广义韦尔熵的稳定性与齐次多项式的局部集中

JOAQUIM ORTEGA-CERDA `MARIA ANGELES GARCIA-FERRERO 和

Abstract. 我们研究单位球面上复变量数为 $d+1$ 、次数为N 的齐次多项式的两种集中度概念：一种是局部概念，用于衡量支撑在可测子集上的L^2-范数所占的比例；另一种是由广义韦尔熵给出的全局概念。根据 Lieb–Solovej 的结果，这两种情形下的极值函数都是再生核，也就是说，经过酉旋转后的单项式。我们在高维情形下为这两种不等式建立了稳定性结果。对于局部集中度，我们证明，当集合的测度足够小时，近极大者在多项式和域两个方面都定量地接近再生核，从而将一维情形下的已有结果推广到高维。对于广义韦尔熵，我们证明，对任意非线性凸函数 Φ 以及所有充分大的次数 N，再生核都是唯一极小化元（且具有稳定性），这补充了 Nicola–Riccardi–Tilli 的近期结果；后者要求函数在 1 附近满足非线性条件，因而排除了集中泛函等关键例子。由此，通过取次数趋于无穷的极限，我们在 Bargmann–Fock空间中得到了这两个问题的稳定性结果。

arXiv:2603.14568v1 [math.CA] 15 Mar 2026

Contents

1. 引言 9
2. 记号与预备知识 11
3. 关于超水平集的测度 25
4. 主要结果的证明 33
5. 进一步的观察 130
参考文献

1. Introduction

令 $\mathbb{P}_N^d$ 表示由 $d+1$ 个复变量构成的次数为 N 的齐次多项式空间，其中任意元素均可表示为

$$Q(\zeta)=\sum_{|\alpha|=N} a_\alpha \zeta^\alpha, \quad \text{where } \zeta\in\mathbb{C}^{d+1},\ \alpha\in\mathbb{N}_0^{d+1} \text{ and } \ a_\alpha\in\mathbb{C}.$$

我们为 $\mathbb{P}_N^d$ 赋予内积

$$\langle P,Q\rangle_{\mathbb{P}_N^d}=\binom{N+d}{N}\int_{\partial\mathbb{B}} P(\zeta)\overline{Q(\zeta)}d\sigma(\zeta), \quad P,Q\in\mathbb{P}_N^d, \tag{1}$$

其中， $d\sigma$ 是（$2d+1$）维球面 $\partial\mathbb{B}$ 上的旋转不变测度，且$\sigma(\partial\mathbb{B})=1$。因此，$Q\in\mathbb{P}_N^d$ 对应的范数定义为

$$\|Q\|_{\mathbb{P}_N^d}^2=\binom{N+d}{N}\int_{\partial\mathbb{B}}|Q(\zeta)|^2d\sigma(\zeta). \tag{2}$$

前置因子 $\binom{N+d}{N}$ 的选取使得 $\|\zeta_k^N\|_{\mathbb{P}_N^d}=1,\quad k\in\{1,\dots,d+1\}$ （见引理2.1）。

赋予内积（ $\mathbb{P}_N^d$ 1）的空间是一个再生核希尔伯特空间，其核为

$$K_N(\zeta,\eta)=\sum_{|\alpha|=N}\frac{N!}{\alpha!}\zeta^\alpha\bar{\eta}^\alpha=(\zeta\cdot\bar{\eta})^N,\quad \zeta,\eta\in\partial\mathbb{B}.$$

于是，对所有的 $Q\in\mathbb{P}_N^d$ 和 $\eta\in\partial\mathbb{B}$

$$Q(\eta)=\langle Q,K_N(\cdot,\eta)\rangle_{\mathbb{P}_N^d}=\binom{N+d}{N}\int_{\partial\mathbb{B}}Q(\zeta)(\bar{\zeta}\cdot\eta)^Nd\sigma(\zeta).$$

注意到，对于固定的 $\eta\in\partial\mathbb{B}$，再生核具有单位范数，即 $\|K_N(\cdot,\ \eta)\|_{\mathbb{P}_N^d}^2=K_N(\eta,\ \eta)=1$，因此，若 $Q\in\mathbb{P}_N^d$，且 $\|Q\|_{\mathbb{P}_N^d}\le 1$，则

$$\sup_{\zeta\in\partial\mathbb{B}}|Q(\zeta)|=|Q(\eta)|=\left|\langle Q,K_N(\cdot,\eta)\rangle_{\mathbb{P}_N^d}\right|\le 1. \tag{3}$$

本文致力于研究$\mathbb{P}_N^d$中多项式集中度的两种概念。第一种是局部的，用于衡量一个多项式限制在某个可测子集上时，其范数所占的比例：

定义 1.1. 设 $\Omega\subset\partial\mathbb{B}$ 是一个可测集，且 $Q\in\mathbb{P}_N^d$。我们将集中度定义为 Q 在Ω 中的

$$C_{N,\Omega}(Q):=\frac{\binom{N+d}{N}\int_\Omega|Q(\zeta)|^2d\sigma(\zeta)}{\|Q\|_{\mathbb{P}_N^d}^2}.$$

给定大小 $0<\omega<1$ 和次数 $N\in\mathbb{N}$，我们关注满足$\sigma(\Omega)=\omega$ 的集合 $\Omega\subset\partial\mathbb{B}$，以及使集中度$C_{N,\Omega}(Q)$ 最大的多项式 $Q\in\mathbb{P}_N^d$。

注 1.2. 注意，如果我们要在所有大小固定为 $\omega=\sigma(\Omega)$的集合 Ω 中最大化多项式 $Q\in\mathbb{P}_N^d$ 的集中度，那么最优选择总是将 Ω 取为 $|Q|^2$的一个超水平集Ω_t，即

$$\Omega_t:=\{\zeta\in\partial\mathbb{B}:|Q(\zeta)|^2>t\}, \tag{4}$$

其中 t 的选取使得 $\sigma(\Omega_t)=\omega$。采用这一选择后，对于任何其他大小相同的 Ω ω，都有 $C_{N,\Omega_t}(Q)\ge C_{N,\Omega}(Q)$。

我们将考虑的多项式集中度的另一种概念是全局性的，由广义韦尔熵给出：

定义 1.3. 设 $\Phi:\ [0,1]\to\mathbb{R}$ 为凸函数。对于任意 $Q\in\mathbb{P}_N^d$，广义韦尔熵定义如下：

$$S_{N,\Phi}(Q)=-\binom{N+d}{d}\int_{\partial\mathbb{B}}\Phi\left(\frac{|Q(\zeta)|^2}{\|Q\|^2_{\mathbb{P}_N^d}}\right)d\sigma(\zeta).$$

齐次多项式上的广义韦尔熵最初由 Lieb 和 Solovej 在 [LS16]（另见 [LS14]，关于 $\mathbb{P}_N^1$），他们证明，对于任意凸函数 Φ，再生核是 $S_{N,\Phi}$ 的极小值点：

定理 1.4 ([LS16])**.** 设 $\Phi:\ [0,1]\to\mathbb{R}$ 是一个凸函数。那么，对于任意满足 $Q\in\mathbb{P}_N^d$的 $\|Q\|_{\mathbb{P}_N^d}=1$，我们有

$$S_{N,\Phi}(Q)\geq S_{N,\Phi}(\zeta_1^N).$$

广义韦尔熵的估计也蕴含了对（局部）集中度 $C_{N,\Omega}(Q)$ 的估计：对于任意 $0<t_0<1$，考虑凸函数

$$\Phi_{t_0}(t)=\begin{cases}0 & \text{if } 0\leq t<t_0,\\ t-t_0 & \text{if } t_0\leq t\leq 1.\end{cases}$$

对于任意 $Q\in\mathbb{P}_N^d$，令 Ω_t 表示其超水平集，如（4）中所示。注意到

$$S_{N,\Phi_{t_0}}(Q)=-C_{N,\Omega_{t_0}}(Q)+\binom{N+d}{d}t_0\sigma(\Omega_{t_0}).$$

给定 $\omega\in(0,1)$，取 t_0 使得 $\omega=\min\{\sigma(\Omega_{t_0})\ \sigma(\Omega_{t_0}^*)\}$，其中 $\Omega_t^*=\{\zeta\in\partial\mathbb{B}:\ |\zeta_1|^{2N}>t\}$。然后结合关于 的定理 1.4 与备注 1.2，可推得：

推论 1.5。令 $\omega\in(0,1)$。对于任意可测集 $\Omega\subset\partial\mathbb{B}$ 满足 $\sigma(\Omega)=\omega$ 以及任意$Q\in\mathbb{P}_N^d$，有

$$C_{N,\Omega}(Q)\leq C_{N,\Omega^*}(\zeta_1^N),$$

其中 $\Omega^*=\{\zeta\in\partial\mathbb{B}:\ \ |\zeta_1|^2>\left(1-\omega^{1/d}\right)\}$，即 $\sigma(\Omega^*)=\omega$。

在一维情形下，两条不等式的最优函数的唯一性和稳定性都已得到完整理解，分别可见 [KNOCT25、Fra23] 和 [GFOC25], 。对于高维情形，正如 [LS16], 首次考虑的那样，Nicola、Riccardi 和 Till 在 [NRT25a] 中（另一种证明也见 [NRT25b] ）证明了广义韦尔熵的最优函数的唯一性和稳定性 $S_{N,\ \Phi}$ 其条件是：对于每个 ϵ，Φ 在 $(1-\epsilon,\ 1)$ 中为非线性函数。因此，对于由凸函数（如 Φ_{t_0}）定义的熵，这一要求排除了应用其结果的可能性。因而，无法由此推导出浓缩算子的集中极大元的唯一性或稳定性。

我们的第一个结果弥补了这一不足：在每个维数 d下，都存在一个阈值$0<\tilde{\omega}\leq 1$，使得如果 $\omega<\tilde{\omega}$ 对于满足 $\sigma(\Omega)=\omega$的区域 Ω，其浓缩算子仅以再生核的倍数作为最大化元，那么这些最大化元是稳定的；这种稳定性同时体现在函数和区域上。精确表述见定理 1.7 。

通过将这一结果按 N 进行缩放并令其变大，我们得到欧几里得空间中任意大小区域上的 Bargmann-Fock 空间浓缩算子的稳定性，见第5.1节。该结果最初在 [GGRT24]中得到证明。

我们的第二个主要结果涉及任意非线性凸$S_{N,\,\Phi}$ 情形下广义韦尔熵极小化元的稳定性 Φ。我们证明，对于任意这样的 Φ，都存在一个正整数 N_Φ （也依赖于 d），使得若 $N \geq N_\Phi$，则熵的唯一极小化元为再生核（见定理1.9）。同样，该结果补充了 [NRT25a、NRT25b] 中的结果；当 $N \to \infty$ 时，取极限即可恢复[FNT25]最初证明的 Bargmann-Fock 空间中广义韦尔熵的稳定性结果。

注 1.6。请注意，先前的文章 [GFOC25、LS16、NRT25a、NRT25b],均以有界次数全纯多项式空间或群 $SU(d+1)$的对称不可约表示来表述结果。与我们在此呈现结果所用的齐次多项式空间之间的对应关系，分别在第*1.2* 节和第*1.3*节中介绍。

1.1. 主要结果。在陈述先前宣布的结果之前，我们先引入一些定义，以衡量多项式和区域与最优对象之间的距离。

对于任意满足 $Q \in \mathbb{P}_N^d$ 且满足 $\|Q\|_{\mathbb{P}_N^d} = 1$的对象，我们定义其到再生核的距离如下：

$$D_N(Q) = \min_{\eta \in \partial\mathbb{B}} \left\{ \|Q - K_N(\cdot, \eta)\|_{\mathbb{P}_N^d} \right\}. \tag{5}$$

在我们考虑带有 $\|Q\|_{\mathbb{P}_N^d} \neq 1$ 的 $Q \in \mathbb{P}_N^d$ 的情形下，我们将 $D_N(Q)$ 定义为归一化多项式 $\frac{Q}{\|Q\|_{\mathbb{P}_N^d}}$ 的再生核距离。

集中度的最优区域将是再生核 $K_N(\cdot,\ \eta)$ 的超水平集，这些集合是由下式定义的复球冠：

$$\Delta_t(\eta) = \left\{ \zeta \in \partial\mathbb{B} : |\zeta \cdot \overline{\eta}|^N > t \right\}, \tag{6}$$

其中 $t \in (0,\ 1)$ 且 $\eta \in \partial\mathbb{B}$。注意，$\sigma\big(\Delta_t(\eta)\big) = (1 - t^{1/N})^d$。我们将通过如下给出的 ***Fraenkel*** 不对称度来衡量任意集合 $\Omega \subset \partial\mathbb{B}$ 与具有相同大小的复球冠之间的距离：

$$\mathcal{A}_\sigma(\Omega) := \inf_{\eta \in \partial\mathbb{B}} \left\{ \frac{\sigma\big(\Omega \backslash \Delta_t(\eta)\big) + \sigma\big(\Delta_t(\eta) \backslash \Omega\big)}{\sigma(\Omega)} \right\},$$

其中 $\sigma\big(\Delta_t(\eta)\big) = \sigma(\Omega)$，即 $t = (1 - \sigma(\Omega)^{1/d})^N$。

定理 1.7。对于任意 $d \in \mathbb{N}$，存在常数 $C > 0$ 和 $\tilde{\omega} \in (0, 1]$ （与 N 无关），使得对于任意满足 $\sigma(\Omega) \in (0,\ \tilde{\omega})$ 的可测集 $\Omega \subset \partial\mathbb{B}$，以及任意满足以下条件的 $Q \in \mathbb{P}_N^d$

$\|Q\|_{\mathbb{P}_N^d} = 1$，有

$$D_N(Q)^2 \le \frac{C}{N^d \int_{\sigma(\Omega)}^{\tilde{\omega}} (1 - s^{1/d})^N ds} \left(1 - \frac{C_{N,\Omega}(Q)}{C_{N,\Omega^*}(\zeta_1^N)}\right), \tag{7}$$

$$\mathcal{A}_\sigma(\Omega)^2 \le \frac{C}{\alpha\big(\sigma(\Omega)\big)} \left(1 - \frac{C_{N,\Omega}(Q)}{C_{N,\Omega^*}(\zeta_1^N)}\right), \tag{8}$$

其中

$$\Omega^* = \left\{\zeta \in \partial\mathbb{B} : |\zeta_1| > \left(1 - \sigma(\Omega)^{1/d}\right)^N\right\}. \tag{9}$$

$$\alpha(\omega) = N^d \omega^2 (1 - \omega^{1/d})^{N-1} \int_\omega^{\tilde{\omega}} (1 - s^{1/d})^N ds. \tag{10}$$

备注1.8。 阈值 $\tilde{\omega}$ 关于定理 *1.7* 陈述中集合大小的限制，源于这样一个事实：在复射影空间中，球仅在小体积情况下才是等周区域（详见第 *3.2* 节开头和命题 *3.3*）。然而，在 $\mathbb{CP}^1$ 中，球始终是（唯一的）等周区域。因此，对于 $d = 1$，我们有 $\tilde{\omega} = 1$，且对 Ω 的大小没有限制，这一点已在 [GFOC25]中得到证明。

