arXiv:2603.14663v1 [math.MG] 15 Mar 2026

二维情形下经典等周不等式的形式化

Miraj Samarakkody

2026年3月17日

摘要

我们使用 Lean 4 证明助手及其数学库 Mathlib，对平面上的经典等周不等式进行了形式化验证。我们沿用 Adolf Hurwitz 的解析方法来证明不等式 $L^2 \geq 4\pi A$，该不等式指出，在所有具有给定周长 L的简单闭曲线中，圆是唯一能使围成的面积 A达到最大值的曲线。形式化过程分为两个阶段。第一阶段，我们建立 Hurwitz 方法所需的傅里叶分析基础：形式化实数集 $[-\pi, \pi]$上三角函数的正交关系、经典傅里叶级数的帕塞瓦尔定理、利用魏尔斯特拉斯 M 判别法证明傅里叶部分和一致收敛、逐项可微性以及维尔廷格不等式。第二阶段，我们完成 Hurwitz 的证明：针对以弧长参数化给出的简单闭 C^1 曲线，在 $[0, 2\pi]$上重新参数化，建立鞋带面积公式，应用分部积分，使用算术—几何平均不等式和维尔廷格不等式，并利用弧长约束推导出界 $A \leq L^2/(4\pi)$。我们讨论了遇到的主要形式化难题，包括无穷和与积分的交换、逐项求导，以及 Mathlib 中不同索引约定的协调。完整的形式化代码可在 https://github.com/mirajcs/IsoperimetricInequality 获取。

关键词： 等周不等式、形式化验证、Lean 4、Mathlib、傅里叶级数、调和分析。

目录

1 引言 **4**

1.1 等周问题.4 1.2 等周不等式.4 1.3 形式化验证与 Lean 4.4 1.4 为何要将等周不等式形式化？.5 1.5 证明策略与论文结构.5

2 Lean 4 和 Mathlib **6**

2.1 依赖类型论.6 2.2 Lean 4 中的命题与证明.6 2.3 Mathlib 的关键组件.6 2.4 记号与约定.7

3 傅里叶级数：基础 **7**
3.1 经典傅里叶级数.7 3.2 Lean 定义.8 3.3 三角函数的正交性.8 3.4 一致收敛：魏尔斯特拉斯 M 判别法.9 3.5 连续性与可积性.10 3.6 逐项求导.10

4 Parseval 定理 12
4.1 陈述与历史.12 4.2 证明策略.12 4.3 步骤 1：代数展开.12 4.4 步骤 2：积分.13 4.4.1 交叉项.13 4.4.2 平方项的计算.14 4.5 Lean 中的形式化陈述.14

5 Wirtinger 不等式 15
5.1 陈述与背景.15 5.2 通过 Parseval 证明.15 5.3 Lean 形式化.16

6 简单闭合曲线与弧长参数化 **17**
6.1 平面光滑曲线.17 6.2 弧长参数化.17 6.3 曲线的 Lean 结构.17 6.4 坐标函数与重新参数化.18 6.5 重新参数化坐标的导数.19 6.6 弧长约束.19

7 Hurwitz 的等周不等式证明 **20**
7.1 证明概述.20 7.2 第一步：面积公式.20 7.2.1 鞋带公式.20 7.2.2 重新参数化.21 7.3 第二步：分部积分.21 7.4 第三步：算术—几何平均不等式.21 7.5 第四步：应用维尔廷格不等式.22 7.6 步骤 5：弧长约束与最终界.23 7.7 主定理.23

8 形式化挑战与设计决策 **24**
8.1 交换求和与积分顺序.24 8.2 逐项求导.24 8.3 欧几里得空间与 PiLp 投影.25 8.4 分部积分.25 8.5 索引约定.25 8.6 Parseval 与 Wirtinger 的假设.25

9 相关工作 **26**

9.1 等周不等式的其他证明.26 9.2 等周不等式的其他形式化.26 9.3 傅里叶分析的相关形式化.27

10 结论 **27**

10.1 主要结果总结.27 10.2 未解决问题与未来工作.27

1 引言

1.1 等周问题

“等周”一词的意思是“周长相等”，等周问题所问的是：在所有周长给定的平面图形中，哪一个围成的面积最大？答案是圆，这一点古希腊人早已知晓；从古代至今，这个问题一直推动着数学的发展。

关于这一问题最早的文学描述之一，出现在维吉尔的《埃涅阿斯纪》中狄多女王的传说里。腓尼基公主狄多获准占有一块土地，面积取决于她能用一张牛皮围出多大的范围。她没有把牛皮整张使用，而是将其切成细条，首尾相连，再沿着海岸摆成半圆，从而围出尽可能大的面积。这个发生在公元前800年左右的古典传说，生动体现了一个直观的观点：对于等周问题而言，圆是独一无二的最优形状。

古希腊人早已深知这一结论。芝诺多罗斯（约公元前200年）在一部如今仅能通过后世摘要得知的著作中证明了 [11], ：周长相同的情况下，圆的面积大于任何正多边形；而边数相同、周长相同的多边形中，正多边形的面积最大。然而，数学家们数百年来始终未能为所有曲线给出严谨的证明。

现代数学处理在十九世纪才真正开始。雅各布·施泰纳（1838年）给出了 $[3, 11]$ 几种巧妙但并不完整的证明，说明如果最优形状存在，它必定是圆。施泰纳对称化论证表明，任何非圆曲线都可以在不改变周长的情况下变形，从而增大其围成的面积。然而，他并未证明最优解存在，而这正是使论证完整所必需的。后来，卡尔·魏尔施特拉斯指出并弥补了这一缺口：他在1870年左右 [11], 通过变分法给出了第一个严格证明，既确立了最优解的存在性，也刻画了圆的性质。

二十世纪初，Adolf Hurwitz 发表了一种极其优雅的解析证明，运用了傅里叶级数（1902年）[9,10], ；本文将对这一方法进行形式化。Hurwitz 的证明完全避开了变分方法，而是借助帕ɪśɪʊ瓦尔恒等式，将不等式归结为对傅里叶系数和的比较。

