# MOTO：基于隐式物质点法的大变形拓扑优化

Rahul Kumar Padhy　Aaditya Chandrasekhar　机械工程系　机械工程系　威斯康星大学麦迪逊分校　西北大学　美国威斯康星州麦迪逊　美国伊利诺伊州埃文斯顿　rkpadhy@wisc.edu　aadityacs@northwestern.edu

Krishnan Suresh　机械工程系
威斯康星大学麦迪逊分校　美国威斯康星州麦迪逊
ksuresh@wisc.edu

arXiv:2603.14596v1 [cs.CE] 15 Mar 2026

**摘要**

长期以来，有限元法（FEM）一直是拓扑优化（TO）的计算基础。然而，在设计发生大变形的结构时，传统的基于有限元法的拓扑优化往往会因严重的网格畸变、网格缠结和大转动而出现数值不稳定性，进而导致收敛失败。

为应对这一挑战，我们提出了一种基于物质点法（MPM）的拓扑优化框架。物质点法是一种混合拉格朗日–欧拉粒子法，非常适合模拟大变形。具体而言，我们提出了一种端到端可微的隐式物质点法框架，用于设计发生准静态超弹性大变形的结构。通过验证研究展示了该方法的有效性，涵盖单材料和多材料设计，包括柔顺软体机器人夹爪的设计。本文配套软件可通过 github.com/UW-ERSL/MOTO 获取。

**关键词** **材** 物质点法 ·超弹性 · 拓扑优化 · 可微仿真

## 1 引言

拓扑优化（TO） [1, 2] 是一种计算设计方法，通过优化设计域内的材料分布来实现指定的目标和约束。结构拓扑优化主要关注采用线性本构模型的小变形 [3, 4, 5]；如需全面了解相关综述，请参阅 [6, 7]。然而，现代工程对能够适应大变形和非线性本构行为的设计需求日益增长。典型应用包括《软体机器人》 [8], 、防护性蜂窝结构 [9, 10, 11], 、柔性电子设备 [12], 和气动执行器 [13] （例如，参见图 1）。

传统上，拓扑优化（TO）采用有限元法（FEM）来分析结构响应（正向问题），并通过伴随方法计算灵敏度（反向问题）。然而，FEM 基于拉格朗日网格的范式在大变形情况下会带来显著挑战。由于单元随材料变形，因此容易发生严重畸变 [14], 、反转、网格缠结 [15, 16, 17], 和碎裂 [18, 19], ，进而导致数值不稳定和收敛失败。物质点法（MPM） [20] 通过结合拉格朗日和欧拉描述，克服了这些局限。在 MPM 中，连续体由移动的拉格朗日物质点表示，这些物质点携带质量、应力和速度等物理量；与此同时，欧拉背景网格则用于求解控制方程 [21]。如图2(a)所示，初始物体被离散为一组位于计算域内的物质点。图2(b)的分解视图进一步阐明了这些物质点、计算域与背景网格之间的关系。不同于传统有限元法中网格随材料变形的情况，

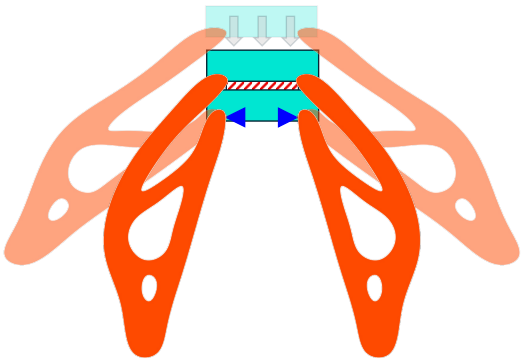


图 1：发生大变形的软体机器人夹爪设计。

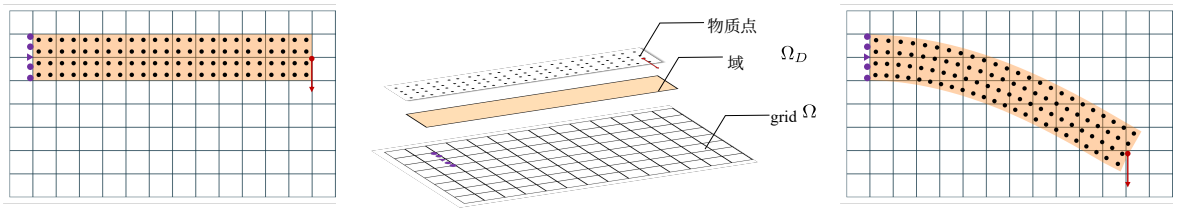



图 2：物质点法离散：(a) 初始构型，(b) 展示物质点、计算域和背景网格的分解视图，以及 (c) 变形构型。

在物体发生变形时，MPM中的物质点会穿过固定的背景网格移动（图2(c)）。这种混合方法有效缓解了与网格相关的问题 [22, 23]。

例如，考虑 [24] 中所示的 C 形支架示例，如图 3(a) 所示。在标准有限元法表述中（图 3(b)），网格随材料变形，产生严重畸变和倒置的单元，进而导致数值不稳定。相比之下，物质点法表述（图 3(c)）保持固定背景网格不变，同时由物质点跟踪变形构型，从而无论变形多么复杂，都能有效避免网格畸变。因此，物质点法特别适用于大变形拓扑优化。

尽管MPM主要与显式时间积分 [25] 和动态拓扑优化应用 [26, 27], 相关，但其在准静态问题中的应用仍相对有限。不同于采用基于向量的更新的显式方法，准静态状态需要使用隐式求解器。这一要求带来了重大数值挑战，

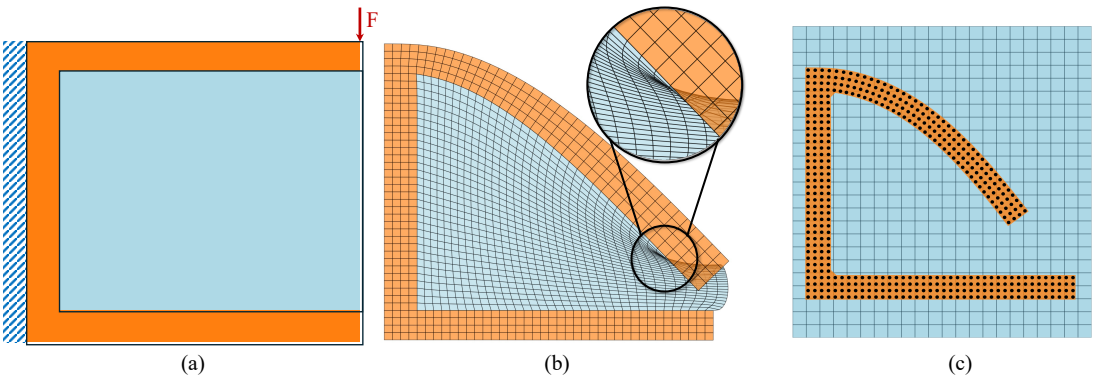



图 3：(a) 具有边界条件的 C 形支架域。(b) 施加荷载下的有限元解，展示了严重的网格畸变。(c) 同一问题的物质点法表示，其中物质点在固定背景网格上移动。

因为它涉及在MPM框架内组装并求逆全局切线刚度矩阵。在准静态拓扑优化中，粒子-网格拓扑不断演化，使这一过程更加复杂。
目前已有多种隐式物质点法变体，例如广义插值物质点（GIMP） [28, 21], 、双域物质点（DDMP）方法以及对流粒子域插值（CPDI） [29] 。本文采用并扩展了 GIMP 方法，因为它通过提供 $C^1$ 连续性，缓解了标准物质点法固有的网格穿越失稳，这对隐式求解器的稳定性和收敛至关重要。尽管近期已有研究将这一公式应用于小变形线性弹性的拓扑优化 [30], ，但其向大变形超弹性的扩展仍未得到探索。

为此，我们提出 MOTO，这是一个用于拓扑优化的隐式 $m$质点$o$框架。本文的主要贡献如下：

1. **超弹性 GIMP 公式：** 在 GIMP 框架中实现亨基超弹性材料模型，以捕捉结构发生大变形时的响应 [21]。2. **多材料设计表示：** 集成基于神经网络的设计表示 [31] ，以实现空间变化材料。3. **端到端可微性：** 利用 JAX 库 [33]实现自动微分（AD） [32] ，自动完成由神经网络表示、多样化的目标函数、约束以及超弹性本构模型所引发的复杂灵敏度计算。4. **应用：** 通过柔顺软体机器人夹爪设计案例，展示该框架的能力。

## 2 相关工作

本节回顾了针对经历大变形结构的拓扑优化在各种应用中的最新进展。此外，我们还回顾了大变形拓扑优化中采用的数值离散方法，涵盖基于网格和基于粒子的方法。

自 [34], 以来，拓扑优化已发展成为一种强大的计算设计工具，广泛应用于各种工程应用领域 [35, 2, 36, 37, 38]。经典结构拓扑优化文献的大部分工作，都是基于小应变假设和线性本构模型开展的 [3, 4, 5]。这些假设适用于经历小应变的结构；但当结构响应由大变形和非线性本构行为主导时，它们便会受到限制。许多当代应用都属于这种情况，包括发生大运动和超弹性变形的软体机器人 [39], 经历大幅展开变形的心血管支架[40, 41], 通过坍塌耗散能量的耐撞结构 [9, 10, 11], 以及响应取决于有限应变机制的结构化超材料 [42, 43, 44, 45]。

大变形拓扑优化最活跃的应用领域之一是机械超材料，其目标通常是定制非线性有效响应 [42]。 [43] 展示了针对大变形、具有可编程泊松比的拓扑优化结构。在此基础上， [44] 将基于密度的拓扑优化与非线性均匀化相结合，以设计有限应变负泊松比超材料。最近， [46] 采用多材料拓扑优化，获得了具有可编程力-位移响应的复合超结构。大变形拓扑优化的另一个重要应用领域是生物医学设计，其性能往往取决于生理载荷下的大幅部署、扩张或柔顺运动。 [40] 设计了一种双稳态心血管支架，其部署依赖于在收缩和扩张稳定构型之间发生突跳。

一类重要的大变形拓扑优化问题涉及接触，其中接触界面通常先验未知，并且会随拓扑一同演化。 [47] 利用大变形力学，建立了接触状态下多个可变形体拓扑优化的框架。 [48]将第三介质接触法扩展至包含自接触的有限应变拓扑优化，并引入了空域正则化，使该方法适用于非常大的变形。大变形拓扑优化的另一项实际应用是软体夹爪，因为软体夹爪依靠材料柔顺性与脆弱物体安全交互，并适应多种几何形状 [8, 49]。 [50]提出了具有几何非线性的缆索驱动软体夹爪拓扑优化方法。此外， [51]提出了采用非线性拓扑优化的压力驱动软体机器人设计框架。 [39]基于有限变形超弹性，构建了可充气软体机器人的形状与拓扑同步优化方法。最后，大变形拓扑优化在耐撞性领域也变得日益重要，包括 [9],冲击缓解 [10, 11], 和弹塑性设计 [52], ，其中性能取决于不可逆变形与能量耗散。 [53] 利用率无关各向同性硬化塑性和变形梯度的乘法分解，将弹塑性拓扑优化扩展至有限应变。最近， [52] 提出了多材料有限应变