定理1.9。 设 Φ： $[0,1] \to \mathbb{R}$ 是一个凸的非线性函数，并设 $d \in \mathbb{N}$。那么存在常数 $C > 0$ 和 $N_\Phi \in \mathbb{N}$（仅取决于 Φ 和 d），使得对任意$N \ge N_\Phi$，以下结论成立：设 $Q \in \mathbb{P}_N^d$ 且 $\|Q\|_{\mathbb{P}_N^d} = 1$，则

$$D_N(Q)^2 \le C \left(S_{N,\Phi}(Q) - S_{N,\Phi}(\zeta_1^N)\right).$$

注 *1.10*。常数 N_Φ 同样与球作为等周区域时的阈值有关。我们要求 Φ 在 $((1 - \tilde{\omega}^{1/d})^N, 1)$ 中是非线性的；当 d 固定时，N 足够大即可满足这一条件。值得一提的是，存在一个普适常数T^*，使得若 Φ 在 $(T^*, 1)$ 中是非线性的，则 $N_\Phi = 1$（见定理*1.9*的证明）。此外，若 $d = 1$，则总有 $\tilde{\omega} = 1$，见 [*Oss*78], ，因此有 $N_\Phi = 1$，这与我们在 [*GFOC* 25]中的结果一致。

注 1.11。 在定理 *1.7*中，$D_N(Q)$ 或 $\mathcal{A}_\sigma(\Omega)$ 的幂次与集中度偏离最大值的程度之间的比例是尖锐的。定理 *1.9* 中，$D_N(Q)$ 与 $S_{N,\Phi}(Q) - S_{N,\Phi}(\zeta_1^N)$的幂次之间也有同样的情况。第 *5.2* 节将深入探讨这些观察结果。

1.2. () 的不可约表示 $SU(d+1)$。对于具有 $d \ge 1$ 的群 $SU(d+1)$，次数为 N 的齐次多项式空间 $\mathbb{P}_N^d$ 给出了对称不可约表示的一种显式实现。任意元素 $\mathcal{R} \in SU(d+1)$ 作用于多项式 $P \in \mathbb{P}_N^d$ 上的方式为 $\pi(\mathcal{R})P(\zeta) = P(\mathcal{R}^{-1}(\zeta))$。对于所有 $N \ge 0$，此有限维表示都是不可约且酉的。

前述表示法用于量子力学；在量子力学的术语中，任意满足 ρ： $\mathbb{P}_N^d \to \mathbb{P}_N^d$ 且 $\mathrm{Tr}(\rho) = 1$ 的半正定算子都定义了一个态。如果 $\mathrm{rank}(\rho) = 1$，则我们得到一个纯态；否则得到一个混态或一般态。一般而言，我们有

存在 $\{Q_j\}_j$ 的正交归一基以及 $\mathbb{P}_N^d$ 和常数 $\lambda_j \geq 0$，使得 $\sum_j \lambda_j = 1$，并且

$$\rho(Q) = \sum_j \lambda_j \langle Q, Q_j \rangle_{\mathbb{P}_N^d} Q_j.$$

给定任意 $\eta \in \partial\mathbb{B}$，与 $\rho(Q)(\zeta) = \langle Q, K_N(\cdot,\eta)\rangle_{\mathbb{P}_N^d} K_N(\zeta,\eta)$ 对应的纯态称为相干态。

对于固定的 $\eta \in \partial\mathbb{B}$ 以及任意上述算子 ρ，相应的*Husimi*函数u_ρ：$SU(d+1) \to \mathbb{R}$ 定义为

$$u_\rho(\mathcal{R}) := \langle K_N(\cdot,\mathcal{R}\eta), \rho(K_N(\cdot,\mathcal{R}\eta))\rangle_{\mathbb{P}_N^d} = \sum_j \lambda_j |Q_j(\mathcal{R}\eta)|^2. \tag{11}$$

给定凸函数 $\Phi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ 和一个态 ρ，其 Husimi 函数为 u_ρ，其广义韦尔熵 定义为

$$\mathcal{S}_{N,\Phi}(\rho) = -\int_{SU(d+1)} \Phi(u_\rho(\mathcal{R}))\, d\mathcal{R}, \tag{12}$$

其中 $d\mathcal{R}$ 是 $SU(d+1)$上的 Haar测度。请注意，其值与 Husimi 函数定义中 η 的选取无关。特别地，当$\Phi(x) = x\log x$时，这就是态 ρ的经典Wehrl熵。

在 [LS16], Lieb 和 Solovej 证明，态的熵在相干态处达到最小值。更准确地说：

定理1.12 ([LS16])**.** 设 $\Phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ 为任意凸函数。那么，对于任意半正定算子 ρ: $\mathbb{P}_N^d \to \mathbb{P}_N^d$ 满足 $\mathrm{Tr}(\rho) = 1$，有

$$\mathcal{S}_{N,\Phi}(\rho_0) \leq \mathcal{S}_{N,\Phi}(\rho),$$

其中 ρ_0 为任意相干态。

定理1.9 在 ρ为纯态时，对 Lieb–Solovej 的结果给出了一个定量版本。此外，如果 Φ 是非线性的，那么只要 $N \geq N_\Phi$，相干态便是纯态中的唯一极小化元。稍后我们将看到，定理 1.9 可推广到混态，见定理 5.2。对于 $SU(d+1)$ 的非对称不可约表示，以及更一般地，其他紧李群的其他不可约表示，证明类似结果仍是一个未解决的问题。

1.3. **其他表述。** 我们先前的结果可以在复射影空间的背景下表述；借助适当的坐标，还可推广到高维，并适用于次数有界的全纯多项式，从而推广了 [GFOC25] 中所考虑的空间。本节首先介绍相关设定，随后重新表述主要结果。

1.3.1. 复射影空间上的全纯截面。 设 M 是一个 d维紧致 K¨ahler 流形。考虑一个厄米全纯线丛（L, h） $\to M$，其曲率形式 Θ 为正。这种正性意味着相应的实形式$\omega := i\Theta$ 是 M 上的 K¨ahler 形式，它定义了一个自然的体积形式 $\frac{\omega^d}{d!}$。

对于任意幂次 $N \geq 1$, L 上的厄米度量 h 会在丛 L^N上诱导出度量 h^N。我们关注的是全局全纯截面的向量空间 $H^0(M, L^N)$，该空间由 L^N 的全局全纯截面构成。这个空间赋有自然的 L^2 厄米内积：

$$\langle s, t\rangle := \int_M h^N(s,t)\frac{\omega^d}{d!}, \quad \text{for } s,t \in H^0(M, L^N).$$

一个基本例子是： M 为复射影空间 $\mathbb{CP}^d$，且（L, h）为配备 Fubini-Study度量的超平面线丛。在这个特例中，全局全纯截面空间 H^0（$\mathbb{CP}^d$, L^N）可识别为次数为 N 的 $\mathbb{C}^{d+1}$ 齐次多项式空间（参见 [Shi15]）；或者，将其限制在仿射坐标中时，可识别为次数为 $\leq N$的 d 元多项式空间。

使用标准仿射坐标 $z \in \mathbb{C}^d$ 表示时， L^2 内积的显式形式为：

$$\langle s, t\rangle = C_{d,N}\int_{\mathbb{C}^d} \frac{p(z)\overline{q(z)}}{(1+|z|^2)^N}\frac{dz}{(1+|z|^2)^{d+1}}, \tag{13}$$

其中， $p(z)$和 $q(z)$分别是截面 s 和 t 的坐标表示，即 d 个复变量中次数小于或等于 N的全纯多项式， $C_{d,\,N}$ 是归一化常数，且 $dz = \prod_{j=1}^d dz_j$，其中 $dz_j = dx_j dy_j$ 和 $z_j = x_j + \mathbf{i}y_j$。

1.3.2. 空间 $\mathcal{P}_N^d$。 前述观察表明，自然可以考虑空间 $\mathcal{P}_N^d$其中次数小于或等于 N 的 d 个复变量上的多项式，并赋予其加权 L^2 内积，如（13）所示，该内积由 Fubini-Study度量导出。中的任意元素都可表示为：

$$q(z) = \sum_{|\alpha|\leq N} a_\alpha z^\alpha, \quad \text{where } z \in \mathbb{C}^d,\ \alpha \in \mathbb{N}_0^d \text{ and } a_\alpha \in \mathbb{C}.$$

Fubini-Study度量定义为

$$g_{jk} = \beta_d^{1/d}\frac{(1+|z|^2)\delta_{jk} - \bar{z}_j z_k}{(1+|z|^2)^2},$$

诱导出如下体积形式：

$$dm(z) = \beta_d \frac{1}{(1+|z|^2)^{d+1}}dz. \tag{14}$$

我们选择

$$\beta_d = \frac{2d}{|\partial\mathbb{B}^d|} = \frac{d!}{\pi^d}. \tag{15}$$

使得 $m(\mathbb{C}^d) = 1$。最后，我们要求 $\|1\|_{\mathcal{P}_N^d} = 1$。那么，我们赋予 $\mathcal{P}_N^d$ 的内积为：

$$\langle p, q\rangle_{\mathcal{P}_N^d} = \binom{N+d}{d} \int_{\mathbb{C}^d} \frac{p(z)\overline{q(z)}}{(1+|z|^2)^N} dm(z).$$

带有前述内积的空间 $\mathcal{P}_N^d$ 也是一个再生核希尔伯特空间，其再生核为

$$k_N(z, w) = (1 + z \cdot \bar{w})^N, \quad z, w \in \mathbb{C}^d.$$

注意，再生核 $k_N(\cdot, w)$ 在 $\mathcal{P}_N^d$ 中不再具有单位范数，因此我们对其进行归一化：

$$\kappa_N(z, w) = \frac{k_N(z, w)}{\|k_N(\cdot, w)\|_{\mathcal{P}_N^d}} = \frac{(1 + z \cdot \bar{w})^N}{(1 + |w|^2)^N}.$$

最后，我们注意到，如果 $q(z) = Q(1, z)$ 对任意 $Q \in \mathbb{P}_N^d$ 都成立，那么 $q \in \mathcal{P}_N^d$ 且 $\|q\|_{\mathcal{P}_N^d} = \|Q\|_{\mathbb{P}_N^d}$。这一对应关系使我们能够在这些空间中改写定理 1.7 和 1.9 。

1.3.3. 主要结果。 为了陈述 $\mathcal{P}_N^d$ 中的主要定理，我们必须重新引入集中度的概念，以及多项式和区域到该情形下相应最优对象的距离。

首先，对于任意 $\mathcal{W} \subset \mathbb{C}^d$ 可测的对象以及任意 $q \in \mathcal{P}_N^d$，我们定义 q 在 $\mathcal{W}$ 中的集中度如下：

$$C_{N,\mathcal{W}}(q) = \frac{\binom{N+d}{d} \int_{\mathcal{W}} \frac{|q(z)|^2}{(1+|z|^2)^N} dm(z)}{\|q\|^2_{\mathcal{P}_N^d}}.$$

与定义1.3中一样，对于任意 $\Phi: [0, 1] \to \mathbb{R}$ 凸函数，广义韦尔熵对于任意$q \in \mathcal{P}_N^d$ 为：

$$S_{N,\Phi}(q) = -\binom{N+d}{d} \int_{\mathbb{C}^d} \Phi\left(\frac{|q(z)|^2}{\|q\|^2_{\mathcal{P}_N^d}(1+|z|^2)^N}\right) dm(z).$$

对于任意 $q \in \mathcal{P}_N^d$ 满足 $\|q\|_{\mathcal{P}_N^d} = 1$的，到（归一化）再生核的距离定义为：

$$D_N(q) = \min\left\{\|q - e^{i\theta}\kappa_N(\cdot, w)\|_{\mathcal{P}_N^d} : w \in \mathbb{C}^d, \theta \in [0, 2\pi]\right\}.$$

最后，任意可测集 $\mathcal{W} \subset \mathbb{C}^d$ 到最优区域的距离（在此情形下，最优区域为 $\mathbb{C}^d$ 中的球）由相应的*Fraenkel* 不对称度给出：

$$\mathcal{A}_m(\mathcal{W}) = \inf_{w \in \mathbb{C}^d} \left\{\frac{m\big(\mathcal{W} \backslash \mathbb{B}_r^d(w)\big) + m\big(\mathbb{B}_r^d(w) \backslash \mathcal{W}\big)}{m(\mathcal{W})}\right\},$$

其中，对任意 $w \in \mathbb{C}^d$, r ，选取 $m\big(\mathbb{B}_r^d(w)\big) = m(\mathcal{W})$。

定理 1.13。 对任意 $d \in \mathbb{N}$，存在常数 $C > 0$ 和 $\tilde{\omega} \in (0,\ 1)$ （与 N 无关），使得对于任意满足 $m(\mathcal{W}) \in (0,\ \tilde{\omega})$ 的可测集 $\mathcal{W} \subset \mathbb{C}^d$，以及任意满足$\|q\|_{\mathcal{P}_N^d} = 1$的 $q \in \mathcal{P}_N^d$，均有

$$D_N(q)^2 \leq \frac{C}{N^d \int_{m(\mathcal{W})}^{\tilde{\omega}} (1 - s^{1/d})^N ds} \left(1 - \frac{C_{N,\mathcal{W}}(q)}{C_{N,\mathcal{W}^*}(1)}\right), \tag{16}$$

$$\mathcal{A}_m(\mathcal{W})^2 \leq \frac{C}{\alpha\big(m(\mathcal{W})\big)} \left(1 - \frac{C_{N,\mathcal{W}}(q)}{C_{N,\mathcal{W}^*}(1)}\right), \tag{17}$$

其中 $\mathcal{W}^* = \left\{ z \in \mathbb{C}^d : \ |z|^2 < \frac{m(\mathcal{W}^{1/d})()^{1/d}}{1-m\mathcal{W}} \right\}$ 以及 $\alpha(\omega)$ 如 (10)所示。

定理 1.14。 设 $\Phi : \ [0,1] \to \mathbb{R}$ 是一个凸的非线性函数，并且令 $d \in \mathbb{N}$。那么存在常数 $C > 0$ 和 $N_\Phi \in \mathbb{N}$ （仅依赖于 Φ 和 d），使得对任意$N \geq N_\Phi$，以下结论成立：令 $q \in \mathcal{P}_N^d$ 满足 $\|q\|_{\mathcal{P}_N^d} = 1$，则

$$D_N(q)^2 \leq C\big(S_{N,\Phi}(q) - S_{N,\Phi}(1)\big).$$

这一主要结果的表述使我们能够分别通过考虑极限，得到 [FNT25] 和 [GGRT 24]，中关于 Bargmann-Fock 空间的结果 $N \to \infty$ （见第 5.1节）。

1.4. **文章结构**。 本文其余部分安排如下：第 2 节介绍空间的额外记号和预备结果。第 3节阐述一些技术引理，这些引理涉及与多项式相关的函数的超水平集的测度。第 4 节给出主要结果的证明。第5节汇集以下进一步结果：恢复 Fock 空间的结果（第 5.1节）、主要结果的尖锐性（第5.2节），以及将主要结果推广到一般算子（第 5.3节）。由于这些结果的证明与 [GFOC25], 中的证明并无太大差异，因此省略大部分细节，仅详细阐述主要的新内容。

2. Notation and preliminaries

在全文中， $d \in \mathbb{N}$ 将固定不变。常数通常记作 C，可能依赖于 d，但不依赖于 N。当 $d = 1$ 时，所有结果均与 [GFOC25]中的结果一致。

