arXiv:2603.14585v1 [math.GT] 15 Mar 2026

单位性 琼斯多项式在单位圆与复平面中的

MICHAŁ JABŁONOWSKI

摘要。本文研究纽结与链环的琼斯多项式方程 $J_K(t) = 1$ 的解。对于双扭结纽结族 K_n，我们证明，除 -1 外，每个单位根都满足：对某个 n，有 $J_{K_n}(\zeta) = 1$ 。因此，由该族产生的方程 $J_{K_n}(t) = 1$ 的解集在单位圆上稠密。我们进一步证明，存在一个链环族，使得 $J_L(t) - 1$ 的零点在复平面中稠密；这一结果借鉴了 Jin–Zhang–Dong–Tay 关于琼斯多项式零点的稠密性机制。

1. 引言

已知，某些链环（以及纽结的奇参数扭结子族）的琼斯多项式零点在整个复平面中稠密 [4], $J(t)$ ，而某些纽结的琼斯多项式零点在单位圆上稠密 [2, 6]。本文证明，多项式 $J(t) - 1$ 的零点在整个复平面中稠密（与 [4] 类似），并证明由一族非平凡纽结产生的多项式 $J(t) - 1$ 的零点在单位圆上稠密。

一个众所周知的未决问题是，是否存在非平凡纽结使得 $J(t) \equiv 1$。对于非平凡纽结，$J(t) = 1$ 在单位圆上的解的稠密性，是通过计算交叉数不超过 16 的素纽结（采用最简图）的 $J(t) - 1$ 零点得出的结果，图 1 对此进行了可视化展示（放大图像即可看出单位圆弧上点的“稠密性”）。此图中的根的取值范围包括 $\mathrm{Re}(t) \in [-1, 1]$、$\mathrm{Im}(t) \in [0, 2]$。交替纽结对应的点以红色表示，非交替纽结对应的点以蓝色表示（位于红点下方）。这些点使用 SageMath 计算得出 [3]。

2. 单位圆上的稠密性

设 $K_n = C(2n, 3)$ 为具有Conway记号 $C(2n, 3)$的双扭结，$n \geq 1$，其中一组包含3个半扭转，另一组包含$2n$ 个半扭转交叉数。当 $n = 1$、2、3时，相应情形的Rolfsen名称分别为 $C(2, 3) = 5_2$、$C(4, 3) = 7_3$和 $C(6, 3) = 9_3$。