弹塑性公式，可同时优化结构布局和材料分布，从而拓展了面向能量耗散和成形主导应用的设计空间。

这些多样化应用背后存在一个共同的计算挑战，即开发能够在拓扑优化过程中稳健处理大变形的数值离散方法。历史上，大多数拓扑优化框架依赖拉格朗日有限元离散 [3], ，这种方法在小变形、线弹性状态下能够提供准确的结构分析，并支持基于密度的 [54], 水平集 [55], 和基于相场的拓扑优化公式[56]。针对大变形的扩展通常采用更新拉格朗日有限元公式 [57]。然而，在大变形条件下进行基于密度的拓扑优化时，低密度区域可能发生严重的网格畸变，进而导致单元反转和病态刚度矩阵 [58, 14]。因此，研究人员在非线性有限元法中提出了多种稳定策略，包括单元移除与重新引入方案[59, 60], 、用于有限应变虚拟域公式的能量插值方法 [24], ，以及对易畸变单元进行加性超弹性正则化 [61]。此外，研究人员也探索了其他离散方法。无网格方法，例如无单元伽辽金法和再生核粒子法，无需维持网格连接关系[62, 63] ，并已应用于拓扑优化 [64, 65]。然而，这些方法在施加边界条件和保持精度方面会带来额外的复杂性 [66, 67]。

基于粒子的方法为处理大运动和演化几何提供了另一种途径。具体而言，物质点法（MPM）将拉格朗日物质点与欧拉背景网格相结合，非常适用于大变形和接触问题 [20, 68]。除已广泛应用于岩土力学 [69] 和冲击模拟 [70], 外，物质点法近年来也与拓扑优化相结合 [30], 。相关研究在小变形、线弹性状态下建立了基于物质点法的准静态拓扑优化框架，并研究了其中的解析灵敏度和单元穿越效应。对于动力学问题，基于物质点法的拓扑优化已用于轨迹相关目标，其中惯性是公式构建中不可或缺的一部分 [26, 71]。相比之下，许多设计问题由准静态平衡状态序列支配，例如受控驱动或在持续载荷下保持稳定性 [72, 73, 74]。对于这类应用，涉及大变形准静态问题的基于物质点法的拓扑优化仍相对缺乏研究，这也促使了本研究的开展。

## 3 所提方法

本文提出了一种基于广义插值物质点法（GIMP）的拓扑优化（TO）框架 [21], ，专为发生大变形的结构设计。首先，定义网格 $\Omega$，并在其中的设计域 $\Omega_D$ 内布置物质点，如图2(b)所示。网格 $\Omega$ 的范围应足够大，以容纳分析过程中物体所有可能的变形构型。我们假设对网格节点施加狄利克雷边界条件，而外载荷直接施加于物质点上。我们还假设已给定所采用本构模型（本文中为亨基超弹性 [21] ）的材料常数。主要目标是在满足设计约束的条件下，确定能够使性能最大化的最优材料分布。

实现这一目标的方法其余部分安排如下：第3.2节详细介绍控制方程。第3.4节给出拓扑优化公式。第3.5节讨论通过自动微分进行的灵敏度分析，第3.6节则总结完整的优化算法。

为确保内容完整，我们先在第3.1节回顾物质点法。关于详细介绍，请参阅 [21]。

### 3.1 物质点法概述

本节将详细介绍物质点法（MPM）的数值计算流程。物质点法结合拉格朗日和欧拉描述，用于分析发生大变形的结构。在这一混合公式中，连续体被离散为一组拉格朗日物质点（MP），每个物质点都关联着物理状态变量，包括质量、体积、变形梯度和应力。控制力平衡方程在固定的欧拉网格上求解。例如，图4展示了物质点法的核心步骤，具体如下：

1. **初始化：** 设计域 $\Omega_D$ 中布置有 $n_p$ 个物质点，每个点均被赋予均匀的初始体积 $V_p^0$、质量 $m_p = \rho V_p^0$ 和单位变形梯度。这些点位于由 $n_n$ 个网格节点组成的计算域 $\Omega$ 中，如图4(a)所示。此外，狄利克雷边界条件施加于网格节点上，而载荷则施加于物质点上。

2. **物质点影响：** 每个物质点 $p$ 都会与一组网格节点相互作用，这些节点的广义插值物质点法基函数在其影响域内非零；该影响域由长度 $\boldsymbol{l}^p$ 定义，如图4(b)所示。

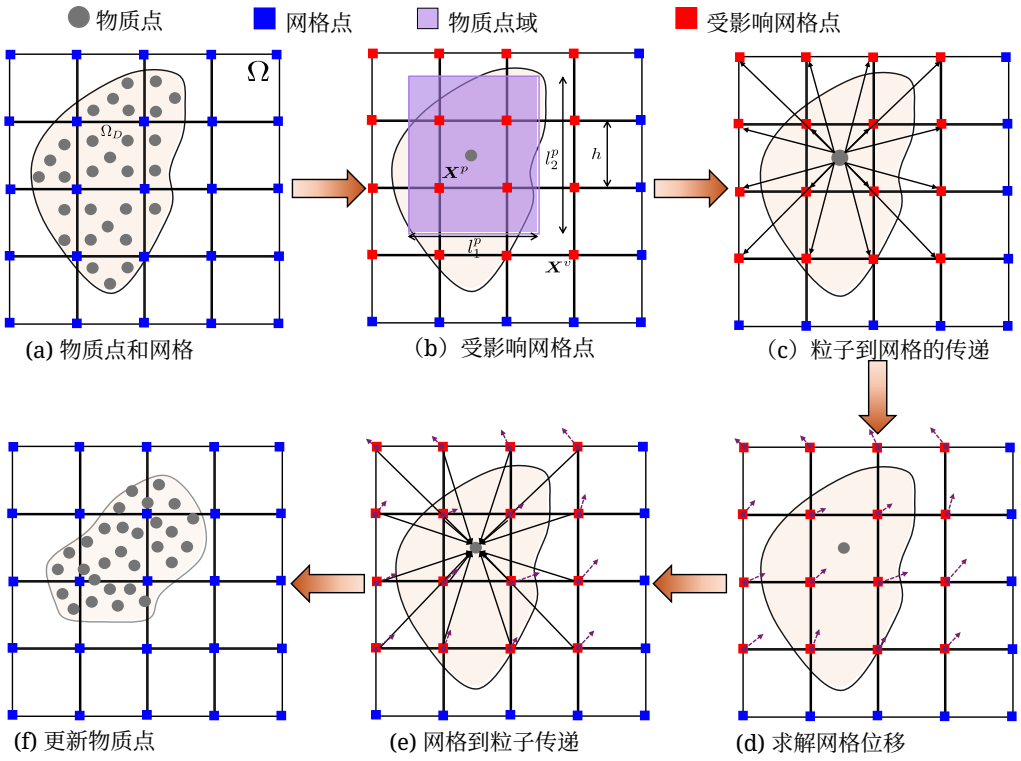



图4：基于广义插值物质点法（GIMP）的粒子-网格耦合与更新流程示意图。物质点以灰色圆表示，网格点以蓝色方形表示，代表性物质点的域以阴影区域表示。对于该物质点具有非零 GIMP 支持的网格点以红色突出显示。子图(a)–(f)总结了物质点法（MPM）的主要步骤：初始化、识别受影响网格点、粒子到网格传递、求解力平衡方程、网格到粒子传递，以及更新物质点。

物质点与网格节点之间的映射由乘积形式的 GIMP形函数 $S^{vp} = \prod S_i^{vp}$ 控制，其中一维因子定义见方程（1）。$i$

$$
S_i^{vp} = \begin{cases}
\dfrac{\left(h + \frac{l_i^p}{2} + X_i^p - X_i^v\right)^2}{2\,h\,l_i^p}, & -h - \frac{l_i^p}{2} < X_i^p - X_i^v \le -h + \frac{l_i^p}{2}, \quad \text{[A]} \\
1 + \dfrac{X_i^p - X_i^v}{h}, & -h + \frac{l_i^p}{2} < X_i^p - X_i^v \le -\frac{l_i^p}{2}, \quad \text{[B]} \\
1 - \dfrac{(X_i^p - X_i^v)^2 + \left(\frac{l_i^p}{2}\right)^2}{h\,l_i^p}, & -\frac{l_i^p}{2} < X_i^p - X_i^v \le \frac{l_i^p}{2}, \quad \text{[C]} \\
1 - \dfrac{X_i^p - X_i^v}{h}, & \frac{l_i^p}{2} < X_i^p - X_i^v \le h - \frac{l_i^p}{2}, \quad \text{[D]} \\
\dfrac{\left(h + \frac{l_i^p}{2} - X_i^p + X_i^v\right)^2}{2\,h\,l_i^p}, & h - \frac{l_i^p}{2} < X_i^p - X_i^v \le h + \frac{l_i^p}{2}. \quad \text{[E]}
\end{cases} \tag{1}
$$

其中， $h$表示网格单元尺寸， $X_i^p$ 表示物质点坐标， $X_i^v$表示沿维度 $i$的节点坐标。空间梯度 $\nabla_x S^{vp}$ 可通过对上式关于当前构形坐标 [21]求导，解析地获得。

图5展示了一维基函数，其中水平轴表示物质点 $\delta = X_i^p - X_i^v$ 的相对位置。图中所示的区域 [A]–[E] 分别对应方程（1）中的五种情况。在区域 [B] 和 [D], 中，广义插值基函数与传统有限元基函数一致，因为物质点域位于单个网格单元内。