1.2 等周不等式

我们要验证的精确表述如下。

定理 1.1 (等周不等式 [7,11])。 设 C 是平面上的一条简单闭曲线，其周长为 L，并令 A 表示由 C围成的区域的面积。那么

$$L^2 \geq 4\pi A,$$

当且仅当 C 是一个圆时，等号成立。

不等式 $L^2 \geq 4\pi A$ 可改写为 $A \leq L^2/(4\pi)$。对于半径为 r的圆，我们有$L = 2\pi r$ 和 $A = \pi r^2$，因此 $L^2/(4\pi) = \pi r^2 = A$，这证实了圆能够取到等号。定理的含义是，没有其他形状能够取到等号。

1.3 形式化验证与 Lean 4

形式化验证是通过计算机程序检查数学证明的过程，这种程序称为证明助手 或定理证明器。与依赖读者凭借默契理解来填补推理空缺的非正式数学证明不同，

形式化证明必须使用完全明确的逻辑语言呈现，以便证明助手逐步验证。其优势在于确定性：如果证明助手接受了该证明，那么每个逻辑步骤都已根据底层形式系统的规则经过机器检查。

Lean 4 是一种依赖类型编程语言和定理证明器，由 Leonardo de Moura 和 Sebastian Ullrich 先后在 Microsoft Research 和 Lean Focused Research Organisation 开发 [6]。Lean 4 的类型论基于带有宇宙多态的构造演算，既为编程提供了丰富的类型系统，也为数学形式化奠定了基础。在 Lean 4 中，命题是类型，证明是项；这种命题即类型范式也称为 Curry–Howard 对应 [5, 13], ，意味着编写定理的证明，在语法上与编写相应类型的程序完全相同。

Lean 4 配套的数学库名为 Mathlib [6, 15]。Mathlib 是一个由社区维护的库，涵盖广泛的数学领域，包括代数、拓扑学、测度论、实分析与复分析，以及傅里叶变换理论。Mathlib 的覆盖范围使 Lean 4 成为形式化经典分析结果的理想选择：许多基础引理已经具备，只需在此基础上构建具体论证即可。

1.4 为什么要将等周不等式形式化?

等周不等式是一条经典结果，其证明也广为人知，因此人们或许会好奇，将其形式化能带来什么益处。这样做有几个动机。

首先，形式化为证明正确性提供了确凿的记录。教科书对等周不等式的证明往往会略过一些技术细节：无穷和与积分顺序的交换、逐项求导的合理性，以及曲线所需满足的精确正则性条件。形式化证明会迫使我们明确写出每一个这样的步骤。

其次，形式化过程揭示了论证确切的逻辑结构，以及哪些假设确实不可或缺。在 Hurwitz 的证明中，正如我们将看到的，关键的分析工具是帕塞瓦尔定理和维尔廷格不等式。将证明形式化，能明确曲线究竟需要满足怎样的正则性（C^1 且采用弧长参数化），以及维尔廷格不等式具体如何应用。

第三，这一形式化工作是一个案例研究，展示了如何使用 Mathlib 进行实分析。我们遇到的挑战——交换求和与积分顺序、处理欧几里得空间的投影，以及管理以 $\mathbb{N}$ 和 $\mathbb{N}^+$ 为指标的求和——体现了 Lean 4 在研究生阶段经典分析形式化方面的现状。

1.5 证明策略与论文结构

Hurwitz 的证明如下。给定一条长度为 L 的简单闭合 C^1 曲线 γ，我们通过 $f(\theta) = x(L\theta/(2\pi))$、$g(\theta) = y(L\theta/(2\pi))$，将其重新参数化到 $[0, 2\pi]$ 上。应用鞋带公式和分部积分后，γ所围成的面积可表示为 $A = \int_0^{2\pi} f(\theta)g'(\theta)\, d\theta$。由算术—几何平均不等式可得 $A \le \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(f^2 + (g')^2)\, d\theta$。将维尔廷格不等式应用于 $\bar{f}$（其均值为零），可得 $\int f^2 \le \int (f')^2$。由此将界提升为 $A \le \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}((f')^2 + (g')^2)\, d\theta$。最后，由弧长约束可得 $(f')^2 + (g')^2 = (L/(2\pi))^2$,, ¯结论随即得出。

维尔廷格不等式本身是利用帕塞瓦尔定理证明的：将 $\int f^2$和 $\int (f')^2$表示为傅里叶系数的求和，并逐项进行比较。

本文的结构如下。第2节回顾 Lean 4 和 Mathlib 的相关特性。第3节阐述经典傅里叶级数理论及其形式化。第4节介绍帕塞瓦尔定理及其形式化。第5节证明维尔廷格不等式。第6节定义

简单闭曲线和弧长参数化。第 7 节介绍 Hurwitz 的证明。第 9 节讨论相关工作，第 10 节作总结。

2 Lean 4 与 Mathlib

2.1 依赖类型论

Lean 4 的逻辑基础是归纳构造演算（CIC） [5]，这是一种依赖类型论，其中每个表达式都有一个类型，而类型本身也可以依赖于值。在这个框架中，定理是一个类型，证明是该类型的一个项。例如，命题$\forall n : \mathbb{N},\ n + 0 = n$ 是一个类型，其证明是一个项：给定任意 $n : \mathbb{N}$，它会产生方程 $n + 0 = n$ 的一个证明。依赖类型论区别于简单类型论的关键特征是，类型可以依赖于值：例如，自然数中小于 n 的数所构成的类型 Fin n，是一个依赖于值 n: $\mathbb{N}$ 的类型。这种表达能力使我们能够以统一的方式陈述关于任意数学结构的定理。

2.2 Lean 4 中的命题与证明

在 Lean 4 中，命题是类型为 Prop 的项，而 Prop 是一个类型宇宙。命题P: Prop 的证明是一个项 $h : P$。常见的命题联结词定义如下:

- 合取 $P \wedge Q$ 是积类型 And P Q。
- 析取 $P \vee Q$ 是和类型 Or P Q。
- 蕴含 $P \to Q$ 是从 P 到 Q的函数类型。
- 全称量化 $\forall x : \alpha,\ P(x)$ 是依赖函数类型 $\Pi_{x:\ \alpha} P(x)$。
- 存在量化 $\exists x : \alpha,\ P(x)$ 是 Prop 中的归纳类型 Exists，类似于依赖和类型 $\Sigma_{x:\ \alpha} P(x)$，但它是证明无关的：$\exists x,\ P(x)$ 的任意两个证明在 Prop 中都是定义上相等的。

Lean 4 的证明可以用两种风格编写：项模式，即直接构造证明项；以及 策略模式，即使用一系列策略逐步转换证明义务。Mathlib 中的大多数证明都使用策略模式，依赖 rw（重写）、simp（化简）、linarith（线性算术）、ring（环恒等式）、field simp（域中的化简）和 gcongr（用于不等式的广义同余）等策略。

2.3 Mathlib 的关键组件

我们的形式化工作借鉴了 Mathlib 的以下部分。

分析与积分。 Mathlib.MeasureTheory 库通过测度论提供勒贝格积分、控制收敛定理 [2, 12]（可求和范数的 MeasureTheory.integral tsum），以及区间积分（IntervalIntegral）。类型 IntervalIntegrable f volume a b 表示函数 f 关于勒贝格测度在 $[a, b]$上可积。

微积分。 导数通过 HasDerivAt f f' x 形式化定义，它断言 f 在 Fr´echet 意义下（针对一维情形）在 x 处的导数为f' 。该库提供链式法则（HasDerivAt.comp）、乘积法则（HasDerivAt.mul）以及其他微分引理。

无穷和。级数 $\sum_n f(n)$ 的无条件收敛由 Summable f 表示，而其求和的值为 tsum f（在 Lean 记号中写作 $\sum' n,\ f(n)$）。重要引理包括用于乘积和迭代求和的 Summable.tsum 乘 tsum 和 Summable.tsum prod'。

一致收敛。性质 $F_N \rightrightarrows F$ 由 TendstoUniformly F N F atTop 表示。魏尔斯特拉斯 M 判别法 [12] 可通过 tendstoUniformly tsum nat 使用，而交换极限与导数则通过 tendstoUniformly 的 hasDerivAt 定理实现。

欧几里得空间。标准内积空间 $\mathbb{R}^n$ 建模为 EuclideanSpace $\mathbb{R}$ (Fin n)，它在定义上等于 PiLp 2 空间。通过 PiLp.proj 2 (fun : Fin n => $\mathbb{R}$) i 可投影到某个坐标上；这是一个连续线性映射，因此已知其 HasFDerivAt。

三角函数。库 Mathlib.Analysis.SpecialFunctions.Trigonometric 提供了 sin、cos 及其导数（HasDerivAt.sin、HasDerivAt.cos）、勾股恒等式（sin sq add cos sq）、倍角公式，以及整数 n时 sin($\bar{n}\pi$) 为零这一性质（sin nat mul pi）。

2.4 记号与约定

全文采用以下记号。

- a, b： $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ 表示傅里叶余弦系数和正弦系数。在 Lean 中，它们是变量 (a b : $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$)。
- 索引类型 $\mathbb{N}^+$ （正自然数）在正文中记作 Nat+ 或 $\mathbb{N}^+$；Lean 使用 PNat 或记号 $\mathbb{N}^+$。嵌入 n: $\mathbb{N}^+ \hookrightarrow \mathbb{N}$ 会自动进行强制转换。
- 在数学中，关于 $\mathbb{N}^+$ 的无穷和写作 $\sum_{n=1}^{\infty}$，而在 Lean 中写作 sum' n : Nat+, ...。
- 在 Lean 中，关于 $[a, b]$ 的区间积分写作 integral x in a..b, f x。
- π 表示数学常数 Real.pi。

3 傅里叶级数：基础

3.1 经典傅里叶级数

设 f： $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个 2π-周期的分段连续函数 [14, 16]。f 的傅里叶级数是形式三角级数

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\big), \tag{1}$$

其中傅里叶系数为

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

备注 3.1。 在我们的形式化中，我们不假设系数 a_n， b_n 是通过积分从某个给定函数导出的。相反，我们将 a， $b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ 视为任意序列，并考察它们定义的傅里叶级数。随后，收敛性质可由这些序列的可和性条件推出。在 Lean 中，这种更抽象的方法很自然，因为函数与其傅里叶系数之间的联系需要额外的假设（平方可积性、连续性等），而这些假设对于证明的代数部分并非必需。

3.2 Lean 定义

在我们的形式化中，经典傅里叶级数被定义为一个函数，其输入为 x 给定的系数序列 a 和 b。

```
变量 (a b : 自然数 -> 实数集 )

/-- 经典傅里叶级数:
    f(x) = a0 /2 + 求和_{n=1}^无穷 (an 余弦 (nx ) +bn 正弦 ( nx )). -/
定义傅里叶级数 (x : 实数 ) : Real :=
    (1/2) * a 0 + 求和' n : 自然数+ , (a n * 余弦 (n * x) +b n * 正弦 (n * x))

/-- 第 N 个部分和:
    SN (x) = a0 /2 + 求和_{n =1}^N ( an 余弦 ( nx ) +bn 正弦 ( nx)). -/
定义 傅里叶部分和 (x : 实数 ) (N : 自然数) : 实数 :=
  (1/2) *a 0 + 对 n 求和 属于 有限集 . range N,
    (a (n + 1) * cos ((n + 1 : 实数 ) * x) + b (n + 1) * sin ((n + 1 : 实数 ) * x))

/-- 振荡部分（不含常数项）:
    S(x) = 求和_{n=1}^无穷大 ( an 余弦 ( nx ) +bn 正弦 (nx )). -/
定义 傅里叶和 (x : 实数 ) : 实数 :=
    求和' n : 自然数+ , (a n * 余弦 (n * x) +b n * 正弦 (n * x))

/-- 形式导数级数:
    d/ dx [an 余弦 ( nx ) +bn 正弦 ( nx )] =-n an 正弦 (nx ) +n bn 余弦 ( nx ). -/
不可计算的定义 fourierDeriv (a b : 自然数 -> 实数 ) (x : 实数 ) :=
  求和' n : 自然数 , (-n * a n * 正弦 (n * x) + n * b n * 余弦 (n * x))
```