固定 d 后， $\mathbb{B} = \{\zeta \in \mathbb{C}^{d+1} : \ |\zeta| < 1\}$，而 $\partial\mathbb{B}$ 表示其边界，即实维数为 $2d+1$ 的球面。若要指代其他维数中的（复）球，或其边界，我们将对此加以说明。具体而言，$\mathbb{B}^d = \{\zeta \in \mathbb{C}^d : \ |\zeta| < 1\}$，因此$\mathbb{B} = \mathbb{B}^{d+1}$。

设 $\zeta=(\zeta_1,\ \zeta_2、\ \ldots\ldots、\ \zeta_{d+1})\in\partial\mathbb{B}$，其中 $\zeta_j\in\mathbb{C}$。我们可以利用 $2d+1$ 个实变量 $\rho=(\rho_1、\ \ldots\ldots、\ \rho_d)\in[0,1]^d$ 和 $\theta=(\theta_1、\ \ldots\ldots、\ \theta_{d+1})\in[0,2\pi]^{d+1}$ 将 ζ 表示如下：

$$
\begin{aligned}
\zeta_1 &= e^{\mathrm{i}\theta_1}\sqrt{1-\rho_1},\\
\zeta_2 &= e^{\mathrm{i}\theta_2}\sqrt{\rho_1(1-\rho_2)},\\
&\vdots\\
\zeta_d &= e^{\mathrm{i}\theta_d}\sqrt{\rho_1\rho_2\ldots\rho_{d-1}(1-\rho_d)},\\
\zeta_{d+1} &= e^{\mathrm{i}\theta_{d+1}}\sqrt{\rho_1\rho_2\cdots\rho_{d-1}\rho_d}.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

在此参数化下，$\partial\mathbb{B}$ 上的测度为：

$$
d\sigma(\zeta)=\frac{d!}{(2\pi)^{d+1}}\prod_{j=1}^{d}\rho_j^{d-j}d\rho_j d\theta,\quad d\theta=\prod_{k=1}^{d+1}d\theta_k.
$$

对于任意的 $\rho\in[0,1]^d$ 和 $\theta\in[0,2\pi]^{d+1}$，我们用 $\zeta(\rho;\theta)$ 表示 $\partial\mathbb{B}$ 中具有前述坐标的点。稍微滥用一下记号，对于任意函数 $U(\zeta)$，我们可以写作$U(\rho;\ \theta)\ =U(\zeta(\rho;\ \theta))$。

引理 2.1。集合 $\left\{\binom{N!}{\alpha}^{1/2}\zeta^\alpha\right\}_{|\alpha|=N}$是 $\mathbb{P}_N^d$ 的正交归一基。此外，范数 (2) 等价于 ***Bombieri*** 范数，该范数对任意 $Q(\zeta)\ =\sum_{|\alpha|=N}a_\alpha\zeta^\alpha$ 定义为：

$$
\|Q\|^2_{\mathbb{P}_N^d}=\sum_{|\alpha|=N}\frac{\alpha!}{N!}|a_\alpha|^2.
$$

证明。利用（18）中的参数化，我们首先注意到 $|\zeta^\alpha(\rho;\theta)|^2$ 不依赖于 θ。因此，若满足 $|\alpha|=N$,

$$
\begin{aligned}
\int_{\partial\mathbb{B}}|\zeta|^{2\alpha}d\sigma(\zeta) =& d!\prod_{j=1}^{d}\left(\int_0^1(1-\rho_j)^{\alpha_j}\rho_j^{N+d-j-(\alpha_1+\cdots+\alpha_j)}d\rho_j\right)\\
=& d!\prod_{j=1}^{d}\frac{\alpha!\big(N+d-j-(\alpha_1+\cdots+\alpha_j)\big)!}{\big(N+d-(j-1)(\alpha_1+\cdots+\alpha_{j-1})\big)!}=\frac{d!\prod_{j=1}^{d}\alpha_j!}{(N+d)!}=\frac{d!\ \alpha!}{(N+d)!}
\end{aligned}
$$

因此，$\|\zeta^\alpha\|^2_{\mathbb{P}_N^d}=\frac{\alpha}{N!}!\circ$ —

若 $\alpha\neq\beta$，$\zeta^\alpha(\rho;\ \theta)\bar{\zeta}^\beta(\rho;\ \theta)$ 对某些 $j\in\{1,\ldots,d+1\}$ 和 $\ell\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$ 依赖于 $e^{i\ell\theta_j}$，则 $\int_0^{2\pi}e^{i\ell\theta_j}d\theta_j=0$，从而 $\int_{\partial\mathbb{B}}\zeta^\alpha\bar{\zeta}^\beta d\sigma(\zeta)\ =0$。

最后，范数之间的等价性由单项式的正交性及其范数值推出。□

3. On the measure of the super-level sets

我们首先通过介绍与任意 $Q \in \mathbb{P}^d$ 相关的一些记号来开始本节 $_N$:

$$U(\zeta) = |Q(\zeta)|^2, \tag{19}$$
$$T = \sup_{\zeta \in \partial\mathbb{B}} U(\zeta),$$
$$\mu(t) = \sigma\big(\{\zeta \in \partial\mathbb{B} : U(\zeta) > t\}\big)$$

如果 $Q(\zeta) = (\zeta \cdot \bar{\eta})^N$ 对于某个 $\eta \in \partial\mathbb{B}$ 成立，那么 $T = 1$ 并且

$$\mu(t) = (1 - t^{1/N})^d =: \mu_0(t). \tag{20}$$

一方面，根据（3），如果 $\|Q\|_{\mathbb{P}^d_N} = 1$，我们可以得出 $T \leq 1$，且等号当且仅当 $Q(\zeta) = K_N(\zeta, \eta) = (\zeta \cdot \bar{\eta})^N$ 对于某个 $\eta \in \partial\mathbb{B}$ 成立。另一方面，注意到 $\mu(0) = 1$ 以及 $\mu(t) = 0$ 对于 $t \geq T$ 成立。

由于 Q 是全纯的，我们知道 $U(\zeta)$ 的水平集在 $\partial\mathbb{B}$ 中不可能具有正测度，除非 $Q(\zeta)$ 是常数（参见 [Rud08，定理 5.5。9]）。因此，$\mu(t)$ 是 $[0, T]$ 上的严格递减函数，因此它在 $[0, 1]$ 上可逆。我们将其逆函数记为 $\mu^{-1}(s)$。在 μ_0 的情况下，我们有：

$$\mu_0^{-1}(s) = (1 - s^{1/d})^N. \tag{21}$$

注意，如果 $\|Q\|_{\mathbb{P}^d_N} = 1$ 那么

$$\int_0^T \mu(t)dt = \int_0^1 \mu^{-1}(s)ds = \frac{1}{\binom{N+d}{d}}. \tag{22}$$

在本节中，我们旨在研究函数 $\mu(t)$，其中 $Q \in \mathbb{P}^d_N$，且有 $\|Q\|_{\mathbb{P}^d_N} = 1$，并在适当的区间内估计 $\mu_0(t) - \mu(t)$ 和 $\mu_0^{-1}(s) - \mu^{-1}(s)$ 的积分。在比较 μ 和 μ_0 或其逆时，我们还将使用以下记号：

$$t^* = \sup\{t \in (0, T) : \mu(t) \geq \mu_0(t)\}, \tag{23}$$
$$s^* = \inf\{s \in (0, 1) : \mu^{-1}(s) \geq \mu_0^{-1}(s)\}. \tag{24}$$

显然，$s^* = \mu^{-1}(t^*) = \mu_0^{-1}(t^*)$。

3.1. **关于 $\mu(t)$ 的上界估计。** 我们的第一个结果类似于 [GFOC25中的引理 2。1] 其证明方法也类似。需要指出的是，这里我们研究的是 $\mathbb{P}^d_N$ 中的齐次多项式以及 σ 上的测度 $\partial\mathbb{B}$，而不是研究 $\mathcal{P}^d_N$ 中的有界次数多项式以及 m 上的测度 $\mathbb{C}^d$。

引理 3.1. 对于每个 $t_0 \in (0, 1)$，都存在一个阈值 $T_0 \in [t_0, 1)$ 和一个常数 $C_0 = C_0(t_0) > 0$，具有以下性质：若 $Q \in \mathbb{P}^d_N$ 满足 $\|Q\|_{\mathbb{P}^d_N} = 1$ 且 $T \geq T_0$，则

$$\mu(t) \leq \big(1 + C_0(1 - T)\big)\mu_0\left(\frac{t}{T}\right) \quad \forall t \in (t_0, T), \tag{25}$$

其中 μ_0 如(20)所示。

证明。 证明分为五个步骤。

步骤 *1*：分解 Q。 不失一般性，我们可以假设 $U(\zeta)$ 在 $\partial\mathbb{B}$ 处取得其上确界，且该点为 $\zeta=(1, 0, \ldots\ldots, 0)$，特别是 $Q(1, 0, \ldots\ldots, 0) = \sqrt{T}$。此外，这还意味着，对于所有 $k \in \{2, \ldots, d+1\}$，$(\partial_{\zeta_k} Q)(1, 0 \ldots\ldots, 0) = 0$。于是我们写作

$$Q(\zeta) = \sqrt{T}\zeta_1^N + \epsilon\tilde{Q}(\zeta),$$

其中 $\epsilon^2 = 1 - T$ 且

$$\tilde{Q}(\zeta) = \sum_{\substack{|\alpha|=N \\ \alpha_1 \le N-2}} b_\alpha \zeta^\alpha, \quad \|\tilde{Q}\|_{\mathbb{P}_N^d} = 1. \tag{26}$$

利用上述分解，我们得到

$$|Q(\zeta)|^2 \le T|\zeta_1|^{2N} + \epsilon^2|\tilde{Q}(\zeta)|^2 + 2\sqrt{T}\epsilon \operatorname{Re}\bar{\zeta}_1^N\tilde{Q}(\zeta). \tag{27}$$

设 $\zeta = (\zeta_1, \zeta')$，其中 $\zeta' = (\zeta_2, \ldots, \zeta_{d+1})$。应用引理 2.1 和柯西–施瓦茨不等式，我们对式（ $Q(\zeta)$ 中的 26）进行如下估计：

$$|\tilde{Q}(\zeta)|^2 \le \left(\sum_{\substack{|\alpha|=N \\ \alpha_1 \le N-2}} \frac{\alpha!}{N!}|b_\alpha|^2\right)\left(\sum_{\substack{|\alpha|=N \\ \alpha_1 \le N-2}} \frac{N!}{\alpha!}|\zeta^\alpha|^2\right) \le |\zeta|^{2N} - |\zeta_1|^{2N} - N|\zeta_1|^{2(N-1)}|\zeta'|^2. \tag{28}$$

特别地，若 $\zeta \in \partial\mathbb{B}$，

$$|\tilde{Q}(\zeta)|^2 \le 1 - |\zeta_1|^{2N}. \tag{29}$$

结合（27）和（29），可得

$$U(\zeta) \le \epsilon^2 + (T-\epsilon^2)|\zeta_1|^{2N} + 2\sqrt{T}\epsilon \operatorname{Re}\bar{\zeta}_1^N\tilde{Q}(\zeta) \qquad \forall \zeta \in \partial\mathbb{B}.$$

那么，在 $T - \epsilon^2 > 0$，即 $T > \frac{1}{2}$ 的条件下，

$$\mu(t) \le \sigma\left(\left\{\zeta \in \partial\mathbb{B} : \frac{t-\epsilon^2}{T-\epsilon^2}|\zeta_1|^{-2N} - \frac{2\sqrt{T}\epsilon}{T-\epsilon^2}\operatorname{Re}\zeta_1^{-N}\tilde{Q}(\zeta) \le 1\right\}\right).$$

令 $\tau \in [0,1]$ 为一个额外变量，并对任意 $\theta \in [0, 2\pi]^{d+1}$ 和 $\rho' \in [0,1]^{d-1}$ 定义函数

$$g_{\rho',\theta}(\rho_1, \tau) = \frac{t-\epsilon^2}{T-\epsilon^2}(1-\rho_1)^{-N} - \frac{2\sqrt{T}\epsilon}{T-\epsilon^2}\tau h\big((\rho_1, \rho'); \theta\big).$$

其中 $h(\zeta) = \operatorname{Re}\zeta_1^{-N}\tilde{Q}(\zeta)$。我们还引入集合

$$E_\tau = \{\zeta(\rho;\theta) \in \partial\mathbb{B} : g_{\rho',\theta}(\rho_1, \tau) \le 1\}.$$

注意， $\mu(t) \le \sigma(E_1)$。为了估计 $\sigma(E_1)$，我们将证明集合 E_τ 是关于变量 ρ_1 和 $E_\tau \subset E_{\tau'}$ 的星形区域，其中 $\tau < \tau'$。

步骤 2：关于的估计 $h(\rho;\theta)$。在这一步中，我们将反复使用以下不等式

$$\binom{N}{j} \le \frac{N^2}{j(j-1)}\binom{N}{j-2}, \quad \binom{N}{j} \le \frac{N^2}{j^2}\binom{N-2}{j-2}, \quad \text{for } j \ge 2. \tag{30}$$

令 $\tilde{h}(\zeta) = \zeta_1^{-N}\tilde{Q}(\zeta)$。首先，按照（28）中的论证并利用（30），我们得到

$$\begin{aligned}
|\tilde{h}(\rho;\theta)|^2 &\le \sum_{\alpha_1=0}^{N-2}\binom{N}{\alpha_1}\left(\frac{\rho_1}{1-\rho_1}\right)^{N-\alpha_1} \le \frac{N^2}{2}\sum_{j=2}^{N}\binom{N}{j-2}\left(\frac{\rho_1}{1-\rho_1}\right)^{j} \\
&\le \frac{N^2}{2}\left(\frac{\rho_1}{1-\rho_1}\right)^2\left(1+\frac{\rho_1}{1-\rho_1}\right)^N = \frac{N^2}{2}\frac{\rho_1^2}{(1-\rho_1)^{N+2}}.
\end{aligned}$$

对 ρ_1 h 求导，并使用类似的论证，我们推得

$$\begin{aligned}
|\partial_{\rho_1}\tilde{h}(\rho;\theta)|^2 &\le \sum_{\alpha_1=0}^{N-2}\left(\frac{N-\alpha_1}{2}\right)^2\binom{N}{\alpha_1}\left(\frac{\rho_1}{1-\rho_1}\right)^{N-\alpha_1}\frac{1}{\rho_1^2(1-\rho_1)^2} \le \frac{N^2}{4}\frac{1}{(1-\rho_1)^{N+4}}, \\
|\partial_{\rho_1}^2\tilde{h}(\rho;\theta)|^2 &\le \sum_{\alpha_1=0}^{N-2}\left(\frac{N-\alpha_1}{4}\right)^2\binom{N}{\alpha_1}\left(\frac{\rho_1}{1-\rho_1}\right)^{N-\alpha_1}\frac{(N-\alpha_1-2+4\rho_1)^2}{\rho_1^4(1-\rho_1)^4} \\
&\le \frac{N^2}{8}\frac{1}{\rho_1^2(1-\rho_1)^6}\sum_{j=2}^{N}\left((j-2)^2+(4\rho_1)^2\right)\binom{N-2}{j-2}\left(\frac{\rho_1}{1-\rho_1}\right)^{j-2} \\
&\le \frac{CN^2}{\rho_1^2(1-\rho_1)^6}\left(\frac{\rho_1^2}{(1-\rho_1)^{N-2}}+\frac{N\rho_1}{1-\rho_1}+N^2\sum_{j=4}^{N}\binom{N-2}{j-4}\left(\frac{\rho_1}{1-\rho_1}\right)^{j-2}\right) \\
&\le \frac{CN^2}{\rho_1^2(1-\rho_1)^6}\left(\frac{\rho_1^2}{(1-\rho_1)^{N-2}}+\frac{1+N^2\rho_1^2}{1-\rho_1}+\frac{N^2\rho_1^2}{(1-\rho_1)^N}\right) \\
&\le CN^2\frac{1+N^2\rho_1^2}{\rho_1^2(1-\rho_1)^{N+6}}.
\end{aligned}$$