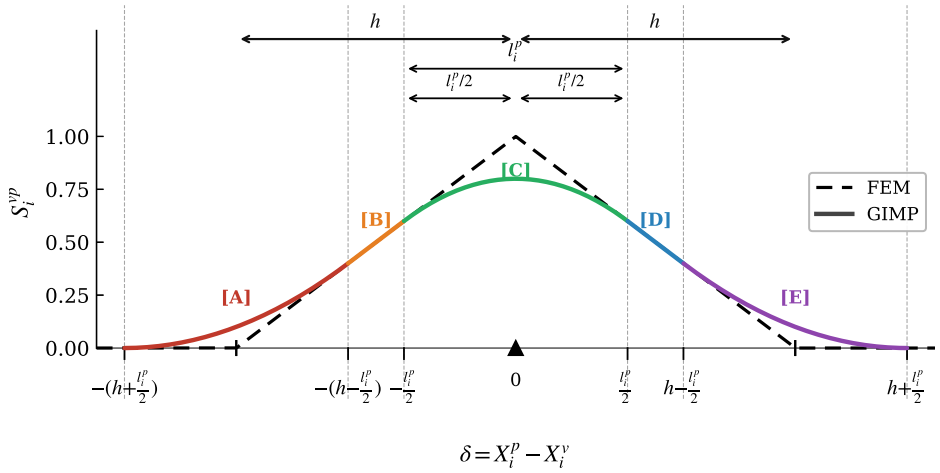



图5：一维广义插值物质点法基函数 $S_i^{vp}$ 与相对坐标 $\delta = X_i^p - X_i^v$的关系，并与传统有限元基函数进行比较。区域 [A]–[E] 对应方程（1）中的五种情况。

相比之下，在区域 [A], [C], 和 [E],中，物质点域跨越多个背景网格单元，因此基函数不同于传统有限元形式。

3. **物质点到网格的传递：**确定每个物质点影响的网格节点后，如图4(c)所示，将力贡献从物质点映射到网格上。具体而言，外部节点力使用 $S^{vp}$，由体力和指定的粒子载荷组装而成；内部节点力则根据第3.2节所述，利用形函数梯度和粒子应力状态进行组装。

4. **在网格上求解：**确定节点力向量并施加边界条件后，我们在网格上求解力平衡方程，以获得节点位移 $\mathbf{u}_v$（见图4(d)）。由于问题具有非线性，因此使用牛顿-拉夫森迭代法迭代求解力平衡方程（详情见第3.2节）。

5. **网格到粒子的传递：**获得网格解后，采用相同的广义插值物质点法形函数 $S^{vp}$ 将节点位移场插值回物质点，从而得到每个物质点的位移，如图4(e)所示。

6. **更新物质点：**根据更新后的物质点位移，更新所有物理状态变量：变形梯度、柯西应力、物质点体积、GIMP域半长以及物质点位置，如图4(f)所示。关键在于，存储在网格上的量会被重置，而物质点携带的更新状态变量则会被保留。对于高度非线性问题，将总施加载荷划分为若干增量，并对每个增量重复上述步骤。

### 3.2 控制方程与求解过程

在介绍了物质点法的数值过程后，现讨论控制方程。具体而言，为了捕捉大变形范围内的结构响应，我们采用了考虑几何非线性的框架。此外，我们采用超弹性材料模型来描述本构行为。

考虑一个占据计算域 Ω 的设计，如图 2 所示。准静态响应由力平衡方程控制：方程（2）：

$$R(\mathbf{u}) := \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad , \text{for } \mathbf{x} \in \Omega \tag{2}$$

其中，$\mathbf{u}$ 为位移场，$\boldsymbol{\sigma}$ 为柯西应力张量，$\rho$ 为材料密度，$\mathbf{b}$ 为单位质量体力。规定位移 $\bar{\mathbf{u}}$ 施加于网格节点上。此外，点载荷施加于指定位置的物质点上。本文不考虑牵引边界条件。在物质点法中施加这类边界条件并非易事，因为通常需要显式表示物理边界 [75]。因此，我们采用一种简化处理方式，仅考虑狄利克雷边界条件和点载荷。

我们采用更新拉格朗日框架来描述大变形运动学 [21]。变形由变形梯度$\mathbf{F}$表征，其定义如下：

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \tag{3}$$

其中， $X_i$ 和 $x_i$ 分别表示物质点 $p$ 在加载步开始时和变形构型中的坐标。对于本构响应，我们采用Hencky超弹性模型。弹性对数（亨基）应变 $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ 定义为：

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \frac{1}{2}\ln(\mathbf{B}), \quad \text{where} \quad \mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^\top \tag{4}$$

为左柯西-格林应变张量，$\ln(\cdot)$表示以 $e$为底的对数。Kirchhoff应力 $\boldsymbol{\tau}$ 由各向同性线弹性关系得到：

$$\boldsymbol{\tau} = \lambda\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^e)\,\mathbf{I} + 2\mu\,\boldsymbol{\varepsilon}^e. \tag{5}$$

其中， $\lambda$ 和 $\mu$ 为拉梅参数。此外，对于厚度相对于面内尺寸较小的结构，我们施加平面应力条件（$\sigma_{zz}=0$），由此得到：

$$\varepsilon^e_{zz} = -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}(\varepsilon^e_{xx} + \varepsilon^e_{yy}) \tag{6}$$

最后，通过 $\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J}\boldsymbol{\tau}$恢复柯西应力，其中 $J = \det(\mathbf{F})$ [76]。

基于既定的MPM数值过程（第3.1节），通过组装节点内力和外力向量，在网格上施加离散准静态力平衡。内力向量$\mathbf{f}_v^{\mathrm{int}}$由粒子应力贡献组装而成，其定义如下：

$$\mathbf{f}^{\mathrm{int}}_{v,p} = V_p\,(\nabla_x S^{vp})^\top\,\boldsymbol{\sigma}_p, \tag{7}$$

其中， $\nabla_x S^{vp}$ 表示 GIMP形函数（方程（1））的空间梯度， $\boldsymbol{\sigma}_p$ 表示物质点 $p$处的柯西应力， $V_p$ 表示当前构型下的物质点体积。

外力 ve ctor $\mathbf{f}_v^{\mathrm{ext}}$由粒子贡献组装而成，这些贡献来自体力和施加的点载荷 s, 其定义 如下：

$$\mathbf{f}^{\mathrm{ext}}_{v,p} = S^{vp}\,m_p\,\mathbf{b}_p + S^{vp}\,\mathbf{f}^{\mathrm{ext}}_p, \tag{8}$$

其中， $m_p = \rho V_p$ 表示物质点质量，$\mathbf{b}_p$ 表示在物质点 $p$处取值的单位质量体力，$\mathbf{f}_p^{\mathrm{ext}}$表示作用于物质点 $p$的外加点力。

结合公式（7）和公式（8），离散残差方程为：

$$\mathbf{R}(\mathbf{u}) = \mathbf{f}^{\mathrm{int}}(\mathbf{u}) - \mathbf{f}^{\mathrm{ext}} = \mathbf{0} \tag{9}$$

其中，$\mathbf{f}^{\mathrm{int}}$和$\mathbf{f}_{\mathrm{ext}}$表示通过组装所有网格节点 $v$ 的节点力贡献$\mathbf{f}_{\mathrm{int}v}\mathbf{f}_{\mathrm{ext}v}$得到的全局节点力向量。

由于几何非线性和材料非线性，公式（9）采用牛顿-拉夫森方法求解。在第 $k$次迭代中，位移修正量 $\delta\mathbf{u}^{(k)}$ 由下式求得：

$$\mathbf{K}^{(k)}\,\delta\mathbf{u}^{(k)} = -\mathbf{R}(\mathbf{u}^{(k)}), \tag{10}$$

随后更新位移$\mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{u}^{(k)} + \delta\mathbf{u}^{(k)}$，直至收敛。全局刚度矩阵$\mathbf{K}$ 定义如下：

$$\mathbf{K}^{(k)} = \left.\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\mathbf{u}^{(k)}} \tag{11}$$

我们没有针对有限应变运动学和 GIMP映射解析推导切线刚度矩阵，而是通过 JAX [33] 中的自动微分来计算。此外，这种端到端的可微性使得能够进行拓扑优化所需的灵敏度分析，详见第3.5节。

### 3.3 求解器验证

在详细介绍优化过程之前，我们先验证该方法的准确性及其实现。我们将隐式物质点法求解器的准确性与一个经典基准问题进行比较：弹性悬臂梁的大变形弯曲。该问题涉及有限转动和大应变，其程度与拓扑优化示例中遇到的情况相当。此外，该问题还有解析解。

该基准问题由一根长 $L = 10$ m、宽 $d_0 = 1$ m的悬臂梁组成，如图6(a)所示。左边缘施加滑动边界条件，梁的中点完全固定。在右边缘中点施加集中竖向力。梁发生大变形，端部位移接近梁长。 [77]推导了该问题的解析解。

为进行验证，采用以下材料属性对梁进行建模，使用Hencky超弹性模型：杨氏模量为 $E = 12$ MPa，泊松比为 $\nu = 0.2$。总计 $f_0 = 100$ kN的力分50个相等的加载步逐步施加。使用广义插值物质点法（GIMP）对该域进行离散，每个背景网格单元包含36个物质点。测试了两种网格分辨率： $h = 0.25$ m和 $h = 0.125$ m。

图 6(b) 展示了 $h = 0.125$ m 离散化在最后一个加载步时的变形构型。梁发生了显著弯曲，端部旋转角度接近 90 度。颜色等值图显示了柯西应力分量$\sigma_{yy}$，呈现出预期的弯曲分布：外侧区域受拉，内侧区域受压。

图 6(c) 将归一化力-位移响应与解析解进行了比较。图中绘出了水平（$u^*/L$）和垂直（$v^*/L$）端部位移随归一化施加力（$f/f_{\max}$）的变化关系。两种网格分辨率下的物质点法结果在整个加载范围内均与解析解高度吻合。两种离散化之间的差异可以忽略不计，表明网格已收敛。在最大载荷下，垂直端部位移达到约 $0.8L$，展现了该框架准确处理大变形的能力。

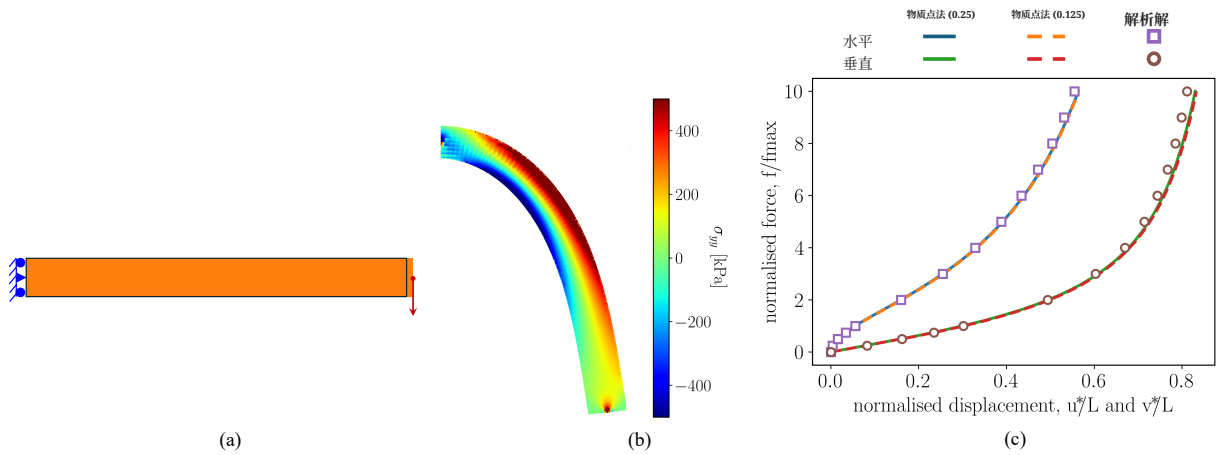



图 6：隐式物质点法框架在悬臂梁大变形弯曲问题中的验证。(a) 梁几何形状、边界条件和载荷。(b) $h = 0.125$ m 离散化在最后一个加载步时的变形构型，颜色表示柯西应力分量 $\sigma_{yy}$。(c) 归一化力-位移响应，对比两种网格分辨率下物质点法的预测结果与 [77] 的解析解。

