N $\rtimes$ F 的正规子群，且包含于 (N $\rtimes$ F) $\cap$ ($N_1 \rtimes F_1$)，并且满足β(M) $\subseteq$ M，且 f(M) $\subseteq$ M。由于 f_0 是单纯端同态，因此 M $\subseteq$ 核(π) = N。根据 $f|_N$的定义，并且由于 f(M) $\subseteq$ M $\subseteq$ N，可得 M = 1；因此，由定理 2.6 应用于虚拟端同态 f 和 β，我们得出 G 是自相似的，其在相应正则单根树第一层上的作用有两个轨道。

最后还需考虑 F 是无限循环的特殊情形。考虑前面定义的虚拟端同态 $f : G_1 = N_1 \rtimes F_1 \to G$。若 f 是简单的，则 G 是所需的传递自相似群。假设 f 不是简单的。那么 G 有一个正规子群 K，使得 K $\subseteq G_1$且 f (K) $\subseteq$K。由于 f (N_1) $\subseteq$N，我们推得 f (K $\cap$N) $\subseteq$K $\cap$N $\subseteq N_1$,，因此对所有 s $\geqslant$ 1，都有 $f^{(s)}$(K $\cap$N) $\subseteq$K $\cap$N。根据 $f|_{N_1}$ 的定义，我们得出 K $\cap$ N = 1。因此 K $\simeq$ Z，令 t_1 为 K 的一个生成元。由于 K 和 N 都是 G 的正规子群，我们有 [K, N] $\subseteq$ K $\cap$ N = 1。定义 $G_0 = \langle t_1^p$、$N_1\rangle = \langle t_1^p\rangle \times N_1$，它们是 G 的有限指数子群。定义一个虚拟端同态

$$f_0 : G_0 \to G$$

由$f_0(x_1^p) = x_1, f_0(x_2^p) = x_2, f_0(t_1^p) = t_1$给出。根据$f_0$ 的定义，它显然是简单的。因此G是传递自相似的。

□

下面的结果是推论 2.2 的一个版本，它不要求顶点群是阿贝尔群，只要求它们是无挠幂零群；但我们要求边群在顶点群中的指数有限这一额外条件。此外，关于 K 的结论更强，因为 $\widetilde{\rho}_v(G_v)$ 在K中具有有限指数。注意，推论 2.2 并未指出 $\rho_v(G_v)$ 在K 中具有有限指数，因为边群在顶点群中的指数不一定有限。

推论 3.3. 设 G 是有限连通图 $(\mathcal{G},X)$ 上有限生成无挠幂零群的基本群，其中 G_e 是 $G^{o(e)}$ 中的有限指数真子群，且对每个 $e \in A$， $\phi_e(G_e)$ 都是 $G^{\tau(e)}$ 中的有限指数真子群。那么以下陈述等价：

• G是剩余有限的。• 对于固定顶点 $v_0 \in V(X)$，存在一个有限生成无挠幂零群 K，包含于 G^{v_0} 的 *Malcev´*完备化中（对 $v \in V(X)$，G^v 的 *Malcev´*完备化彼此同构），以及一族单同态 $\{\widetilde{\rho}_v : G_v \to K \mid v \in V(X)\}$，其中 $\widetilde{\rho}_v(G_v)$ 在 K 中的指数有限；还有一族自同构 $\{\theta_e : K \to K \mid e \in A\}$，使得

$$\widetilde{\theta}_e \widetilde{\rho}_{o(e)}|_{G_e} = \widetilde{\rho}_{\tau(e)} \phi_e|_{G_e} \text{ for all } e \in A.$$

证明。 我们应用定理 2.1，即剩余有限性等价于定理 2.1 的第二个条件。我们的第二个条件是定理 2.1 第二个条件的一个更强版本。

我们假设 定理 2.1 的第二个条件成立，即存在一族单同态 s

$$\{\rho_v : G_v \to G_v^* \mid v \in V(X)\}$$

其中 G_v^* 是无挠幂零的，且 $\rho_v(G_v)$ 在 G_v^* 中的指数有限，使得对于每条边$e \in A$，存在一个同构

$$\phi_e^* : i_{G^*_{o(e)}}(\rho_{o(e)}(G_e)) \to i_{G^*_{\tau(e)}}(\rho_{\tau(e)}(\phi_e(G_e)))$$

它扩展了 ϕ_e，其中 $i_{G^*\,o(e)}(\rho_{o(e)}(G_e))$（分别地，$i^{G^*_{\tau(e)}}(\rho_{\tau(e)}(\phi(G_e)))$）是 $G^{*\,o(e)}$（分别地，$G^*_{\tau(e)}$）中 $\rho_{o(e)}(G_e)$（分别地，$\rho_{\tau(e)}(\phi(G_e))$）的隔离子。

由于所有边群在相应顶点群中的指数均有限，并且通过考虑包含关系下尽可能小的G_v^*，我们推得在G_v^* 中考虑的所有隔离子都等于G_v^*。因此存在一个同构

$$\phi_e^* : G^*_{o(e)} \to G^*_{\tau(e)}$$

对每个$e \in A$，它都扩展了 ϕ_e。根据定理 2.1 的证明，对于所有$v \in V(X)$，群G_v^* 都包含在G^v 的 Malcev 完备化中。

由于X 是一个连通图，每个顶点$v \in V(X)$ 都是某条边$e \in A$ 的起点或终点（或两者兼具），特别是对于$v \in V(X)$，所有群G_v^*都彼此同构。令K 为G^{v_0} 的 Malcev 完备化中的一个固定群，并取同构 $\alpha_v : G_v^* \to K$，对所有$v \in V(X)$均如此。于是我们可以设

$$\widetilde{\rho}_v = \alpha_v \rho_v : G_v \to K$$

and

$$\widetilde{\theta}_e = \alpha_w \phi_e^* \alpha_v^{-1} : K \to K \text{ for } v = o(e), w = \tau(e).$$