同样的不等式适用于 $h = \mathrm{Re}\, h$，即

$$|h(\rho;\theta)| \le \frac{N}{\sqrt{2}}\frac{\rho_1}{(1-\rho_1)^{N/2+1}}, \tag{31}$$

$$|\partial_{\rho_1}h(\rho;\theta)| \le \frac{N}{2}\frac{1}{(1-\rho_1)^{N/2+2}}, \tag{32}$$

$$|\partial_{\rho_1}^2h(\rho;\theta)| \le CN\frac{1+N\rho_1}{\rho_1(1-\rho_1)^{N/2+3}}. \tag{33}$$

步骤 3： E_τ 的星形性。 E_τ 关于原点在 ρ_1 变量上呈星形，这一事实由 $g_{\rho'}$、$\theta(0,\tau) < 1$ 以及 $\partial_{\rho_1}g_{\rho'}$、$\theta(\rho_1,\tau) > 0$ 对任意 $\tau \in (0,1)$、$\rho' \in [0,1]^d$ 和 $\theta \in [0,2\pi]^{d+1}$ 成立这一点可知。事实上，$g_{\rho'}$、$\theta(0,\tau) = \frac{t-\epsilon^2}{T-\epsilon^2} < 1$。此外，利用 (32) 并回忆

$T-\epsilon^2>0$ 和 $N\geq 2$,

$$\begin{aligned}\partial_{\rho_1} g_{\rho',\theta}(\rho_1,\tau) &= N\frac{t-\epsilon^2}{T-\epsilon^2}(1-\rho_1)^{-N-1} - \frac{2\sqrt{T}\epsilon}{T-\epsilon^2}\tau\partial_{\rho_1}h(\rho;\theta)\\ &\geq \frac{N}{T-\epsilon^2}(1-\rho_1)^{-N-1}\left(t-\epsilon^2-\sqrt{T}\epsilon\tau(1-\rho_1)^{N/2-1}\right)\\ &\geq N(1-\rho_1)^{-N-1}\frac{t-\epsilon^2-\sqrt{T}\epsilon}{T-\epsilon^2}.\end{aligned} \tag{34}$$

给定 $t_0\in(0,1)$，令

$$\tilde{T}_0 = 1-\frac{1+t_0-\sqrt{1+2t_0-t_0^2}}{4}. \tag{35}$$

因此，若 $T\geq T_0$，则有

$$\epsilon^2+\sqrt{T}\epsilon = 1-T+\sqrt{T(1-T)}\leq \frac{t_0}{2}, \tag{36}$$

因此，在 $t\in(t_0,T)$ 的条件下，

$$\partial_{\rho_1} g_{\rho',\theta}(\rho_1,\tau)\geq \frac{t_0}{T-\epsilon^2}\frac{N}{2}(1-\rho_1)^{-N-1}>0. \tag{37}$$

步骤4：估计 E_τ 的径向距离。设 τ、θ 和 ρ' 如上所述。我们将 $r_\tau(\rho',\theta)\in(0,1)$ 定义为 $g_{\rho',\theta}(r,\tau)=1$ 的唯一解。它 $\tau=0$，我们知道 $r_0(\rho',\theta)=r_0$，其中 $(1-r_0)^{-N}=\frac{T-\epsilon^2}{t-\epsilon^2}$。对于任意 $\tau\in(0,1]$，由 (37) 及假设 $T-\epsilon^2<1$，我们有

$$g_{\rho',\theta}(\rho_1,\tau)\geq g_{\rho',\theta}(0,\tau)+\frac{t_0N}{2}\int_0^{\rho_1}(1-r)^{-N-1}dr\geq\frac{t_0}{2}(1-\rho_1)^{-N}-1.$$

因此，我们推断 $r_\tau(\rho',\theta)\leq 1-\left(\frac{t_0}{4}\right)^{1/N}$。

在证明的其余部分中，我们省略 r_τ 和 g 对 ρ' 和 θ 的依赖。由隐函数定理可知，

$$\partial_\tau r_\tau = -\frac{\partial_s g(r_\tau,s)}{\partial_{\rho_1}g(r_\tau,s)} = \frac{2\sqrt{T}\epsilon}{T-\epsilon^2}\frac{h((r_\tau,\rho');\theta)}{\partial_{\rho_1}g(r_\tau,s)}. \tag{38}$$

考虑到估计式（31）和（37），我们得出

$$|\partial_\tau r_\tau|\leq\frac{\sqrt{2T}\epsilon}{t_0}r_\tau(1-r_\tau)^{N/2}. \tag{39}$$

我们可以再对 τ 求一次 r_τ 的导数，并且由于 g 关于 τ 是线性的，因此有

$$\begin{aligned}\partial_\tau^2 r_\tau &= -\frac{\partial_{\rho_1}\partial_\tau g(r_\tau,\tau)\partial_\tau r_\tau}{\partial_{\rho_1}g(r_\tau,\tau)} - \frac{\partial_\tau r_\tau}{\partial_{\rho_1}g(r_\tau,\tau)}\left(\partial_{\rho_1}^2 g(r_\tau,\tau)\partial_\tau r_\tau+\partial_{\rho_1}\partial_\tau g(r_\tau,\tau)\right)\\ &= -\frac{2\partial_{\rho_1}\partial_\tau g(r_\tau,\tau)\partial_\tau r_\tau+\partial_{\rho_1}^2 g(r_\tau,\tau)(\partial_\tau r_\tau)^2}{\partial_{\rho_1}g(r_\tau,\tau)}.\end{aligned}$$

为了估计其余各项，我们利用（32）和（33）推得

$$|\partial_{\rho_1}\partial_\tau g(\rho_1,\tau)| = \frac{2\sqrt{T}\epsilon}{T-\epsilon^2}|\partial_{\rho_1}h(\rho;\theta)| \le \frac{\sqrt{T}\epsilon}{T-\epsilon^2}N(1-\rho_1)^{-N/2-2},$$

$$\begin{aligned}|\partial^2_{\rho_1}g(\rho_1,\tau)| &\le N(N+1)\frac{t-\epsilon^2}{T-\epsilon^2}(1-\rho_1)^{-N-2} + \frac{2\sqrt{T}\epsilon}{T-\epsilon^2}\tau\left|\partial^2_{\rho_1}h(\rho;\theta)\right| \\ &\le \frac{C}{T-\epsilon^2}N(1-\rho_1)^{-N-2}\frac{1+N\rho_1}{\rho_1}.\end{aligned}$$

结合这些估计以及（37）和（39），最终可得

$$|\partial^2_\tau r_\tau| \le C\frac{T\epsilon^2}{t_0^2}r_\tau(1-r_\tau)^{N-1}\left(1+\frac{1}{t_0}\left(1+Nr_\tau\right)\right).$$

注意到 $Nr_\tau(1-r_\tau)^{N-1}$ 有一致的上界，可得 s

$$|\partial^2_\tau r_\tau| \le C\frac{T\epsilon^2}{t_0^3}r_\tau. \tag{40}$$

步骤5：估计 $m(E_1)$。由于 E_τ 是关于变量 ρ_1 的星形域，因此其 σ–测度可以表示为：

$$M(\tau) = \sigma(E_\tau) = \frac{(d-1)!}{(2\pi)^{d+1}}\int_{[0,2\pi]^{d+1}}\int_{[0,1]^{d-1}}\left(r_\tau(\rho',\theta)\right)^d\prod_{j=2}^d\rho_j^{d-j}d\rho_j d\theta.$$

由于 r_τ（ρ'，θ）有一致的界，且根据（39）和（40），（ρ'，θ）|和 $|\partial^2_\tau r_\tau$（ρ'，θ）|也分别有一致的界，因此我们可以在积分号下对 M（τ）求导，从而

$$M'(\tau) = \frac{d!}{(2\pi)^{d+1}}\int_{[0,2\pi]^{d+1}}\int_{[0,1]^{d-1}}\partial_\tau r_\tau r_\tau^{d-1}\prod_{j=2}^d\rho_j^{d-j}d\rho_j d\theta, \tag{41}$$

$$M''(\tau) = \frac{d!}{(2\pi)^{d+1}}\int_{[0,2\pi]^{d+1}}\int_{[0,1]^{d-1}}\left(\partial^2_\tau r_\tau r_\tau^{d-1} + (d-1)(\partial_\tau r_\tau)^2 r_\tau^{d-2}\right)\prod_{j=2}^d\rho_j^{d-j}d\rho_j d\theta. \tag{42}$$

我们利用下面的泰勒公式来估计 $M(1)$：

$$M(1) = M(0) + M'(0) + \frac{M''(\tau)}{2}, \tag{43}$$

对于某个 $\tau\in(0,1)$。

我们首先估计 $M(0)$，其表达式为

$$M(0) = r_0^d = \left(1-\left(\frac{t-\epsilon^2}{T-\epsilon^2}\right)^{1/N}\right)^d.$$

注意，(36) 在满足 $T\ge\tilde{T}_0$ 时成立，因此 $\epsilon^2 < t_0/2$。我们还假设 $T > t_0$并考虑 $t\in(t_0,T)$。

令 $f(x) = 1 - \left(\frac{t-x}{T-x}\right)^{1/N}$，它是在 $(0, t/2)$ 上的非递减函数。于是，对任意$x \in (0, t/2)$，有

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{N}\frac{T-t}{(t-x)(T-x)}\big(1-f(x)\big) \le \frac{4}{NT}\left(\frac{T}{t}-1\right)\big(1-f(0)\big) \\ &\le \frac{4}{t_0}\left(\left(\frac{T}{t}\right)^{1/N}-1\right)\left(\frac{t}{T}\right)^{1/N} = \frac{4}{t}f(0). \end{aligned}$$

因此

$$f(x) - f(0) = \int_0^x f'(\tilde{x})d\tilde{x} \le \frac{4x}{t}f(0) \quad \text{and} \quad f(x) \le \left(1 + \frac{4}{t_0}x\right)f(0).$$

注意到 $M(0) = f(\epsilon^2)^d$并回顾（20），最终可得

$$M(0) \le \left(1 + 2\frac{\epsilon^2}{t_0}\right)^d \left(1 - \left(\frac{t}{T}\right)^{1/N}\right)^d \le \left(1 + C\frac{\epsilon^2}{t_0}\right)\mu_0\left(\frac{t}{T}\right).$$

其次，将（38）和（34）代入（41），得到

$$M'(0) = C_{t,T,N,d}\int_{[0,2\pi]^d}\int_{[0,1]^{d-1}} h\big((r_0,\rho');\theta\big)\prod_{j=2}^{d}\rho_j^{d-j}d\rho_j d\theta.$$

由于 $h(\zeta) = \mathrm{Re}\,\bar{\zeta}_1^N\tilde{Q}(\zeta)$，其中 $\tilde{Q}$ 由（26）给出，我们注意到，前述积分是若干项之和的实部，这些项依赖于 θ_1，形式为 $e^{\mathrm{i}(\alpha_1-N)\theta_1}$，其中 $\alpha_1 \in \{0,\dots,N-2\}$。因此，我们得出 $M'(0) = 0$。

最后，将（39）和（40）应用于（42，得到

$$\begin{aligned} |M''(\tau)| &\le C\int_{[0,2\pi]^d}\int_{[0,1]^{d-1}}\left(d|\partial_\tau r_\tau|^2 r_\tau^{d-2} + |\partial_\tau^2 r_\tau| r_\tau^{d-1}\right)\prod_{j=2}^{d}\rho_j^{d-j}d\rho_j d\theta' \\ &\le C\frac{T\epsilon^2}{t_0^3}\int_{[0,2\pi]^d}\int_{[0,1]^{d-1}}\big(r_\tau(\rho',\theta)\big)^d\prod_{j=2}^{d}\rho_j^{d-j}d\rho_j d\theta \\ &\le C\frac{\epsilon^2}{t_0^3}M(0), \end{aligned}$$

其中最后一步用到了 r_τ的单调性。

结合前面的计算与式（43），可得

$$M(1) \le \left(1 + C\frac{\epsilon^2}{t_0^3}\right)\left(1 + C\frac{\epsilon^2}{t_0}\right)\mu_0\left(\frac{t}{T}\right) \le \left(1 + C\frac{\epsilon^2}{t_0^3}\right)\mu_0\left(\frac{t}{T}\right).$$

因此，结论成立，其中 $C_0 = \frac{C}{t_0^3}$ 且 $-$

$$T_0 = \max\left\{\frac{1}{2}, t_0, \tilde{T}_0\right\} = \begin{cases} 1 - \frac{1+t_0-\sqrt{1+2t_0-t_0^2}}{4} & \text{if } t_0 < \frac{2}{13}(4+\sqrt{3}), \\ t_0 & \text{if } t_0 \ge \frac{2}{13}(4+\sqrt{3}). \end{cases}$$

□

注释 3.2. 仔细追踪证明过程中对 d 的依赖关系可以发现，T_0 仅依赖于 t_0，而不依赖于 d；$C_0 = \frac{cd^2 2^d}{t_0^3}$，其中 c 是一个普适常数。

3.2. 单调性 μ 与等周不等式。 为了继续研究 μ，尤其是通过与 μ_0进行比较，我们采用了一个等周不等式。

为方便起见，并基于 $\mathbb{P}_N^d$ 与 $\mathcal{P}_N^d$ 的对应关系（见第 1.3 节），本节将在 $\mathcal{P}_N^d$的层面上进行讨论。在这种情况下，

$$\mu(t) = m\left(\left\{z \in \mathbb{C}^d : \frac{|Q(1,z)|^2}{(1+|z|^2)^N} > t\right\}\right), \tag{44}$$

其中 dm（z）如（14）所示。

立即出现的一个困难是：在复维数严格大于 1 的复射影空间中，测地球（或其补集）不再是适用于所有体积的等周不等式的最优函数。因此，无法在其整个域上控制 μ（t），正如 [Fra23 第 4 节所指出的。6]事实上，正如 [BdCE88 定理 1 所观察到的，3], 存在一个半径 r_0（取决于 d），使得半径大于 r_0 的测地球不再是等周问题的稳定解；这意味着可以对它们作任意小的扰动，使其体积保持不变而周长减小。

