arXiv:2603.14599v1 [math.GR] 15 Mar 2026

自由可解群上渐近熵的连续性

EDUARDO SILVA

摘要。我们证明，在秩为 $d \geq 3$ 、导出长度为 $m \geq 2$ 的自由可解群 $S_{d,\ m}$ 上，以步分布为自变量的渐近熵，在具有有限香农熵的非退化概率测度中连续。

1. 引言

关于非阿贝尔无限群的几何性质与随机游走之间关系的最早成果之一归功于 H. Kesten [Kes59], ，他证明，一个群是非可和群，当且仅当该群上对称随机游走在时间 n 返回原点的概率随 $n \to \infty$ 指数衰减。后来，J. Rosenblatt [Ros81, Theorem 1.10] 以及独立地，V. Kaimanovich 和 A. Vershik [KV83, Theorem 4.4] 证明，一个群是可和群，当且仅当该群上存在具有刘维尔性质的概率测度 μ ；所谓刘维尔性质，是指每个有界的 μ-调和函数都是常数。回顾一下，若对所有 $g \in G$ 都有 $f(g) = \sum_{h \in G} f(gh)\mu(h)$，则称函数 $f\colon G \to \mathbb{R}$ 为 μ-调和函数。V. Kaimanovich 和 A. Vershik 还给出了首批这样的可和群例子：它们存在对称的有限支撑概率测度，但不具有刘维尔性质 [KV83, Proposition 6.4]。这些例子是花环积 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}^d$ （其中 $d \geq 3$），它们不仅是可和群，甚至还是二步可解群。

在可和群这一类群中，可解群为研究随机游走的多样行为提供了尤为丰富的例子。最值得一提的是，J. Brieussel 和 T. Zheng 证明，任意足够规则的函数都可以实现为随机游走的渐近漂移和渐近熵（见下文定义1.2 ），该随机游走定义在一个 4步可解群上 [BZ21，定理 1。1]。他们的结果推广了[Érs01，定理 1], [Ers03，定理 1 和 2], [KV15，定理 1。1], [AV17，定理 1 和 3], 以及 [Ami17，定理 1],等在这一方向上的早期结果；这些结果同样基于可解群。

在可解群中，一个值得研究的自然类别是自由可解群。它们可以视为具有给定秩和导出长度、且除该导出长度的可解性所要求的关系外没有其他关系的可解群。

定义 1.1。用 F_d 表示秩为 $d \geq 2$ 的自由群。秩为 d 、导出长度为 $m \geq 2$ 的自由可解群定义为以下商群

$$S_{d,m} := F_d / F_d^{(m)},$$

其中 $F^{(1)}{}_d = [F_d, F_d]$ 且 $F^{(r}_d = \left[F^{)}{}^{(r-1)}{}_d,\ F_d^{(r-1)}\right]$ 对于 $r = 2,\ \ldots\ldots,\ m$。

自由可解群满足如下泛性质：每个具有 d个生成元且导出长度为 m 的可解群都是S_d 的商群，m。自由可解群的许多结构性质与花环积的结构性质密切相关，这要归功于经典的马格努斯嵌入定理 [Mag39]。该定理给出了一个显式的单同态$S_{d,\ m}$，$\to \mathbb{Z}^d \wr S_{d,\ m-1}$：$= \bigoplus_{S_{d,\ m-1}} \mathbb{Z}^d \rtimes S_{d,\ m-1}$.过去几十年来，自由可解群的代数性质已得到广泛研究 [Bac65，Mat66，Bau73，BM82，

日期：2026年3月17日。

BM85，Tol11，Sal15a，Ali17] 算法方面的 [RS70，BMO10，MRUV10，Rom12，Ush14，GSU17，BE19，BE20] 以及几何方面的 [Cor11，Vas12，Sal15b，Jac19，Wan24] 性质。

对自由可解群上随机游走的研究可追溯至 A. Vershik 的工作[Ver00，第 4], 节，其中引入了自由可解群的几何解释（另见 [VD05]），并据此分析了这些群上随机游走的泊松边界。此后，自由可解群的泊松边界得到进一步研究：在步分布满足适当条件时，[Ers11定理 2], [LP21第 6], 节以及 [FS23推论 18]中给出了泊松边界的描述。特别是，对于任意具有有限一阶矩的非退化概率测度，这些研究都描述了 μ 上有界 S_d-调和函数的空间。m 此外，人们还探索了自由可解群上随机游走的其他方面。例如，S_d 中返回原点的返回概率的渐近衰减m 由 [SCZ15定理 11]计算得出。

本文的核心对象是自由可解群上概率测度的渐近熵。回顾一下，概率测度 μ on$G$ 的 香农熵 定义为 $H(\mu) := -\sum_{g\in G} \mu(g)\log(\mu(g))$。

定义 1.2。 可数群G上的概率测度 μ的渐近熵定义为

$$h(\mu) := \lim_{n\to\infty} \frac{H(\mu^{*n})}{n} \in [0,\infty].$$

渐近熵由 A. Avez 引入 [Ave72], ，他证明了有限支撑概率测度 μ 满足 $h(\mu) = 0$ 具有刘维尔性质。此外，对于任意满足 $H(\mu) < \infty$的概率测度，熵判据由 Y. Derriennic 提出 [Der80]，并由 V. Kaimanovich 和 A. Vershik [KV83] 表明：$h(\mu) = 0$ 当且仅当 μ 具有刘维尔性质。

我们的主要结果证明了在秩至少为 3 的自由可解群上，渐近熵关于步分布具有连续性。

定理 *1.3.* 设 $S_{d,m}$ 是秩为 $d \geq 3$ 、导出长度为 $m \geq 2$ 的自由可解群。设 μ 是定义在 S_d 上的非退化概率测度，m 满足 $H(\mu) < \infty$。设 $\{\mu_k\}_{k\geq 1}$ 是定义在 S_d 上的一列非退化概率测度，m 满足：对每个 $g \in S_{d,m}$，$\lim_{k\to\infty} \mu_k(g) = \mu(g)$，且 $\lim_{k\to\infty} H(\mu_k) = H(\mu)$。那么，$\lim_{k\to\infty} h(\mu_k) = h(\mu)$。

假设 $\lim_{k\to\infty} H(\mu_k) = H(\mu)$ 在此情形下很自然，因为已知渐近熵在概率测度逐点收敛时具有上半连续性（见命题 2.8），而香农熵的收敛性用于控制有限次卷积幂的熵。

映射 $\mu \mapsto h(\mu)$ 是否连续这一问题由 [Ers04 第 6 节第 5] 项提出。对于若干类群，已有正面结果，包括双曲群 [EK13，定理 2], [GMM18，定理 2.9], 轴双曲群[Cho26，定理 F], 线性群以及在 CAT(0) 立方复形上适当作用的群[Sil25，推论 1.6], ，以及形如 $A\wr\mathbb{Z}^d$ 且满足 $d \geq 3$ [的花环积2]Sil25，定理 1.2]。在这些例子中，后一类是唯一包含可和群的类别。另一方面，已知存在不连续现象，而目前所有已知例子都出现在可和群中。V. Kaimanovich [Kai83，定理 3.1 和 4.1], 最早构造了此类例子：他展示了存在局部有限群，其上有渐近熵为正的概率测度，但无法用有限支撑测度的渐近熵逼近。后来，A. Erschler 利用花环积 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\wr D_\infty$ [Ers11，引理 4]得到了更多例子，其中包括支撑在固定有限生成集上的测度的不连续性。关于更详细的讨论，请参阅 [Sil25] 的引言。

定理 1.3 证明的出发点是 [Sil25，定理 7。1]（另见下文定理 2.10 ），该定理给出了渐近熵在花环积上连续所需的技术条件，

。本工作的主要新难点在于将这一论证推广到定理3.1中的迭代 wreath 积，这需要控制来自花环积结构多个层次的熵贡献。随后，我们将其与 Magnus 嵌入定理 [Mag39] （另见定理3.6）结合，以得到定理1.3。

我们指出，定理 1.3并不涵盖秩为2的自由可解群。原因是，预计该结论并不适用于这些群的一般情形。事实上，对于形如 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}^2$ 的花环积，已经可以找到渐近熵不连续的例子。要在这种情形下得到连续性结果，需要限制所考虑的概率测度类别。在定理4.7 和4.9中，我们证明了花环积 $A \wr \mathbb{Z}^d$ 在 $d \in \{1, 2\}$上，以及秩为 2的自由可解群上的渐近熵，在支撑包含于群的某个固定有限子集的概率测度范围内具有连续性。

迄今为止提及的所有渐近熵不连续的已知例子，都由概率测度序列 $\{\mu_k\}_{k\geq 1}$ 构成，满足 $h(\mu_k) = 0$对所有 $k \geq 1$均成立，而极限测度 μ 满足 $h(\mu) > 0$。然而，不连续性并不局限于这种情形。对上述例子作一个简单修改，即与自由群取直积，便可得到所有涉及的渐近熵都严格为正的例子。更确切地说，在命题 4.11 中，我们构造了群 G 和概率测度 μ，$\{\mu_k\}_{k\geq 1}$ 在 G上，其支撑包含于 G的某个固定有限子集中，并满足 $h(\mu_k) > 0$ 对所有 $k \geq 1$均成立，且 $h(\mu) > 0$；同时，对于每个 $g \in G$，均有 $\lim_{k\to\infty} \mu_k(g) = \mu(g)$，但 $\lim_{k\to\infty} h(\mu_k) \neq h(\mu)$。