分解 傅里叶级数 = 常数 + 傅里叶和是显然的:

```
引理 傅里叶级数_eq (x : 实数) : 傅里叶级数 a b x = (1/2) *a 0 + 傅里叶和 a b x := by
rfl
```

3.3 三角函数的正交性

傅里叶分析的基础是系统 $\{1, \text{余弦 } x, \text{正弦 } x, \text{余弦 } 2x, \text{正弦 } 2x, \ldots\}$在 $[-\pi, \pi]$上的正交性。

引理 3.2 (三角函数正交性)。 对于所有 n， $m \in \mathbb{N}^+$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)\,dx = \begin{cases} 0 & n \neq m, \\ \pi & n = m, \end{cases} \tag{4}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(mx)\,dx = \begin{cases} 0 & n \neq m, \\ \pi & n = m, \end{cases} \tag{5}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\sin(mx)\,dx = 0 \quad \textit{for all } n, m. \tag{6}$$

这些结论可由积化和公式以及以下事实证明：对于每个正整数 k，$\int_{-\pi}^{\pi}$ 余弦$(kx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}$ 正弦$(kx)\,dx$ =0。我们通过以下方式证明后者：

$$k\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\,dx = \big[\sin(kx)\big]_{-\pi}^{\pi} = \sin(k\pi) - \sin(-k\pi) = 0, \tag{7}$$

利用 $\sin(k\pi) = 0$ 对整数 k （sin nat mul pi）成立这一事实。

在 Lean 中，这五种情形各自对应一个独立的引理。下面以非对角余弦正交性的证明为例。

```
lemma integration_cos_cos_zero (n m : Nat +) (h : n != m) : integral x in (- Real . pi ) .. Real .pi , cos (n * x)
* cos (m * x) = 0:= by -- 乘积化和差：cos ( nx ) cos ( mx) = 1/2 cos ((n-m)x) + 1/2 cos (( n+m)x) have
prod_sum : forall x : Real , cos (( n : Real ) * x) * cos (( m : Real ) * x) =(1/2) * cos ((( n : Real ) - m) * x) +
(1/2) * cos ((( n : Real ) +m) * x) :=fun x => by have h1 :=cos_sub (( n : Real ) * x) ((m : Real ) * x) have
h2 :=cos_add (( n : Real ) * x) ((m : Real ) * x) simp only [<- sub_mul , <- add_mul ] at h1 h2; linarith
simp_rw [prod_sum ]-- 积分 cos ((n -m)x) 和积分 cos (( n+m)x) 均为零 rw [intervalIntegral . integral_
add ( by fun_prop ) ( by fun_prop ) , intervalIntegral . integral_const_mul , intervalIntegral . integral_
const_mul , int_nm , int_np ]; simp
```

自正交引理（余弦与余弦的积分，以及正弦与正弦的积分）使用半角公式 $\cos^2(nx) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2nx))$，以及 $\int_{-\pi}^{\pi}\cos(2nx)\,dx \equiv 0$ 这一事实。

3.4 一致收敛：魏尔斯特拉斯 M 判别法

为了使傅里叶级数具有有用的解析性质（连续性、可积性、可微性），我们需要它收敛；而要使这些性质能够传递到极限，就需要一致收敛。我们采用的方法是魏尔斯特拉斯 M 判别法。

引理 3.3 (项的界)。 对于所有 $n \in \mathbb{N}$ 和 $x \in \mathbb{R}$,

$$\|a_{n+1}\cos((n+1)x) + b_{n+1}\sin((n+1)x)\| \le \|a_{n+1}\| + \|b_{n+1}\|.$$

证明。 根据三角不等式以及 $|\cos(nx)| \le 1$、$|\sin(nx)| \le 1$:

$$\|a_{n+1}\,\text{余弦}((n+1)x)\| + \|b_{n+1}\,\text{正弦}((n+1)x)\| = \|a_{n+1}\|\cdot|\,\text{余弦}\,| + \|b_{n+1}\|\cdot|\,\text{正弦}\,| \le \|a_{n+1}\| + \|b_{n+1}\|. \quad \square$$

引理 3.4 （傅里叶级数的一致收敛）。 如果 $\sum_{n=0}^{\infty}(\|a_n\| + \|b_n\|) < \infty$，则部分和 $S_N(x)$ 一致收敛于 $\mathit{fourierSeries}(a,\ b)(x)$。

证明。 这是魏尔斯特拉斯 M 判别法（一致趋于无穷和自然数）的直接应用，其中 $M_n = \|a_{n+1}\| + \|b_{n+1}\|$，并使用引理 3.3。在 Lean 中： $\square$

```
引理 傅里叶级数_一致收敛（ hsumab : 可求和（ 函数 n => ||an
|| + ||bn||）） : 一致趋于（函数 N x => 傅里叶部分和 a b x N) ( 傅
里叶级数 a b) Filter .atTop :=由
```

```
有 hshift : 可求和（函数 n => ||a (n + 1)|| + ||b (n + 1)||) :=可求和_PNat_等价_可求和_
succ .mp ( 可求和_PNat_等价_可求和_nat . mpr hsumab ) 有 hcore := 一致趋于_无穷和_nat hshift (
term_bound a b) rw [度量 . 一致趋于_等价 ]引入 eps heps filter_向上滤 [( 度量 . 一致趋于_等价 .
mp hcore ) eps heps ] 取 N hN 引入 x -- 将 Nat+ 重索引为 Nat，并归约为核心收敛 有 heq : 傅里叶级
数 a b x =1 / 2 * a 0 +求和 ' n : Nat , (a (n +1) * 余弦 (( n +1) *x) +b (n +1) * 正弦 ((n +1) *x)) := 由
simp only [傅里叶级数 ]; congr 1 rw [<- 等价 . 无穷和_等式 等价 . 正自然数与自然数的等价 . 对称 ];
congr 1; ext n simp [Nat . succPNat , Nat . cast_succ ]rw [heq , dist_add_left ]; exact hN x
```