### 3.4 拓扑优化

基于已建立并验证的基于广义插值物质点法的框架，我们现在对拓扑优化问题进行表述。目标是在 $\Omega_D$ 内，在给定目标函数和约束的条件下，寻找最优材料分布。在本文中，我们同时考虑单材料拓扑优化和多材料拓扑优化。首先，我们基于逐粒子伪密度进行单材料表述，这是将标准基于密度的拓扑优化直接扩展到物质点法设置中的最自然方式。随后，我们基于基于坐标的神经网络提出一种更为通用的多材料 formulation。以下各节将详细介绍所提出的方法。

### 3.4.1 单材料拓扑优化

对于单材料拓扑优化，我们采用逐粒子伪密度表示。该表述是将基于有限元的拓扑优化中所采用的标准逐单元密度方法自然扩展到物质点设置中的结果。

具体而言，我们为每个物质点 $p$ 指定一个伪密度 $\gamma_p \in [0,1]$，其中 $\gamma_p = 1$ 表示固体材料，$\gamma_p = 0$ 表示空洞。优化过程中允许出现中间值，以便进行基于梯度的优化。请注意，与设计变量关联到网格单元的传统有限元法表述不同，这里的设计变量直接由物质点携带。因此，在更新拉格朗日物质点法求解过程中，材料分布会随拉格朗日粒子一同传输。

### 3.4.2 多材料拓扑优化

许多应用需要使用不止一种材料。例如，软体机器人夹爪必须兼顾柔顺性与结构刚度，因此需要设计具有空间变化刚度的结构。原则上，逐粒子伪密度表述可以扩展至多材料拓扑优化，但我们转而采用基于坐标的神经网络表示。该表示将单材料情形纳入为一种特例，但此处引入它是为了进行多材料设计，原因是它具有下文将讨论的优势。

多材料设计要求指定每个位置所对应的材料。为此，令 $S$ 表示预先指定的材料种类数。然后，在每个点 $\boldsymbol{x}$ 处，我们定义体积分数 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = [v_1, \ldots, v_S]$，其中

$$\sum_{s=1}^{S} v_s(\boldsymbol{x}) = 1 \text{ and } v_s(\boldsymbol{x}) \geq 0 \; ; \; \forall \boldsymbol{x}.$$

采用 [31], ，我们使用神经网络（NN） $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{w})$对该场进行参数化，其中 $\boldsymbol{w}$ 表示 NN 的权重。NN 将设计域中的空间坐标映射为体积分数（图 7）。与传统方法相比，这种表示具有三个主要优点；传统方法中，设计变量与仿真离散化（在本例中为物质点）显式绑定：

- 网络架构通过其输出激活函数，天然满足单位分解约束。
- 设计与背景网格解耦，因此可以采用一组紧凑的设计变量，而不受仿真分辨率影响。
- 材料场在所有位置均有解析定义，便于恢复清晰的高分辨率拓扑结构。

如图 7 所示，所提出的网络架构由以下组件构成：

1. **输入层：** 空间坐标 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ （$d = 2$ 维）作为输入在网络中传递。2. **傅里叶投影：** 使用傅里叶投影层将欧几里得坐标映射到更高维的特征空间，以减轻标准多层感知机的谱偏差，并表示高频拓扑特征 [78]。该投影有助于加快收敛，使网络能够捕捉精细的结构细节，避免这些细节被平滑掉。3. **隐藏层：** 特征向量经过一系列使用 ReLU 激活函数的全连接隐藏层（两层，每层包含 40 个神经元） [79]。4. **输出层：** 最后一层由 $S$ 个神经元组成，分别对应 $S$ 种材料的体积分数。$s$输出采用 Softmax 激活函数，从而自然满足 $\sum v_s = 1$ 和 $0 \leq v_s \leq 1$。$s=1$

该网络的可训练权重和偏置 $\boldsymbol{w}$ 构成优化过程的主要设计变量。此外，权重 $\boldsymbol{w}$ 通过 Xavier 正态初始化方法进行初始化 [80]。网络初始化后会生成一个在所有相中空间均匀分布的体积分数场。

### 3.4.3 材料模型

介绍完设计表示后，接下来详细说明材料属性的插值。具体而言，我们对拉梅参数采用标准的带惩罚的实体各向同性材料（SIMP） [81] 方案。给定 $S$ 种可用材料的拉梅参数 $\lambda_1, \ldots, \lambda_S, \mu_1, \ldots, \mu_S$，有效拉梅参数 $\lambda_p$, $\mu_p$ 可按如下方式得到：

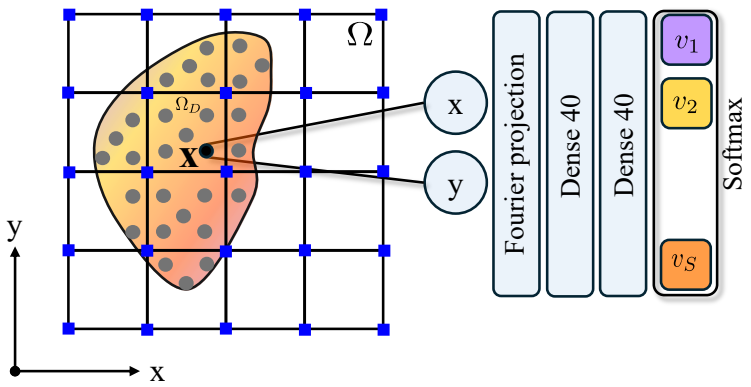



图 7：用于多材料拓扑优化的基于坐标的神经网络。该网络将设计域中的空间坐标映射为材料体积分数。

$$\lambda_p = \sum_{s=1}^{S} (v_{s,p})^q \lambda_s, \quad \mu_p = \sum_{s=1}^{S} (v_{s,p})^q \mu_s \tag{12}$$

此外，我们采用标准的延续方案 [82] 处理惩罚参数 $q$。对于单材料设计，方程（12）可简化为：

$$\lambda_p = \gamma_p^q \lambda_0, \quad \mu_p = \gamma_p^q \mu_0 \tag{13}$$

此外，多材料 formulation 中的质量密度采用线性插值，如下所示：

$$\rho_p = \sum_{s=1}^{S} v_{s,p} \rho_s \tag{14}$$

对于单材料表述，这可简化为 $\rho_p = \gamma_p \rho$。

### 3.4.4 设计目标

获得插值后的材料属性后，接下来讨论设计目标函数。在示例中，我们考虑两种表述，即最小化柔顺度和设计柔顺机构。

**柔顺度：**我们通过最小化结构柔顺度来设计承载结构：

$$J_c = \mathbf{f}^{\text{ext}\top} \mathbf{u}^* \tag{15}$$

其中 $\mathbf{f}^{\text{ext}}$ 为外力，$\mathbf{u}^*$ 为收敛的物质点位移。

**柔顺机构：** 我们还考虑柔顺软体机器人夹爪的设计。此处的目标是最大化从输入到输出的运动传递。换言之，输入驱动（例如气压）必须在输出端口产生所需的抓取运动。同时，机构必须保持足够的刚度，以便抓取物体而不产生过度的内部变形。我们通过互应变能（MSE）与输入（$\text{SE}_{\text{in}}$）和输出（$\text{SE}_{\text{out}}$）应变能之和的比值来量化这种权衡 [83]:

$$J_m = -\frac{\text{MSE}}{\text{SE}_{\text{in}} + \text{SE}_{\text{out}}} = -\frac{\mathbf{f}_{in}^{\text{ext}\top} \mathbf{v}^*}{\mathbf{f}_{in}^{\text{ext}\top} \mathbf{u}^* + \mathbf{f}_{out}^{\text{ext}\top} \mathbf{v}^*} \tag{16}$$

此处，$\mathbf{u}^*$ 是在实际输入载荷 $\mathbf{f}_{in}^{\text{ext}}$作用下的位移场，而 $\mathbf{v}^*$ 是在输出端口沿所需驱动方向施加伪载荷 $\mathbf{f}_{out}^{\text{ext}}$ 时的位移场。

### 3.4.5 约束

为确保设计经济高效，我们对材料用量施加约束。

**体积约束：**对于单材料设计，我们施加标准体积约束 a s:

$$g_v \equiv \frac{1}{V^*}\sum_{p=1}^{n_p} V_p^0 \gamma_p - 1 \leq 0 \tag{17}$$

其中， $V_p^0$是粒子 $p$ 的参考体积， $V^*$ 是规定体积上限。

**质量约束：**对于多材料设计，我们施加质量约束:

$$g_m \equiv \frac{1}{M^*}\sum_{p=1}^{n_p} V_p^0 \rho_p(\boldsymbol{v}_p) - 1 \leq 0 \tag{18}$$

其中， $\rho_p$ 是由公式 (14) 得到的插值密度， $M^*$ 是允许质量。

### 3.5 灵敏度分析

基于梯度的拓扑优化中的关键步骤是计算灵敏度，即目标函数和约束相对于设计变量的导数。本研究中的灵敏度分析尤其复杂，因为必须考虑采用大应变运动学的非线性超弹性，以及集成了物质点法求解器和基于坐标的神经网络的计算流程。

为应对这一复杂性，我们利用 JAX 框架的自动微分（AD）能力，构建了端到端可微分的计算流程。这样便无需手动推导灵敏度表达式，避免了这一过程既繁琐又容易出错的问题。通过在 JAX 中实现整个正向分析，从神经网络设计映射到非线性物质点法求解器，该框架可利用反向模式自动微分，以机器精度计算所需导数。

我们强调结构仿真中固有的三项挑战。第一项源于在每个加载步中使用牛顿-拉夫逊法等迭代方案求解非线性控制方程。直接应用自动微分（AD）会在求解器的每次迭代中展开导数计算，并通过链式法则计算总导数:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}^{(K)}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}} = \frac{\partial \mathbf{u}^{(K)}}{\partial \mathbf{u}^{(K-1)}} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^{(K-1)}}{\partial \mathbf{u}^{(K-2)}} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^{(1)}}{\partial \mathbf{u}^{(0)}} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^{(0)}}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \tag{19}$$