最后，我们指出，在对测度 μ 和 μ_k施加额外假设的情况下，定理1.3 的某些特殊情形 $k \geq 1$可以由 [Sil25，定理 15]推出。事实上，结合 [FS23，推论 18],中得到的泊松边界刻画，对于满足该刻画的概率测度，渐近熵的连续性可由该泊松边界模型上相应调和测度的弱连续性推出；参见 [Sil25，命题 8.12 和推论 813] ，其中给出了花环积情形下的类似结论。然而，对于具有有限熵的任意概率测度序列，这一论证无法充分证明定理1.3 。在如此一般的情形下，目前尚未有对自由可解群的泊松边界刻画，尤其没有一种刻画能够在同一个波兰模型空间中，同时实现对应于不同概率测度的泊松边界。

1.1. **结构安排**。 在第 2 节中，我们回顾关于概率测度收敛所需的主要技术结果。在第 3 节中，我们证明定理 3.1，这是本文的主要技术结果，并利用它证明定理 1.3。最后，在第 4 节中，我们讨论花环积$A \wr \mathbb{Z}^d$ 与 $d \in \{1,2\}$ 以及秩为 2 的自由可解群上的渐近熵的连续性和不连续性结果。

1.2.**致谢**。 作者ได้รับ德国研究基金会（DFG）根据德国卓越战略 EXC 2044/2 – 390685587 项目“明斯特数学：动力学–几何–结构”的资助。

2. 预备知识

2.1. **群上的随机游走与熵**。 设 μ是可数群 G上的一个概率测度。 μ-随机游走 在 G 上是马尔可夫链$\{w_n\}_{n\geq 0}$ ，其状态空间为 G，从 $w_0 = e_G$ 开始，且转移概率为 $p(g,h) = \mu(g^{-1}h)$，其中$g, h \in G$。等价地，对于每个 $n \geq 1$ ，我们有

$$w_n = g_1 g_2 \cdots g_n,$$

其中$\{g_i\}_{i\geq 1}$ 是定义在 G上的一列独立同分布随机变量，其分布为 μ。链$\{w_n\}_{n\geq 0}$ 的分布 $\mathbb{P}_\mu$ 是伯努利测度的推前

$\mu^{\mathbb{Z}_+}$ 经由映射

$$G^{\mathbb{Z}_{\geq 1}} \to G^{\mathbb{Z}_+}$$
$$(g_1, g_2, g_3, \ldots) \mapsto (w_0, w_1, w_2, w_3, \ldots) := (e_G, g_1, g_1g_2, g_1g_2g_3, \ldots).$$

空间 $(G^{\mathbb{Z}_+}, \mathbb{P}_\mu)$ 称为该μ-随机游走的样本路径空间或轨迹空间。

本文研究样本路径空间的可数划分。相对于概率测度 $\mathbb{P}$，样本路径空间的可数划分 ρ $G^{\mathbb{Z}_+}$ 的香农熵定义为

$$H(\rho) := -\sum_{k\geq 1} \mathbb{P}(\rho_k) \log \mathbb{P}(\rho_k).$$

本文将使用以下众所周知的熵的性质。其证明可参见[ME81，推论 2.5 和 2.6] 以及 [Roh67，第 5] 节。

引理 2.1. 设 ρ、γ 和 δ 为一个博雷尔空间的可数划分。则有以下性质：

(1) $H(\rho \vee \gamma \mid \delta) = H(\rho \mid \gamma \vee \delta) + H(\gamma \mid \delta)$.
(2) $H(\rho \mid \gamma) \leq H(\rho \vee \delta \mid \gamma)$.*(3)* $H(\rho \mid \gamma \vee \delta)$
$\leq H(\rho \mid \gamma)$.

注 2.2. 全文中，我们将使用同一个符号，既表示一个随机变量，也表示它所定义的样本路径空间的划分。更准确地说，设 $X : (G^{\mathbb{Z}_+}, \mathbb{P}) \to D$ 是一个随机变量，其定义域为样本路径空间，取值于可数集 D。那么，我们将 X 与可数划分 ρ_X等同，其中，两个样本路径 $\mathbf{w}$,$\mathbf{w}' \in G^{\mathbb{Z}_+}$ 属于 ρ_X 的同一个元素，当且仅当$X(\mathbf{w}) = X(\mathbf{w}')$。

2.2. **逃逸概率与渐近范围**。 时刻 $n \geq 1$ 的 μ- 群 G 上的随机游走的范围 R_n 对应于随机变量 $= |\{w_0, w_1, \ldots, w_n\}|$，它统计了随机游走的轨迹截至时刻 G所访问的不同元素的数量 n。根据金曼次可加遍历定理 [Kin68，定理 5] ，可知极限

$$R(\mu) := \lim_{n\to\infty} \frac{R_n}{n}$$

几乎必然存在，且在 $L^1(G^{\mathbb{Z}_+})$中为常数。此外，我们有$R(\mu) = \mathbb{P}(w_n \neq e_G$ 对所有 $n \geq 1)$。这个等式在 [Spi76，定理 I.4 中得到了证明。1] 对于$G = \mathbb{Z}^d$， $d \geq 1$，而一般可数群的情形见 [Dyu99，引理 1] 。

定义 2.3。 对于可数群 G 上的每个概率测度 μ ，我们将其关联的逃逸概率 定义为 $p_{\mathrm{esc}}(\mu)$: $= \mathbb{P}(w_n \neq e_G$ 对每个 $n \geq 1$ 均成立）。

以下结果保证了至少具有三次增长的群上逃逸概率的连续性。

定理 *2.4*（[*Sil25*，定理 *1*.4]）。设 μ 是可数群G上的一个概率测度。假设 $\langle supp(\mu)\rangle_+$ 包含一个至少具有三次增长的有限生成子群。设 $\{\mu_k\}_{k\geq 1}$ 是 G 上的概率测度序列，使得对每个 $g \in G$，均有 $\lim_{k\to\infty} \mu_k(g) = \mu(g)$。那么，$\lim_{k\to\infty} p_{\mathrm{esc}}(\mu_k) = p_{\mathrm{esc}}(\mu)$。

2.3.**概率测度的收敛**。以下结果众所周知；证明见 [Sil25，引理 3。1]。

引理 2.5。 设 μ 是可数群 G 上的一个概率测度，并考虑 G 上的概率测度序列 $\{\mu_k\}_{k\geq 1}$ 。以下条件等价。

(1) $\sum_{g\in G} |\mu_k(g) - \mu(g)| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.

(2) $\mu_k(g) \xrightarrow[k\to\infty]{} \mu(g)$, *for every* $g \in G$.

我们回顾一些关于概率测度的收敛和香农熵的预备结果，这些结果将在本文余下部分中用到。

引理 2.6。设 μ 是可数群 G 上的一个概率测度。考虑 G 上的概率测度序列 $\{\mu_k\}_{k\geq 1}$，使得对于每个 $g \in G$，$\lim_{k\to\infty} \mu_k(g) = \mu(g)$。设存在一个有限子集 $S \subseteq G$，使得对于所有 $k \geq 1$，$\mathrm{supp}(\mu) \subseteq S$ 且 $\mathrm{supp}(\mu_k) \subseteq S$。则 $\lim_{k\to\infty} H(\mu_k) = H(\mu)$。

以下结果证明于 [AAV13，第 3]节。

引理 *2.7*。设 G 是一个可数群，并考虑 G 上满足 $H(\mu) < \infty$ 的概率测度 μ。考虑 G 上的概率测度序列 $\{\mu_k\}_{k\geq 1}$，使得对于所有 $g \in G$，$\lim_{k\to\infty} \mu_k(g) = \mu(g)$；对于所有 $k \geq 1$，$H(\mu_k) < \infty$；并且 $\lim_{k\to\infty} H(\mu_k) = H(\mu)$。那么对于任意 $n \geq 1$，都有 $\lim_{k\to\infty} H(\mu_k^{*n}) = H(\mu^{*n})$。

接下来，我们回顾渐近熵是上半连续的这一事实。以下结果已在 [AAV13，命题 4] 中得到证明。此前，该结果已在 [Ers11，引理 1] 中得到证明，但附加假设是：序列中的所有概率测度的支撑都包含在一个固定有限集中。

命题 *2.8*（[*AAV13*，命题 4]）。设 G 是一个可数群，并考虑其上的概率测度 μ G，以及其上的概率测度序列 $\{\mu_k\}_{k\geq 1}$ G。假设对于每个 $g \in G$，$\lim_{k\to\infty} \mu_k(g) = \mu(g)$，并且 $\lim_{k\to\infty} H(\mu_k) = H(\mu)$。那么我们有 $\limsup_{k\to\infty} h(\mu_k) \leq h(\mu)$。

最后，我们证明，在取商群时，概率测度的收敛性和香农熵的收敛性得以保持。

引理*2.9.* 设 G_1 和 G_2 为可数群，且 $\pi : G_1 \to G_2$ 为满同态。考虑概率测度 μ以及 G_1上的概率测度序列$\{\mu_k\}_{k\geq 1}$，满足对所有 $k \geq 1$，$H(\mu) < \infty$ 且 $H(\mu_k) < \infty$。假设对所有 $g \in G_1$，$\lim_{k\to\infty} \mu_k(g) = \mu(g)$，并且$\lim_{k\to\infty} H(\mu_k) = H(\mu)$。那么，对所有 $g \in G_2$，也有$\lim_{k\to\infty} \pi_*\mu_k(g) = \pi_*\mu(g)$，且$\lim_{k\to\infty} H(\pi_*\mu_k) = H(\pi_*\mu)$。