日期：2026年3月17日。2020数学学科分类。 57K10（主要分类）。1

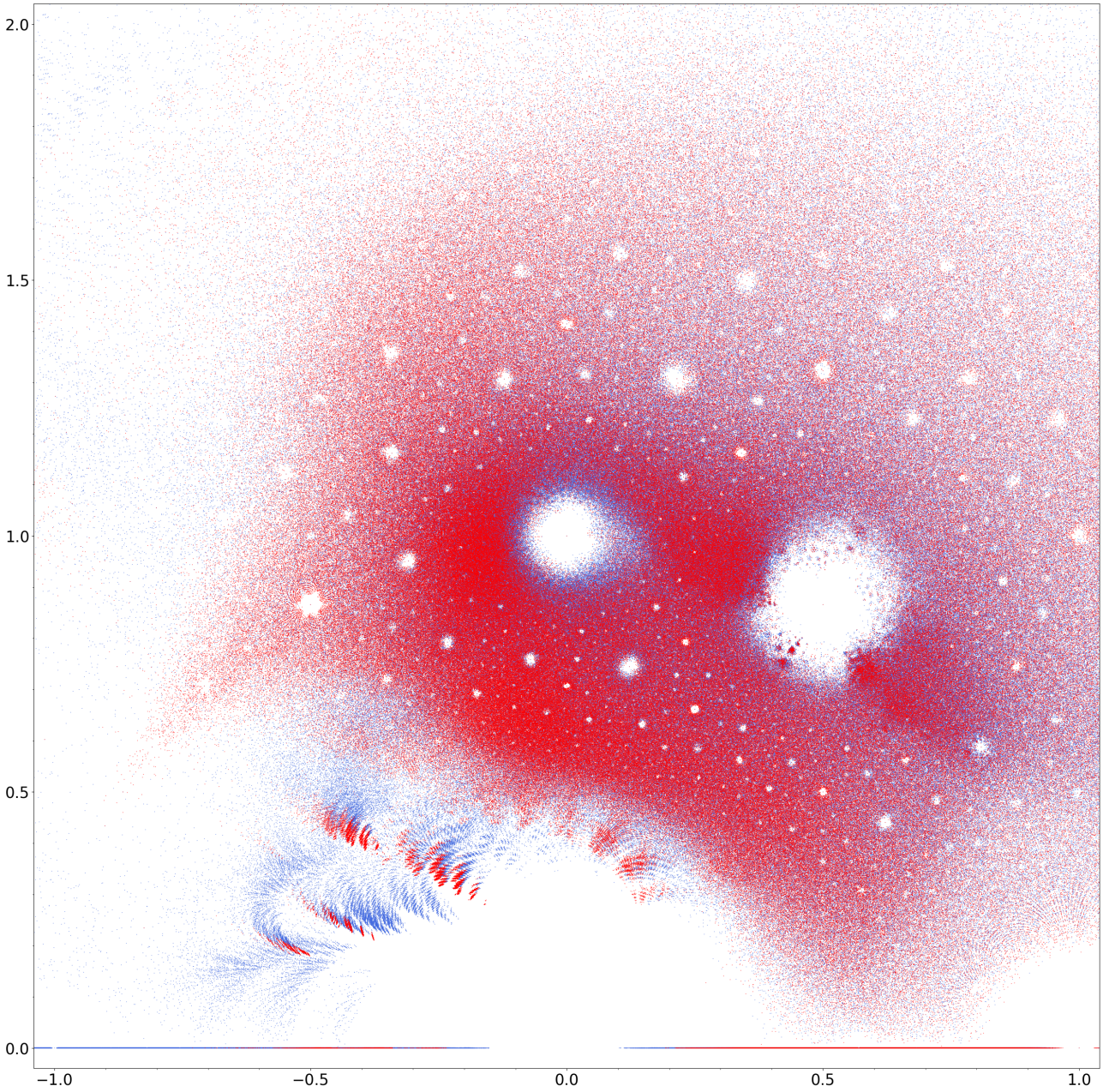


图1. 截至16个交叉数的素纽结的 $J(t) = 1$ 的解。

定理 2.1。 设 $J_n(t)$ 表示 K_n 的琼斯多项式，并作归一化使得 $J_n(1) = 1$。则 $\{t \in S^1 : \exists n \geq 1, J_n(t) = 1\}$ 在单位圆 S^1 中稠密。更准确地说，

$$\mu_\infty \setminus \{-1\} \subset \{t \in S^1 : \exists n \geq 1,\ J_n(t) = 1\},$$

其中， μ_∞ 表示所有单位根的集合。

证明。 纽结 K_n 是交替且非平凡的。对于$n \geq 1$，相应的有理分数为 $(6n+1)/3$。

The 琼斯多项式有精确的闭式（一般化形式见 [5] ）

$$J_n(t) = (t^{-3n-3}) \cdot \frac{t^{2n}(1+t^2+t^4)+t^3-t^2-1}{1+t}.$$

设 ζ 是一个满足 $\zeta \neq -1$ 的单位根。我们求解

$$J_n(\zeta) = 1.$$

将定义方程两边乘以 $t^{3n+3}(1+t)$，得到等价关系

$$t^{2n}(1+t^2+t^4)+t^3-t^2-1 = t^{3n+3}(1+t).$$

代入 $t = \zeta$ 并令 $x = \zeta^n$，可得

$$x^2(1+\zeta^2+\zeta^4)+\zeta^3-\zeta^2-1 = x^3\zeta^3(1+\zeta).$$

整理后得到三次方程

$$\zeta^3(1+\zeta)x^3-(1+\zeta^2+\zeta^4)x^2+(1+\zeta^2-\zeta^3) = 0.$$

这个多项式因式分解为

$$(x-1)\Big(\zeta^3(1+\zeta)x^2+(\zeta^3-1-\zeta^2)(x+1)\Big) = 0.$$

一个解是 $x = 1$。
由于 $x = \zeta^n$，这个条件等价于

$$\zeta^n = 1.$$

如果 $N = \mathrm{ord}(\zeta)$，那么 $n = N$ 满足这个条件。将 $n = N$ 代入定义方程，得到

$$J_N(\zeta) = 1.$$

因此，每个单位根 $\zeta \neq -1$ 都满足 $J_n(\zeta) = 1$，其中某个 n。

接下来只需考虑 $\zeta = -1$。由于该公式在$t = -1$处有一个可去奇点，定义

$$N_n(t) = t^{2n}(1+t^2+t^4)+t^3-t^2-1.$$

Then

$$J_n(-1) = (-1)^{-3n-3}\lim_{t\to -1}\frac{N_n(t)}{1+t} = (-1)^{-3n-3}N_n'(-1) = (-1)^n(6n+1),$$

其中第二个等式由洛必达法则得出。因此

$$J_n(-1) \neq 1 \quad \text{for all } n \geq 1.$$

因此

$$\mu_\infty \setminus \{-1\} \subset \{\, t \in S^1 : \exists n,\ J_n(t) = 1 \,\}.$$

由于单位根的集合在S^1,集合 $\{t \in S^1 : \exists n, J_n(t) = 1\}$中稠密，因此它在$S^1$中也稠密。 □

3. 复平面中的稠密性

命题 3.1. 存在一个链环族 $\{L_n\}_{n\geq 1}$，使得其零点

$$J_{L_n}(t)-1$$

在复平面中稠密 $\mathbb{C}$。

Ji n–Zhang–Dong–Tay [4] 机制改编自 J 到 $J-1$，并增加了额外步骤 .