□

定理 1.3 的证明 *i*) $\Longrightarrow$ *ii*) 根据自相似群忠实作用于根树的定义，它们总是剩余有限的。

iii) $\Longrightarrow$ *ii*) 整数环上的所有有限生成线性群都是剩余有限的。事实上，根据 Malcev 的一个结果，有限生成线性群（在交换环上）是剩余有限的 [21] 但根据 Drutu-Sapir 的一个结果，逆命题不成立 [7] 该群 $\langle a,t | a^{t^2} = a^2 \rangle$ 是剩余有限且非线性的。

ii) $\Longrightarrow$ *i*) 现在假设 $G = \pi(\mathrm{G},X)$ 是剩余有限的。那么根据推论 3.3，存在一个有限生成无挠幂零群 K （回顾一下，对于固定顶点 $v_0 \in V(X)$，K 位于 G_{v_0}的 Malcev˝完备化中）、一个单同态族，

$$\{\widetilde{\rho}_v : G_v \to K \mid v \in V(X)\}$$

˜其中 $\widetilde{\rho}_v(G_v)$ 在K 中的指数有限，并且存在自同构族 $\{\theta_e : K \to K \mid e \in A\}$，使得

$$\widetilde{\theta}_e\widetilde{\rho}_{o(e)}|_{G_e} = \widetilde{\rho}_{\tau(e)}\phi_e|_{G_e} \text{ for all } e \in A.$$

注意，由于 K 是 Marcev˝s 完备化中G_{v_0} 的有限生成子群，且G_{v_0} 与海森堡群可公度，因此我们得出K 与海森堡群可公度，故其为二阶幂零群、无挠，Hirsh 长度为 3。我们将证明分为几个步骤。

1）令 F 为G 中由以下集合生成的子群

$$\{t_e \mid e \in A \cap (E(X)\backslash E(T))\}.$$

于是，根据群图的基本群的定义，F 是一个自由群，其自由基为 $\{t_e \mid e \in A \cap (E(X)\backslash E(T))\}$。令

$$K \rtimes F$$

˜为半直积，其中t_e 对K 的共轭作用由 θ_e给出。于是存在一个群同态

$$\gamma : G \to K \rtimes F$$

其在每个G_v 上的限制为 $\widetilde{\rho}_v$，且对每个$e \in A \cap (E(X)\backslash E(T))$，$\gamma(t_e) = t_e$。

Set

$$F_0 = Ker(\gamma).$$

由构造可知，F_0 与每个顶点群G_v的交都是平凡的，因此根据标准的巴斯–塞尔理论，F_0 是一个自由群。

2) 我们可以假设，对于每个$v \in V(X)$，单同态 $\widetilde{\rho}_v$ 是包含映射，即G_v 是K的有限指数子群。此外，由于在G 中，对于$e \in A \cap E(T)$，我们有$G_e = G^{o(e)} \widetilde{\cap} G^{\tau(e)}$，因此在此情形下可以假设 θ_e 和 ϕ_e 是恒等映射。

考虑由下式定义的G 的子群

$$D = \cap_{e\in A} G_e$$

注意，D 在G_e中的指数有限，因此它在K中的指数也有限。令$s > 0$ 为满足下式的自然数

$$\langle g^s \mid g \in K\rangle = K^s \subseteq D$$

˜由于 θ_e 是K的自同构，它也是K^s的自同构。我们令$H = K^s$ 为G的一个子群。

令$e \in A \cap (E(X)\backslash E(T))$。注意，$H = K^s \leqslant G_e \leqslant K$。由于 $\widetilde{\rho}_{o(e)}$ 是包含映射，我们有˜，将 $\theta_e \in Aut(K)$ 限制在G_e 上得到映射 ϕ_e （这就是G中与t_e 的共轭作用）。因此在群G 中有

$$t_eHt_e^{-1} = t_e(K^s)t_e^{-1} = \phi_e(K^s) = \widetilde{\theta}_e(K^s) = \widetilde{\theta}_e(K)^s = K^s = H$$

因此我们得出，H 在与t_e的共轭作用下保持不变。根据构造H 是每个G_e的子群，因此也是每个顶点群$G^{o(e)}$的子群。注意，$H = K^s$ 是K的特征子群，因此是K 的正规子群，进而也是每个$G^{o(e)}$的正规子群。由于该图是连通的，我们推知H 是G的正规子群。

注意，这个论证也表明H是$K \rtimes F$中的正规子群。因此，γ诱导出一个群同态$G/H \to (K/H) \rtimes F$，其中K/H是有限的。

由于$F_0 \cap H \subseteq F_0 \cap G_e = 1$，且$F_0$和$H$都是$G$的正规子群，因此它们彼此交换，即$[F_0, H] = 1$，于是$HF_0 = H \times F_0$