证明。根据数据处理不等式，我们有 $H(\pi_*\mu) \leq H(\mu) < \infty$ 且$H(\pi_*\mu_k) \leq H(\mu_k) < \infty$ 对每个 $k \geq 1$。此外，对每个 $g \in G_2$，我们可以利用引理2.5得到

$$|\pi_*\mu_k(g) - \pi_*\mu(g)| \leq \sum_{h\in\pi^{-1}(\{g\})} |\mu_k(h) - \mu(h)| \leq \sum_{h\in G_1} |\mu_k(h) - \mu(h)| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

现在证明 $H(\pi_*\mu_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} H(\pi_*\mu)$。根据 [AAV13中的引理 3，2]，只需证明序列$\{\pi_*\mu_k\}_{k\geq 1}$ 是熵紧的。令 $\varepsilon > 0$ 并利用$\{\mu_k\}_{k\geq 1}$ $F \subseteq G_1$ $\sum_{x\notin F} -\mu_k(g)$ $\mu_k(g) <$}是熵紧的这一事实，ε $k \geq 1$ $\pi(F) \subseteq G_2$ 选取一个有限子集，使得（）log（（））对所有 都成立。考虑有限子集（）。于是有

$$\begin{aligned}\sum_{g\notin\pi(F)} -\pi_*\mu_k(g)\log(\pi_*\mu_k(g)) &= \sum_{g\notin\pi(F)}\sum_{h\in\pi^{-1}(\{g\})} -\mu_k(h)\log\left(\sum_{x\in\pi^{-1}(\{g\})}\mu_k(x)\right)\\ &\leq \sum_{g\notin\pi(F)}\sum_{h\in\pi^{-1}(\{g\})} -\mu_k(h)\log(\mu_k(h))\\ &\leq \sum_{h\notin F} -\mu_k(h)\log(\mu_k(h)) < \varepsilon.\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

下一个结果是 [Sil25], 的主要技术定理，它给出了渐近熵在花环积上连续的充分条件。

定理 2.10 ([Sil25，定理 7.1])。设 A 和 B 为可数群，并设 μ 是定义在 $A \wr B$ 上的概率测度：$= \bigoplus_B A \rtimes B$ 满足 $H(\mu) < \infty$。考虑 $\{\mu_k\}_{k\geq 1}$这一列定义在 $A \wr B$ 上的概率测度，满足 $H(\mu_k) < \infty$ 对所有 $k \geq 1$均成立，且满足
(1) $\lim_{k\to\infty} \mu_k(g) = \mu(g)$ 对每个 $g \in A \wr B$均成立，
且 *(2)* $\lim_{k\to\infty} H(\mu_k) = H(\mu)$。
记 $\pi : A \wr B \to B$ 为到基群 B的典范满同态。此外，假设

(3) $\pi_*\mu$-随机游走在 B 上是暂态的，*(4)* $h(\pi_*\mu) = 0$，*(5)* $\langle \mathrm{supp}(\pi_*\mu)\rangle_+$ 是对称的，
且 *(6)* $\lim_{k\to\infty} p_{\mathrm{esc}}(\pi_*\mu_k) = p_{\mathrm{esc}}(\pi_*\mu)$。则
$\lim_{k\to\infty} h(\mu_k) = h(\mu)$。

3. 迭代 wreath 积与自由可解群

定理 1.3的证明依赖于这样一个事实：自由可解群通过 Magnus 嵌入嵌入迭代 wreath 积。因此，我们先确立迭代 wreath 积上渐近熵的一个连续性结果，之后将它与 Magnus 嵌入结合，以得到定理1.3。

以下结果将定理 2.10推广到迭代 wreath 积的情形，证明见本小节末尾。

定理 3.1. 设 $A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}, B$ 是某个 $m \geq 2$ 下的可数群。考虑群 $B_1 := B$ 和 $B_{j+1} := A_j \wr B_j$，其中 $j = 1, \ldots, m-1$。设 μ 是 B_m 上的概率测度，满足 $H(\mu) < \infty$；并考虑 B_m 上的概率测度序列 $\{\mu_k\}_{k\geq 1}$，满足对所有 $k \geq 1$ 均有 $H(\mu_k) < \infty$ 。假设

(1) 极限$_{k\to\infty} \mu_k(g) = \mu(g)$ 对每个 $g \in B_m$ 均成
立；*(2)* 极限$_{k\to\infty} H(\mu_k) = H(\mu)$。
对每个 $j = 1, \ldots, m-1$，记从B_m 到 B_j的典范满同态为 $\pi_j : B_m \to B_j$。此外，假设

(3) B 上的 $\pi_{1*}\mu$-随机游走是暂态的；*(4)* $h(\pi_{1*}\mu) = 0$；*(5)* 对每个 $j = 1, \ldots, m-1$，由$\mathrm{supp}(\pi_{j*}\mu)$ 生成的半群是对称的；*(6)* 对每个 $j = 1, \ldots, m-1$，有 极限$_{k\to\infty} p_{\mathrm{esc}}($ $\pi_{j*}\mu_k) = p_{\mathrm{esc}}(\pi_{j*}\mu)$。

那么 极限$_{k\to\infty} h(\mu_k) = h(\mu)$。

在下文中，我们将 $A \wr B$ 上随机游走的一条样本路径记为

$$w_n = (\varphi_n, X_n), \text{ where } \varphi_n : B \to A \text{ and } X_n \in B, \text{ for } n \geq 0.$$

我们将随机游走的独立增量记为 $g_i = (f_i, Y_i)$， $i \geq 1$，于是

$$(\varphi_n, X_n) = (\varphi_{n-1}, X_{n-1}) \cdot (f_n, Y_n).$$

3.1. 粗略轨迹。我们首先引入群上随机游走的 t_0-粗略轨迹这一概念。对于固定的 $t_0 \geq 1$。直观地说，它记录了随机游走每经过 t_0 步所到达的群元素。

定义 3.2. 设 μ 是群 G 上的一个概率测度，且 $t_0 \geq 1$。回顾一下，我们用 $\{w_n\}_{n\geq 0}$ 表示 G 上随机游走的一条样本路径。我们将群 G 上时刻 n 的 t_0-粗略轨迹 n 定义为 G 有序元组

$$\mathcal{P}_n^{t_0}(G) = \left(w_{t_0}, w_{2t_0}, \ldots, w_{\lfloor n/t_0 \rfloor t_0}\right).$$

引理 3.3（[Sil25，引理 5.2]）。设 μ 是可数群 G 上的一个概率测度，满足 $H(\mu) < \infty$ 且 $h(\mu) = 0$。考虑 G 上概率测度的一个序列 $\{\mu_k\}_{k\geq 1}$，满足对所有 $k \geq 1$ 都有 $H(\mu_k) < \infty$，并且对每个 $g \in G$，$\lim_{k\to\infty} \mu_k(g) = \mu(g)$，以及 $\lim_{k\to\infty} H(\mu_k) = H(\mu)$。那么，对每个 $\varepsilon > 0$，存在 K、$T \geq 1$，使得对所有 $k \geq K$、$t_0 \geq T$ 和 $n \geq t_0$，都有 $H_{\mu_k}(P_n^{t_0}(G)) < \varepsilon n$。

在下面的引理 3.4 的陈述中，出现了两条粗略轨迹。对于花环积 μ 上的概率测度 $A \wr B$ 以及 N，$t_0 \geq 1$我们考虑$\mathcal{P}_n^{t_0}(B)$，即基群 t_0上诱导随机游走的 B-粗略轨迹，以及$\mathcal{P}_n^{Nt_0}(A \wr B)$，即 Nt_0-随机游走在 μ上的 $A \wr B$-粗略轨迹。

引理 3.4 ([Sil25，引理 7。3])。设 μ 是 $A\wr B$ 上的概率测度，满足 $H(\mu) < \infty$，并考虑一列概率测度 $\{\mu_k\}_{k\geq 1}$，它们定义在 $A \wr B$ 上，且对所有 $H(\mu_k) < \infty$ 均满足$k \geq 1$。假设

(1) $\lim_{k\to\infty} \mu_k(g) = \mu(g)$ 对所有 $g \in A \wr B$ 都成立，且 *(2)* $\lim_{k\to\infty} H(\mu_k) = H(\mu)$。

Den记 π： $A \wr B \to B$ 为典范满同态，并进一步假设 *th* at

(3) $\langle \mathrm{supp}(\pi_*\mu)\rangle_+$ 是对称的，且 *(4)* $\lim_{k\to\infty} p_{\mathrm{esc}}(\pi_*\mu_k) = p_{\mathrm{esc}}(\pi_*\mu)$。

那么，对于每个 $\varepsilon > 0$，存在 $C \geq 0$ 以及 K、n_0、$T \geq 1$，使得对于所有 $k \geq K$、$t_0 \geq T$、$N > n_0$ 和 $n > Nt_0$，都有

$$H_{\mu_k}\left(\mathcal{P}_n^{Nt_0}(A \wr B)\middle| w_n\right) \leq \varepsilon n + (H(\mu)+1)\frac{nn_0}{N} + H_{\mu_k}\left(\mathcal{P}_n^{t_0}(B)\middle| w_n\right) + C.$$

下述命题将引理 3.4 推广到迭代缠绕积。

命题 3.5。设 A_1、A_2、…、A_{m-1}、B 是某个 $m \geq 2$ 的可数群。考虑群 $B_1 := B$和 $B_{j+1} := A_j \wr B_j$，其中 $j = 1$、…、$m-1$。设 μ 是 B_m 上的一个概率测度，满足 $H(\mu) < \infty$，并考虑 B_m 上的概率测度序列 $\{\mu_k\}_{k\geq 1}$，满足对所有 $k \geq 1$，都有 $H(\mu_k) < \infty$。假设