3.5 连续性与可积性

引理 3.5. 若 $\sum_{n=0}^{\infty}(\|a_n\| + \|b_n\|) < \infty$，则 $fourierSeries(a, b)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续。

证明。每个部分和 S_N 都是连续的（它是有限个连续函数的和）。由引理 3.4，$S_N \rightrightarrows f$ 一致趋于，而连续函数的一致极限仍连续（一致收敛连续性定理）。在 Lean 中，每个部分和的连续性是通过有限集连续和以及各三角函数项的连续性来证明的。 □

```
引理 傅里叶级数_连续 ( hsumab : 可求和 (函数 n => ||a n|| + ||b n||)) :
连续（傅里叶级数 a b）: = 依据
  应用 （傅里叶级数_一致收敛 a b hsumab）。连续
  应用 滤子。最终。频繁地
  应用 滤子。最终_趋于无穷。mpr
  精化 <0 , 函数 N _ => ?_>
  展开 傅里叶部分和
  应用 连续 .add 连续_const
  应用 连续_有限集_求和
  引入 n _
  精确 ( 连续_const .mul
      （连续_余弦 . comp （连续_常值 .mul 连续_恒等函数 ))。add
          （连续_常值 . mul
      （连续_正弦 . comp （连续_常值 .mul 连续_恒等函数 )))
```

$[-\pi, \pi]$ 上的可积性由连续性立即得出：

```
引理 傅里叶级数_可积 ( hsumab : 可求和 ( 函数 n => ||an|| + ||bn||) ) : IntervalIntegrable ( 傅
里叶级数 a b) 测度论 . 体积 (- 实数 .圆周率 ) 实数 . 圆周率 :=( 傅里叶级数_连续 a b hsumab ). 连续On| >.
intervalIntegrable_of_Icc ( 通过 linarith [ 实数 . 圆周率 _pos ])
```

3.6 逐项求导

对于维尔廷格不等式，我们还需要对傅里叶级数逐项求导。这要求比连续性更严格的条件。

引理 3.6 (逐项求导)。 对于每个 $n \in \mathbb{N}$ 和 $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{d}{dx}\big[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\big] = -n a_n \sin(nx) + n b_n \cos(nx).$$

```
引理 hasDerivAt_项 (n : 自然数 ) (x : 实数 ) : HasDerivAt ( 函数 x => a n * 余弦 (n * x) + b n
* 正弦 (n * x)) ( -(n : 实数 ) * a n * 正弦 (n * x) +n * b n * 余弦 (n * x)) x :=by have h1 :
HasDerivAt ( 函数 x => a n * 余弦 (n * x)) ( -( n : 实数 ) * a n * 正弦 (n * x)) x :=by have :=((
hasDerivAt_id x). const_mul (n : 实数 )). 余弦 simp at this ; exact this . const_mul (a n) |>.
congr_导数 ( by ring ) have h2 : HasDerivAt ( 函数 x => b n * 正弦 (n * x)) (n * b n * 余弦 (n *
x)) x := by have :=(( hasDerivAt_id x). const_mul (n : 实数 )). 正弦 simp at this ; exact this .
const_mul (b n) |>. congr_导数 ( by ring ) exact h1 . add h2
```

引理 3.7 （导数级数的一致收敛）。 若 $\sum_{n=0}^{\infty} n\,(\|a_n\| + \|b_n\|) < \infty$，则形式导数级数的部分和一致收敛于 $\mathit{fourierDeriv}\,(a, b)$ 。

证明是魏尔斯特拉斯 M 判别法的又一次应用，其中 $M_n = n(\|a_n\| + \|b_n\|)$，利用界 $\| - n a_n$正弦$(nx) + n b_n$余弦$(nx)\| \le n(\|a_n\| + \|b_n\|)$。

定理 3.8 （逐项可微性）。 若 $\sum_{n=0}^{\infty}(\|a_n\|+\|b_n\|)$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} n(\|a_n\|+\|b_n\|)$均收敛，则:

$$\frac{d}{dx}\,\mathit{fourierSeries}(a,b)(x) = \mathit{fourierDeriv}(a,b)(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\big(-n a_n \sin(nx) + n b_n \cos(nx)\big).$$

证明。 这可由一般定理 tendstoUniformly 的 hasDerivAt 定理推出：若 (i) 级数的部分和 $\{f_N\}$ 满足 $f_N(x_0) \to f(x_0)$，其中某个 x_0，(ii) 导数级数的部分和一致收敛，且 (iii) 每个 f_N 都可微，则极限 f 可微，其导数等于导数部分和的极限。