3) 定义G的以下子群

$$\widetilde{G} = (H \times F_0) \rtimes F = H \rtimes \widetilde{F} \tag{3}$$

其中$\widetilde{F} = F_0 \rtimes F$。由于$K/H$是有限的，$G$是$G$的一个有限指数子群。

我们断言

$$\widetilde{F} \text{ is free.}$$

只需证明对每个顶点v，$\mathrm{F} \cap \mathrm{G}_v = 1$。设$g \in \mathrm{F} \cap \mathrm{G}_v$，$g = \mathrm{x}_0\mathrm{x}$，其中$\mathrm{x}_0 \in \mathrm{F}_0, \mathrm{x} \in \mathrm{F}$。由于$g \in \mathrm{G}_v$，我们有$\gamma(g) \in \mathrm{K}$，但$\gamma(g) = \gamma(\mathrm{x}_0)\gamma(\mathrm{x}) = \gamma(\mathrm{x}) = \mathrm{x} \in \mathrm{F}$。由于$\mathrm{K} \cap \mathrm{F} = 1$，可得$\mathrm{x} \in \mathrm{F} \cap \mathrm{K} = 1$，因此$g = \mathrm{x}_0\mathrm{x} = \mathrm{x}_0 \in \mathrm{G}_v \cap \mathrm{F}_0 = 1$。

4) 我们断言G是自相似的。事实上，G在G中的指数有限，因此是有限生成的，且其商群F是有限生成自由群。根据构造，H无挠，且与海森堡群可公度。然而，由于海森堡群的每个有限指数子群都包含一个与海森堡群同构的有限指数子群，我们推得存在H_1的有限指数子群H，使得H_1与海森堡群同构。由于H中指数为$[H : H_1]$的子群只有有限多个，因此存在F_1的一个有限指数子群F，它正规化H_1并

$$G_1 = H_1 \rtimes F_1 \text{ is a subgroup of finite index in } G$$

根据定理 3.2，G_1是自相似的，因此G是自相似的。事实上，G_1的任何有限个虚拟端同态，只要能证明G_1是自相似的（即满足群G_1的定理 2.6），都可以视为G的虚拟端同态，因此G是自相似的。

ii) $\Longrightarrow$ *iii*), *iv*) 接下来只需证明，若G是剩余有限群，则它在整数环上可线性表示且子群可分。回忆等式（3），以及H与海森堡群可公度，F通过$\sim\{\theta_e\}$作用于H。注意，H包含于所有边群中，且是G的正规子群。因此，由定理 2.3，G在整数环上可线性表示且子群可分。

iv) $\Longrightarrow$ *ii*) 对任意群都成立。

定理 1.2 的证明 证明与定理 1.3 的证明相同，但我们使用命题 3.1，而不是定理 3.2。

定理 1.1 的证明 *i*) $\Longrightarrow$ *ii*) 每个自相似群都是剩余有限的。

ii) $\Longrightarrow$ *i*) 由定理 2.4，G要么是几乎为整环上的$\mathbb{Z}^n$-自由群，要么是整环上$\mathbb{Z}^n$的一个上升 HNN 扩张。在前一种情形下，我们可以应用命题3.1，推出G是自相似群。

在后一种情形下，我们注意到$G = A \rtimes$有理数域，有理数域$\simeq$整数环，且A是若干个整数环副本的严格递增并[n]。我们声称，A作为一个整数环有理数域-模的 Krull 维数为 1，其中有理数域 通过共轭作用作用于A，因此由定理 2.7 可知，G是自相似的，因为有理数域 并不中心化A。

为了证明$Krulldim(A) = 1$，注意到

$$Krulldim(A) = Krulldim(\mathbb{Z}Q/I)$$

其中I是 A在Z有理数域中的湮灭子。由于0是Z有理数域和I的素理想，0，因此我们有

$$Krulldim(\mathbb{Z}Q/I) \leqslant Krulldim(\mathbb{Z}Q) - 1 = 1$$

如果$Krulldim(\mathrm{Z}Q/I) = 0$，那么$\mathrm{Z}Q$中满足$I \subseteq P$的所有素理想$P$都应当是极大理想。但是，$\mathrm{Z}Q$的任一极大理想在$\mathrm{Z}Q$（作为加法子群）中都有有限指数。即使对于更一般的群，如多循环群，这一事实也成立（见[27]）。由于根据标准的交换代数论证，$\mathrm{Z}Q$是诺特环，因此在$P_1, ..., P_m$这些位于I之上的极小素理想中，只有有限多个，并且

$$I \subseteq \sqrt{I} = P_1 \cap \ldots \cap P_m$$

特别地，$\sqrt{I}$在$\mathrm{Z}\bar{Q}$中具有有限指数，因此I在$\mathrm{Z}Q$中具有有限指数。又由于A是有限生成的$\mathrm{Z}Q$-模，我们得出A是有限的，矛盾。

ii) $\Longrightarrow$ *iii*)

$\tilde{}$ $\tilde{}$1）如果G是虚拟Z^n-商自由群，我们断言G在整数环上可线性表示。事实上，设$G = H \rtimes F$是G的一个$\tilde{}$ $\tilde{}$有限指数子群，其中F是有限秩自由群，且$H \simeq \mathrm{Z}^n$。那么F通过共轭作用于H。

$\tilde{}$ $\tilde{}$令F_0为该作用的核，因此F_0是G的正规子群。于是$\mathrm{G}/\mathrm{F}_0 \leqslant \mathrm{Z}^n \rtimes \mathrm{GL}_n(\mathrm{Z})$。群$\mathrm{Z}^n \rtimes \mathrm{GL}_n(\mathrm{Z})$嵌入$\mathrm{GL}_{n+1}(\mathrm{Z})$，其中矩阵$\mathrm{A} = (\mathrm{a}_{ij}) \in \mathrm{GL}_n(\mathrm{Z})$由矩阵$\mathrm{B} = (\mathrm{b}_{ij})$表示，定义为$\mathrm{b}^{ij} = \mathrm{a}^{ij}$，对$\mathrm{i}, \mathrm{j} \leqslant \mathrm{n}$，$\mathrm{b}_{n+1,i} = 0 = \mathrm{b}_{i,n+1}$，对$1 \leqslant \mathrm{i} \leqslant \mathrm{n}$，且$\mathrm{b}_{n+1,n+1} = 1$；$\mathrm{h} = (\mathrm{z}_1, ..., \mathrm{z}_n)$则由一个主对角线上仅有1、最后一列为$(\mathrm{z}_1, ..., \mathrm{z}_n, 1)^t$且其他元素均为0的矩阵表示。