(1) 对每个 $g \in B_m$，$\lim_{k\to\infty} \mu_k(g) = \mu(g)$，且

(2) $\lim_{k\to\infty} H(\mu_k) = H(\mu)$。

对于每个 $j = 1, \ldots, m-1$，记 $\pi_j \colon B_m \to B_j$ 为从 B_m 到 B_j的典范满同态。进一步假设

(3) B 上的 $\pi_{1*}\mu$-随机游走是暂态的，

(4) $h(\pi_{1*}\mu) = 0$,

(5) 对每个 $j = 1,\ldots, m-1$，$\langle \mathrm{supp}(\pi_{j*}\mu)\rangle_+$ 都是对称的，且

(6) 极限$\lim_{k\to\infty} p_{\mathrm{esc}}(\pi_{j*}\mu_k) = p_{\mathrm{esc}}(\pi_{j*}\mu)$ 对每个 $j = 1,\ldots, m-1$ 都成立。

于是，对每个 $\varepsilon > 0$，都存在 $C \geq 0$、K、$T \geq 1$ 和 $n_0 \geq 1$，使得对所有 $k \geq K$ 和 $t_0 \geq T$，以下结论成立。任取 N_1、N_2、…、$N_{m-1} > n_0$ 以及 $n > N_1N_2\cdots N_{m-1}t_0$。那么

$$H_{\mu_k}\left(\mathcal{P}_n^{N_1N_2\cdots N_{m-1}t_0}(B_m)\middle| w_n\right) \leq \varepsilon n + (H(\mu)+1)\sum_{j=1}^{m-1}\frac{nn_0}{N_j} + C.$$

证明。我们用归纳法证明。先考虑基础情形 $m = 2$。由引理 3.4，可知对每个 $\varepsilon > 0$，存在 $C_1 \geq 0$ 和 $K_1, n_0, T_1 \geq 1$，使得对所有 $k \geq K_1$, $t_0 \geq T_1$, $N_1 > n_0$ 和 $n \geq N_1t_0$，我们有

$$H_{\mu_k}\left(\mathcal{P}_n^{N_1t_0}(B_2)\middle| w_n\right) \leq \frac{\varepsilon}{2}n + (H(\mu)+1)\frac{nn_0}{N} + H_{\mu_k}(\mathcal{P}_n^{t_0}(B) \mid w_n) + C_1.$$

此外，我们假设 $h(\pi_{1*}\mu) = 0$，因此引理 3.3 表明，对于每个 $\varepsilon > 0$，都存在 $K_2, T_2 \geq 1$，使得对所有 $k \geq K_2$, $t_0 \geq T$和 $n \geq t_0$，我们都有 $H_{\mu_k}(\mathrm{P}_n^{t_0}(B)) \leq \frac{\varepsilon}{2}n$。此外，注意 $H_{\mu_k}(\mathrm{P}_n^{t_0}(B) \dagger w_n) \leq H_{\mu_k}(\mathrm{P}_n^{t_0}(B))$.

那么，对于每个 $\varepsilon>0$，我们可以选择 $K:=\max\{K_1,K_2\}\geq 1$, $T:=\max\{T_1,T_2\}\geq 1$，以及 $n_0\geq 1$，使得对所有 $k\geq K$, $t_0\geq T$, $N_1>n_0$ 和 $n>N_1t_0$，我们都有

$$H_{\mu_k}\left(\mathcal{P}_n^{N_1t_0}(B_2)\middle|w_n\right)\leq \varepsilon n+(H(\mu)+1)\frac{nn_0}{N_1}+C.$$

这正是 $m=2$ 情形下命题的表述。

现在考虑任意一个值 $m\geq 3$。记 $\nu_k:=\pi_{(m-1)*}\mu_k$, $k\geq 1$, 以及$\nu:=\pi_{(m-1)*}\mu$。由引理2.9可知，概率测度 $\{\nu_k\}_{k\geq 1}$, ν在 B_{m-1} 上满足当前命题的假设。因此，利用归纳假设，我们得到：对于每个 $\varepsilon>0$，存在 $C_1\geq 0$, $K_1,T_1\geq T$，以及 $n_1\geq 1$，使得对于所有 $k\geq K_1$, $t_0\geq T$，任意 N_1、.....、$N_{m-2}>n_1$ 以及 $n>N_1\cdots N_{m-2}t_0$，都有

$$H_{\nu_k}\left(\mathcal{P}_n^{N_1N_2\cdots N_{m-2}t_0}(B_{m-1})\mid\pi_{m-1}(w_n)\right)\leq\frac{\varepsilon}{2}n+(H(\nu)+1)\sum_{j=1}^{m-2}\frac{nn_1}{N_j}+C_1. \tag{1}$$

此外，由引理 3.4 可知，对于每个 $\varepsilon>0$，存在 $C_2\geq 0$ 和 $K\geq K_1$，$n_0\geq n_1$ 以及 $T\geq T_1$，使得对于所有 $k\geq K$、$t_1\geq T$、$N_{m-1}>n_0$ 以及 $n>N_{m-1}t_1$，都有

$$H_{\mu_k}\left(\mathcal{P}_n^{N_{m-1}t_1}(B_m)\mid w_n\right)\leq\frac{\varepsilon}{2}n+(H(\mu)+1)\frac{nn_0}{N_{m-1}}+H_{\mu_k}(\mathcal{P}_n^{t_1}(B_{m-1})\mid w_n)+C_2. \tag{2}$$

将 2式中的 $t_1=N_1\cdots N_{m-2}t_0$ 代入，再利用 1式可得，对于每个 $k\geq K$, $t_0\geq T$, N_1, N_2, ..., $N_{m-1}>n_0$ 以及 $n>N_1\cdots N_{m-1}t_0$，均有

$$\begin{aligned}
H_{\mu_k}\left(\mathcal{P}_n^{N_1\cdots N_{m-1}t_0}(B_m)\mid w_n\right)&\leq\frac{\varepsilon}{2}n+(H(\mu)+1)\frac{nn_0}{N_{m-1}}+\\
&\quad+H_{\mu_k}(\mathcal{P}_n^{N_1\cdots N_{m-2}t_0}(B_{m-1})\mid w_n)+C_2\\
&\leq\frac{\varepsilon}{2}n+(H(\mu)+1)\frac{nn_0}{N_{m-1}}+\\
&\quad+H_{\nu_k}(\mathcal{P}_n^{N_1\cdots N_{m-2}t_0}(B_{m-1})\mid\pi_{m-1}(w_n))+C_2\\
&\leq\varepsilon n+(H(\mu)+1)\frac{nn_0}{N_{m-1}}+\\
&\quad+C_2+(H(\nu)+1)\sum_{j=1}^{m-2}\frac{nn_1}{N_j}+C_1\\
&\leq\varepsilon n+(H(\mu)+1)\frac{nn_0}{N_{m-1}}+\\
&\quad+(H(\mu)+1)\sum_{j=1}^{m-2}\frac{nn_0}{N_j}+C_1+C_2\\
&=\varepsilon n+(H(\mu)+1)\sum_{j=1}^{m-1}\frac{nn_0}{N_j}+C,
\end{aligned}$$

whe关于 $C=C_1+C_2$。至此完成归纳法，并结束命题的证明 n. □

定理*3.1*的证明。令 $\varepsilon>0$。根据命题3.5 我们可以选取常数 $C\geq 0$,$K,T\geq 1$和 $n_0\geq 1$，使得对于所有 $k\geq K$, $t_0\geq T$以及所有 $N_1,\ldots,N_{m-1}>n_0$，只要 $n>N_1\cdots N_{m-1}t_0$，就有

$$H_{\mu_k}\left(P_n^{N_1\cdots N_{m-1}t_0}(B_m)\middle|w_n\right)\leq\varepsilon n+(H(\mu)+1)\sum_{j=1}^{m-1}\frac{nn_0}{N_j}+C.$$

现在我们将粗略轨迹的熵与固定时间下随机游走的熵联系起来。利用粗略轨迹的定义以及熵的次可加性，我们得到

$$\begin{aligned}\left(\frac{n}{N_1\cdots N_{m-1}t_0}-1\right)H_{\mu_k}\left(w_{N_1\cdots N_{m-1}t_0}\right) &\le \left\lfloor\frac{n}{N_1\cdots N_{m-1}t_0}\right\rfloor H_{\mu_k}\left(w_{N_1\cdots N_{m-1}t_0}\right)\\ &= H_{\mu_k}\left(\mathcal{P}_n^{N_1\cdots N_{m-1}t_0}(B_m)\right)\\ &\le H_{\mu_k}\left(\mathcal{P}_n^{N_1\cdots N_{m-1}t_0}(B_m)\mid w_n\right)+H_{\mu_k}(w_n)\\ &\le \varepsilon n+(H(\mu)+1)\sum_{j=1}^{m-1}\frac{nn_0}{N_j}+C+H_{\mu_k}(w_n).\end{aligned}$$

这意味着

$$\frac{1}{n}H_{\mu_k}(w_n)\ge\left(\frac{1}{N_1\cdots N_{m-1}t_0}-\frac{1}{n}\right)H_{\mu_k}\left(w_{N_1\cdots N_{m-1}t_0}\right)-\varepsilon-(H(\mu)+1)\sum_{j=1}^{m-1}\frac{n_0}{N_j}-\frac{C}{n}.$$

取 $n\to\infty$，再令 $k\to\infty$ 时取下极限，我们得到

$$\liminf_{k\to\infty}h(\mu_k)\ge\frac{1}{N_1\cdots N_{m-1}t_0}H_{\mu}\left(w_{N_1\cdots N_{m-1}t_0}\right)-\varepsilon-(H(\mu)+1)\sum_{j=1}^{m-1}\frac{n_0}{N_j},$$