引理 3.2(Beraha–Kahane–Weiss [1])。设

$$F_n(z)=\sum_{j=1}^{k}\alpha_j(z)\lambda_j(z)^n$$

设 $\subset\mathbb{C}$是区域 D 中的一列解析函数，其中$\alpha_j(z)$ 和 $\lambda_j(z)$ 是解析函数，且 λ_j 不恒等成比例。

若 $z_0\in D$ 满足

$$|\lambda_i(z_0)|=|\lambda_j(z_0)|>\max_{k\neq i,j}|\lambda_k(z_0)|,$$

则 z_0 是 $\{F_n\}$的零点的一个极限点。

命题 3.1 的证明。Jin–Zhang–Dong–Tay [4]构造了一族链环$L_n(T)$（以及纽结的奇参数 Pretzel 子族），它们由相同的缠结 T 环状排列而成。对于这类族，琼斯多项式可表示为（相差一个单项式因子 $\pm t^{k/2}$）

$$J_{L_n(T)}(t)=a(t)\Lambda_1(t)^n+b(t)\Lambda_2(t)^n.$$

定义

$$JW_n(t)=J_{L_n(T)}(t)-1=a(t)\Lambda_1(t)^n+b(t)\Lambda_2(t)^n+(-1)\cdot 1^n.$$

设$t_0\in\mathbb{C}$且 $\varepsilon>0$。由 [4], 的引理 3.4 可知，存在一个缠结T 和一点t_*，使得

$$|t_*-t_0|<\varepsilon/2$$

使得

$$|\Lambda_1(t_*)|=|\Lambda_2(t_*)|.$$

此外，[4] 中的构造I_s^+和I_s^-允许将特征值 Λ_1、Λ_2 按乘法方式缩放，具体如下。

设H 是与二缠结T对应的带符号平面图。

设I_s 为一个具有两个顶点且由s 条平行边连接的图。记I_s^+和I_s^-为分别将所有边赋予正号和负号后得到的带符号图。

对于I_s^+，图塔多项式构造中出现的系数给出了如下关系

$$|1-(-t)^s|=|1+(t+t^{-1}+1)(-t)^s|.$$

因此，参数 s 仅通过幂 t^s 进入。

则与 $T_s^{\pm}$对应的转移矩阵的特征值满足

$$\Lambda_i^{(s)}(t) = c_{\pm}(t)^s\,\Lambda_i(t), \qquad i = 1, 2,$$

对于某个非零函数 $c_{\pm}(t)$ ，它仅取决于符号的选择。因此，

$$|\Lambda_1^{(s)}(t)| = |c_{\pm}(t)|^s|\Lambda_1(t)|, \qquad |\Lambda_2^{(s)}(t)| = |c_{\pm}(t)|^s|\Lambda_2(t)|.$$

因此，将H 的一条边替换为$I_s^{\pm}$，会使每个特征值 $\Lambda_i(t)$ 都乘以同一个因子$c_{\pm}(t)^s$。

对I_s^- 进行相同的计算可得因子t^{-s}。因此，在两种情况下，特征值都按乘法缩放，同时保持其比值不变。

因此，可以将等式 $|\Lambda_1(t_*)| = |\Lambda_2(t_*)|$ 安排成

$|\Lambda_1(t_*)| = |\Lambda_2(t_*)| > 1.$

因此，JW_n 具有引理3.2所要求的形式，具有三个特征值 Λ_1、 Λ_2和 1。由于

$$|\Lambda_1(t_*)| = |\Lambda_2(t_*)| > |1|,$$

引理3.2 表明，t_* 是 $\{JW_n\}$的零点的一个极限点。

因此，对某个 n ， 存在 JW_n 的一个零点 t ， 使得

$$|t - t_*| < \varepsilon/2.$$

因此， $|t - t_0| < \varepsilon$。

由于 t_0 和 ε 是任意的，$JL_n(t) - 1$ 的零点在 $\mathbb{C}$ 中稠密。 □

参考文献

[1] S. Beraha、J. Kahane 和 N.J. Weiss，《递归定义的多项式族的零点极限》，基础与组合学研究，数学进展补充研究，1 (1978) 212–232。[2] A. Champanerkar、I. Kofman，《扭结作用下琼斯多项式的马勒测度》，代数与几何拓扑，5(1) (2005) 1–22。[3] 开发者，Sage，*SageMath*，*Sage* 数学软件系统（版本 *10.6*），(2026)，https://www.sagemath.org[4] X. Jin、F. Zhang、F. Dong、E.G. Tay，《琼斯多项式的零点在复平面中稠密》，电子组合学期刊，(2010) #R94。[5] R. Lawrence 和 O. Rosenstein，《琼斯有理重合》，《纽结理论及其分歧》，第 34.03 卷 (2025) 2340015。[6] M. Mroczkowski，《无穷多个单位根是某些琼斯多项式的零点》，《几何学论丛》，216，第 4 期 (2022) 43。

格但斯克大学数学研究所、数学、物理与信息学学院，波兰格但斯克 80-308电子邮件地址：michal.jablonowski@ug.edu.pl