$\tilde{}$ $\tilde{}$另一方面，$\mathrm{G}/\mathrm{H} \simeq \mathrm{F}$是自由群，因此它在整数环上可线性表示，即嵌入$\mathrm{GL}_m(\mathrm{Z})$，其中$\tilde{}$m取适当值；且$\mathrm{G}/\mathrm{F}_0$嵌入$\mathrm{H} \rtimes \mathrm{GL}_n(\mathrm{Z})$，后者如上所述嵌入$\mathrm{GL}_{n+1}(\mathrm{Z})$。由于$\mathrm{H} \cap \mathrm{F}_0 = 1$ $\tilde{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}$，我们推得$\mathrm{G} = \mathrm{H} \rtimes \mathrm{F}$嵌入$(\mathrm{G}/\mathrm{H}) \times (\mathrm{G}/\mathrm{F}_0)$，而后者自身又嵌入$\mathrm{GL}_m(\mathrm{Z}) \times \mathrm{GL}_{n+1}(\mathrm{Z}) \leqslant \mathrm{GL}_{m+n+1}(\mathrm{Z})$。于是$\mathrm{V} = \mathrm{Z}^{m+n+1}$是一个G-模，诱导G-模$\mathrm{ZG} \otimes_{\mathbb{Z}\tilde{G}} \mathrm{V} = \mathrm{Z}^k$，对于$\tilde{}$$\mathrm{k} = [\mathrm{G} : \mathrm{G}](\mathrm{m} + \mathrm{n} + 1)$，给出了G到$\mathrm{GL}_k(\mathrm{Z})$的嵌入。

2) 若G是Z^n的上升HNN扩张，我们声称G在Q上线性表示。事实上，$\mathrm{G} = \langle \mathrm{A} \simeq \mathrm{Z}^n, \mathrm{t} \mid \mathrm{tat}^{-1} = \varphi(\mathrm{a}), \mathrm{a} \in \mathrm{A} \rangle$，其中$\varphi : \mathrm{A} \to \mathrm{A}$是一个单同态。若$\varphi$是满射，则由前一段可知G在整数环上可线性表示。若$\varphi$不是满射，则$\mathrm{B} = \cup_{i \geqslant 0} \mathrm{t}^{-i}\mathrm{A}\mathrm{t}^i$是一个嵌套递增并，其中每个$\mathrm{t}^{-i}\mathrm{A}\mathrm{t}^i \simeq \mathrm{A} \simeq \mathrm{Z}^n$，因此B是G的正规子群，且B可嵌入$\mathrm{Q}^n$；特别地，G可嵌入$\mathrm{Q}^n \rtimes \mathrm{Z}$，也就是说，可嵌入$\mathrm{Q}^n \rtimes \mathrm{GL}_n(\mathrm{Q})$。将前一段的论证中的Z替换为Q，可得$\mathrm{Q}^n \rtimes \mathrm{GL}_n(\mathrm{Q})$可嵌入$\mathrm{GL}_{n+1}(\mathrm{Q})$。

iii) $\Longrightarrow$ *ii*) 根据Malcev定理，[21]每个在交换环上可线性表示的有限生成群都是剩余有限的。

4. 海森堡群的上升HNN扩张是自相似的

定理 1.4 的证明

$G = \langle N, t \mid {}^t g = \varphi(g) \text{ 对于 } g \in N \rangle$，其中$N = \langle x, y \rangle$是海森堡群，且$\varphi : N \to N$是一个单同态。由于$\varphi$是自同构的情形已由定理3.2解决，因此我们可以假设φ不是满射。注意，$\varphi(N)$在N中具有有限指数。

Let

$$\varphi(x) \in x^{a_1} y^{b_1} Z \text{ and } \varphi(y) \in x^{a_2} y^{b_2} Z,$$

其中 $Z = \langle z \rangle$ 是N的中心， $[x,y] = z$ ，且 $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2^2 \end{bmatrix}$ b_1 b是一个具有整数系数的矩阵。

由于 $\varphi(N)$ ， N 我们有行列式(A) ， ± 1。

命题 1 存在一个有限指数子群 $\langle x_1,y_1 \rangle$ 属于N，一个整数$k \geqslant 1$ 以及一个正奇素数p ，使得 2行列式(A) 整除$p - 1$ ，并且对于$N_0 = \langle x_1,y_1 \rangle$、$N_1 = \langle x_1^p$、$y_1^p \rangle$ ，我们有$\varphi^k(N_0) \subseteq N0$， $\varphi^k(N_1) \subseteq N_1$。

命题证明。 1）假设行列式$(A) - tr(A) + 1$ ， 0，并考虑$x_1 = xz^\alpha$、$y_1 = yz^\beta$ ，其中 α、$\beta \in$ 属于整数环。我们稍后将具体说明 α 和 β 。

由于 $\varphi(x^p) = \varphi(x)^p$， $\varphi(y^p) = \varphi(y)^p$ ，我们可以写成

$$\varphi(x^p) = x^{pa_1} y^{pb_1} z^{pc_1}, \varphi(y^p) = x^{pa_2} y^{pb_2} z^{pc_2}$$