这里我们利用引理 2.7 得到不等式 $H_{\mu_k}(w_{N_1\cdots N_{m-1}t_0})\xrightarrow[k\to\infty]{}H_{\mu}(w_{N_1\cdots N_{m-1}t_0})$。接下来，我们取极限 $N_1\to\infty, N_2\to\infty,\ldots,N_{m-1}\to\infty$，得到

$$\liminf_{k\to\infty}h(\mu_k)\ge h(\mu)-\varepsilon.$$

最后，由于对所有 $\varepsilon>0$，该等式都成立，因此我们得出 $\liminf_{k\to\infty}h(\mu_k)\ge h(\mu)$。结合命题 2.8，我们得出 $\lim_{k\to\infty}h(\mu_k)=h(\mu)$。

□

3.2. **自由可解群**。设 F_d 是一个秩为 $d\ge 1$ 的自由群，并考虑其正规子群 $N\lhd F_d$。现在回顾 $F_d/[N,N]$ 嵌入到花环积 $\mathbb{Z}^d\wr F_d/N$中的 Magnus 嵌入。关于 Magnus 嵌入的更详细介绍见 [MRUV10，第 2.2–2.5]节，以及 [SCZ15，第 2]节。

令 $\mathbb{Z}(F_d/N)$ 和 $\mathbb{Z}(F_d)$ 分别为 F_d/N 和 F_d 的整数系数群环。记 $\pi\colon\mathbb{Z}(F_d)\to\mathbb{Z}(F_d/N)$ 为典范商映射 $F_d\to F_d/N$ 的线性延拓。令 T 为秩为 d 、以$\{t_1,\ldots,t_d\}$为基的自由左 $\mathbb{Z}(F_d/N)$-模，并考虑矩阵群

$$M(F_d/N):=\left\{\begin{pmatrix}g & t\\ 0 & 1\end{pmatrix}\mid g\in F_d/N \text{ and } t\in T\right\},$$

其中群运算为矩阵乘法。通过直接计算可以验证，T同构于直和 $\bigoplus_{F_d/N}\mathbb{Z}^d$，而 $M(F_d/N)$ 同构于 $\mathbb{Z}^d\wr F_d/N$。下面的定理描述了 $F_d/[N,N]$ 到$M(F_d/N)\cong\mathbb{Z}^d\wr F_d/N$中的 Magnus 嵌入。

定理 3.6 ([Mag39])。令 F_d 为秩为 $d\ge 1$的自由群，并设 $X=\{x_1,\ldots,x_d\}$ 是 F_d的自由基。令 $N\lhd F_d$为一个正规子群，并记 $\pi\colon F_d\to F_d/N$为商映射。那么，同态 $\phi\colon F_d\to M(F_d/N)$定义如下：

$$\phi(x_i):=\begin{pmatrix}\pi(x_i) & t_i\\ 0 & 1\end{pmatrix},\qquad for\ i=1,\ldots,d,$$

~满足 $\ker(\phi)=[N,N]$。因此，ϕ诱导出单同态 $\phi\colon F_d/[N,N]\to M(F_d/N)$。

定理 1.3 的证明。任取定义在 S_d 上的非退化概率测度 μ，其中 $H(\mu) < \infty$，并设 $\{\mu_k\}_{k\geq 1}$ 是一个概率测度序列，其中对每个 $k \geq 1$，都有 $H(\mu_k) < \infty$。假设对每个 $g \in S_{d,m}$，都有 $\lim_{k\to\infty} \mu_k(g) = \mu(g)$，且 $H(\mu_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} H(\mu)$。回想一下，在定理 1.3 的陈述中，我们假设 $d \geq 3$。

利用定理3.6，我们可以将 $S_{d,m}$ 实现为 $\mathbb{Z}^d \wr \left(\mathbb{Z}^d \wr \left(\cdots \mathbb{Z}^d \wr \left(\mathbb{Z}^d \wr \mathbb{Z}^d\right) \cdots\right)\right)$ 的一个子群；该群由 m 个 $\mathbb{Z}^d$ 的迭代花环积构成。由于渐近熵以及定理3.1 的假设在到花环积因子的自然投影下保持不变，因此只需验证诱导测度满足定理3.1的假设。

对于每个 $j = 1, \ldots\ldots, m-1$，考虑群 $B_{j+1} := \mathbb{Z}^d \wr B_j$，其中我们定义 $B_1 = \mathbb{Z}^d$。记 $\pi_j : S_{d,m} \to B_j$ 为到群 B_j 的典范投影，对每个 $j = 1, \ldots\ldots, m-1$ 均如此。于是得到如下结论。

(1) 我们假设 μ 是非退化的，因此 $\operatorname{supp}(\pi_{1*}\mu)$ 生成 $\mathbb{Z}^d$。由于 $d \geq 3$，$\mathbb{Z}^d$ 上的 $\pi_{1*}\mu$-随机游走是暂态的。(2) 结合阿贝尔群上的随机游走具有平凡的泊松边界这一事实与熵判据，我们还得到 $h(\pi_{1*}\mu) = 0$。(3) 对每个 $j = 1, \ldots, m-1$，都有 $\operatorname{supp}(\pi_{j*}\mu)_+ = B_j$。由于 $d \geq 3$，群 $B_1 = \mathbb{Z}^d$ 的增长至少是三次的，其余的群 B_j（$j = 2, \ldots, m-1$）则具有指数增长。由定理 2.4 可得 $\lim_{k\to\infty} p_{\mathrm{esc}}(\pi_{j*}\mu_k) = p_{\mathrm{esc}}(\pi_{j*}\mu)$。

F由此，我们可以直接应用定理 3.1 并得出 $\lim_{k\to\infty} h(\mu_k) = h(\mu)$. □

4. 线性或二次增长的基群

本节我们将关注花环积的基群具有线性或二次增长的情形，这些情形更为微妙。事实上，我们已经提到，在无限二面体群上，逃逸概率对于有限支撑概率测度一般并不连续 [Ers11，引理 3]（另见例 4.5），这会导致形式为 $A \wr D_\infty$ [Ers11，引理 4]（另见例 4.10）的花环积上渐近熵连续性的类似反例。相比之下，我们将在此证明，当基群为 $\mathbb{Z}$ 或 $\mathbb{Z}^2$时，对于具有固定共同支撑的概率测度，连续性确实成立。

4.1. 逃逸概率在 $\mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{Z}^2$上的连续性。 花环积上的渐近熵与其基群上的逃逸概率密切相关。因此，为了处理线性或二次增长的基群，我们首先研究逃逸概率在 $\mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{Z}^2$上的连续性。

命题 4.1. 令 $d \in \{1,2\}$，并考虑一个概率测度 μ 以及定义在 $\mathbb{Z}^d$ 上的概率测度序列 $\{\mu_k\}_{k\geq 1}$，使得存在一个有限子集 $F \subseteq \mathbb{Z}^d$，满足 $\operatorname{supp}(\mu) \subseteq F$ 且 $\operatorname{supp}(\mu_k) \subseteq F$，对所有 $k \geq 1$ 均成立。假设对所有 $g \in \mathbb{Z}^d$，$\lim_{k\to\infty} \mu_k(g) = \mu(g)$。那么，$\lim_{k\to\infty} p_{\mathrm{esc}}(\mu_k) = p_{\mathrm{esc}}(\mu)$。

我们将使用以下结果，它是霍夫丁不等式的推论 [Hoe63，定理 2]。

引理 4.2。 设 μ 是定义在 $\mathbb{Z}$上的有限支撑概率测度，并考虑 a、$b \in \mathbb{Z}$，使得每个 $x \in \text{支撑}(\mu)$ 都满足 $a \leq x \leq b$。记 $\ell := \sum_{x\in\mathbb{Z}} x\mu(x)$，并令 $\{w_n\}_{n\geq 0}$ 为 $\mathbb{Z}$上的 μ-随机游走。那么对所有 $n \geq 0$，都有

$$\mathbb{P}_\mu(w_n = 0) \leq 2\exp\left(-\frac{2n\ell^2}{(b-a)^2}\right). \tag{3}$$

证明。设 μ 是引理陈述中定义在 $\mathbb{Z}$ 上的有限支撑概率测度。根据霍夫丁不等式 [Hoe63，定理 2](另见 [Lal23，命题 A.6。1])，对所有 $n \geq 0$ 和 $t > 0$，都有

$$\mathbb{P}_\mu\left(|w_n - n\ell| \geq t\right) \leq 2\exp\left(-\frac{2t^2}{n(b-a)^2}\right).$$

特别地，将上式代入 $t = n\ell$，我们得到

$$\mathbb{P}_\mu\left(w_n = 0\right) \leq \mathbb{P}_\mu\left(|w_n - n\ell| \geq n\ell\right) \leq 2\exp\left(-\frac{2n\ell^2}{(b-a)^2}\right),$$

这就是我们所要的不等式。 □

在命题 4.1 的证明中，我们将用到以下广为人知的等式，它将 μ-随机游走的逃逸概率与返回原点的预期次数联系起来；例如参见 [Woe00，引理 1.13 (a)]。

引理 4.3. 设 μ 是可数群 G上的概率测度。那么

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu^{*n}(e_G) = \frac{1}{p_{\mathrm{esc}}(\mu)}.$$

命题 *4.1*的证明。考虑 $d = 1$ 或 $d = 2$。设 $\{\mu_k\}^{k\geq 1}$， $F \subseteq \mathbb{Z}^d$ 以及 μ 均如命题所述。对于每个 $k \geq 1$，我们考虑 μ_k 在 $\mathbb{R}^d$上的均值，记作 $\ell_k = \sum_{x\in F} x\mu_k(x)$，以及 $\ell = \sum_{x\in F} x\mu(x)$。由于 F 是有限的，我们有如下收敛 $\ell_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \ell$。

若 $\ell = 0$，那么 μ 在 $\mathbb{Z}^d$ 上的随机游走是常返的，因此 $p_{\mathrm{esc}}(\mu) = 0$。在这种情况下，由 [Ers11，引理 1 (i)] 可知， $\limsup^{k\geq\infty} p_{\mathrm{esc}}(\mu_k) \leq p_{\mathrm{esc}}(\mu) = 0$，因此$\lim_{k\to\infty} p_{\mathrm{esc}}(\mu_k) = 0 = p_{\mathrm{esc}}(\mu)$。在证明的其余部分，我们考虑以下情形：$\ell \neq 0$.