另一方面，正如 Nardulli 所指出的，在紧流形上，任何体积较小的等周问题解 Ω ω 都在保持 Ω 质心不变的等距变换群作用下不变。集合 Ω $\subset \mathbb{CP}^d$的质心定义为使 $\int_\Omega$ d²(*x*, *p*)*dV*(*x*) 最小的点 $p \in \mathbb{CP}^d$，其中距离 d 和体积 V 均由 Fubini-Study度量诱导。若集合 Ω 的直径足够小，则质心存在且唯一。我们可以假设在仿射坐标中，质心为 0，而集合 Ω 必须在旋转下保持不变。因此，对于小体积，复射影空间中的等周问题解为测地球。

命题 3.3。 存在 $\tilde{\omega} \in (0,1]$（取决于 d），使得对于任意满足 $m(\mathcal{W}) \leq \tilde{\omega}$ 的 $\mathcal{W} \subset \mathbb{C}^d$, 其边界 $|\partial\mathcal{W}|_{\mathcal{H}_{FS}^{2d-1}}$ 的（$2d-1$）维豪斯多夫测度（在配备 *Fubini-Study*度量的 $\mathbb{C}^d$ 上）满足

$$|\partial\mathcal{W}|^2_{\mathcal{H}_{FS}^{2d-1}} \leq H(m(\mathcal{W}))$$

其中 $H(x) = C_d x^{2-1/d}(1-x^{1/d})$ 满足 $C_d = d^2|\mathbb{B}^d|^{1/d} = \frac{4\pi d^2}{d\ \Gamma(1)^{1/d}}$

对于小体积，等周不等式使我们仍可像 [GFOC25] 中那样，对足够大的 t进行论证。在此之前，我们先引入与阈值 $\tilde{\omega}$相关的以下记号：

$$\begin{aligned} t^{\tilde{\omega}} &= \mu^{-1}(\tilde{\omega}), \\ t_0^{\tilde{\omega}} &= \mu_0^{-1}(\tilde{\omega}) = (1-\tilde{\omega}^{1/d})^N. \end{aligned} \tag{45}$$

注意到 t_0^ω 随 N增大而减小，因此特别地

$$t_0^{\tilde{\omega}} \le 1 - \tilde{\omega}^{1/d}. \tag{46}$$

引理 3.4. 设 $Q \in \mathbb{P}_N^d$ 满足 $\|Q\|_{\mathbb{P}_N^d} = 1$ 且 $T \in (0,1)$。则

$$\mu'(t) \le -\frac{d}{Nt}\mu(t)^{1-1/d}\big(1-\mu(t)^{1/d}\big), \quad t \in (t^{\tilde{\omega}}, T). \tag{47}$$

此外

$$\frac{\mu(t)^{1/d} - \mu_0(t)^{1/d}}{t^{1/N}} \quad \text{and} \quad \frac{\int_0^t \big(\mu(\tau)^{1/d} - \mu_0(\tau)^{1/d}\big)d\tau}{t^{1+1/N}}$$

在$(t^{\tilde{\omega}}, T)$上单调不增。

证明。设 $v(z) = \frac{1}{2}\log \frac{|Q(z)|^2}{(1+|z|^2)^N}$，且 $\nu(t) = m(\{v(z) > t\})$。我们希望在 [KNOCT25] 中应用定理 1.1。首先，我们注意到集合 $\{z \in \mathbb{C}^d : v(z) \ge t\}$ 对于 $t > -\infty$ 是紧的，并且 $m\big(\{z \in \mathbb{C}^d : \nabla_M v(z) = 0\}\big) = 0$ （这一条件取代了 v 为莫尔斯函数的假设）。事实上，这两个事实都可以在 $(\partial\mathbb{B}, d\sigma)$ 中的 $U(\zeta) = |Q(\zeta)|^2$ 层面上验证。第一个结论由 $\partial\mathbb{B}$ 的紧性和 U 的连续性得出，而第二个结论基于 [Rud08，定理 5.5.9]。

其次，我们注意到

$$\Delta_M = 4\beta_d^{-1/d}(1+|z|^2)\sum_{j,k=1}^d (\delta_{jk} + \bar{z}_j z_k)\partial_{\bar{z}_j}\partial_{z_k},$$

满足 β_d 如（15）所示。于是，

$$\Delta_M v(z) = -\frac{N}{2} 4\beta_d^{-1/d} d. \tag{48}$$

最后，由命题 3.3，$H(x) = C_d x^{2-1/d}(1-x^{1/d})$ 对于 $x \le \tilde{\omega}$ 成立，其中 $C_d = \frac{4\pi d^2}{(d!)^{1/d}}$。

因此，由 [KNOCT25，定理 1。1]，

$$\nu'(t) \le -\frac{2d}{N}\nu(t)^{1-1/d}\big(1-\nu(t)^{1/d}\big), \quad t \in \left(\nu^{-1}(\tilde{\omega}), \frac{1}{2}\log T\right). \tag{49}$$

由于 $\mu(t) = \nu(\frac{1}{2}$对数 $t)$，估计式（47）对 $t \in (t^{\tilde{\omega}}, T)$ 成立。

引理的第二部分可通过计算导数并应用前一个不等式得出；当 μ_0 时，该不等式在整个范围（0, 1）内取等号。□

引理 *3.5.* 设 $Q \in \mathbb{P}_N^d$ 满足 $\|Q\|_{\mathbb{P}_N^d} = 1$ 且 $T \in (0, 1)$。设 t^* 和 $t_0^{\tilde{\omega}}$ 分别如 *(23)* 和 *(45)* 中所定义。若 $t^* > t_0^{\tilde{\omega}}$，则对于 $t \in (t_0^{\tilde{\omega}}, t^*)$，有 $\mu(t) > \mu_0(t)$。此外，存在一个常数 $T^* \in (1/2, 1)$（与 N无关），使得 $t^* \le T^*$。

证明。设 $t^* > t_0^{\tilde{\omega}}$。反设可得 $t^{\tilde{\omega}} > t_0^{\tilde{\omega}}$。事实上，若 $t^{\tilde{\omega}} < t_0^{\tilde{\omega}}$，则有 $\mu(t_0^{\tilde{\omega}}) < \mu_0(t_0^{\tilde{\omega}})$，而 $\mu(t^*) = \mu_0(t^*)$，这与引理 3.4的第二部分矛盾。因此，对于 $\mu(t) > \mu_0(t)$，有 $t \in (t_0^{\tilde{\omega}}, t^{\tilde{\omega}})$。

现在我们来关注区间 $(t^{\tilde{\omega}},\ t^*)$。由引理 3.4，可得 $\{t\in(t_0^{\tilde{\omega}},\ T)\colon\ \mu(t)=\mu_0(t)\}$ 是一个连通区间，且非空，因为 $t^*\in(t_0^{\tilde{\omega}},\ T)$。最后，我们通过反证法证明其内部为空。

假设对于 $t\in(t_1,t_2)\subset(t^{\tilde{\omega}},T)$ 以及 $T\in(1/2,1)$，有 $\mu(t)=\mu_0(t)$，并令 $\nu(t)=\mu(e^{2t})$，其满足（49）。根据假设，对于 $t\in I=\left(\frac{1}{2}\log(t_1),\ 1\,2\log(t_2)\right)$ 时，$\nu(t)=(1-e^{2t/N})^d$，因此当 $t\in\bar{I}$ 时，（49）中的等式成立。令 $A_t=\{z\in\mathbb{C}^d\colon\ v(z)>t\}$。根据 [KNOCT25, 定理 1.1]，的证明，我们得出：当 A_t 为圆盘、$|\nabla v|$ 在 ∂A_t 上为常数，且对于 $z\in A_t$ 和 $t\in I$，$\Delta_M v(z)=-2\pi Nd(d!)^{-1/d}$ 时，等式成立。

我们首先看到，对于 $t\in I$，A_t 是同心球。假设 $A_t=\mathbb{B}^d_{r_t}(z_t)$。由于对于所有 $\theta\in\partial\mathbb{B}^d$，$v(z_t+\theta r_t)=t$ 且 $\nabla v(z_t+\theta r_t)=c_t\theta$，我们有

$$1=\nabla v(z_t+\theta r_t)\cdot\partial_t(z_t+\theta r_t)=c_t(\partial_t z_t\cdot\theta+\partial_t r_t).$$

由于这对于任意 θ 都必须成立，我们得出 $\partial_t z_t=0$，即 z_t 不依赖于 t。不妨设 $z_t=0$。

现在注意到，$\log|Q(1,\ z)|$ 是调和的且为径向的。由于它在 ∂A_t 上为常数，因此在 A_t 中也为常数。这意味着 $Q(1,\ z)$ 为常数，或者 $|Q(\zeta)|=|\zeta_1|^N$，从而 $T=1$，这与我们的假设矛盾。

为了证明 t^* 存在统一上界，我们应用引理 3.1，取 $t_0=\frac{2}{13}(4+\sqrt{3})$，于是 $T_0=t_0$。因此，在 $t^*\geq t_0$ 且 $T\geq T_0=t_0$ 的情况下，我们可以在 $t=t^*$ 处应用（25），取 $C_0=C_0(t_0)$。由于 $\mu(t^*)=\mu_0(t^*)$，我们有

$$1-(t^*)^{1/N}\leq\left(1+C_0(1-T)\right)^{1/d}\left(1-\left(\frac{t^*}{T}\right)^{1/N}\right).$$

这意味着

$$t^*\leq\left(\frac{\left(1+C_0(1-T)\right)^{1/d}-1}{T^{-1/N}\left(1+C_0(1-T)\right)^{1/d}-1}\right)^N.$$

我们可以验证，右侧是 T 在 (0,1) 上的递增函数，s o

$$t^*\leq\left(\frac{CN}{1+CN}\right)^N.$$

如果 $t^*<t_0=\frac{2}{13}(4+\sqrt{3})$ 或 $T<T_0$，那么以下关系也成立

$$t^*\leq T_N^*:=\max\left\{\frac{2}{13}(4+\sqrt{3}),\left(1-\frac{1}{1+CN}\right)^N\right\}<1.$$

最后，我们注意到，右侧依赖于 N 的项随 N 增大而减小，因此

$$t^*\leq T^*:=\max\left\{\frac{2}{13}(4+\sqrt{3}),1-\frac{1}{1+C}\right\}<1.$$

□

3.3. **超水平集上的集中度**。我们已经看到，Lieb-Solovej 熵不等式（定理 1.4）推出了推论 1.5中的集中不等式。将其改写为关于 $U(\zeta)$ 和 $U_0(\zeta) = |\zeta_1|^{2N}$的超水平集测度的形式，可得：

命题 3.6. 设 $Q \in \mathbb{P}_N^d$满足 $\|Q\|_{\mathbb{P}_N^d} = 1$。则对于任意 $\hat{s} \in (0, 1)$ 以及 $\hat{t} \in (0, T)$，

$$\int_0^{\hat{s}} \big(\mu_0^{-1}(s) - \mu^{-1}(s)\big) ds \geq 0, \tag{50}$$

$$\int_0^{\hat{t}} \big(\mu(t) - \mu_0(t)\big) dt \geq 0.$$

注意，经过适当的变量替换后，可以由（50）得到第二个不等式。事实上，根据 Hardy-Littlewood-Polya 主导原理，这两个不等式都等价于 Lieb-Solovej 熵不等式（例如参见 [HLP88]）。

本节旨在得到（50）的一个定量版本。更确切地说，我们试图证明形如

$$1 - T \leq F_N(\hat{s}) \frac{\int_0^{\hat{s}} \big(\mu_0^{-1}(s) - \mu^{-1}(s)\big) ds}{\int_0^{\hat{s}} \mu_0^{-1}(s) ds}, \tag{51}$$

其中 $\hat{s}$ 可能需要足够小。注意，用 U 和 U_0表示时，（51）可写为

$$1 - T \leq F_N\big(\mu(\hat{t})\big) \left(1 - \frac{\int_{\{U(\zeta) > \hat{t}\}} U(\zeta) d\sigma(\zeta)}{\int_{\{U_0(\zeta) > \hat{t}_0\}} U_0(\zeta) d\sigma(\zeta)}\right), \tag{52}$$

其中 $\mu(\hat{t}) = \mu_0(\hat{t}_0)$。

类似（52）的估计意味着对集中极大元的刻画。事实上，（3）意味着 $T = 1$ 当且仅当 Q 是一个再生核（注意，再生核集合 $\{K(\cdot, \eta)\}_{\eta \in \partial\mathbb{B}}$ 在乘以模为一的常数后保持不变）。

引理 3.1 给出了关于 $\mu_0(t) - \mu(t)$积分的第一个估计：

引理 3.7。对于每个 $t_0 \in (0,1)$，存在 $T_0 \in [t_0, 1)$ 和 $C > 0$，使得若 $Q \in \mathbb{P}_N^d$满足 $\|Q\|_{\mathbb{P}_N^d} = 1$ 且 $T \geq T_0$，则对于任意满足 $t \geq t^*$ 的 $t \in (t_0, T)$，均有

$$\int_t^T \big(\mu_0(\tau) - \mu(\tau)\big) d\tau \geq \frac{C}{N^d}(1 - T)\left(1 - \frac{t}{T}\right)^d.$$

证明。我们应用引理 3.1，令 t_0。那么，如果 $t \in (t_0, T)$ 满足 $T \geq T_0$，我们有

$$\mu_0(t) - \mu(t) \geq \mu_0(t) - \big(1 + C_0(1 - T)\big)\mu_0\left(\frac{t}{T}\right).$$

利用 μ_0 的单调性，我们开始估计 $\mu_0(t) - \mu_0\left(\frac{t}{T}\right)$ 如下：

$$\begin{aligned}\mu_0(t) - \mu_0\left(\frac{t}{T}\right) &= -\int_T^1 \mu_0'\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{t}{\tau^2}d\tau = \frac{d}{N}t^{1/N}\int_T^1 \left(\mu_0\left(\frac{t}{\tau}\right)\right)^{1-1/d}\tau^{-1-1/N}d\tau \\ &\geq \frac{d}{N}t^{1/N}\left(\mu_0\left(\frac{t}{T}\right)\right)^{1-1/d}\int_T^1 \tau^{-1-1/N}d\tau \\ &= d(1-T^{1/N})\left(\frac{t}{T}\right)^{1/N}\left(\mu_0\left(\frac{t}{T}\right)\right)^{1-1/d}.\end{aligned}$$

考虑到 $1 - T^{1/N} \geq \frac{1-T}{N}$，我们有

$$\mu_0(t) - \mu(t) \geq (1-T)\left(\left(\frac{d}{N} + C_0\right)\left(\frac{t}{T}\right)^{1/N} - C_0\right)\left(\mu_0\left(\frac{t}{T}\right)\right)^{1-1/d},$$

若 $\frac{t}{T} \geq \left(\frac{C_0}{C_0 + \frac{d}{N}}\right)^N$，则右侧非负。特别地，当 $\frac{t}{T} \geq \frac{C_0}{C_0+d}$ 时，对 N 的所有取值这一条件均成立。在此假设下，并利用 $x^{1/N} \geq 1 + \log_N^x$ 对于 $x \in (0,1)$，我们推得

$$\left(\frac{d}{N} + C_0\right)\left(\frac{t}{T}\right)^{1/N} - C_0 \geq \frac{1}{N}\left(\frac{d}{C_0} - \log\left(1 + \frac{d}{C_0}\right)\right) - \frac{d}{N^2}\log\left(1 + \frac{d}{C_0}\right).$$