这种方法计算开销大、内存需求高，且两者都随迭代次数 $K$ 增长。为克服这一低效问题，我们应用隐函数定理（IFT） [84]。由于残差在收敛时为零，$\mathbf{R}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{u}^{(K)}) = \mathbf{0}$，且切线刚度 $\mathbf{K} = \partial\mathbf{R}/\partial\mathbf{u}$ 可逆，因此导数可直接得出:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}^{(K)}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}} = -\mathbf{K}^{-1}\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \tag{20}$$

这使我们能够直接根据最终收敛解计算导数，无需沿求解历史进行反向传播。

第二项挑战源于仿真的增量特性，这给伴随灵敏度法带来了显著的内存瓶颈。计算依赖历史的目标函数的梯度，需要访问所有先前加载步中的结构状态；对于较长的加载序列，通常难以存储完整的构型历史。我们采用检查点方案 [85, 86] 来缓解这一问题。该技术在选定的增量处存储系统状态，并在反向传播过程中即时重新计算中间构型。这种方法以适度增加计算时间为代价，降低了内存需求，使大规模非线性问题的优化成为可能。

第三个挑战来自对超弹性本构模型进行求导。亨基应变（公式 (4)）需要对 $\mathbf{B}$ 求矩阵对数。设特征分解为:

$$\mathbf{B} = \mathbf{Q}\,\mathrm{diag}(\boldsymbol{\Lambda})\,\mathbf{Q}^\top \tag{21}$$

其中，$\mathbf{Q}$ 的列向量为特征向量， $\boldsymbol{\Lambda} = [\Lambda_1, \ldots, \Lambda_d]^\top$ 为特征值。根据谱映射，矩阵对数可写为:

$$\ln(\mathbf{B}) = \mathbf{Q}\,\mathrm{diag}(\ln \boldsymbol{\Lambda})\,\mathbf{Q}^\top \tag{22}$$

对该运算求导需要计算矩阵对数的弗雷歇导数。根据达列茨基–克雷因公式[87]，沿$\mathbf{E}$方向的方向导数为：

$$\mathrm{d}\ln(\mathbf{B})[\mathbf{E}] = \mathbf{Q}\left(\mathbf{L}\odot\left(\mathbf{Q}^{\top}\mathbf{E}\,\mathbf{Q}\right)\right)\mathbf{Q}^{\top} \tag{23}$$

其中 $\odot$ 表示 Hadamard（逐元素）乘积，$\mathbf{L}$是 Loewner矩阵，其条目 s:

$$L_{ij} = \begin{cases} \dfrac{\ln\Lambda_i - \ln\Lambda_j}{\Lambda_i - \Lambda_j}, & i \neq j \\ \dfrac{1}{\Lambda_i}, & i = j \end{cases} \tag{24}$$

当 $\Lambda_i \approx \Lambda_j$时，非对角项会变得病态。在小应变的大转动情况下，$\mathbf{B}$ 的特征值聚集在单位值附近，从而触发这种奇异性。当 $|\Lambda_i - \Lambda_j| < \epsilon$时，我们通过切换到对角形式$L_{ij} = 1/\Lambda_i$ 进行正则化（在我们的实验中为 $\epsilon = 10^{-12}$）；当 $\Lambda_j \to \Lambda_i$时，该形式对应于极限值。

### 3.6 算法

下面总结了该优化框架，其将可微MPM求解器与基于梯度的优化器相结合。

1. 离散化：将计算域 $\Omega$ 离散为固定的欧拉网格，并将设计域 $\Omega_D$ 离散为一组拉格朗日物质点。网格为力平衡方程的求解提供计算网格。物质点作为应力积分的求积点，并存储设计场。2. 初始化：为每个粒子分配初始体积 $V_p^0$、质量 $m_p = \rho V_p^0$和单位变形梯度。对于单材料设计，将伪密度均匀初始化为 $\gamma_p = V^*$。此外，对于多材料设计，通过 Xavier正态初始化对网络权重 $\boldsymbol{w}$ 进行初始化，从而产生均匀的体积分数 $v_s = 1/S$。3. 边界条件：狄利克雷条件在 $\Gamma_d$上规定节点位移。通过作用于物质点的 $\mathbf{f}_p^{\mathrm{ext}}$ 施加点载荷。4. 优化循环：每次迭代的具体步骤如下：(a) 设计到物理映射：对于伪密度，根据公式（13）计算 $\lambda_p$ 和 $\mu_p$。对于神经网络，评估 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}_p;\boldsymbol{w})$，并根据公式（12）和（14）计算属性。(b) 正向求解。在每个加载步中，通过牛顿–拉夫森方法求解 $\mathrm{R} = \mathbf{0}$，直到 $\|\mathrm{R}\| < \epsilon_{\mathrm{NR}}$。更新粒子状态：位置 $\boldsymbol{x}_p$、变形梯度、应力 $\boldsymbol{\sigma}_p$ 和体积 $V_p$。(c) 目标与约束评估：根据收敛构型计算 $J_c$ 或 $J_m$ 以及 $g_v$ 或 $g_m$。(d) 灵敏度分析：反向模式自动微分将梯度从目标函数传播至设计变量。隐函数定理避免了展开牛顿迭代。检查点技术管理跨加载步的内存。(e) 设计更新：对于伪密度，使用移动渐近线法（MMA） [88] 或最优性准则更新 $\gamma_p$。对于神经网络，通过 ADAM [89]更新权重 $\boldsymbol{w}$。(f) 延拓方案：将 SIMP指数 $q$ 逐步增大至其目标值。(g) 收敛检查：如果 $|(\Delta J_m/J_m)$或 $(\Delta J_c/J_c)| < \epsilon_{\mathrm{opt}}$，或者达到最大迭代次数，则终止。

## 4 数值实验

本节通过数值实验展示所提出的框架。所有模拟均使用 Apple MacBook M4 Pro，通过 JAX库 [33]执行。除非另有说明，默认参数如下：

- **网格：** 计算域采用结构化背景网格进行离散。各示例的域尺寸（$\Omega$ 和 $\Omega_D$）及分辨率各不相同，并在相应小节中说明。
- **物质点：** 在二维情形下，我们为每个空间维度的每个单元分配四个物质点，因此每个单元共包含 16 个物质点。

- **神经网络：** 对于基于神经网络的优化问题，拓扑通过一个包含 100 项傅里叶投影层和两个各含 40 个神经元的隐藏层的网络进行参数化，并使用 softmaxoutput 激活函数。

• **SIMP延续法：** 惩罚指数 $q$ 初始值为 1，并在每次迭代中递增 $5 \times 10^{-2}$，最高达到 5。

• **牛顿-拉夫森求解器：** 对于牛顿-拉夫森求解器，我们采用收敛容差 $\epsilon_{\mathrm{NR}} = 10^{-7}$、最多 50 次迭代以及回溯线搜索（Armijo参数 $c = 10^{-4}$）[90, 91]。

• **优化器：** 对于单材料问题，我们采用移动渐近线法（MMA） [88]，移动限值为 $10^{-2}$。对于多材料问题，我们使用 ADAM [89] 优化器，学习率为$10^{-2}$。

• **约束处理：** 对于单材料问题，约束直接在 MMA 中施加。对于多材料神经网络问题，我们使用对数障碍惩罚（[92]）构建约束优化问题，采用初始参数 $\tau_0 = 3$ 和增长因子 $\mu = 1.02$ 。

• **收敛：** 当相对目标变化 $|(\Delta J_m/J_m)$ 或 $(\Delta J_c/J_c)| < 10^{-4}$达到条件时，优化终止；若未达到，则在达到每个示例指定的最大迭代次数后终止。

表 1：单材料示例的材料属性。

| 参数 | 数值 |
|---|---|
| 拉梅第一参数 $\lambda_0$ | $4.3 \times 10^9$ |
| 拉梅第二参数 $\mu_0$ | $1.1 \times 10^9$ |
| 质量密度 $\rho$ | 1600 kg/m$^3$ |
| 厚度 $t$ | 1.0 毫米 |

### 4.1 验证

我们首先通过对悬臂梁进行拓扑优化，验证所提出的框架。问题设置如图 8 所示。这里，我们考虑一个包含 $80 \times 40$ 个单元的网格（$\Omega$）。此外，我们考虑一个尺寸为 $0.12 \times 0.03\,\mathrm{m}$、占据 $54 \times 27$ 个网格单元的矩形设计域（$\Omega_D$）。另外，在网格单元上施加左边缘固定的狄利克雷条件，同时在设计域右侧边缘中点处的一个物质点上施加向下力 $f$。体积分数约束设为 0.5（对应允许质量为 $2.88 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg}$），以占总体积 $\Omega_D$ 的 0.5。

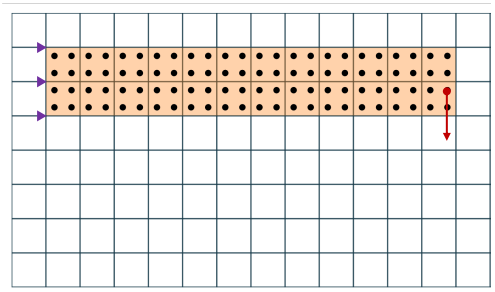


图 8：表示　　展示边界条件、网格和物质点的域离散化，用于　　a 中部悬臂梁。

图 9 展示了载荷幅值逐渐增大时的优化拓扑结构：$f = 0.1$、0.25 和 0.5 kN。在最小载荷下，拓扑结构关于水平中面对称（图 9(a)）。这与通过线性建模得到的解相似。随着载荷增大，优化设计变得越来越不对称（图 9(b–c)）。梁的右侧出现了一个受拉构件。随着载荷增大，该构件的长度和宽度均随之增加。该受拉构件的出现，反映了几何非线性在大挠度下的主导作用。发生显著变形后，受拉构件提供了最直接的载荷传递路径。随着非线性效应增强，该构件成为主要的承载构件。最终的优化拓扑结构与现有研究报告的解一致 [24]。