对于某个$c_i \in$ 属于整数环。于是利用 $\varphi(z) = \varphi([x、y]) = z^{det(A)}$ ，我们有

(4) $$\varphi((xz^\alpha)^p) = \varphi(x^p z^{\alpha p}) = \varphi(x^p)\varphi(z)^{\alpha p} = x^{pa_1} y^{pb_1} z^{pc_1} z^{\alpha p.det(A)}$$

and

(5) $$\varphi((yz^\beta)^p) = \varphi(y^p z^{\beta p}) = \varphi(y^p)\varphi(z)^{\beta p} = x^{pa_2} y^{pb_2} z^{pc_2} z^{\beta p.det(A)}$$

注意到，(4)、(5)以及 $[x_1^p$、$y_1^p] = z^{p^2}$ 这一事实意味着： $\varphi((xz^\alpha)^p)$、 $\varphi((yz^\beta)^p) \in N_1$ 当且仅当

$$\varphi((xz^\alpha)^p) \in (xz^\alpha)^{pa_1} (yz^\beta)^{pb_1} Z^{p^2} = x^{pa_1} y^{pb_1} z^{\alpha p a_1 + \beta p b_1} Z^{p^2}$$

and

$$\varphi((yz^\beta)^p) \in (xz^\alpha)^{pa_2} (yz^\beta)^{pb_2} Z^{p^2} = x^{pa_2} y^{pb_2} z^{\alpha p a_2 + \beta p b_2} Z^{p^2}$$

这等价于

$$\alpha a_1 + \beta b_1 - \alpha.det(A) = c_1 \ (\ mod\ p), \alpha a_2 + \beta b_2 - \beta.det(A) = c_2 \ (\ mod\ p)$$

这是一个变量为 α、β 的同余方程组，其行列式为

$$(a_1 - det(A))(b_2 - det(A)) - a_2 b_1 = a_1 b_2 - a_2 b_1 - (a_1 + b_2) det(A) + det(A)^2 =$$

$$det(A)^2 - tr(A) det(A) + det(A) = det(A)(det(A) - tr(A) + 1)$$

我们可以选择p 使得

$$det(A)(det(A) - tr(A) + 1) \neq 0(\ mod\ p)$$

并且总能解出该同余方程组。在这种情况下，我们定义$k = 1$。

2) 最后，如果$det(A) - tr(A) + 1 = 0$ ，那么对于 λ_1、λ_2 这两个A 的特征值，我们有 $(\lambda_1 - 1)(\lambda_2 - 1) = \lambda_1\lambda_2 - (\lambda_1 + \lambda_2) + 1 = 0$。于是 $\lambda_1 = 1$ 或 $\lambda_2 = 1$，不妨设 $\lambda_1 = 1$。那么存在一个有限指数子群$N_0 = \langle x_0,y_0 \rangle \leqslant N$ 使得

$$\varphi(x_0) = x_0 z^{d_1},\ \varphi(y_0) = y_0^\lambda z^{d_2}$$

其中 $\lambda = \lambda_2,d_1,d_2 \in$ 整数环。令 $z_0 = [x_0, y_0] = z^m$ ，其中 $m \in$ 属于整数环。注意， $\varphi(x_0)$ 和 $\varphi(y_0)$ 不一定是N_0的元素。

设p 为一个素数，并令 $k = p|m|$。

注意，由于 $\varphi(z) = \varphi([x,y]) = z^{det(A)} = z^{\lambda}$ 对每个 $s \geqslant 1$ 都成立，因此有 $\varphi^s(y_0) = y_0^{\lambda^s} z^{sd_2\lambda^{s-1}}$，特别是

$$\varphi^k(y_0) = y_0^{\lambda^k} z^{p|m|d_2\lambda^{k-1}} = y_0^{\lambda^k} z_0^{\pm pd_2\lambda^{k-1}} \in N_0$$

同理

$$\varphi^k(x_0) = x_0 z^{p|m|d_1} = x_0 z_0^{\pm pd_1} \in N_0$$

那么，如果我们将N替换为 N_0，即将x 替换为 x_0,，将y 替换为 y_0,,，将z 替换为 z_0,，再将A 替换为 A^k，并将 φ 替换为φ^k，便可求解情形 1) 中关于$a_1 = 1$、$b_1 = 0$、$c_1 = \pm pd_1$,、$a_2 = 0$、$b_2 = \lambda^k$、$c_2 = \pm pd_2\lambda^{k-1} = 0\ (\ mod\ p\ )$ 的同余方程组，因为本情形中的同余方程组为

$$\alpha(1 - det(A^k)) \equiv c_1 \equiv 0\ (\ mod\ p), \beta.0 \equiv c_2 \equiv 0\ (\ mod\ p)$$

因此我们可以取 $\alpha = \beta = 0$，并令$x_1 = x_0, y_1 = y_0$。

在情形 1) 和 2) 中，我们都能求解该同余方程组；但在情形 1) 中，必须避开有限多个素数p。最后，我们需要一个奇素数p，使得 $2det(A)$ 整除$p-1$；但根据狄利克雷定理，等差数列 $\{2det(A)s + 1 \mid s \in$ 整数环,$det(A)s > 0\}$总是包含无穷多个素数p。因此，存在一个满足命题 1 的素数p。命题 1 的证明至此完成。

断言2 假设 K 是 N 中的一个有限指数子群，且对某个 $k \geqslant 1$，有 $\varphi^k(K) \subseteq K$。那么由 K 和 t^k 生成的子群 $G_K\ of\ G = \langle N, t\rangle$ 在 G 中具有有限指数。特别地，如果 G_K 是传递自相似的，那么 G 也是传递自相似的。