在 Lean 中，主要的微妙之处在于，导数级数从 $n = 0$ 开始索引（其中 $n = 0$ 项为零），而傅里叶级数则按 $\mathbb{N}^+$ 索引。我们通过移位来处理：$\sum_{n\in\text{range } N} D(n+1,\ x) = \sum_{n\in\text{range }(N+1)} D(n,\ x)$，使用 Finset.sum range succ'。 □

```
引理 fourierSeries_hasDerivAt ( hab ' : 可求和 ( fun n : 自然数 =>(n : 实数 ) * (|| a n || + || b n ||)) ) (
hab : 可求和 ( fun n => || a n || + || b n ||) ) (x : 实数 ) : HasDerivAt ( fourierSeries a b) (
fourierDeriv a b x) x :=by have hderiv_unif : 一致趋于 ( fun N x =>求和 n in 有限集 . range N , ( -((( n +1) :
实数 ) * a (n +1) * 正弦 (( n +1) * x)+(n +1) * b (n +1) * 余弦 (( n +1) * x))) ( fourierDeriv a b) Filter . atTop :
=by have key : forall N x , 求和 n in 有限集 . range N , ( -(( n +1) : 实数 )*a(n +1) * 正弦 (( n +1) *x) +( n +1)
*b(n +1) * 余弦 (( n +1) *x)) =求和 n in 有限集 . range (N +1) , ( -(n: 实数 )*a n* 正弦 (n*x)+n*b n* 余弦
(n*x)) :=fun N x =>by symm ; rw [有限集 . 求和_范围_succ ']; simp simp_rw [key ]exact fun u hu =>
```

```
    ( Filter . 趋于_atTop_atTop . mpr fun M => <M-1, fun N hN => 通过omega >). eventually(
fourierDeriv_一致收敛 a b hab ' u hu ) exact hasDerivAt_of_一致趋于 hderiv_unif(Filter .
Eventually . of_forall ( hasDerivAt_partialSum a b))( fun y => ( fourierSeries_一致收敛 a b
hab ). 趋于_at y) x
```

4 帕塞瓦尔定理

4.1 陈述与历史

帕塞瓦尔定理以马克-安托万·帕塞瓦尔命名，他于1799年提出了该定理的一个版本。该定理断言，函数的 L^2 范数等于其傅里叶系数的 ℓ^2 范数。在实数集 $[-\pi, \pi]$ 上的经典实傅里叶级数情形中：

定理 4.1 (帕塞瓦尔定理)。 设 $f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ 是一个满足适当可积性和可和性条件的傅里叶级数。那么：

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2\,dx = \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2). \tag{8}$$

帕塞瓦尔定理可视为实数集 L^2 [12, 14] 上普朗歇尔定理的一个实例：傅里叶变换（以及傅里叶级数展开）是从 L^2 到 ℓ^2 的等距映射。在我们的情形中，我们不直接在 L^2 中进行研究，而是在明确的“可和性假设”下验证该等式，这更接近经典处理方式。

4.2 证明策略

证明分为三个阶段：

1. 将 $[f(x)]^2$ 代数展开为常数项、交叉项和双重求和。2. 逐项积分，并使用控制收敛定理证明求和与积分可以交换。3. 使用正交关系（引理 3.2）计算所得的各个积分。

4.3 第 1 步：代数展开

设 $f(x) = \frac{1}{2}a_0 + S(x)$，其中 $S(x) =$ 傅里叶和$(a, b)(x)$。那么：

$$[f(x)]^2 = \frac{a_0^2}{4} + a_0 S(x) + [S(x)]^2. \tag{9}$$

```
引理 傅里叶级数_平方 (x: 实数) : (傅里叶级数 a b x) ^2 = (a 0) ^2 / 4 + a 0 * ( 求和 '
n : 自然数 +, (a n * 余弦 (n * x) + b n * 正弦 (n * x))) +( 求和 ' n : 自然数 +, (a n * 余弦 (n
* x) + b n * 正弦 (n * x))) ^2 : = 通过展开 傅里叶级数; ring
```

通过恒等式 $S^2 = (\sum a_n \cos)^2 + 2(\sum a_n \cos)(\sum b_n \sin) + (\sum b_n \sin)^2$，进一步展开振荡和的平方：

```
引理 expand_square (x : 实数 ) (hc : 可求和 fun n : 自然数 + =>a n * 余弦 (n * x)) (hs : 可求和 fun n : 自然数
+ =>b n * 正弦 (n * x)) : ( 求和 ' n : 自然数 +, (a n * 余弦 (n * x) +b n * 正弦 (n * x)))^2 =( 求和 ' n : 自然数 +,
a n * 余弦 (n * x))^2 +2 * ( 求和 ' n : 自然数+, a n * 余弦 (n * x)) * ( 求和 ' n : 自然数+, b n * 正弦 (n * x)) +( 求
和 ' n : 自然数 +, b n * 正弦 (n * x))^2:=by rw [hc . 无穷和_add hs ]; ring
```

随后将每个平方和展开为双重无穷和。例如：

```
引理 展开_余弦_平方 (x : 实数 )
    (hs1 : 可求和 函数 n : 自然数 + =>a n * 余弦 (n * x))
    ( hprod1 : 可求和 函数 z : 自然数+x 自然数 + =>
      (a z.1 * cos (z.1 * x)) * (a z.2 * cos (z.2 * x)))
    (hinner : 对所有 n : 自然数+ , 可求和 函数 m : 自然数+ =>
      (a n * cos (n * x)) * (a m * cos (m * x))) :
    ( 求和 ' n : 自然数+ , a n * cos (n * x))^2 =
    求和 ' n : 自然数+, 求和 ' m : 自然数+, a n * a m * cos (n * x) * cos (m * x) := 由
  rw [sq, hs1. 无穷和_mul_无穷和 hs1 hprod1, hprod1. 无穷和_prod ' hinner ]
  congr 1; ext n; congr 1; ext m; ring
```

这里使用 Summable.tsum 乘 tsum，将两个和的乘积拆分为对偶索引的和，然后使用 Summable.tsum prod' 将对偶索引的和转换为迭代求和。

4.4 第2步：积分

对 (9) 在 $[-\pi,\pi]$ 上积分：

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\,dx=\frac{a_0^2\pi}{2}+\int_{-\pi}^{\pi}a_0S(x)\,dx+\int_{-\pi}^{\pi}[S(x)]^2\,dx. \tag{10}$$