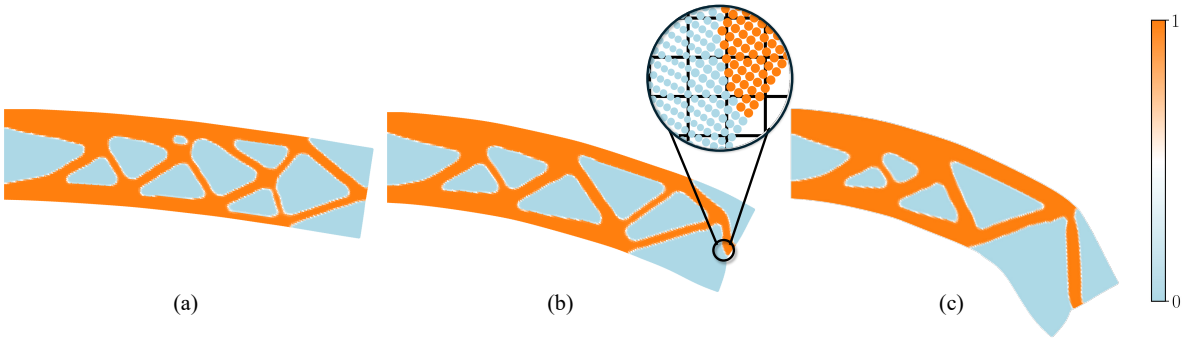



图 9：递增加载下的优化设计及其对应的变形构型：(a)（$f = 0.1$kN $J_c$ =1.3），(b)（$f = 0.25$ kN $J_c = 7.6$），以及 (c)（$f = 0.5$kN $J_c = 24.9$）。

图 10 展示了 $f = 0.25$ kN 工况下的收敛历史。目标函数（柔顺度）和约束（体积分数）均呈现稳定收敛。优化耗时 4 分钟 36 秒完成。其他实验也观察到了类似的收敛行为。

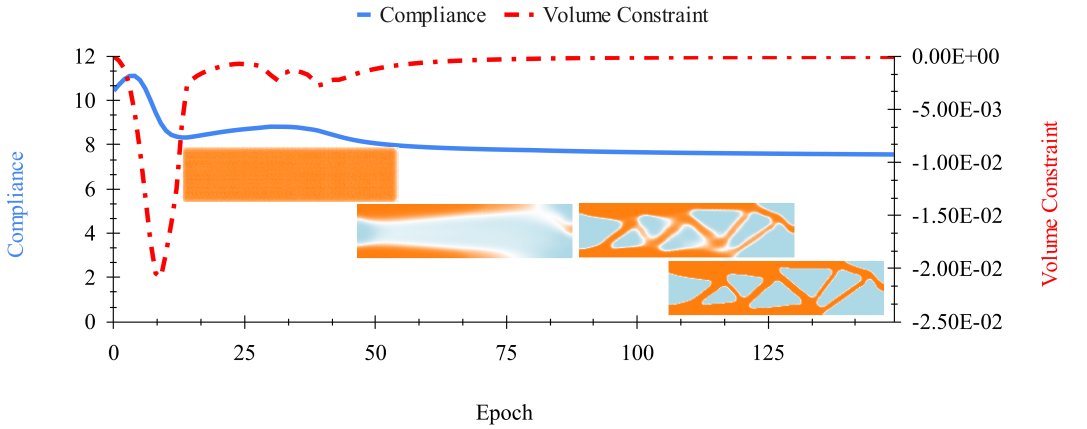



图10：规定载荷为 0.25 kN 时目标函数和约束的收敛情况。

### 4.2 多材料设计的柔顺度最小化

现在，我们将悬臂梁基准问题扩展到多种材料。问题设置保持不变。如（表2）所示，采用了三种具有不同拉梅参数和质量密度的材料（外加空洞）。施加了$M^* = 2.88 \times 10^{-3}$ kg 的质量约束。

Tabl例子的材料属性

| 材料 | 颜色 | $\lambda$ (GPa) | $\mu$ (GPa) | $\rho$ (kg/m$^3$) |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 紫色 | 17.1 | 4.3 | 4000 |
| 2 | 黄色 | 4.3 | 1.1 | 1600 |
| 3 | 橙色 | 1.4 | 0.35 | 750 |
| 4 | 白色（空洞） | $1.4 \times 10^{-4}$ | $3.5 \times 10^{-5}$ | $10^{-1}$ |

图11展示了各载荷工况下优化后的多材料设计。与相应的单材料设计相比，由于多材料提供了额外的设计自由度，多材料 formulation 在相同允许质量下实现了更低的柔顺度。此外，图12展示了 $f = 0.25$ kN 工况下的收敛历史。目标函数（柔顺度）和约束（质量约束）均表现出稳定收敛。

优化耗时 5 分钟 12 秒。其他实验也观察到了类似的收敛行为。

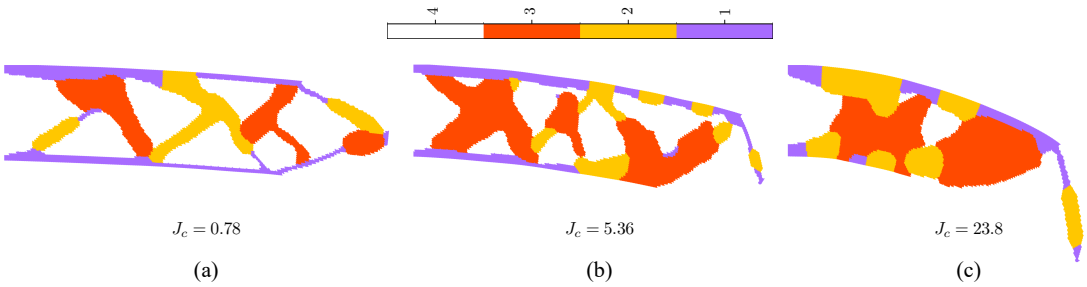



图11：采用多材料拓扑优化得到的、适用于递增加载的优化设计：(a)（$f = 0.1$kN $J_c$ =0.78），(b)（$f = 0.25$kN $J_c = 5.36$），(c)（$f = 0.5$ kN $J_c = 23.8$）。

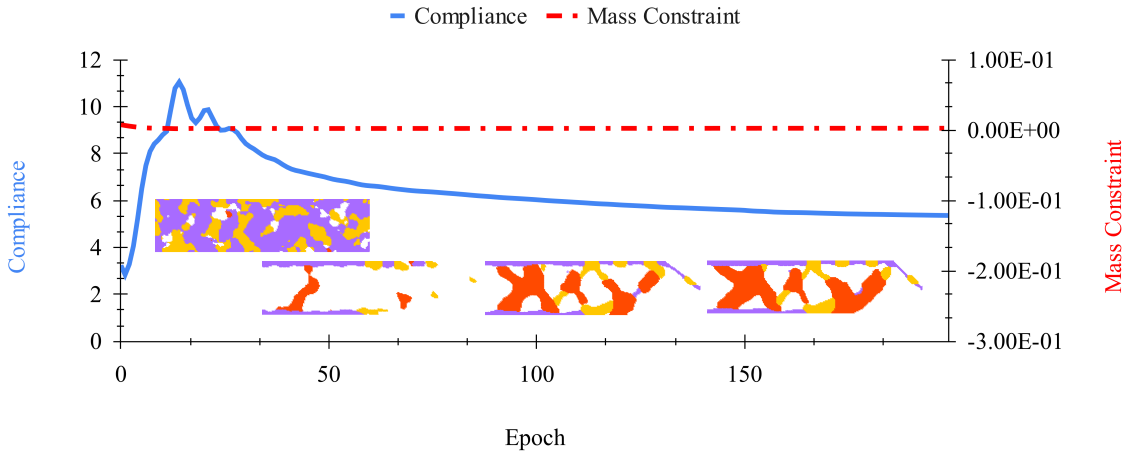



图12：收敛　对于规定载荷 0.25 k，多材料拓扑优化的目标函数和约束的收敛情况　N.

### 4.3 夹爪设计

软体机器人夹爪的设计需要兼顾抓取所需的柔顺性和承载所需的刚度。我们利用表2中列出的材料属性，通过柔顺夹爪的设计 [93], 展示了所提出的框架。

图13(a)展示了设计域和边界条件。该域为一个梯形，水平跨度为160 mm，高度为70 mm。尺寸为 $90 \times 1.75$ mm的实心非设计区域沿底边延伸；该区域代表与被抓取物体相互作用的接触表面。右上角受到输入力 $f_{\text{in}}$，而靠近输出端口的底边由固定支撑约束。目标是在规定输入下，最大化接触表面左角处的输出位移 $f_{\text{out}}$。

图13(b)展示了　优化后的拓扑，而图13(c)展示了施加载荷下的组装构型　.

## 5 结论

本文提出了 MOTO，这是一种基于物质点法（MPM）的拓扑优化（TO）框架，用于设计承受准静态大变形的结构。具体而言，我们采用 MPM 的隐式广义插值物质点（GIMP）变体，以解决传统拉格朗日有限元方法固有的网格畸变问题。我们引入了 Hencky 超弹性本构模型，以捕捉结构在有限应变范围内的响应。此外，我们利用了以 JAX 实现的端到端可微分流程，

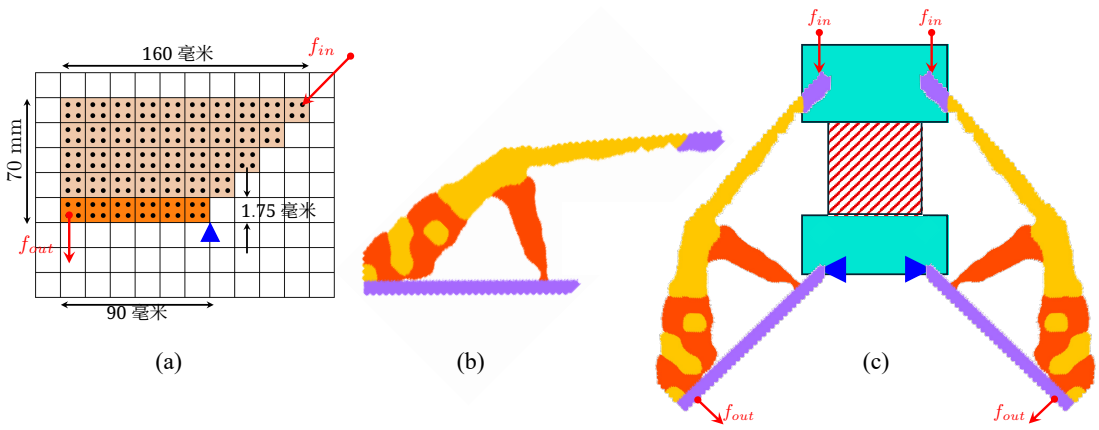



图 13：柔顺夹爪的设计。(a) 单个夹爪的代表性设计域、非设计接触区域、边界条件和输入/输出端口。(b) 使用所提出的框架得到的优化夹爪拓扑。(c) 施加输入力 $f_{\text{in}}$ 后组装好的夹爪构型。

以自动计算灵敏度。我们提出了一种优化框架，支持单材料伪密度和多材料坐标神经网络这两种设计表示。我们通过验证研究以及柔顺机构的设计，具体而言是软体机器人夹爪的设计，展示了该框架的有效性。