由于对于所有 $x > 0$，$x > \log(1+x)$，右侧的第一项始终为正，并且当 $N \geq N_0$ 且 N_0 足够大时，可以吸收第二项。因此，对于适当的 C（取决于 d）

$$\mu_0(t) - \mu(t) \geq \frac{C}{N}(1-T)\left(\mu_0\left(\frac{t}{T}\right)\right)^{1-1/d} \tag{53}$$

条件是 $t \geq t_0$、$T \geq T_0$ 和 $\frac{t}{T} \geq \frac{C_0}{C_0+d}$。若 $N < N_0$，取 $\frac{t}{T}$ 足够大，同样的结论仍然成立。我们将 $\frac{t}{T}$ 的所有下界中的最大值记为 $\tilde{C}_0 < 1$。

令 $t \in (t^*, T)$，于是 $\mu_0(\tau) - \mu(\tau) > 0$ 对于 $\tau \in (t, T)$。假设 $t > t_0$ 且 $T > T_0$，其中 T_0 由引理 3.1 给出，适用于 t_0。若 $t \leq C_0 T$，对 53式应用于 $\tau \geq C_0 T$，可得

$$\begin{aligned}I = \int_t^T \big(\mu_0(t) - \mu(t)\big)d\tau &\geq \int_{\tilde{C}_0 T}^T \big(\mu_0(\tau) - \mu(\tau)\big)d\tau \\ &\geq \frac{C}{N}(1-T)T\int_{\tilde{C}_0}^1 \big(\mu_0(\tau)\big)^{1-1/d}d\tau \geq \frac{C}{N^d}(1-T).\end{aligned}$$

如果 $t > C_0 T$那么我们可以对 53 使用（$\tau \in (t,\ T)$）

$$\begin{aligned}I &\geq \frac{C}{N}(1-T)\int_t^T \left(\mu_0\left(\frac{\tau}{T}\right)\right)^{1-1/d}d\tau \geq \frac{C}{N^d}(1-T)\int_t^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right)^{d-1}d\tau \\ &\geq \frac{C}{N^d}(1-T)\left(1 - \frac{t}{T}\right)^{d-1}.\end{aligned}$$

综合这两种情况，结论成立。

□

从现在起，我们着重于为（51）求得一个带有适当 F_N 的估计，其中 $\hat{s} < \tilde{\omega}$。我们分别研究两种情形，所用工具相似，具体取决于 s^* （在（23）中）相对于 $\tilde{\omega}$的位置。

3.3.1. $s^* < \tilde{\omega}$的情形。

命题 3.8. 设 $Q \in \mathbb{P}_N^d$ 满足 $\|Q\|_{\mathbb{P}_N^d} = 1$。假设 $s^* \leq \tilde{\omega}$。那么，对任意$\hat{s} \in (0, \tilde{\omega})$，估计式(51) 成立，其中

$$F_N(x) = \frac{CN^d}{\binom{N+d}{d}^2 \int_x^{\tilde{\omega}} \mu_0^{-1}(s)ds}.$$

证明。 结论由以下引理3.9 和3.10 以及下面的观察得到：设 s^* 和 t^* 如（23）所示，则

$$\int_{t^*}^1 (\mu_0(t) - \mu(t))\, dt = \int_0^{s^*} \left(\mu_0^{-1}(s) - \mu^{-1}(s)\right) ds,$$

其中，最后一个等式是通过适当的变量代换得到的。 □

引理 3.9。 在命题 *3.8*的假设下，对任意 $\hat{s} \in (0, \tilde{\omega})$ 均有

$$\int_0^{s^*} \left(\mu_0^{-1}(s) - \mu^{-1}(s)\right) ds \leq \frac{1}{\binom{N+d}{d}^2} \frac{1}{\int_{\hat{s}}^{\tilde{\omega}} \mu_0^{-1}(s)ds} \left(1 - \frac{\int_0^{\hat{s}} \mu^{-1}(s)ds}{\int_0^{\hat{s}} \mu_0^{-1}(s)}\right). \tag{54}$$

证明。 首先，我们注意到函数

$$\rho(s) = \frac{\mu^{-1}(s)}{\mu_0^{-1}(s)}, \tag{55}$$

is 在 $(0, \tilde{\omega})$ 上非递减。事实上， $\rho'(s)$ 的符号由 o 的符号决定 f

$$(\mu^{-1})'(s) - \frac{(\mu_0^{-1})'(s)}{\mu_0^{-1}(s)}\mu^{-1}(s) = \frac{1}{\mu'\left(\mu^{-1}(s)\right)} + \frac{N}{d}\frac{s^{1/d-1}}{1-s^{1/d}}\mu^{-1}(s).$$

取 $t = \mu^{-1}(s)$， $\rho'(s)$ 当且仅当

$$\frac{1}{\mu'(t)} + \frac{Nt}{d}\frac{\mu(t)^{1/d-1}}{1-\mu(t)^{1/d}} \geq 0,$$

根据引理 3.4，对 $t \in (\mu^{-1}(\tilde{\omega})\ T)$.

任意给定 $0 \leq s_1 < s_2 \leq 1$，令 $I(s_1, s_2) = \int_{s_1}^{s_2} \left(\mu_0^{-1}(s) - \mu^{-1}(s)\right) ds$。采用这一记号，(54) 可写为

$$I(0, s^*) \leq \frac{1}{\binom{N+d}{d}^2} \frac{1}{\int_{\hat{s}}^{\tilde{\omega}} \mu_0^{-1}(s)ds} \frac{I(0, \hat{s})}{\int_0^{\hat{s}} \mu_0^{-1}(s)ds}.$$

情形 *1*： $\hat{s} < s^* < \tilde{\omega}$。 考虑到 ρ 的单调性，我们得到

$$I(0,\hat{s}) \geq \big(1-\rho(\hat{s})\big)\int_0^{\hat{s}} \mu_0^{-1}(s)ds,$$
$$I(\hat{s},s^*) \leq \big(1-\rho(\hat{s})\big)\int_{\hat{s}}^{s^*} \mu_0^{-1}(s)ds.$$

结合前面的不等式，我们推得

$$I(0,s^*) = I(0,\hat{s}) + I(\hat{s},s^*) \leq \left(1+\frac{\int_{\hat{s}}^{s^*}\mu_0^{-1}(s)ds}{\int_0^{\hat{s}}\mu_0^{-1}(s)ds}\right) I(0,\hat{s})$$
$$\leq \frac{\int_0^{s^*}\mu_0^{-1}(s)ds}{\int_0^{\hat{s}}\mu_0^{-1}(s)ds} I(0,\hat{s}) \leq \frac{1}{\binom{N+d}{N}}\frac{I(0,\hat{s})}{\int_0^{\hat{s}}\mu_0^{-1}(s)ds}.$$

由于 $\binom{N+d}{N}\int_{\hat{s}}^{\tilde{\omega}} \mu_0^{-1}(s)ds \leq 1$，估计式（22）成立。

情形 *2*： $s^* < \hat{s} < \tilde{\omega}$。 现在我们有

$$I(0,s^*) = I(0,\hat{s}) - I(s^*,\hat{s}).$$

由命题 3.6，

$$I(0,\hat{s}) = I(0,\tilde{\omega}) - I(\hat{s},\tilde{\omega}) \geq -I(\hat{s},\tilde{\omega}).$$

再次利用 ρ的单调性，我们有

$$-I(s^*,\hat{s}) \leq \big(\rho(\hat{s})-1\big)\int_{s^*}^{\hat{s}} \mu_0^{-1}(s)ds,$$
$$-I(\hat{s},\tilde{\omega}) \geq \big(\rho(\hat{s})-1\big)\int_{\hat{s}}^{\tilde{\omega}} \mu_0^{-1}(s)ds.$$

结合前面的不等式，我们得出

$$I(0,s^*) \leq \left(1+\frac{\int_{s^*}^{\hat{s}}\mu_0^{-1}(s)ds}{\int_{\hat{s}}^{\tilde{\omega}}\mu_0^{-1}(s)ds}\right) I(0,\hat{s}) \leq \frac{\frac{1}{\binom{N+d}{d}}}{\int_{\hat{s}}^{\tilde{\omega}}\mu_0^{-1}(s)ds} I(0,\hat{s})$$
$$\leq \frac{1}{\binom{N+d}{d}^2}\frac{1}{\int_{\hat{s}}^{\tilde{\omega}}\mu_0^{-1}(s)ds}\frac{I(0,\hat{s})}{\int_0^{\hat{s}}\mu_0^{-1}(s)ds}.$$

□

下面的引理是引理 3.7 的推论，且不依赖于等周不等式；无论 t^* 相对于$\bar{}$的位置t_0^{ω}如何，

引理 3.10. 存在常数 $C>0$，使得对于任意满足 $\|Q\|_{\mathbb{P}_N^d}=1$ 和 $T<1$ 的 $Q\in\mathbb{P}_N^d$，都有

$$\int_{t^*}^1 \big(\mu_0(t)-\mu(t)\big)dt \geq \frac{C}{N^d}(1-T). \tag{56}$$

证明。令 T^* 为 t^* 在引理 3.5中给出的上界。若 $T > T^*$，则

$$I = \int_{t^*}^{1} \big(\mu_0(t) - \mu(t)\big)dt \geq \int_{T^*}^{T} \big(\mu_0(t) - \mu(t)\big)dt.$$

现在应用引理 3.7 与 $t_0 = T^*$。则存在 $T_0 \geq T^*$ 和 C 使得若 $T \geq T_0$，则有

$$I \geq \frac{C}{N^d}(1-T)\left(1 - \frac{T^*}{T}\right)^d.$$

假设 $T \geq T_1 = \frac{1+T_0}{2}$ 我们得到

$$I \geq \frac{C}{N^d}(1-T)\left(1 - \frac{T^*}{T_1}\right)^d \geq \frac{C}{N^d}(1-T).$$

到目前为止，我们一直假设 $T > T_1$。如果情况并非如此，则有

$$\begin{aligned} I &\geq \int_{T}^{1} \big(\mu_0(t) - \mu(t)\big)dt = \int_{T}^{1} \big(1 - t^{1/N}\big)^d dt \\ &\geq (1 - T^{1/N})^d(1-T) \geq (1 - T_1^{1/N})^d(1-T) \geq \frac{(1-T_1)^d}{N^d}(1-T). \end{aligned} \tag{57}$$

□

3.4. **情形** $s^* > \tilde{\omega}$。

命题 3.11。设 $Q \in \mathbb{P}_N^d$ 满足 $\|Q\|_{\mathbb{P}_N^d} = 1$。假设 $s^* > \tilde{\omega}$。则对于任意 $s \in (0, \tilde{\omega})$，(51) 中的估计成立，其中

$$F_N(x) = \frac{CN^d}{\binom{N+d}{d}}.$$

证明。所需估计是引理 3.12 和 3.13 以及以下估计的推论

$$\int_{0}^{\tilde{\omega}} \big(\mu_0^{-1}(s) - \mu^{-1}(s)\big)ds \geq \int_{t_0^{\tilde{\omega}}}^{1} \big(\mu_0(t) - \mu(t)\big)dt. \tag{58}$$

这由下式可得

$$\int_{0}^{\tilde{\omega}} \big(\mu_0^{-1}(s) - \mu^{-1}(s)\big)ds = \int_{t_0^{\tilde{\omega}}}^{1} \mu_0(t)dt - \int_{t^{\tilde{\omega}}}^{1} \mu(t)dt + (t_0^{\tilde{\omega}} - t^{\tilde{\omega}})\omega,$$

其中 $t^{\tilde{\omega}}$ 由式（45）给出。由引理 3.5 可知 $t_0^{\tilde{\omega}} > t^{\tilde{\omega}}$，并且根据 μ 的单调性，我们有

$$\int_{t^{\tilde{\omega}}}^{t_0^{\tilde{\omega}}} \mu(t)dt \leq \mu(t^{\tilde{\omega}})(t_0^{\tilde{\omega}} - t^{\tilde{\omega}}) = \tilde{\omega}(t_0^{\tilde{\omega}} - t^{\tilde{\omega}}).$$

因此，(58) 得证。 □

引理 3.12。 在命题 *3.11*的假设下，对任意 $\hat{s} \in (0, \tilde{\omega})$ 均成立

$$\int_0^{\tilde{\omega}} \big(\mu_0^{-1}(s) - \mu^{-1}(s)\big) ds \le \frac{1}{\binom{N+d}{d}} \left(1 - \frac{\int_0^{\hat{s}} \mu^{-1}(s) ds}{\int_0^{\hat{s}} \mu_0^{-1}(s) ds}\right).$$

证明。 我们仿照引理（3.9）证明中第一种情形的论证，其中 $\tilde{\omega}$ 起到s^*的作用。事实上，沿用该证明中引入的记号，并利用由（55）给出的函数在 $(0, \omega)$ 上单调不减这一事实，可得

$$I(0, \hat{s}) \ge \big(1 - \rho(\hat{s})\big) \int_0^{\hat{s}} \mu_0^{-1}(s) ds,$$
$$I(\hat{s}, \tilde{\omega}) \le \big(1 - \rho(\hat{s})\big) \int_{\hat{s}}^{\tilde{\omega}} \mu_0^{-1}(s) dt.$$

结合前面的不等式，我们推得

$$I(0, \tilde{\omega}) = I(0, \hat{s}) + I(\hat{s}, \tilde{\omega}) \le \left(1 + \frac{\int_{\hat{s}}^{\tilde{\omega}} \mu_0^{-1}(s) ds}{\int_0^{\hat{s}} \mu_0^{-1}(s) ds}\right) I(0, \hat{s})$$
$$\le \frac{\int_0^{\tilde{\omega}} \mu_0^{-1}(s) ds}{\int_0^{\hat{s}} \mu_0^{-1}(s) ds} I(0, \hat{s}) \le \frac{1}{\binom{N+d}{N}} \frac{I(0, \hat{s})}{\int_0^{\hat{s}} \mu_0^{-1}(s) ds}.$$

□

引理 3.13。 存在常数 $C > 0$，使得对任意满足 $\|Q\|_{\mathbb{P}_N^d} = 1, T < 1$ 的 $Q \in \mathbb{P}_N^d$，都有

$$\int_{t_0^{\tilde{\omega}}}^1 \big(\mu_0(t) - \mu(t)\big) dt \ge \frac{C}{N^d}(1 - T). \tag{59}$$

证明。 我们先回顾（46），并应用引理 3.7，取 $t_0 = 1 - \tilde{\omega}^{1/d}$。若 $T \ge T_1 = \frac{1+T_0}{2}$，其中 T_0 由引理3.7给出，则

$$\int_{t_0^{\tilde{\omega}}}^1 \big(\mu_0(t) - \mu(t)\big) dt \ge \int_{t_0}^T \big(\mu_0(t) - \mu(t)\big) dt \ge \frac{C}{N^d}(1 - T) \left(1 - \frac{t_0}{T_1}\right)^d \ge \frac{C}{N^d}(1 - T).$$

若 $T \le T_1$，我们只需仿照（57）进行论证。 □

4. Proof of the main results

主要结果主要通过上一节的命题以及下面的引理给出，该引理用 $D_N(Q)$（定义见(5)）来刻画$T =$ 上确界$_{\zeta \in \partial \mathbb{B}} |Q(\zeta)|^2$。