4.4.1 交叉项

引理 4.2. 在可和性条件 $\sum_{n\ge1}(\|a_n\|+\|b_n\|)<\infty$ 下：

$$\int_{-\pi}^{\pi}a_0S(x)\,dx=0.$$

证明。 提出常数 a_0。只需证明 $\int_{-\pi}^{\pi}S(x)\,dx=0$。利用控制收敛定理交换求和与积分（在 Lean 中为：MeasureTheory.integral tsum of summable integral norm），然后对每个 $n\ge1$ 应用 $\int_{-\pi}^{\pi}$余弦$(nx)\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}$正弦$(nx)\,dx=0$。

□

交换求和与积分所需的 L^1 可和性条件是 $\sum_{n\ge1}\int_{-\pi}^{\pi}\|a_n$ 余弦$(nx)+b_n$ 正弦$(nx)\|\,dx<\infty$，这可由 $\|a_n$ 余弦$(nx)+b_n$ 正弦$(nx)\|\le\|a_n\|+\|b_n\|$ 以及假设的 $\sum(\|a_n\|+\|b_n\|)$ 可和性推出。

```
引理 积分_关于_余弦_正弦 ( hF_积分 : 对所有 n : 自然数+, IntervalIntegrable(函数 x =>a n * 余弦 (n *
x) +b n * 正弦 (n * x)) 测度论 . 体积 (- 实数 . 圆周率 ) 实数 .圆周率 ) ( hF_求和 : 可求和 ( 函数 n : 自然数
+ =>积分 x 属于 (- 实数 . 圆周率 ) .. 实数 .圆周率 , |a n * 余弦 (n * x) +b n * 正弦 (n * x)|)) :
```

积分 x 属于 (- 实数 . 圆周率) .. 实数 .圆周率 , a 0 * 傅里叶和 a b x = 0:=通过 rw [intervalIntegral . 积分_const_mul]由此可得 h : 积分 x 属于 (- 实数 . 圆周率) .. 实数 .圆周率 , 傅里叶和 a b x = 0通过 simp[h]仅 simp [傅里叶和]设 hswap : 积分 x 属于 (- 实数 . 圆周率) .. 实数 .圆周率 , sum ' n : 自然数 +, (a n * 余弦 (n * x) +b n * 正弦 (n * x)) =sum ' n : 自然数 +, 积分 x 属于 (- 实数 . 圆周率) .. 实数 .圆周率 , (a n * 余弦 (n * x) + b n * 正弦 (n * x)) := 通过 have h_le : (- 实数 . 圆周率 : 实数) <=实数 . 圆周率 :=通过 linarith [实数 . 圆周率_pos]simp_rw [intervalIntegral . 积分_of_le h_le]; 对称 apply 测度论 . 积分_无穷和_of_可求和_积分_norm * intro n; exact (hF_积分 n).1 * simp_rw [<- intervalIntegral . 积分_of_le h_le]; exact hF_sum rw [hswap]simp_rw [积分_fourierTerm a b , 无穷和_zero]

4.4.2 平方项的计算

帕塞瓦尔定理的主要内容是以下恒等式:

$$\int_{-\pi}^{\pi} [S(x)]^2 \, dx = \pi \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

这在 Lean 陈述中作为假设 h int sq 给出，反映出从双重求和展开出发的推导——其需要交换双重求和与积分，并应用所有正交性引理——被视为一个经外部验证的步骤。将 $[S(x)]^2 = \sum_n \sum_m [a_n a_m$ 余弦(nx) 余弦$(mx) + \ldots]$ 展开并积分后，正交关系（引理 3.2）给出:

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} [S(x)]^2 \, dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[a_n a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) \, dx + b_n b_m \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(mx) \, dx \right] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} [a_n a_m \pi \delta_{nm} + b_n b_m \pi \delta_{nm}] \\
&= \pi \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2),
\end{aligned}$$

其中 δ_{nm} 是克罗内克δ，且交叉项由等式（6）消失。 .

4.5 在 Lean 中的形式化陈述

完整的 P Parseval 定理明确提出了可积性和可和性假设 s:

```
定理 Parseval_定理
    -- a0*S(x) 在区间上的可积性 [-Real.pi, Real.pi](hfS_int : IntervalIntegrable (函数 x
      => a 0 * fourierSum a b x) MeasureTheory.volume (-Real.pi) Real.pi) -- S(x) 的可积性 ^2 在
    区间 [-Real.pi, Real.pi](hfSq_int : IntervalIntegrable (函数 x => (fourierSum a b
    x) ^ 2) MeasureTheory.volume (-Real.pi) Real.pi) -- 每个傅里叶项都可积(hF_int : 对于所有
    n : Nat +, IntervalIntegrable (函数 x => a n * cos ((n : Real) * x) + b n * sin ((n : Real) *
    x))
```

```
        测度论 . 体积 (- 实数 . 圆周率 ) 实数 . 圆周率 )
    -- L ^1 积分与求和交换的可和性
    (hF_求和 : 可求和 ( 函数 n : 自然数+ =>
      积分        x in (- 实数 . 圆周率 ) .. 实数 .圆周率 , | |a n  * cos ((n :  实数 ) *  x) + b  n *
          sin ((n : 实数 ) * x) | |) )
    -- 积分 S(x)^2 =实数 . 圆周率 * 求和 ( an ^2 +bn ^2)                (傅里叶
        基底 )
     (h_int_sq:     积分 x属于          (- 实数集 . 圆周率) .. 实数集 .圆周率,     (傅里叶和 a b x) ^2 =
      实数 .圆周率 *   求和 ' n :  自然数 +,  ((a n) ^2 +  (b n) ^2) )  :
    (1/ 实数 .圆周率 ) * 积分        x in (- 实数 . 圆周率 ) .. 实数 .圆周率 ,  ( 傅里叶级数 a b x)^2 =
    (1/2)  * (a 0)^2 +  求和 ' n :  自然数 +,  (( a n)^2 +  (b n) ^2)  : = 由
  -- 逐点展开 f ^2 =( a0 /2) ^2 +a0*S +S ^2
  有 hpt:  对于 x : 实数 ,                ( 傅里叶级数 a b x)^2 =
        (1/4 : 实数 ) * (a 0) ^2 +a 0 * 傅里叶和 a b x +( 傅里叶和 a b x)^2:=
    函数 x => 由 仅 simp        [傅里叶级数_eq ]; ring
  simp_rw  [hpt ]
  -- 子表达式的可积性
  有 h_求和_int: IntervalIntegrable
        (函数 x =>(1/4: 实数 )*( a 0) ^2 +a 0 * 傅里叶和 a b x)
            测度论 . 体积                (- 实数 .圆周率 ) 实数 . 圆周率 :=
    区间可积_常数 .加 hfS_积分
  -- 线性拆分积分
  rw  [区间积分 .积分_加 h_求和_积分 hfSq_积分 ,
        区间积分 . 积分_加 intervalIntegrable_常数 hfS_积分 ]
  -- 计算每一部分
  rw  [常数积分_of_常数 ,          常数积分_of_余弦_正弦 a b hF_积分 hF_求和 ,          h_积分_平方 ]
  仅 simp      [加_零 ]
  域_simp      [实数集 . 圆周率_不等于_零 ]
```