于是，由引理 4.2 以及指数函数的连续性可知，存在 $C > 0$ 和 $K \geq 1$，使得对每个 $k \geq K$，都有

$$\mu_k^{*n}(0) = \mathbb{P}_{\mu_k}(w_n = 0) \leq C\exp\left(-Cn\right). \tag{4}$$

由等式（4）可知，数列 $\{\mu_k^{*n}(0)\}^{n\geq 0}$ 一致地对所有 $k \geq K$都有一个可积数列作为上界。由此可得收敛:

$$\sum_{n\geq 0} \mu_k^{*n}(0) \xrightarrow[k\to\infty]{} \sum_{n\geq 0} \mu^{*n}(0),$$

因此 $p_{\mathrm{esc}}(\mu_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} p_{\mathrm{esc}}(\mu)$。 □

注 4.4。应注意，命题 4.1 若不假设该序列中的所有概率测度都具有共同的固定有限支撑，则并不成立。例如，对每个 $k \geq 1$ 考虑概率测度 μ_k 在 $\mathbb{Z}$ 上定义为

$$\mu_k(1) = \frac{3}{4}\frac{2k}{1+2k}, \mu_k(-1) = \frac{1}{4}\frac{2k}{1+2k}, \text{ and } \mu_k(-k) = \frac{1}{1+2k}.$$

于是，对于每个 $k \geq 1$， μ_k-随机游走在 $\mathbb{Z}$ 上是常返的。事实上，这由以下事实可得:

$$\sum_{x\in\mathbb{Z}} x\mu_k(x) = \frac{3}{4}\frac{2k}{1+2k} - \frac{1}{4}\frac{2k}{1+2k} - \frac{k}{1+2k} = 0.$$

D尽管如此，序列$\{\mu_k\}^{k\geq 1}$ 逐点收敛于一个概率测度 re
μ su使得 μ-随机游走在 $\mathbb{Z}$上是暂态的。

正如我们之前提到的，若考虑除 $\mathbb{Z}$或 $\mathbb{Z}^2$以外的线性或二次增长群，命题4.1 的类似推广并不成立。

例 4.5。考虑无限二面体群 $D_\infty = \langle a,\ b \mid a^2 = b^2 = 1\rangle$。Gil08 [Gil08，引理 4。3] 证明，对于每个 μ 上具有有限一阶矩的适配概率测度 D_∞，相应的 μ-随机游走 D_∞ 是常返的。特别地，任何形如以下形式的概率测度都满足这一点：

$$\mu_k = \left(1 - \frac{1}{k}\right)(p\delta_{ab} + (1-p)\delta_{ba}) + \frac{1}{k}\delta_a,$$

与 $k \geq 1$ 和 $0 \leq p \leq 1$。由于这些测度是常返的，对于所有 $k \geq 1$，我们有 $p_{\mathrm{esc}}(\mu_k) = 0$。此外，我们还有 $\mu_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \mu$ 逐点成立，其中 $\mu = p\delta_{ab} + (1-p)\delta_{ba}$ 支撑在子群 $\langle ab\rangle \cong \mathbb{Z}$上。若 $p \neq 1/2$，则 $p_{\mathrm{esc}}(\mu) > 0$，因此这为支撑在固定有限子集 D_∞.上的概率测度之间逃逸概率的不连续性提供了一个例子

在鲍姆斯拉格–索利塔群 $\mathrm{BS}(1,-1) = \langle a, b \mid bab^{-1} = a^{-1}\rangle$上也可以得到类似的例子。该群具有二次增长且无挠。在这里，可以构造一列概率测度 $\mu_k, k \geq 1$，它们支撑在 $\mathrm{BS}(1,-1)$的一个固定有限子集上，定义常返随机游走，并逐点收敛到一个定义暂态随机游走的概率测度（支撑在 $\mathbb{Z}^2$上）。例如，可以考虑

$$\mu_k = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{k}\right)(\delta_{b^2} + \delta_{b^{-2}} + p\delta_a + (1-p)\delta_{a^{-1}}) + \frac{1}{2k}\left(\delta_b + \delta_{b^{-1}}\right), \text{for } k \geq 1.$$

注 4.6. 设 H 是可数群 G 的有限指数子群，且 μ 是 G 上的非退化概率测度。记

$$\tau := \min\{n \geq 1 : w_n \in H\}$$

G 上 μ 随机游走返回到 H 的首次返回时间。则

$$\mu_H(h) := \mathbb{P}_\mu(w_\tau = h), \qquad h \in H,$$

定义了一个概率测度，其定义在 H上。上的随机游走 G 是暂态的，当且仅当 μ_H上的随机游走 H 是暂态的。此外，若 μ 具有有限支撑，则 μ_H 具有指数尾（例如参见 [Yad24，定理 4.9。3]）。因此，通过考察例4.5中的概率测度，也可以构造出在 $\mathbb{Z}$和 $\mathbb{Z}^2$上的逃逸概率不连续的例子。虽然这些测度的支撑不是有限的，但它们仍具有指数尾。

4.2. **基群为 $\mathbb{Z}$ 或 $\mathbb{Z}^2$时花环积上渐近熵的连续性**。现在我们说明命题4.1 如何推出基群为 $\mathbb{Z}$或 $\mathbb{Z}^2$ 时花环积上渐近熵的连续性（参见例4.10）。

定理 4.7。设 A 是一个可数群，$d \in \{1,2\}$，并考虑花环积 $A \wr \mathbb{Z}^d$。设 $F \subseteq A \wr \mathbb{Z}^d$ 是一个非空有限子集。考虑 μ 和 $\{\mu_k\}_{k\geq 1}$ 上的概率测度 $A \wr \mathbb{Z}^d$，满足对于所有 $k \geq 1$ 都有 $\mathrm{supp}(\mu_k) \subseteq F$。假设由 μ 诱导的 $\mathbb{Z}^d$ 上的随机游走是暂态的，并且对于每个 $g \in A \wr \mathbb{Z}^d$ 都有 $\lim_{k\to\infty} \mu_k(g) = \mu(g)$。则 $\lim_{k\to\infty} h(\mu_k) = h(\mu)$。

证明。由引理 2.6，我们有 $\lim_{k\to\infty} H(\mu_k) = H(\mu)$。记 $\pi\colon\ A \wr \mathbb{Z}^d \to \mathbb{Z}^d$ 为典范满同态。由命题 4.1，我们还得到 $\lim_{k\to\infty} p_{\mathrm{esc}}(\pi_*\mu_k) = p_{\mathrm{esc}}(\pi_*\mu)$。此外，Choquet-Deny 定理与熵判据共同保证 $h(\pi_*\mu) = 0$。因此，我们可以应用定理 2.10，并得出 $\lim_{k\to\infty} h(\mu_k) = h(\mu)$。□

注记 4.8。如果进一步假设 A 是超 FC 中心群，那么定理 4.7 的结论仍然成立，即使在 $\mathbb{Z}^d$ 上诱导的随机游走是递归的。事实上，在这种情况下，μ-随机游走在 $A \wr \mathbb{Z}^d$ 上的泊松边界是平凡的（例如参见 [LP21，命题 4.9]），因此 $h(\mu) = 0$。由于渐近熵是

上半连续的（命题 2.8），且 $h(\mu_k) \geq 0$ 对所有 $k \geq 1$都成立，我们得出$\lim_{k\to\infty} h(\mu_k) = 0 = h(\mu)$。

定理 4.9。 设 $S_{2,m}$ 为秩 2、导出长度为 $m \geq 2$的自由可解群。设 $F \subseteq S_{2,m}$ 为非空有限子集。考虑定义在 $S_{2,m}$ 上的概率测度 μ 和 $\{\mu_k\}_{k\geq 1}$，其中对所有 $k \geq 1$，$supp(\mu_k) \subseteq F$。假设对每个$S_{2,m}$，都有 $\lim_{k\to\infty} \mu_k(g) = \mu(g)$。那么 $\lim_{k\to\infty} h(\mu_k) = h(\mu)$。