引理 4.1. 令 $Q \in \mathbb{P}_N^d$ 满足 $\|Q\|_{\mathbb{P}_N^d} = 1$。则

$$D_N(Q)^2 = 2(1 - \sqrt{T}).$$

证明. 对于任意 $\eta \in \partial\mathbb{B}$，有

$$\|Q - K_N(\cdot,\eta)\|^2_{\mathbb{P}^d_N} \le 2\big(1 - \operatorname{Re} Q(\eta)\big).$$

通过适当地旋转 η，可令 $Q(\eta)$ 为实数。于是，当 $|Q|^2(\eta) = T$ 时取得最小值。□

定理 *1.7* 的证明，估计式 (7)。正如注1.2中所述，

$$C_\Omega(Q) \le \int_\Omega |Q(\zeta)|^2 d\sigma(\zeta) = \int_\Omega U(\zeta) d\sigma(\zeta) \le \int_{\{U(\zeta)>\hat{t}\}} U(\zeta) d\sigma(\zeta)$$

对于 $\hat{t} = \mu^{-1}\big(\sigma(\Omega)\big)$。由命题 3.8 和 3.11，估计式（52）成立，其中

$$F_N(x) = \frac{CN^d}{\binom{N+d}{d}^2 \int_x^{\tilde{\omega}} \mu_0^{-1}(s) ds}.$$

事实上，注意到该函数与命题3.8中的函数一致，并且根据（22），它从上方界定了命题 3.11中的函数。前面的观察表明

$$1 - T \le \frac{CN^d}{\binom{N+d}{d}^2 \int_x^{\tilde{\omega}} \mu_0^{-1}(s) ds} \left(1 - \frac{C_{N,\Omega}(Q)}{C_{N,\Omega^*}(\zeta_1^N)}\right). \tag{60}$$

将此结果与引理 4.1 结合，得到

$$C^{-1}N^d \le \binom{N+d}{d} \le CN^d, \quad C = C(d) > 1, \tag{61}$$

不等式（7）成立。 □

定理 *1.7*的证明，不等式 （8）。与引理 3.1的证明一样，不妨设

$$Q(\zeta) = \sqrt{T}\zeta_1^N + \epsilon\tilde{Q}(\zeta),$$

其中 $\|\tilde{Q}\|_{\mathbb{P}^d_N} = 1$和 $\epsilon^2 = 1 - T$由（60）给出界。与前面一样，令 U_0（ζ） $= |\zeta_1|^{2N}$。步骤 ***1***：一般性考量。令 $t \in$（**0**，T）满足 μ（t） $= \sigma$（**Ω**） $= \omega$，并令 $\Omega_t = \{\zeta \in \partial\mathbb{B}:$ U（ζ） $\ge t\}$。令

$$\mathcal{D}(\Omega) = \int_{\Omega_t} U(\zeta) d\sigma(\zeta) - \int_\Omega U(\zeta) d\sigma(\zeta).$$

根据（7）的定性版本

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\Omega) &\le \int_{\Omega^*} U_0(\zeta) d\sigma(\zeta) - \int_\Omega U(\zeta) d\sigma(\zeta) \\ &= \binom{N+d}{d} \int_0^\omega (1 - s^{1/d})^N ds \left(1 - \frac{C_{N,\Omega}(Q)}{C_{N,\Omega^*}(\zeta_1^N)}\right). \end{aligned} \tag{62}$$

另一方面，对于任意 $\zeta \in \partial\mathbb{B}$，我们有

$$TU_0(\zeta) - U(\zeta) \le 2\epsilon\sqrt{T}|\operatorname{Re}\bar{\zeta}_1\tilde{Q}(\zeta)| \le 2\epsilon \tag{63}$$

于是

$$\left\{\zeta\in\partial\mathbb{B}:U_0(\zeta)\geq\frac{t+2\epsilon}{T}\right\}\subset\Omega_t\subset\left\{\zeta\in\partial\mathbb{B}:U_0(\zeta)\geq\frac{t-2\epsilon}{T}\right\}.$$

因此,

$$\mu_0\left(\frac{t+2\epsilon}{T}\right)\leq\omega\leq\mu_0\left(\frac{t-2\epsilon}{T}\right),$$

这意味着

$$t_0T-2\epsilon\leq t\leq t_0T+2\epsilon.$$

其中 $t_0=\mu_0^{-1}(\omega)=\left(1-\omega^{1/d}\right)^N$。这意味着

$$\left\{\zeta\in\partial\mathbb{B}:U_0(\zeta)\geq t_0+\frac{4\epsilon}{T}\right\}\subset\Omega_t\subset\left\{\zeta\in\partial\mathbb{B}:U_0(\zeta)\geq t_0-\frac{4\epsilon}{T}\right\}. \tag{64}$$

步骤 *2*：集合 Λ。根据布雷尼耶定理，已知存在一个输运映射$\mathcal{T}$: $\Omega_t\backslash\Omega\to\Omega\backslash\Omega_t$, $\zeta\to\mathcal{T}\zeta$，将 $\sigma|_{\Omega_t\backslash\Omega}$映射到 $\sigma|_{\Omega\backslash\Omega_t}$。令

$$\gamma^2=\frac{C}{\binom{N+d}{d}\int_\omega^{\tilde{\omega}}\mu_0^{-1}(s)ds}\left(1-\frac{C_{N,\Omega}(Q)}{C_{N,\Omega^*}(\zeta_1^N)}\right), \tag{65}$$

因此 $\epsilon\leq\gamma$ 由（60）。我们定义子集

$$\Lambda=\left\{\zeta\in\Omega_t\backslash\Omega:|(\mathcal{T}\zeta)_1|^{2N}\geq|\zeta_1|^{2N}+10\gamma\right\}.$$

注意到，在这个子集中，由（63），可得

$$U(\zeta)-U(\mathcal{T}\zeta)\geq T|U_0(\zeta)-U_0(\mathcal{T}\zeta)|-4\epsilon\geq10T\gamma-4\epsilon.$$

在假设 $T\geq\frac{1}{2}$ 下，可得

$$U(\zeta)-U(\mathcal{T}\zeta)\geq\gamma\quad\forall\zeta\in\Lambda. \tag{66}$$

因此

$$\gamma\sigma(\Lambda)\leq\int_\Lambda\big(U(\zeta)-U(\mathcal{T}\zeta)\big)d\sigma(\zeta)\leq\int_{\Omega_t\backslash\Omega}\big(U(\zeta)-U(\mathcal{T}\zeta)\big)d\sigma(\zeta)=\mathcal{D}(\Omega).$$

将其与估计式（62）和（61）结合，可得

$$\sigma(\Lambda)\leq\frac{1}{\gamma}\binom{N+d}{d}\int_0^\omega(1-s^{1/d})^Nds\left(1-\frac{C_{N,\Omega}(Q)}{C_{N,\Omega^*}(\zeta_1^N)}\right). \tag{67}$$

步骤 *3*：对 $\sigma(\Omega_t\backslash\Omega)$ 的估计。注意到

$$\sigma(\Omega_t\backslash\Omega)=\sigma(\Lambda)+\sigma\big((\Omega\backslash\Omega_t)\backslash\mathcal{T}(\Lambda)\big) \tag{68}$$

右侧第一项已在（67）中估计。因此，我们关注集合（$\Omega\backslash\Omega_t$）$\backslash\mathcal{T}$（Λ）。

根据集合 Λ 的定义，我们有

$$(\Omega\backslash\Omega_t)\backslash\mathcal{T}(\Lambda) \subset \left\{\zeta \in \Omega\backslash\Omega_t : |\zeta_1|^{2N} \le 10\gamma + |\zeta_1'|^{2N} \text{ for some } \zeta_1' \in \Omega_t\right\}$$
$$\subset \left\{\zeta \in \partial\mathbb{B} : U_0(\zeta) \le 10\gamma + t_0 - \frac{4\epsilon}{T}\right\},$$

其中最后一个包含关系由（64）得出。这也意味着

$$(\Omega\backslash\Omega_t)\backslash\mathcal{T}(\Lambda) \subset \left\{\zeta \in \partial\mathbb{B} : t_0 + \frac{4\epsilon}{T} \le U_0(\zeta) \le 10\gamma + t_0 - \frac{4\epsilon}{T}\right\}$$

假设 $\frac{8\epsilon}{T} \le 10\gamma$，特别地，当 $T \ge \frac{4}{5}$ 时该条件成立。因此

$$\sigma\big((\Omega\backslash\Omega_t)\backslash\mathcal{T}(\Lambda)\big) \le \mu_0\left(t_0 + \frac{4\epsilon}{T}\right) - \mu_0\left(10\gamma + t_0 - \frac{4\epsilon}{T}\right)$$
$$\le -\mu_0'\left(t_0 + \frac{4\epsilon}{T}\right)\left(10\gamma + \frac{8\epsilon}{T}\right) \le C\big(-\mu_0'(t_0)\big)\gamma. \tag{69}$$

步骤4：估计 $\sigma(\Omega^*\backslash\Omega_t)$。回顾一下，$\Omega^* = \{\zeta \in \partial\mathbb{B} : U_0(\zeta) > t_0\}$ 因此 $\sigma(\Omega^*) = \mu_0(t_0) = \omega$。利用（64）可得

$$\sigma(\Omega^*\backslash\Omega_t) \le \mu_0(t_0) - \mu_0\left(t_0 + \frac{4\epsilon}{T}\right) \le \frac{4\epsilon}{T} \le C\big(-\mu_0'(t_0)\big)\gamma, \tag{70}$$

其中在最后一步中，我们假设了 $T \ge \frac{1}{2}$。

步骤5：结论。我们注意到

$$\sigma(\Omega\backslash\Omega^*) \le \sigma(\Omega\backslash\Omega_t) + \sigma(\Omega_t\backslash\Omega^*).$$

利用（68）、（67）、（69）和（70），并回顾（65）以及 $t_0 = (1-\omega^{1/d})^N$，最终可得，对于 $T \ge \frac{4}{5}$ 有

$$\sigma(\Omega\backslash\Omega^*) \le C\left(\frac{C_{N,\Omega^*}(\zeta_1^N)}{\gamma_0} + \big(-\mu_0'(t_0)\big)\gamma_0\right)\left(1 - \frac{C_{N,\Omega}(Q)}{C_{N,\Omega^*}(\zeta_1^N)}\right)^{1/2},$$

其中 $\gamma_0 = \left(\binom{N+d}{d}\int_\omega^{\tilde\omega}\mu_0^{-1}(s)ds\right)^{-1/2} > 1$。考虑到 $C_{N,\Omega^*}(\zeta_1^N) \le 1$，$-\mu_0'(t_0) \le \frac{d}{N}(1-\omega^{1/d})^{1-N}$ 以及 $(1-\omega^{1/d})^{1-N} \ge 1$，我们得出

$$\mathcal{A}_\sigma(\Omega) \le \frac{2\sigma(\Omega\backslash\Omega^*)}{\sigma(\Omega)} \le C\frac{(1-\omega^{1/d})^{1-N}\gamma_0}{\omega}\left(1 - \frac{C_{N,\Omega}(Q)}{C_{N,\Omega^*}(\zeta_1^N)}\right)^{1/2},$$

这就给出了所需的估计。

若 $T < \frac{4}{5}$，也就是说，$\epsilon > \frac{1}{\sqrt[d]{5}}$，则

$$\mathcal{A}_\sigma(\Omega) \le \frac{1}{\sigma(\Omega)} \le C\frac{\epsilon}{\omega} \le \frac{C}{\omega N^{d/2}\left(\int_\omega^{\tilde\omega}\mu_0^{-1}(s)ds\right)^{1/2}}\left(1 - \frac{C_{N,\Omega}(Q)}{C_{N,\Omega^*}(\zeta_1^N)}\right)^{1/2},$$

且由于 $(1-\omega^{1/d})^{1-N} \ge 1$，结论得证。

□

定理1.9的证明。对于任意 $t_0 \in (0,1)$，令

$$\Phi_0(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \le t \le t_0, \\ \Phi(t) - \Phi(t_0) - \Phi'(t_0)(t - t_0) & \text{if } t_0 < t \le 1. \end{cases}$$

在下文中，Φ' 应理解为 Φ的左导数。不仅 Φ_0 是连续凸函数，$\Phi_1(t) = \Phi(t) - \Phi_0(t)$也是如此。

Let

$$\mathcal{S}_j = \frac{S_{\Phi_j}(Q) - S_{\Phi_j}(\zeta_1^N)}{\binom{N+d}{N}}, \quad j \in \{0,1\}.$$

根据定理 1.4，$\mathcal{S}_1 \ge 0$ 我们将证明

$$\mathcal{S}_0 \ge \frac{C}{N^d}(1 - T) \tag{71}$$

为此，注意到

$$\mathcal{S}_0 = \int_0^1 \Phi_0'(t)\big(\mu_0(t) - \mu(t)\big)dt = \int_{t_0}^1 \big(\Phi'(t) - \Phi'(t_0)\big)\big(\mu_0(t) - \mu(t)\big)dt$$

由于 Φ 是非线性的，存在 $0 < a < b < 1$ 使得 $\Phi'(a) < \Phi'(b)$。考虑Φ_0，其中 $t_0 = a$，于是

$$\mathcal{S}_0 = \int_a^1 \big(\Phi'(t) - \Phi'(a)\big)\big(\mu_0(t) - \mu(t)\big)dt.$$

设 N_0 为满足 $t_0^{\tilde{\omega}} = (1 - \tilde{\omega}^{1/d})^N < a$的最小整数。因此，根据引理 3.5，若 $t^* \in (a, 1)$且对于 $t \in (a, t^*)$有 $\mu_0(t) < \mu(t)$。否则，在$(a, 1)$中 $t^* \le a$ 且 $\mu_0(t) > \mu(t)$。在后一种情况下（根据引理 3.5，当 $a \ge T^*$ 时总是满足该条件），则

$$\mathcal{S}_0 = \int_a^1 \big(\Phi'(t) - \Phi'(a)\big)\big(\mu_0(t) - \mu(t)\big)dt \ge \big(\Phi'(b) - \Phi'(a)\big)\int_b^1 \big(\mu_0(t) - \mu(t)\big)dt.$$

如果 $t^* > a$，则有

$$\mathcal{S}_0 = \int_a^1 \big(\Phi'(t) - \Phi'(t^*)\big)\big(\mu_0(t) - \mu(t)\big)dt + \big(\Phi'(t^*) - \Phi'(a)\big)\int_a^1 \big(\mu_0(t) - \mu(t)\big)dt. \tag{72}$$

注意，右侧的两项均非负。事实上，第一项由引理（3.5）得出，第二项则由命题3.6得出。

另一方面，假设 $a < t^* \le b$，我们对（72）作如下估计

$$\mathcal{S}_0 \ge \big(\Phi'(b) - \Phi'(t^*)\big)\int_b^1 \big(\mu_0(t) - \mu(t)\big)dt + \big(\Phi'(t^*) - \Phi'(a)\big)\int_a^1 \big(\mu_0(t) - \mu(t)\big)dt.$$

另一方面，如果 $a < b \le t^*$，我们只保留（72）中的第二项，因此

$$\mathcal{S}_0 \ge \big(\Phi'(b) - \Phi'(a)\big)\int_a^1 \big(\mu_0(t) - \mu(t)\big)dt.$$