证明令 M 为 G 中 N 的正规闭包。那么 M 包含于 N 的 Mal'cev 完备化中，M 是二步幂零无挠幂零群，并且由于 $\varphi(z) = z^{det(A)}$，我们用加法记号有 整数环$(M) \simeq$ 整数环$[\ ^1/_{行列式(A)}]$，其中 z 对应于 $1 \in$ 整数环。注意，$\overline{M/}$整数环$(M) \simeq \cup_{i\geqslant 1}A^{-i}$整数环$^2 = \cup_{i\geqslant 1}A^{-ik}$整数环^2。

我们令$M_1 = G_K \cap M$。要完成证明，只需证明M_1 在M中具有有限指数。

由于 K 在 N 中的指数有限，因此存在某个整数 m $\geqslant 1$，使得 $(mZ)^2 \leqslant K/(Z(N) \cap K) \leqslant N/Z(N) = Z^2$。于是，$M_1$ 在 M/Z(M) 中的像包含 $\cup_{i\geqslant 1}A^{-ik}(mZ)^2$。由于 $A^{-ik}(mZ)^2$ 在 $A^{-ik}Z^2$ 中的指数为 m^2，我们得出 $\cup_{i\geqslant 1}A^{-ik}(mZ)^2$ 在 $\cup_{i\geqslant 1}A^{-ik}Z^2 \simeq$ M/Z(M)中的指数至多为 m^2。因此，M_1 在 M/Z(M) 中的像在 M/Z(M)中具有有限指数。

由于 K 在 N 中的指数有限，因此存在某个整数 s $\geqslant 1$，使得 $Z(N) \cap K = \langle z^s\rangle$。于是，$Z(M) \cap M_1$包含 $\cup_{i\geqslant 1}\langle t^{ik}z^s\rangle$。改用加法记号，$sZ[\ ^1/_{det(A)^k}] \leqslant$ ~~$Z(M)$~~ $\cap M_1 \leqslant Z(M) = Z[\ ^1/_{det(A)}] =$ ~~$Z[\ ^1/_{det(A)^k}]$~~。但对于任意整数 r , 0，我们有 $[Z[^1/_r] : sZ[^1/_r]] \leqslant s$。因此，$Z(M) \cap M_1$ 在 Z(M)中具有有限指数。

最后，如果G_K 是传递自相似的，那么G_K存在相应的简单虚拟端同态，该同态可视为G 的简单虚拟端同态，从而我们推导出G 是传递自相似的。断言2的证明至此完成。

断言3 G 是一个传递自相似群。

命题 3 的证明 考虑群 $N_0 = \langle x_1, y_1\rangle$ 以及由命题 1 给出的整数 k $\geqslant 1$。由命题 2 应用于 $K = N_0$ 可知，只需考虑 $k = 1$ 且 $N_0 = N$ 的情形，即 x_1, y_1 是海森堡群 N 的生成元，其中 $[x_1, y_1] = z$ 是 Z(N) 的一个生成元，且 $\varphi(N) \subseteq N$ 并且 $\varphi(\langle x_1^p 、\ y_1^p\rangle) \subseteq \langle x_1^p 、\ y_1^p\rangle = N_1$。

令G_1为G中由x_1^p、y_1^p和t生成的子群。由命题 2，G_1在G中的指数有限。

我们断言存在一个简单虚拟端同态

$$f : G_1 \to G$$

定义如下

$$f(x_1^p) = x_1, f(y_1^p) = y_1, f(t) = tu$$

对于某个 $u \in M$。我们需要验证f是良定义的，即

$$^{f(t)}f(x_1^p) = f(^t x_1^p) \text{ and } ^{f(t)}f(y_1^p) = f(^t y_1^p) \tag{6}$$

事实上，$_t \ (x_1^p) \in^t N_1 = \varphi(N_1)$，因此

$$^t(x_1^p) = x_1^{p\gamma_{11}} y_1^{p\gamma_{12}} z^{p^2\gamma_{13}}, \text{ similarly } ^t(y_1^p) = x_1^{p\gamma_{21}} y_1^{p\gamma_{22}} z^{p^2\gamma_{23}} \text{ for some } \gamma_{ij} \in \mathbb{Z}$$

因此

$$^t x_1 = x_1^{\gamma_{11}} y_1^{\gamma_{12}} z_1 \text{ and } ^t y_1 = x_1^{\gamma_{21}} y_1^{\gamma_{22}} z_2, \text{ for some } z_1, z_2 \in \langle z \rangle.$$

注意，$[x_1, y_1] = z$，所以

$$x_1^{p\gamma_{11}} y_1^{p\gamma_{12}} z^{p^2\gamma_{13}} =^t (x_1^p) = (^t x_1)^p = (x_1^{\gamma_{11}} y_1^{\gamma_{12}} z_1)^p = x_1^{p\gamma_{11}} y_1^{p\gamma_{12}} z^{-\gamma_{11}\gamma_{12}\frac{p(p-1)}{2}} z_1^p$$

这意味着

$$z^{p\gamma_{13}+\gamma_{11}\gamma_{12}\frac{(p-1)}{2}} = z_1 \tag{7}$$

类似地

$$x_1^{p\gamma_{21}} y_1^{p\gamma_{22}} z^{p^2\gamma_{23}} =^t (y_1^p) = (^t y_1)^p = (x_1^{\gamma_{21}} y_1^{\gamma_{22}} z_2)^p = x_1^{\gamma_{21}p} y_1^{\gamma_{22}p} z^{-\gamma_{21}\gamma_{22}\frac{p(p-1)}{2}} z_2^p$$