证明。与定理 1.3 的证明类似，我们利用定理 3.6 将 $S_{2,m}$ 实现为由 m 个 $\mathbb{Z}^2$的迭代 wreath 积构成的群的子群。对每个 $j = 1, \ldots, m-1$，定义 $B_{j+1} := \mathbb{Z}^2 \wr B_j$，其中 $B_1 := \mathbb{Z}^2$，并记 $\pi_j : S_{2,m} \to B_j$ 为到 B_j的典范投影。首先假设 $\pi_{1*}\mu$在 $B_1 = \mathbb{Z}^2$ 上的随机游走是常返的。那么 $\pi_{2*}\mu$在 $B_2 = \mathbb{Z}^2 \wr \mathbb{Z}^2$ 上的随机游走具有平凡的泊松边界，因此根据熵判据，$h(\pi_{2*}\mu) = 0$。若 $m = 2$，则渐近熵的上半连续性保证 $\lim_{k\to\infty} h(\mu_k) = 0 = h(\mu)$。若 $m \geq 3$，则可重新定义 $\widetilde{B}_{j+1} := \mathbb{Z}^2 \wr \widetilde{B}_j$（其中 $j = 1, \ldots, m-2$），其中 $\widetilde{B}_1 := \mathbb{Z}^2 \wr \mathbb{Z}^2$。对每个 $j = 1, \ldots, m-1$，记$\sim$ $\sim\widetilde{\pi}_j$: $S_{2,m} \to B_j$为到 B_j的典范投影。在此情况下，$\widetilde{}$群 B_1 具有指数增长，因此我们既有 $\widetilde{\pi}_{1*}\mu$在 B_1 上的随机游走$\widetilde{}$是暂态的，也有根据定理 2.4，$\lim_{k\to\infty} p_{\mathrm{esc}}(\widetilde{\pi}_{1*}\mu_k) = p_{\mathrm{esc}}(\widetilde{\pi}_{1*}\mu)$。由此验证了定理 3.1 的假设，故可得 $\lim_{k\to\infty} h(\mu_k) = h(\mu)$。

现在假设 $\pi_{1*}\mu$-随机游走在 $B_1 = \mathbb{Z}^2$ 上是暂态的。那么由命题 4.1 可得 $\lim_{k\to\infty} p_{\mathrm{esc}}(\widetilde{\pi}_{1*}\mu_k) = p_{\mathrm{esc}}(\widetilde{\pi}_{1*}\mu)$。再次验证定理 3.1 的假设，便可得出 $\lim_{k\to\infty} h(\mu_k) = h(\mu)$。□

4.3. **渐近熵不连续的例子。** 我们在引言中提到，可数局部有限群和中间增长的有限生成群，是渐近熵在无限支撑概率测度之间不连续的例子。本小节将更详细地说明涉及花环积的例子；一般而言，即使仅考虑支撑在群的某个固定有限子集上的概率测度，渐近熵也会不连续（例 4.10）。以下这类例子是对 [Ers11，引理 4]的推广。

例 4.10。利用例 4.5 中提到的概率测度，可以在群 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \wr D_\infty$ and$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\wr$BS(1, −1) 上构造渐近熵不连续的例子。事实上，设 G 为 D_∞ 或 BS(1, −1)，并记 $\{\mu_k\}_{k\geq 0}$ 为定义常返随机游走、支撑在固定有限子集 $S \subseteq G$ 上的一列概率测度，且它们逐点收敛到群 G 上定义暂留随机游走的概率测度 μ。设 A 为任意非平凡的超 FC 中心群，并考虑群 $A\wr G$。此外，取群 A 上一个有限支撑概率测度 η。那么，概率测度序列 $\nu_k := \frac{1}{2}\eta + \frac{1}{2}\mu_k$ 是群 G 上的一列概率测度，其支撑包含在 G的一个固定有限子集中，并且对所有 $k \geq 1$，都有 $h(\nu_k) = 0$；序列 $\{\nu_k\}_{k\geq 1}$ 逐点收敛到 $\nu := \frac{1}{2}\eta + \frac{1}{2}\mu$，且 $h(\nu) > 0$。

利用注记 4.6，可以利用上述例子得到在 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}^2$上具有指数尾的概率测度之间，渐近熵的不连续性。

上述例子基于这样一种构造：找到一个渐近熵为零的概率测度序列，使其收敛到一个渐近熵为正的概率测度。接下来我们将证明，将例 4.10 中的任意一个群与一个非阿贝尔自由群作直积，都能得到渐近熵不连续的例子，而且其中涉及的所有概率测度的渐近熵都严格为正。

命题 4.11。 存在一个有限生成群 G 以及定义在 G 上的概率测度 μ,$\{\mu_k\}_{k\geq 1}$，使得

- 存在一个有限子集 $F \subseteq G$，使得 $\mathrm{supp}(\mu_k) \subseteq F$ 对所有 $k \geq 1$ 都成立，

- $\mu_k(g) \xrightarrow[k\to\infty]{} \mu(g)$ 对所有 $g \in G$ 都成立，
- $h(\mu_k) > 0$ 对所有 $k \geq 1$，并且
- 上极限$_{k\to\infty} h(\mu_k) < h(\mu)$.

证明。 这个证明的思路是，乘积随机游走的渐近熵可分解为各个因子上的渐近熵之和。

设 L 是一个有限生成群，它存在概率测度 μ,$\{\mu_k\}_{k\geq 1}$，使得对所有 $k \geq 1$，μ_k的支撑都包含在 L 的一个固定有限子集中，并且 $\{\mu_k\}_{k\geq 1}$逐点收敛到 μ，$\lim_{k\to\infty} H(\mu_k) = H(\mu)$，$h(\mu_k) = 0$ 对所有 $k \geq 1$成立，且 $h(\mu) > 0$。具体来说，可以选取 L 为例 4.10 中所考虑的群之一。此外，考虑 F_2 秩 2 的自由群，并令 η 为 F_2 上的概率测度，该测度在 F_2的一个对称自由生成子集上取均匀分布。

我们考虑群 $F_2 \times L$，并定义概率测度 $\nu, \{\nu_k\}_{k\geq 1}$在 $F_2 \times L$ 上，方式为$\nu(x, g) = \eta(x)\mu(g)$，以及对每个 $k \geq 1$，定义 $\nu_k(x, g) = \eta(x)\mu_k(g)$，并且对 $(x, g) \in F_2 \times L$。于是，我们有

- $\lim_{k\to\infty} \nu_k(x, g) = \eta(x)\mu_k(g) = \nu(x, g)$，对每个 $(x, g) \in F_2 \times L$ 均成立，
- $H(\nu_k) = H(\eta) + H(\mu_k)$ 对每个 $k \geq 1$ 都成立，并且
- $\lim_{k\to\infty} H(\nu_k) = H(\eta) + H(\mu) = H(\nu)$.

此外，注意到对每个 $n \geq 1$、每个 $(x, g) \in F_2 \times L$ 以及所有 $k \geq 1$，我们有$\nu^{*n}(x, g) = \eta^{*n}(x)\mu^{*n}(g)$，以及 $\nu_k^{*n}(x, g) = \eta^{*n}(x)\mu_k^{*n}(g)$。因此，$H(\nu^{*n}) = H(\eta^{*n}) + H(\mu^{*n})$，并且对每个 $k \geq 1$，$H(\nu_k^{*n}) = H(\eta^{*n}) + H(\mu_k^{*n})$。由此可得，$\lim_{k\to\infty} h(\nu_k) = \lim_{k\to\infty} h(\eta) + h(\mu_k) = h(\eta)$，而 $h(\nu) = h(\eta) + h(\mu) > h(\eta)$。此外，对所有 $k \geq 1$，我们有 $h(\nu_k) \geq h(\eta)$。□

这表明，可以通过具有正渐近熵的概率测度序列，实现渐近熵的不连续性。

参考文献

[AAV13] Gideon Amir、Omer Angel 和 Bálint Virág。线性活动自动机群的可 amen 性。欧洲数学会杂志（JEMS），15 3 705 730, 2013 [Cited 5] ( ): – 。见第 页。Ali Khadijeh Alibabaei。关于可[17]
解群上的原有限拓扑。群论杂志，20(4):729– 743, 2017 [Cited 1] 。见第 页。Ami Gideon Amir。关于群上随机游走的速度[17]
与熵的联合行为。群、几何与动力学，11 2 455 467, 2017 [Cited 1] ( ): – 。见第 页。AV Gideon[17]
Amir 和 Bálint Virág。群上随机游走的速度指数。国际数学研究通知（IMRN），(9 2567 2598, 2017 [Cited 1]): – 。见第 页。Ave André Avez。有限生成群的熵。巴黎科学院报告[72]
A-B 辑，275:A1363– A 1366, 1972 [Cited 2] 。见第 页。Bac S. Bachmuth。自由元交换群的自同构。美国数学会汇刊，[65]
118 104，1965 93 1: – 。 [Cited] 见第 页。Bau Gilbert Baumslag。有限表示亚交换群的子群。澳大利亚数学会杂志，[73]
16:98–110，1973。纪念 Hanna Neumann 的论文集，I。 [Cited见第 1] 页。BE David El-Chai Ben-Ezra。高秩自由亚交换群[19]
的 IA-同余核。K-理论年刊，4 3 383 438, 2019 [Cited 2] ( ): – 。见第 页。BE David El-Chai Ben-Ezra。[20]
生成元为 $n \geq 4$ 14 3 729 764, 2020 [Cited 2] 的自由亚交换群的同余子群[82] G G
问题。群、几何与动力学，( ): – 。见第 页。BM S. Bachmuth 和 H. Y. Mochizuki。秩为 3 270 2 693 700, 1982 [Cited 1] 的自由亚交换群的 Aut( ) 的非有限生成性。[85] $F \to F/F''$
美国数学会汇刊，( ): – 。见第 页。BM Seymour Bachmuth 和 Horace Y. Mochizuki。秩为 $F \geq 4$ 292 1 81 101, 1985 [Cited 1] 的自由群的 Aut( ) Aut( )[10]
是满射。美国数学会汇刊，( ): – 。见第 页。BMO Gilbert Baumslag、Charles F. Miller, III 和 Gretchen Ostheimer。自由亚交换群的子群。群、几何与动力学，4 4 657 679, 2010 [Cited 2] ( ): – 。见第 页。BZ[21]
Jérémie Brieussel 和 Tianyi Zheng。有限生成群的随机游走速度、等周性与压缩。《数学年刊》（第二辑），193(1):1–105，2021。[Cited 见第 1 页。]