因此，剩下的工作是证明以下情形下 $\int_a^1 \big(\mu_0(t) - \mu(t)\big)dt$ 在 $a \le t^*$ 时，以及 $\int_b^1 \big(\mu_0(t) - \mu(t)\big)dt$ 在 $b \ge t^*$时的适当下界。第二种情形由引理 3.7 在 $t_0 = b$成立的条件下推出，前提是 $T \ge T_1 = \frac{1+T_0}{2} > b$。否则，若 $T \le T_1$，则

$$\int_b^1 \big(\mu_0(t) - \mu(t)\big)dt \ge \int_{T_1}^1 \mu_0(t)dt \ge \frac{(1-T_1)^{d+1}}{N^d} \ge \frac{C}{N^d}(1-T).$$

如果 $a \le t^*$，由于 $a > t_0^{\tilde{\omega}}$并且根据引理 3.5 我们知道 $\mu_0(t) < \mu(t)$ 在 $(t_0^{\tilde{\omega}}, a)$ 中，因此有

$$\int_a^1 \big(\mu_0(t) - \mu(t)\big)dt \ge \int_{t_0^{\tilde{\omega}}}^1 \big(\mu_0(t) - \mu(t)\big)dt \ge \frac{C}{N^d}(1-T).$$

其中，最后一个估计由引理 3.13 得出。

最终结果由（71）、引理 4.1 和（61）可得。 □

5. 进一步观察

本节汇总一系列主要结果的观察或推论。具体而言，正如我们在 [GFOC25] 中对 $d = 1$所做的那样，我们恢复了 [GGRT24 的 Bargmann-Fock 空间中的结果；通过取极限 $N \to \infty$，我们证明了主要结果的尖锐性，并将其推广到作用于 $\mathbb{P}_N^d$上的算子。由于所有这些论证都仿照 [GFOC25], 中的论证，因此我们只强调在高维情形下需要考虑的主要差异。

5.1. Bargmann–Fock 空间中的定量估计。 给定 $d \in \mathbb{N}$，设 $\mathcal{F}^2$ 表示由整函数 $f(z)$、$z \in \mathbb{C}^d$ 构成的 Bargmann-Fock 空间，其中

$$\|f\|_{\mathcal{F}^2}^2 = \int_{\mathbb{C}^d} |f(z)|^2 e^{-\pi|z|^2} dz < \infty.$$

赋予内积

$$\langle f, g\rangle_{\mathcal{F}^2} = \int_{\mathbb{C}^d} f(z)\overline{g(z)}e^{-\pi|z|^2} dz,$$

其中 $dz = \prod_{j=1}^d dz_j$ 且 $dz_j = dx_j dy_j$，对 $z_j = x_j + iy_j \in \mathbb{C}$ 成立。Bargmann-Fock 空间 $\mathcal{F}^2$ 是一个再生核希尔伯特空间，其核为 $k(z, \zeta) = e^{z\cdot\bar{\zeta}}$。

关于集中不等式和广义韦尔熵的定量估计分别在[GGRT24] 和 [FNT25], 中得到。对于集中度所涉及区域的大小，或 Φ的非线性范围，这两项结果都没有任何限制。考虑定理 $N \to \infty$ 的极限，1.13 和1.14，可以参照 [GFOC25]第 4 节中的类似论证推导出这些结果。我们注意到，在集中不等式中对允许子集大小的限制，或在韦尔熵框架下对给定凸函数的 N 限制，在研究极限时均不会造成约束。

为了研究 $N \to \infty$ 时的极限，给定任意多项式 $q(z)$ 和任意域$\mathcal{W} \subset \mathcal{C}^d$，我们定义如下缩放对象：

$$q^N(z) = q\left(\sqrt{\frac{N}{\pi}}z\right), \qquad \mathcal{W}^N = \sqrt{\frac{\pi}{N}}\mathcal{W}.$$

注意到 $m(\mathcal{W}^N)$ 随着 N的增大而减小，因此若 $m(\mathcal{W})$ 固定，则存在 $N_0 \in \mathbb{N}$使得$m(\mathcal{W}^N) \leq \tilde{\omega}$ 对于 $N \geq N_0$成立，因此可以将定理1.13 应用于 $N \geq N_0$。由于整个论证可以很容易地从 [GFOC25],第 4 节推广而来，这里便省略所有计算。

关于广义韦尔熵的稳定性，我们需要注意，对于任意给定的凸函数 Φ，由于 $\mathcal{P}_N^d$ 中的结果对 $N \geq N_\Phi$成立，因此在定理1.14中取极限不会有任何问题。

5.2. **尖锐性**。定理1.7 和1.9 关于不同接近程度的度量与最优值之间关系的幂次是尖锐的，正如 [GFOC25]第 5 节中一维情形所示。将这一结果推广到任意维度遵循相同的原理，即对 $\mathbb{CP}^d$的仿射坐标进行处理。

另一方面，对于局部集中，考虑第 5.1 节以及 [GGRT24，推论 7 中3], 到福克–巴格曼空间的极限时，尖锐性可通过矛盾推理得出。

另一方面， [GFOC25，命题 5 中1] 关于 $d = 1$ 的反例使我们能够推断韦尔熵不等式的尖锐性。事实上，我们注意到，如果 $q \in \mathcal{P}_N^d$ 与$d \geq 2$ 一起，并且 q 仅依赖于 $z_1 \in \mathbb{C}$，那么

$$\|q\|_{\mathcal{P}_N^d} = \|q\|_{\mathcal{P}_N^1}.$$

因此，对于任意 $q(z) = q(z_1) \in \mathcal{P}_N^d$，满足 $\|q\|_{\mathcal{P}_N^d} = 1$，并将 D_N 对 d 的依赖关系明确写出，有

$$D_{d,N}(q) \leq \min\left\{\|q - \kappa_N(\cdot,(w_1,0,\ldots,0))\|_{\mathcal{P}_N^d} : w_1 \in \mathbb{C}, \theta \in [0,2\pi]\right\} = D_{1,N}(q).$$

同样地，$S_{d,\,N,\,\Phi}(q) = S_{1,\,N,\,\Phi}(q)$。因此，$q(z) = 1 + \epsilon z_1$，经过重新归一化后，即可得到所需的反例。

5.3. **一般算子的稳定性**。定理 1.7 和 1.9可以推广到半正定算子 $\rho : \mathbb{P}_N^d \to \mathbb{P}_N^d$，其中 $\mathrm{Tr}(\rho) = 1$，或者如第 1.2节所述，推广到一般态。请注意，我们之前的结果涉及秩一算子或纯态。

对于上述任意的 ρ，考虑函数

$$U(\zeta) = \langle K_N(\cdot,\zeta), \rho(K_N(\cdot,\zeta))\rangle_{\mathbb{P}_N^d}. \tag{73}$$

该函数与 u_ρ （11）中引入的 Husimi函数一致，$\zeta \in \partial\mathbb{B}$ 与 $\mathcal{R} \in SU(d+1)$ 相对应，其中 $\zeta = \mathcal{R}\eta$ 对于给定的 $\eta \in \partial\mathbb{B}$。注意，如果$\rho = \langle \cdot, Q\rangle_{\mathbb{P}_N^d} Q$，那么 $U(\zeta) = |\langle Q, K_N(\cdot,\zeta)\rangle_{\mathbb{P}_N^d}|^2 = |Q(\zeta)|^2$，如（19）所示。.....的集中度

ρ 在 $\Omega \subset \partial\mathbb{B}$ 中定义为

$$C_{N,\Omega}(\rho) = \frac{\int_\Omega U(\zeta) d\sigma(\zeta)}{\int_{\mathbb{C}^d} U(\zeta) d\sigma(\zeta)}.$$

此外，它到再生核（相干态）投影的距离为

$$D_N(\rho) = \min\{\|\rho - \pi_\eta\|_1 : \eta \in \partial\mathbb{B}\},$$

其中 $\pi_\eta(Q) = \langle Q, K_N(\cdot, \eta)\rangle_{\mathbb{P}_N^d} K_N(\cdot, \eta)$，且 $\|\pi\|_1 = \mathrm{Tr}\,|\pi|$ 对于任意算子 π .

定理 5.1。对于任意 $d \in \mathbb{N}$，存在常数 $C > 0$ 和 $\tilde{\omega} \in (0, 1]$，使得对于任意可测集 $\Omega \subset \partial\mathbb{B}$ 满足 $\sigma(\Omega) \in (0, \tilde{\omega})$ 以及任意半正定算子 $\rho : \mathbb{P}_N^d \to \mathbb{P}_N^d$ 满足 $\mathrm{Tr}\,\rho = 1$，均有

$$D_N(\rho)^2 \le \frac{C}{N^d \int_{\sigma(\Omega)}^{\tilde{\omega}} (1 - s^{1/d})^N ds} \left(1 - \frac{C_{N,\Omega}(\rho)}{C_{N,\Omega^*}(\pi_{\theta_1})}\right).$$

其中 Ω^* 如 (9) 及 $\theta_1 = (1, 0, \ldots, 0) \in \partial\mathbb{B}$。此外，

$$\mathcal{A}_\sigma(\Omega)^2 \le \frac{C}{\alpha\big(\sigma(\Omega)\big)} \left(1 - \frac{C_{N,\Omega}(\rho)}{C_{N,\Omega^*}(\pi_{\theta_1})}\right), \tag{74}$$

其中 $\alpha(\omega)$ 如 (10)所示。

最后，我们回顾广义韦尔熵的定义 $\mathcal{S}_{N,\,\Phi}$ 见式（12），它等价于

$$S_{N,\Phi}(\rho) = -\binom{N+d}{N} \int_{\mathbb{C}^d} \Phi\left(U(\zeta)\right) d\sigma(\zeta),$$

其中 U 如式（73）所示。以下结果是定理 1.9 的推广，也是定理 1.12的定量版本。

定理 5.2。设 $\Phi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ 是一个凸的非线性函数，且设 $d \in \mathbb{N}$。那么存在常数 $C > 0$ 和 $N_\Phi \in \mathbb{N}$（仅依赖于 Φ 和 d），使得对任意 $N \ge N_\Phi$，以下结论成立：设 $\rho : \mathbb{P}_N^d \to \mathbb{P}_N^d$ 是一个半正定算子，且 $\mathrm{Tr}\,\rho = 1$，则

$$D_N(\rho)^2 \le C\big(\mathcal{S}_{N,\Phi}(\rho) - \mathcal{S}_{N,\Phi}(\rho_0)\big),$$

其中 ρ_0 是任意相干态，即对任意 $\eta \in \partial\mathbb{B}$，$\rho_0 = \pi_\eta$。

这两个结果的证明分别与定理 1.7 和 1.9的证明相同，只需按照 [GFOC25第 5] 节在一维情形下指出的内容稍作调整。因此，此处省略细节，并建议有兴趣的读者在[GFOC25第 5] 节中查阅相关说明，并将其应用于这一情形，研究 $\mathbb{P}_N^d$ 或 $\mathcal{P}_{N^\circ}^d$。事实上，定理 5.1和 5.2 也可以类似地针对算子 $\mathcal{P}_N^d \to \mathcal{P}_N^d$表述。在这一情形下，我们可以考虑 $N \to \infty$ 的极限，并在 Bargmann-Fock 空间中推出类似结果，尤其重新得到[FNT25定理 3]中的广义 Wehrl 猜想的稳定性。

致谢。 MAGF 部分获得了由 MICIU/AEI/10.13039/501100011033 资助的 PID2024-156055NA-I00 和 CEX2023-001347-S 项目支持。她还谨此感谢由 CEX2020-001084-M 项目资助的 CRM-MdM 卓越主席项目。JOC 获得了西班牙国家研究署通过 PID2024-160033NB-I00 和 CEX2020-001084-M 项目提供的支持，以及加泰罗尼亚政府通过 2024 ICREA 00142 项目提供的资助。我们感谢阿列克谢·库利科夫和 Joaquín Pérez 的有益讨论。

References

[BdCE88] J. Lucas Barbosa、Manfredo do Carmo 和 Jost Eschenburg，《黎曼流形中常平均曲率超曲面的稳定性》，Math. Z. 197 (1988)，第 1 期，123–138，DOI 10.1007/BF01161634。 ↑[Fra23] Rupert L. Frank，《相干态及其最优函数的尖锐不等式》，Adv. Nonlinear Stud. 23 (2023)，28。编号/论文号 20220050。 ↑[FNT25] Rupert L. Frank、Fabio Nicola 和 Paolo Tilli，《广义韦尔熵界的定量形式》，J. Eur. Math. Soc. (2025)。 ↑[GFOC25] Mar´ıa ´Angeles García-Ferrero 和 Joaquim Ortega-Cerdá，《多项式集中不等式的稳定性》，Comm. Math. Phys. 406 (2025)，第 5 期，论文编号 112，共 35 页。 ↑[GGRT24] Jaime Gómez、André Guerra、João P.G. Ramos 和 Paolo Tilli，《短时傅里叶变换的法贝尔-克拉恩不等式的稳定性》，Invent. Math. 236 (2024)，779-836。 ↑[HLP88] G. H. Hardy、John E. Littlewood 和 George Pólya，《不等式》，剑桥大学出版社，1988。 ↑[KNOCT25] Aleksei Kulikov、Fabio Nicola、Joaquim Ortega-Cerdá 和 Paolo Tilli，《流形上次调和函数的单调性定理》，Adv. Math. 479 (2025)，论文编号 110423，共 18 页。 ↑[LS14] Elliott H. Lieb 和 Jan Philip Solovej，《布洛赫自旋相干态熵猜想及其推广的证明》，Acta Math 212 (2014)，第 2 期，379–398。 ↑[LS16] Elliott H. Lieb 和 Jan Philip Solovej，《对称相干态的韦尔型熵猜想的证明》，Commun. Math. Phys. 348 (2016)，第 2 期，567–578。 ↑[Nar09] Stefano Nardulli，《光滑黎曼流形在小体积下的等周轮廓》，Ann. Global Anal. Geom. 36 (2009)，第 2 期，111–131。 ↑[NRT25a] Fabio Nicola、Federico Riccardi 和 Paolo Tilli，《对称相干态的韦尔型熵猜想：等号成立情形与稳定性》(2025)，arXiv 2412.10940 ↑[NRT25b] ,《定量形式的韦尔型熵界的初等方法》(2025)，arXiv 2512.04245 ↑[Oss78] Robert Osserman，《等周不等式》，Bull. Amer. Math. Soc. 84 (1978)，第 6 期，1182–1238。 ↑[Rud08] Walter Rudin，《单位球中的函数论》，1980 年原版重印，Class. Math.，柏林：Springer，2008（英文）。 ↑[Shi15] Bernard Shiffman，《复流形上正线丛的均匀有界正交归一截面》，《分析、复几何与数学物理：纪念 Duong H. Phong》，Contemp. Math.，第 644 卷，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2015 年，第 227–240 页。 ↑

Instituto de Ciencias Matemáticas CSIC-UAM-UC3M-UCM,
c/ Nicolás Cabrera 13–15, 28049 Madrid, Spain电子邮箱: garciaferrero@icmat.es

Dept. Matemàtica i Informàtica, Universitat de Barcelona, Gran Via 585, 08007 Barce-lona, Spain and CRM, Centre de Recerca Matemàtica, Campus de Bellaterra Edifici C,08193 Bellaterra, Barcelona, Spain
电子邮箱地址: jortega@ub.edu