这意味着

$$z^{p\gamma_{23}+\gamma_{21}\gamma_{22}\frac{(p-1)}{2}} = z_2 \tag{8}$$

Then

$$f(^t x_1^p) = f(x_1^{p\gamma_{11}} y_1^{p\gamma_{12}} z^{p^2\gamma_{13}}) = f(x_1^{p\gamma_{11}}) f(y_1^{p\gamma_{12}}) f(z^{p^2\gamma_{13}}) = x_1^{\gamma_{11}} y_1^{\gamma_{12}} z^{\gamma_{13}}$$

and

$$f(^t y_1^p) = f(x_1^{p\gamma_{21}} y_1^{p\gamma_{22}} z^{p^2\gamma_{23}}) = f(x_1^{p\gamma_{21}}) f(y_1^{p\gamma_{22}}) f(z^{p^2\gamma_{23}}) = x_1^{\gamma_{21}} y_1^{\gamma_{22}} z^{\gamma_{23}}$$

另一方面，κap d

$$^{f(t)}f(x_1^p) =^{tu} x_1 =^t x_1(^t(x_1^{-1} u x_1 u^{-1})) = x_1^{\gamma_{11}} y_1^{\gamma_{12}} z_1(^t(x_1^{-1} u x_1 u^{-1}))$$

and

$$^{f(t)}f(y_1^p) =^{tu} y_1 =^t y_1(^t(y_1^{-1} u y_1 u^{-1})) = x_1^{\gamma_{21}} y_1^{\gamma_{22}} z_2(^t(y_1^{-1} u y_1 u^{-1}))$$

因此 (6) 等价于

$$x_1^{-1} u x_1 u^{-1} =^{t^{-1}} (z_1^{-1} z^{\gamma_{13}}) = (z_1^{-1} z^{\gamma_{13}})^{1/det(A)} \tag{9}$$

and

$$y_1^{-1} u y_1 u^{-1} =^{t^{-1}} (z_2^{-1} z^{\gamma_{23}}) = (z_2^{-1} z^{\gamma_{23}})^{1/det(A)}. \tag{10}$$

由 (7)，并且由于行列式(A) 整除 $(p-1)/2$，可得

$$(z_1^{-1} z^{\gamma_{13}})^{\frac{1}{det(A)}} = (z^{(1-p)\gamma_{13} - \gamma_{11}\gamma_{12}\frac{(p-1)}{2}})^{\frac{1}{det(A)}} \in \langle z \rangle \tag{11}$$

同理，由（8）可得

$$(z_2^{-1} z^{\gamma_{23}})^{\frac{1}{det(A)}} = (z^{(1-p)\gamma_{23} - \gamma_{21}\gamma_{22}\frac{(p-1)}{2}})^{\frac{1}{det(A)}} \in \langle z \rangle \tag{12}$$

取$u = x_1^{\alpha_0} y_1^{\beta_0}$，则

(13) $$x_1^{-1} u x_1 u^{-1} = [x_1, u^{-1}] = [x_1, y_1^{-\beta_0}] = z^{-\beta_0}$$

and

(14) $$y_1^{-1} u y_1 u^{-1} = [y_1, u^{-1}] = [y_1, x_1^{-\alpha_0}] = z^{\alpha_0}$$

由 (9)、(10)、(11)、(12)、(13) 和 (14)，若取.....，则f是良定义的。

$$\alpha_0 = \frac{1}{det(A)}((1-p)\gamma_{23} - \gamma_{21}\gamma_{22}\frac{(p-1)}{2}) \in \mathbb{Z}$$

and

$$\beta_0 = \frac{1}{det(A)}(-(1-p)\gamma_{13} + \gamma_{11}\gamma_{12}\frac{(p-1)}{2}) \in \mathbb{Z}$$

令M_1 为G_1中N_1 的正规闭包。注意，$f|_{M_1} : M_1 \to M$ 是单射，因此f 也是单射。

我们断言f是一个简单虚拟端同态。否则，存在G的一个非平凡正规子群K，使得$K \subseteq G_1$且$f(K) \subseteq K$。于是$f(K \cap M) \subseteq K \cap M$。

设 $g \in \mathrm{K} \cap$整数环$(\mathrm{M}_1) \leqslant$整数环$(\mathrm{M}_1) \simeq \mathrm{p}^2$整数环[^{1}行列式(A)]采用加法记号。则 $\mathrm{f}(g) = \frac{g}{}\mathrm{p}^2$，且 p 不整除行列式(A)，这意味着如果 1 , 0（采用加法记号），那么对某个充分大的 s $\geqslant 1$，有 $\mathrm{f}^s(g) \notin$整数环(M_1)，矛盾。因此 K $\cap$整数环(M_1) 是平凡群。

注意到f 诱导出一个映射 $\tilde{f}$: $W = \frac{M_1 Z(M_1)}{} \to \frac{M Z(M)}{} = V$，这无非就是除以$p$，即乘以 $1/p$。回忆

$$V = \cup_{i \geqslant 1} A^{-i}\mathbb{Z}^2 \subseteq \cup_{i \geqslant 1}(\frac{1}{det(A)})^i \mathbb{Z}^2 \text{ and } W = \cup_{i \geqslant 1} A^{-i}(p\mathbb{Z})^2$$

由于$det(A)$ 不能被p 整除，我们得出结论：W 中满足$f^s(w)$ 对所有$s \geqslant 1$ 都有定义的唯一元素w 是平凡元素，即在加法记号下$w = 0$。因此$K \cap M \subseteq K \cap Z(M_1)$ 是平凡群。