[Cho26] Inhyeok Choi。压缩等距变换与逃逸率的可微性。《概率论及相关领域》，
194 1 2 1055 1122, 2026 [Cited 2] (-): – 。见第 页。Cor Yves Cornulier。关于元交换群的康托尔–本迪克
[11]
松秩。格勒诺布尔傅里叶研究所年刊，61 2 593 618, 2011 [Cited 2] ( ): – 。见第 页。Der Yves Derriennic。次
[80]
可加遍历定理的若干应用。载于《随机游走会议》（Kleebach，1979）（法语），《Astérisque》第 74 卷，第 183–201 页，4。法国数学会，巴黎，
1980 [Cited 2] 。见第 页。Dyu A. Dyubina。群的花环积上的随机游走特征。圣彼得堡数学研究所札记，
[99]
256 31 37, 264, 1999 [Cited 4] : – 。见第 页。EK A. G.
[13]
Erschler 和 V. A. Kaimanovich。双曲群上随机游走渐近特征的连续性。《功能分析及其应用》，
47 2 84 89, 2013 [Cited on 2] ( ): – 。见第 页。Érs A.
[01]
G. Érshler。关于趋于无穷远速率的渐近行为。圣彼得堡数学研究所札记，
283 251 257, 263, 2001 [Cited 1] : – 。见第 页。Ers Anna
[03]
Erschler。群上随机游走的漂移与熵增长。《概率年刊》，31 3 1193 1204, 2003 [Cited 1] ( ): – 。见第 页。Ers Anna
[04] [Cited on page 2.]
Erschler。群与流形的刘维尔性质。《数学发明》，155(1):55–80，2004。[11] Ers Anna Erschler。花环积与自由亚交换群上随机
游走的泊松–富斯滕贝格边界。《海尔维提数学评论》，86(1):113–143，2011。[Cited 见第 2、5、10、11 和 13] 页。FS Joshua Frisch 和
[23]
Eduardo Silva。花环积的泊松边界。预印本，arXiv:
2310 10160 [ ] 2023 [Cited on pages 2 3] 。math.GR。已被《海
[08]
尔维提数学评论》接收，。和。Gil L. A. Gilch。灯笼人随机游走的加速。《马尔可夫过程及相关领域》，
14 4 465 486, 2008 [Cited 12] ( ): – 。见第 页。GMM Sébastien Gouëzel、Frédéric Mathéus 和 François Maucourant。字双
[18]
曲群中的熵与漂移。《数学发明》，211 3 1201 1255, 2018 [Cited 2] ( ): – 。见第
[17]
页。GSU Funda Gul、Mahmood Sohrabi 和 Alexander Ushakov。群的 Magnus 嵌入与算法性质
$F/N^{(d)}$ 369 9 6189 6206, 2017 [Cited on 2] 。美国数学会汇刊，( ): –
[63]
。见第 页。Hoe Wassily Hoeffding。有界随机变量之和的概率不等式。《美国统计学会杂志》，
58 13 30, 1963 [Cited 10 11] : – 。见第 和 页。Jac Lison Jacoboni。具有较大返回概率的元交换群。格
[19]
勒诺布尔傅里叶研究所年刊，69 5 2121 2167, 2019 [Cited 2] ( ): – 。见第 页。Kai V. A. Kaimanovich。具有非平凡退出边界的
[83]
非阿贝尔离散群实例。列宁格勒数学研究所札记，123:167–184，1983。微分几何、李群与力学，V。
[Cited 2] 见第 页。Kes Harry Kesten。可数群上的全巴拿赫平均值。《斯堪的纳维
[59]
亚数学杂志》，7:146–156，1959。 [Cited 1] 见第 页。Kin J. F. C. Kingman。次可加随机过程的遍历理论。《英国皇家统计学会杂志》
[68]
B 辑，30 499 510, 1968 [Cited 4] : – 。见第 页。KV V. A. Kaimanovich 和 A. M. Vershik。离散群上的随机游走：边界
[83]
与熵。《概率年刊》，11 3 457 490, 1983 [Cited 1 2] ( ): – 。见第 和 页。KV Michał
[15]
Kotowski 和 Bálint Virág。返回概率指数至多为
1 2 20 12, 12, 2015 [Cited 1] / 的非刘维尔群。《电子概率通讯》，： 第 号。
[23] 297
见第 页。Lal Steven P. Lalley。无限群上的随机游走，《数学研究生教材》卷。Springer，Cham，
2023 [Cited 11] 。见第 页。LP Russell Lyons 和 Yuval Peres。灯笼人群的泊松边界：卡伊马诺维奇–
[21]
韦尔希克猜想的证明。欧洲数学会杂志（JEMS），23(4):1133–1160，2021。 [Cited见第 2 12] 页和 页。Mag Wilhelm
[39]
Magnus。关于 Marshall Hall 的一个定理。《数学年刊》（第二辑），40:764–768，1939。 [Cited见第 1, 3, 9] 页和 页。Mat
[66]
Jane Matthews。花环积与自由亚交换群中的共轭问题。美国数学会汇刊，121 329 339, 1966 [Cited 1] : –
[81]
。见第 页。ME Nathaniel F. G. Martin 和 James W. England。熵的数学理论，《数学及其应用百科全书》第 12 卷。Addison-Wesley 出版公司，Reading，
MA， 1981 [Cited 4] 。James K. Brooks 作序。见第 页。MRUV A.
[10]
Myasnikov、V. Roman'kov、A. Ushakov 和 A. Vershik。自由可解群中的字问题与测地问题。美国数学会汇刊，
362 9 4655 4682, 2010 [Cited 2 9] ( ): – 。见第 和 页。
[67]
Roh V. A. Rohlin。关于具有不变测度的变换之熵理论的讲义。《数学科学进展》，
22 5 137 3 56, 1967 [Cited 4] (( )): – 。见第 页。Rom Vitalii Roman'kov。群上的方程。《群、复杂性与密码
[12]
学》，4(2):191–239，2012。[Cited on 第 2 页。]

[*Ros*81] *Joseph Rosenblatt.* 局部紧群上的遍历性与混合随机游走。*Math. Ann.*, 257 1 31 42, 1981 [Cited 1] *( ):* – 。见第 页。*RS V. N. Remeslennikov and V. G. Sokolov. Magnus* 嵌入的若干性质。*Algebra i Logika,* [70] 9 566 578, 1970 [Cited 2] *:* – 。见第 页。*Sal a Andrew W. Sale.* 花环积和自由可解群中共轭问题的几何。[15] 群论杂志, 18 4 587 621, 2015 [Cited 1] *( ):* – 。见第 页。*Sal b Andrew W. Sale.* [15] *Magnus* 嵌入的度量行为。*Geom. Dedicata, 176 313, 2015 305 2 :* – 。 [Cited] 见第 页。*SCZ Laurent* [15] *Saloff-Coste and Tianyi Zheng.* 自由可解群上的随机游走。*Math. Z.*, 279 3 4 811 848, 2015 [Cited 2 9] *(-):* – [25] 。见第 页和第 页。*Sil Eduardo Silva.* 花环积上渐近熵的连续性。预印本，*arXiv:2501*.01712 [*math.GR*]。已被 *J. Reine Angew. Math.*（*Crelle's journal*）接收，*2025* 年。 [Cited 2, 3, 4, 6, 7] 见第 页和第 页。*Spi Frank Spitzer.* 随机游走原理，第 *34* 卷，数学研究生教材。*Springer-Verlag*，*New York-Heidelberg*，第二版， [76] 1976 [Cited 4] 。见第 页。*Tol Vladimir Tolstykh.* 相对自 [11] 由群自同构群中的小共轭类。*J. Pure Appl. Algebra,* 215 9 2086 2098, 2011 [Cited 1] *( ):* – 。见第 页。*Ush Alexander Ushakov.* 自由 [14] 可解群的算法理论：随机化计算。*J. Algebra,* 407 178 200, 2014 [Cited 2] *:* – 。见第 页。*Vas Svetla* [12] *Vassileva. Magnus* 嵌入是拟等距。*Internat. J. Algebra Comput.*, 22 8 1240005, 7, 2012 [Cited 2] *( ):* 。见第 页。 [05] *VD A. M. Vershik and S. V. Dobrynin.* 自由可解群的几何方法。*Internat. J. Algebra Comput.*, 15 5 6 1243 1260, 2005 [Cited 2] *(-):* – 。见第 页。*Ver A. M. Vershik.* 群中增长的动力学理 [00] 论：熵、边界与实例。*Uspekhi Mat. Nauk,* 55 4 334 59 128, 2000 [Cited 2] *(( )):* – 。见第 页。 [24] *Wan Wenhao Wang.* 自由亚交换群上的序。*J. Group Theory, 27(3):485–517, 2024*。 [Cited见第 2] 页。*Woe* [00] *Wolfgang Woess.* 无限图和群上的随机游走，第 *138* 卷，剑桥数学论丛。*Cambridge University Press*，*Cambridge*， 2000 [Cited 11] 。见第 页。*Yad Ariel Yadin.* 群上的调 [24] 和函数与随机游走，剑桥高等数学研究丛书第 卷。*Cambridge University Press*，*Cambridge*，*2024*。[Cited 见第 *12* 页。]电子邮件地 213 址

，Eduardo Silva： eduardo.silva@uni-muenster.de, edosilvamuller@gmail.com
明斯特大学，爱因斯坦大街62号，明斯特48149，德国网址：
https://edoasd.github.io/eduardo_silva_math/