本研究为未来研究提供了若干方向。首先，当前形式仅针对超弹性材料。然而，许多工程应用涉及发生大塑性变形的结构，例如吸能装置。将该框架扩展至弹塑性情形具有重要意义。其次，尽管我们考虑了柔顺度和柔顺机构设计，但在大变形物质点法的背景下引入应力约束，对于防止材料失效至关重要。第三，未来工作应致力于将软体机器人系统扩展至设计与驱动耦合，并针对动态轨迹进行优化。第四，将该框架扩展至三维构型是实现实际应用的必要条件。这需要利用高效的 GPU 加速实现，例如 [94]，以应对计算需求。第五，鉴于物质点法能够自然地处理接触，将该框架扩展至接触结构设计，例如 [95]，是一个值得探索的方向。第六，研究如何在基于物质点的设计表示中施加制造约束，是未来必须迈出的一步。第七，物质点法的拉格朗日-欧拉混合形式非常适用于涉及大幅拓扑变化的问题，包括裂纹萌生与扩展、动态断裂 [96, 97], 以及冲击驱动碎裂 [68],，因此是未来拓扑优化研究的一个有前景的方向。最后，通过制造并测试软体机器人原型，对优化设计进行实验验证也很有意义。

## 遵守伦理标准

作者声明不存在任何利益冲突。

## 结果复现

Python 源代码可在 GitHub 公共代码库 github.com/UW-ERSL/MOTO 中获取。该实现也作为补充材料随期刊发表的版本一并提供。

## 参考文献

[1] Martin Philip Bendsoe 和 Ole Sigmund。《拓扑优化：理论、方法与应用》。施普林格科学与商业媒体，2013年。[2] Ole Sigmund 和 Kurt Maute。拓扑优化方法：比较综述。《结构与多学科优化》，48(6):1031–1055，2013年。

[3] Ole Sigmund。用 MATLAB 编写的 99 行拓扑优化代码。《结构与多学科优化》，21(2):120–127，2001年。[4] Jikai Liu、Andrew T Gaynor、Shikui Chen、Zhan Kang、Krishnan Suresh、Akihiro Takezawa、Lei Li、Junji Kato、Jinyuan Tang、Charlie CL Wang 等。面向增材制造的拓扑优化当前与未来趋势。《结构与多学科优化》，57(6):2457–2483，2018年。[5] Chao Wang、Zhi Zhao、Ming Zhou、Ole Sigmund 和 Xiaojia Shelly Zhang。结构与多学科优化教育类文章综合综述。《结构与多学科优化》，64(5):2827–2880，2021年。[6] Joshua D Deaton 和 Ramana V Grandhi。结构与多学科连续体拓扑优化综述：2000年以后。《结构与多学科优化》，49(1):1–38，2014年。[7] Fabian Wein、Peter D Dunning 和 Julián A Norato。结构优化特征映射方法综述。《结构与多学科优化》，62(4):1597–1638，2020年。[8] George B Crowley、Xianpai Zeng 和 Hai-Jun Su。一种采用新型正压层压卡滞技术实现可变刚度的 3D 打印软体机器人夹爪。IEEE机器人与自动化快报，7(2):5477–5482，2022年。[9] Jiao Jia、Daicong Da、Jianxing Hu 和 Sha Yin。利用拓扑优化设计周期性胞状结构的耐撞性。《复合材料结构》，271:114164，2021年。[10] Hao Deng、Lin Cheng、Xuan Liang、Devlin Hayduke 和 Albert C To。通过突跳行为进行晶格结构能量耗散设计的拓扑优化。《计算力学与工程方法》，358:112641，2020年。[11] Oliver Giraldo-Londoño、Rogelio A Muñetón-López、Paul L Barclay、Xiatian Zhuang、Duan Z Zhang 和 Zhen Chen。利用物质点法（MPM）设计工程晶格结构。《计算机辅助工程》，页码1–19，2025年。[12] Yunfeng Luo、Shiyuan Qu、Shutian Liu 和 YongAn Huang。可拉伸电子互连结构的非线性机电拓扑优化方法。《计算机辅助工程》，41(1):117–133，2025年。[13] Hiroki Kobayashi、Farzad Gholami、S Macrae Montgomery、Masato Tanaka、Liang Yue、Changyoung Yuhn、Yuki Sato、Atsushi Kawamoto、H Jerry Qi 和 Tsuyoshi Nomura。通过拓扑优化计算合成运动型软体机器人。《科学进展》，10(30):eadn6129，2024年。[14] Nam-Sua Lee 和 Klaus-Jurgen Bathe。单元畸变对等参单元性能的影响。《国际工程数值方法杂志》，36(20):3553–3576，1993年。[15] Bhagyashree Prabhune 和 Krishnan Suresh。一种计算高效的等参缠结有限元法，用于处理反转四边形和六面体单元。《计算力学与工程方法》，405:115897，2023年。[16] Bhagyashree Prabhune 和 Krishnan Suresh。一种等参缠结有限元法，用于处理具有负雅可比行列式的高阶单元。《计算力学》，73(1):159–176，2024年。[17] Josh Danczyk 和 Krishnan Suresh。缠结单纯形网格上的有限元分析：理论与实现。《分析与设计中的有限元》，70:57–67，2013年。[18] M Cervera、M Chiumenti 和 R Codina。利用连续线性应变与位移插值对裂纹进行网格客观建模。《国际工程数值方法杂志》，87(10):962–987，2011年。[19] L Mishnaevsky Jr、N Lippmann 和 S Schmauder。钢的真实微观结构中裂纹扩展的计算建模，以及人工设计材料的虚拟测试。《国际断裂杂志》，120(4):581–600，2003年。[20] Deborah Sulsky、Zhen Chen 和 Howard L Schreyer。用于历史相关材料的粒子法。《计算力学与工程方法》，118(1-2):179–196，1994年。[21] William M Coombs 和 Charles E Augarde。Ample：物质点学习环境。《工程软件进展》，139:102748，2020年。[22] YP Lian、X Zhang 和 Y Liu。通过局部多网格接触法耦合有限元法与物质点法。《计算力学与工程方法》，200(47-48):3482–3494，2011年。[23] Zdzisław Wi.eckowski。大应变工程问题中的物质点法。《计算力学与工程方法》，193(39-41):4417–4438，2004年。

[24] Fengwen Wang、Boyan Stefanov Lazarov、Ole Sigmund 和 Jakob Søndergaard Jensen。虚拟域技术与有限应变弹性问题拓扑优化的插值方案。《计算力学与工程方法》，276：453–472，2014年。[25] Yuanming Hu、Yu Fang、Ziheng Ge、Ziyin Qu、Yixin Zhu、Andre Pradhana 和 Chenfanfu Jiang。具有位移间断和双向刚体耦合的移动最小二乘物质点法。《ACM图形学汇刊》（TOG），37(4)：1–14，2018年。[26] Changyoung Yuhn、Yuki Sato、Hiroki Kobayashi、Atsushi Kawamoto 和 Tsuyoshi Nomura。四维拓扑优化：面向动态运动的软体结构与自驱动一体化优化。《计算力学与工程方法》，414：116187，2023年。[27] Yuki Sato、Hiroki Kobayashi、Changyoung Yuhn、Atsushi Kawamoto、Tsuyoshi Nomura 和 Noboru Kikuchi。使用物质点法对运动软体进行拓扑优化。arXiv预印本 arXiv:2203.16793，2022年。[28] TJ Charlton、WM Coombs 和 CE Augarde。igimp：一种用于大变形的隐式广义插值物质点法。《计算机与结构》，190：108–125，2017年。[29] Alireza Sadeghirad、Rebecca M Brannon 和 Jeff Burghardt。对流粒子域插值技术：扩展物质点法在涉及大变形问题中的适用性。《国际工程数值方法杂志》，86(12)：1435–1456，2011年。[30] Sanghyeon Park、Byeonghyeon Goh 和 Hayoung Chung。结合物质点法的拓扑优化：设计灵敏度与形函数影响研究。《计算机辅助工程》，页码1–18，2025年。[31] Aaditya Chandrasekhar 和 Krishnan Suresh。使用神经网络进行多材料拓扑优化。《计算机辅助设计》，136：103017，2021年。[32] Rahul Kumar Padhy、Krishnan Suresh 和 Aaditya Chandrasekhar。Toflux：面向多物理场流体问题的可微拓扑优化框架。arXiv预印本 arXiv:2508.17564，2025年。[33] James Bradbury、Roy Frostig、Peter Hawkins、Matthew James Johnson、Chris Leary、Dougal Maclaurin、George Necula、Adam Paszke、Jake VanderPlas、Skye Wanderman-Milne 和 Qiao Zhang。JAX：可组合的 Python+NumPy 程序变换，2018年。[34] Martin Philip Bendsøe 和 Noboru Kikuchi。使用均匀化方法生成结构设计中的最优拓扑。《计算力学与工程方法》，71(2)：197–224，1988年。[35] Joe Alexandersen 和 Casper Schousboe Andreasen。基于流体的问题的拓扑优化综述。《流体》，5(1)：29，2020年。[36] Rahul Kumar Padhy 和 Aaditya Chandrasekhar。Photos：使用形状库对光子元件进行拓扑优化。《计算机辅助工程》，41(2)：1141–1153，2025年。[37] Rahul Kumar Padhy、Krishnan Suresh 和 Aaditya Chandrasekhar。To matoes：潜热储热装置的拓扑与材料优化。《应用能源》，406：127322，2026年。[38] Rahul Kumar Padhy、Aaditya Chandrasekhar 和 Krishnan Suresh。Fluto：使用神经网络对大接触面积流体装置进行梯度多尺度拓扑优化。《计算机辅助工程》，40(2)：971–987，2024年。[39] Anna Dalklint、Mathias Wallin 和 Daniel Tortorelli。可充气软体机器人的形状与拓扑同步优化。《计算力学与工程方法》，420：116751，2024年。[40] Kai A James 和 Haim Waisman。使用拓扑优化设计双稳态心血管支架的布局。《计算力学与工程方法》，305：869–890，2016年。[41] Huipeng Xue、Zhen Luo、Terry Bro wn 和 Susann Beier。使用拓扑优化设计自膨胀负泊松比支架。《生物工程与生物技术前沿》，8：736，2020年。[42] Fengwen Wang、Ole Sigmund 和 Jakob Søndergaard Jensen。具有指定非线性性能的材料设计。《固体力学与物理学杂志》，69：156–174，2014年。[43] Anders Clausen、Fengwen Wang、Jakob Søndergaard Jensen、Ole Sigmund 和 Jennifer A Lewis。具有大变形下可编程泊松比的拓扑优化架构。《先进材料》，27(37)：5523–5527，2015年。[44] Guodong Zhang 和 Kapil Khandelwal。通过拓扑优化与非线性均匀化进行有限应变负泊松比超材料的计算设计。《计算力学与工程方法》，356：490–527，2019年。