最后，由于$K \cap M = 1$，且K和M都是G中的正规子群，我们得出 $[K, M] = 1$。此外$K \simeq KM/M \leqslant G/M \simeq \mathrm{Z}$，因此$K$ 是循环的。于是$M \times K$ 是G的有限指数子群，设指数为s。因此 φ^s 是单位元，从而$det(A)^s = 1$，而$det(A) \in \mathrm{Z}$意味着$det(A) = \pm 1$，矛盾。断言3的证明至此完成。

参考文献

[1] L. Bartholdi 和 Z. Sunik，《一些可解自动机群》，Contemp. Math., 394，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2006，11–29[2] G. Baumslag 和 D. Solitar，《一些双生成元单关系非霍普夫群》。Bull. Amer. Math. Soc. 68 (1962), 199–201[3]J. Button，《广义 Baumslag-Solitar 群与分层双曲群》。arXiv 预印本 arXiv:2208.12688, 2022[4] K-U. Bux、C. Llosa Isenrich 和 X. Wu，《关于作用于局部有限树上的群的 Boone–Higman 猜想》，arXiv:2408.05673[5] A. C. Dantas、T. M. G. Santos 和 S. N. Sidki，《非传递自相似群》。J. Algebra 567(2021), 564–581[6] A. C. Dantas 和 S. Sidki，《关于阿贝尔群花环积的自相似性》。Groups Geom. Dyn. 12 (2018), no. 3, 1061–1068[7] C. Drutu 和 M. Sapir，《非线性剩余有限群》，J. Algebra 284 (2005), no. 1, 174–178[8] Y. Glasner 和 S. Mozes，《自动机与方形复形》，Geom. Dedicata 111 (2005) 43–64

[9]M. Forester。《有限生成群的 JSJ 分解唯一性》。Comment. Math. Helv., 78(4):740–751, 2003[10] D. H. Kochloukova 和 S. N. Sidki, 《FPn 型自相似群》。Geom. Dedicata 204 (2020), 241 - 264[11] D. Kochloukova 和 M. Souza, 《非自相似的后阿贝尔群》，预印本[12] J. Lopez de Gamiz Zearra 和 S. Shepherd, 《高秩 GBS 群的可分性》，Bull. Lond. Math. Soc. 57 (2025), no. 4, 1171 - 1194[13] G. Levitt, 《广义 Baumslag-Solitar 群：秩与有限指数子群》，Ann. Inst. Fourier（格勒诺布尔）65 (2015), no. 2, 725–762[14] G. Levitt, 《Baumslag-Solitar 群的商群与子群》，J. Group Theory 18 (2015), no. 1, 1–43[15] N. Gupta 和 S. Sidki, 《关于周期群的 Burnside 问题》。Math. Z. 182 (1983), no. 3, 385–388[16] R. I. Grigorchuk, 《关于周期群的 Burnside 问题》。（俄文）《泛函分析及其应用》，第 14 卷（1980），第 1 期，第 53 - 54 页[17] P. Hall, 《关于某些可解群的有限性》，Proc. London Math. Soc. (3) 9 (1959), 595 - 622[18] T. Hsu 和 D. Wise, 《多循环群的上升 HNN 扩张是剩余有限的》，J. Pure Appl. Algebra 182 (2003), no. 1, 65 - 78[19] I. J. Leary 和 A. Minasyan, 《可交换化 HNN 扩张：非正曲率与双自动性》，Geom. Topol. 25 (2021), no. 4, 1819 - 1860[20] D. I. Moldavanskii, 《群的降链 HNN 扩张的剩余有限性》，Ukra¨ın. Mat. Zh. 44 (1992), no. 6, 842–845；译载于 Ukrainian Math. J. 44 (1992), no. 6, 758–760[21] A. Malcev, 《无限群的同构矩阵表示》，Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S. 8/50 (1940), 405–422[22] E. Raptis、O. Talelli 和 D. Varsos, 《关于某些群图的有限性条件》，Internat. J. Algebra Comput. 5 (1995), no. 6, 719–724[23] V. Nekrashevych 和 S. Sidki, 《二叉树的自同构：状态闭子群与 1/2-端同态的动力学》。《群：拓扑、组合与算术方面》，375 - 404，London Math. Soc. Lecture Note Ser., 311，Cambridge Univ. Press，剑桥，2004[24] V. Nekrashevych。《自相似群》，数学调查与专著第 117 卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2005。[25] M. Olivier, 《哪些幂零群是自相似的？》，arXiv:2101.11291[26] E. Raptis、O. Talelli 和 D. Varsos, 《关于幂零群群图的剩余有限性》，Internat. J. Algebra Comput. 14 (2004), no. 4, 403 - 408[27] J. E. Roseblade, 《多循环群的群环》，J. Pure Appl. Algebra 3 (1973), 307 - 328[28] T. M. G. Santos, 《非传递自相似群》，博士论文，巴西利亚大学，2021[29] D. Savchuk 和 Y. Vorobets, 《生成二阶群自由积的自动机》，J. Algebra 336 (2011), 53–66.[30] B. Steinberg、M. Vorobets 和 Y. Vorobets, 《生成偶秩自由群的二元字母表自动机》，Internat. J. Algebra Co mput. 21 (2011), no. 1-2, 329–354[31] M. Vorobets 和 Y. Vorobets, 《定义自由变换群的一系列有限自动机》，Groups Geom. Dyn. 4 (2) (2010) 377–405,[32] K. Whyte, 《高阶 Baumslag-Solitar 群的大尺度几何》。Geom. Funct. Anal., 11(6):1327–1343, 2001

坎皮纳斯州立大学（UNICAMP）电子邮箱
地址：desi@unicamp.br