[45] Anna Dalklint、Filip Sjövall、Mathias Wallin、Seth Watts 和 Daniel Tortorelli。具有自接触的超材料计算设计。《计算力学与工程方法》，417：116424，2023年。[46] Weichen Li、Fengwen Wang、Ole Sigmund 和 Xiaojia Shelly Zhang。有限变形下具有可编程弹性响应的复合材料结构设计。《固体力学与物理学杂志》，151：104356，2021年。[47] Felipe Fernandez、Michael A Puso、Jerome Solberg 和 Daniel A Tortorelli。大变形接触条件下多个可变形体的拓扑优化。《计算力学与工程方法》，371：113288，2020年。[48] Gore Lukas Bluhm、Ole Sigmund 和 Konstantinos Poulios。有限应变拓扑优化的内部接触建模。《计算力学》，67(4)：1099–1114，2021年。[49] Daniela Rus 和 Michael T Tolley。软体机器人的设计、制造与控制。《自然》，521(7553)：467–475，2015年。[50] Rixin Wang、Xianmin Zhang、Benliang Zhu、Hongchuan Zhang、Bicheng Chen 和 Haonan Wang。缆索驱动软体机器人抓手的拓扑优化。《结构与多学科优化》，62(5)：2749–2763，2020年。[51] Brandon Caasenbrood、Alexander Pogromsky 和 Henk Nijmeijer。通过非线性拓扑优化实现压力驱动软体机器人的计算设计框架。载于：2020年第3届 IEEE 国际软体机器人会议（RoboSoft），第633–638页。IEEE，2020年。[52] Yingqi Jia 和 Xiaojia Shelly Zhang。有限应变弹塑性的多材料拓扑优化：理论、方法与应用。《计算力学与工程方法》，449：118445，2026年。[53] Mathias Wallin、Viktor Jönsson 和 Eric Wingren。基于有限应变塑性的拓扑优化。《结构与多学科优化》，54(4)：783–793，2016年。[54] Erik Andreassen、Anders Clausen、Mattias Schevenels、Boyan S Lazarov 和 Ole Sigmund。使用88行代码在MATLAB中实现高效拓扑优化。《结构与多学科优化》，43(1)：1–16，2011年。[55] Grégoire Allaire、François Jouve 和 Anca-Maria Toader。使用灵敏度分析和水平集方法进行结构优化。《计算物理学杂志》，194(1)：363–393，2004年。[56] Akihiro Takezawa、Shinji Nishiwaki 和 Mitsuru Kitamura。基于相场方法和灵敏度分析的形状与拓扑优化。《计算物理学杂志》，229(7)：2697–2718，2010年。[57] Thomas Buhl、Claus BW Pedersen 和 Ole Sigmund。使用拓扑优化进行几何非线性结构的刚度设计。《结构与多学科优化》，19(2)：93–104，2000年。[58] Ricardo Doll Lahuerta、Eduardo T Simões、Eduardo MB Campello、Paulo M Pimenta 和 Emilio CN Silva。面向大变形拓扑优化中低密度单元稳定化的研究。《计算力学》，52(4)：779–797，2013年。[59] Tyler E Bruns 和 Daniel A Tortorelli。用于结构和柔顺机构拓扑优化的单元移除与重新引入策略。《国际工程数值方法杂志》，57(10)：1413–1430，2003年。[60] Gil Ho Yoon 和 Yoon Young Kim。用于几何非线性结构拓扑优化的单元连通性参数化。《固体与结构国际期刊》，42(7)：1983–2009，2005年。[61] Yangjun Luo、Michael Yu Wang 和 Zhan Kang。基于加性超弹性技术的几何非线性结构拓扑优化。《计算力学与工程方法》，286：422–441，2015年。[62] Ted Belytschko、Yun Yun Lu 和 Lei Gu。无单元伽辽金方法。《国际工程数值方法杂志》，37(2)：229–256，1994年。[63] Andreas Neofytou、Renato Picelli、Tsung-Hui Huang、Jiun-Shyan Chen 和 H Alicia Kim。使用再生核粒子法进行设计相关压力载荷的水平集拓扑优化。《结构与多学科优化》，61(5)：1805–1820，2020年。[64] Vahid Shobeiri。含裂纹结构的拓扑优化设计。《边界元工程分析》，58：26–38，2015年。[65] Juan Zheng、Xujing Yang 和 Shuyao Long。基于无单元伽辽金法的几何非线性拓扑优化。《国际计算方法杂志》，11(3)：231–241，2015年。[66] Sahil Garg 和 Mohit Pant。无网格方法：应用的综合综述。《国际计算方法杂志》，15(04)：1830001，2018年。

[67] Yury Krongauz 和 Ted Belytschko. 在无网格近似中使用有限元施加本质边界条件。《计算力学与工程方法》, 131(1-2):133–145, 1996.[68] Alban De Vaucorbeil、Vinh Phu Nguyen、Sina Sinaie 和 Jian Ying Wu. 物质点法问世25年：理论、实现与应用。《应用力学进展》, 53:185–398, 2020年.[69] Kenichi Soga、E Alonso、Alba Yerro、K Kumar 和 Samila Bandara. 滑坡体运动大变形分析的趋势，特别侧重物质点法。《岩土工程学》, 66(3):248–273, 2016.[70] Peng Huang、X Zhang、S Ma 和 X Huang. 冲击与侵彻仿真中物质点法的接触算法。《国际工程数值方法杂志》, 85(4):498–517, 2011.[71] Yuki Sato、Hiroki Kobayashi、Changyoung Yuhn、Atsushi Kawamoto、Tsuyoshi Nomura 和 Noboru Kikuchi. 利用物质点法对运动软体进行拓扑优化：Y. sato 等。《结构与多学科优化》, 66(3):50, 2023.[72] Ali Shiva、SM Hadi Sadati、Yohan Noh、Jan Fra´s、Ahmad Ataka、Helge Würdemann、Helmut Hauser、Ian D Walker、Thrishantha Nanayakkara 和 Kaspar Althoefer. 用于实时位置与力估计的软体指状机器人附肢准静态建模中弹性与超弹性的考量。《软体机器人》, 6(2):228–249, 2019.[73] Yitong Zhou、Leon M Headings 和 Marcelo J Dapino. 集成流体预应力复合驱动器的软体机器人夹爪建模。《机构与机器人学杂志》, 14(3):031001, 2022.[74] Kanghyeon Lee 和 Youngsu Cha. 软体夹爪用电液驱动器的准静态分析。《传感器与执行器A：物理》, 352:114214, 2023.[75] Y Bing、M Cortis、TJ Charlton、WM Coombs 和 CE Augarde. 物质点法中的基于B样条的边界条件。《计算机与结构》, 212:257–274, 2019.[76] Eduardo A de Souza Neto、Djordje Peric 和 David RJ Owen. 塑性的计算方法：理论与应用。约翰·威立父子公司, 2008.[77] Terry Kim Molstad. 使用有限元法进行有限变形分析。博士论文，英属哥伦比亚大学，1977.[78] Matthew Tancik、Pratul Srinivasan、Ben Mildenhall、Sara Fridovich-Keil、Nithin Raghavan、Utkarsh Singhal、Ravi Ramamoorthi、Jonathan Barron 和 Ren Ng. 傅里叶特征使网络能够学习低维域中的高频函数。《神经信息处理系统进展》, 33:7537–7547, 2020年.[79] Abien Fred Agarap. 使用修正线性单元（ReLU）进行深度学习。arXiv 预印本 arXiv:1803.08375, 2018.[80] Xavier Glorot 和 Yoshua Bengio. 理解深度前馈神经网络训练的难点。载于第十三届人工智能与统计学国际会议论文集，第249–256页。JMLR研讨会与会议论文集，2010.[81] Martin P Bendsøe 和 Ole Sigmund. 拓扑优化中的材料插值方案。《应用力学档案》, 69(9):635–654, 1999.[82] Ole Sigmund 和 Joakim Petersson. 拓扑优化中的数值不稳定性：处理棋盘格、网格依赖性和局部极小值的方法综述。《结构优化》, 16(1):68–75, 1998.[83] Benliang Zhu、Xianmin Zhang、Hongchuan Zhang、Junwen Liang、Haoyan Zang、Hai Li 和 Rixin Wang. 连续体拓扑优化在柔顺机构设计中的应用：综述。《机构与机器理论》, 143:103622, 2020年.[84] Mathieu Blondel、Quentin Berthet、Marco Cuturi、Roy Frostig、Stephan Hoyer、Felipe Llinares-López、Fabian Pedregosa 和 Jean-Philippe Vert. 高效且模块化的隐式微分。《神经信息处理系统进展》, 35:5230–5242, 2022.[85] Qiqi Wang、Parviz Moin 和 Gianluca Iaccarino. 用于非定常伴随计算的最小重复动态检查点算法。《SIAM科学计算杂志》, 31(4):2549–2567, 2009.[86] Kai A James 和 Haim Waisman. 使用时变伴随法对黏弹性结构进行拓扑优化。《计算力学与工程方法》, 285:166–187, 2015.[87] Nicholas J Higham. 矩阵函数：理论与计算。SIAM, 2008.[88] Krister Svanberg. 移动渐近线法——一种新的结构优化方法。《国际工程数值方法杂志》, 24(2):359–373, 1987.[89] Diederik P Kingma 和 Jimmy Ba. Adam：一种随机优化方法。arXiv 预印本 arXiv:1412.6980, 2014。

[90] Larry Armijo. 具有Lipschitz连续一阶偏导数的函数的最小化。《太平洋数学杂志》, 16(1):1–3, 1966.[91] Jorge Nocedal. 数值优化，2006.[92] Hoel Kervadec、Jose Dolz、Jing Yuan、Christian Desrosiers、Eric Granger 和 Ismail Ben Ayed. 约束深度网络：通过对数障碍扩展进行拉格朗日优化。2019年4月.[93] Yunsong Du、Pengwei Zhang 和 Tiemin Li. 基于应力约束的柔顺夹爪拓扑优化。《机构与机器人学杂志》, 17(6):061001, 2025年.[94] Yidong Zhao、Xuan Li、Chenfanfu Jiang 和 Jinhyun Choo. Geowarp：一种基于NVIDIA Warp、可自动微分且经GPU加速的岩土力学隐式物质点法框架。《工程软件进展》, 212:104072, 2026年.[95] Andreas H Frederiksen、Anna Dalklint、Ole Sigmund 和 Konstantinos Poulios. 用于含接触三维拓扑优化的改进第三介质公式。《计算力学与工程方法》, 436:117595, 2025年.[96] John A Nairn. 使用显式裂纹进行物质点法计算。《工程与科学中的计算机建模》, 4(6):649–664, 2003.[97] Emmanouil G Kakouris 和 Savvas P Triantafyllou. 用于脆性断裂的相场物质点法。《国际工程数值方法杂志》, 112(12):1750–1776, 2017。