证明利用积分的线性性将三项拆开，将常数项计算为$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{4} a_0^2 \, dx = \frac{1}{2} a_0^2 \pi$，对交叉项应用引理 4.2, 并对平方项使用假设 h int sq。除以 π后，使用 field simp 完成算术运算。

5 维尔廷格不等式

5.1 陈述与背景

维尔廷格不等式是一种解析不等式，描述周期函数的 L^2 范数与其导数 [8]的 L^2 范数之间的关系。它是庞加莱不等式 [2], 的一个特例，并在微分算子的谱理论中发挥着核心作用。

定理 5.1 (维尔廷格不等式 [2])。设 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个 2π-周期函数，且连续并具有连续导数。若 $\int_0^{2\pi} f(x)\, dx = 0$，则：

$$\int_0^{2\pi} [f(x)]^2 \, dx \le \int_0^{2\pi} [f'(x)]^2 \, dx. \tag{11}$$

当且仅当存在某些 $a, b \in \mathbb{R}$，使得 $f(x) = a$ 余弦 $x + b$ 正弦 x 时，等号成立。

5.2 通过 Parseval 证明

证明。由于 f 是 2π-周期的，且具有连续导数，因此 f 的傅里叶级数一致收敛。零均值条件 $\int_0^{2\pi} f(x)\, dx = 0$ 意味着 $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = 0$，因此常数项消失：

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\big). \tag{12}$$

根据帕塞瓦尔定理 (8)（取 $a_0 = 0$）：

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} [f(x)]^2\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2). \tag{13}$$

由于 f' 也是 2π-周期且连续，根据定理 3.8，我们可以逐项求导：

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\bigl(-na_n\sin(nx) + nb_n\cos(nx)\bigr). \tag{14}$$

将帕塞瓦尔定理应用于 f'（其正弦傅里叶系数为 na_n，余弦傅里叶系数为 nb_n）：

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} [f'(x)]^2\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} n^2(a_n^2 + b_n^2). \tag{15}$$

对于每个 $n \in \mathbb{N}^+$，我们有 $n \geq 1$，因此 $n^2 \geq 1$，从而：

$$a_n^2 + b_n^2 \leq n^2(a_n^2 + b_n^2). \tag{16}$$

对所有 $n \geq 1$ 求和，并使用（13）和（15）：

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} [f(x)]^2\,dx \leq \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} [f'(x)]^2\,dx,$$

将其乘以 π 后，即得所需的不等式（11）。

等号条件。当且仅当对所有 $n \geq 1$ 都有 $n^2(a_n^2+b_n^2) = a_n^2+b_n^2$ 时等号成立，即对所有 $n \geq 1$ 都有 $(n^2-1)(a_n^2+b_n^2) = 0$。对于 $n \geq 2$，我们有 $n^2 - 1 > 0$，因此 $a_n = b_n = 0$。于是 $f(x) = a_1$ 余弦 $x + b_1$ 正弦 x。□

5.3 Lean 形式化

在 Lean 中，维尔廷格不等式的恒等式形式如下所述：

```
/- - 维尔廷格恒等式：(1/ 实数 . 圆周率 ) 积分_ {- 实数 .圆周率 } ^{ 实数 .圆周率 } (f') ^ 2 =求和_ {n >=1} n ^ 2 ( an ^ 2 +bn ^ 2)。这是将 Parseval 恒等式应用于导数级数的结果。 -/ 定理 Wirtingers_不等式 ( h_int_sq : 积分 x in (- 实数 . 圆周率 ) .. 实数 .圆周率 , ( 导数 ( 傅里叶级数 a b) x)^ 2 =实数 . 圆周率 * 求和 ' n : 自然数 +, ((n : 实数 ) ^ 2* (( a n) ^ 2 +(b n) ^ 2) )) : (1/ 实数 . 圆周率 ) * 积分 x in (- 实数 . 圆周率 ) .. 实数 . 圆周率 , ( 导数 ( 傅里叶级数 a b) x) ^ 2 =求和 ' n : 自然数 +, (( n : 实数 ) ^2* (( a n)^2 +(b n) ^2) ) :=by rw [ h_int_sq ]; field_simp [ 实数 . 圆周率_ne_zero ]
```

实际不等式 $\int f^2 \leq \int (f')^2$ 是在等周证明中推导出来的，作为应用 Wirtinger 不等式的引理。关键步骤是比较两个帕塞瓦尔和。

```
/- - 不等式积分_0 ^2实数集 .圆周率 f ^2 <= 积分_0 ^2实数集 . 圆周率 (f') ^2对于零均值 f, 通过逐项比较 Parseval 和得出。 -/引理 应用_Wirtinger_不等式 ( gamma : 简单闭合 C¹ 曲线 2) (a b : 自然数 -> 实数 ) ( h_帕塞瓦尔: 积分 t 属于 (0: 实数 ) ..(2* 实数集 . 圆周率 ) , ( fParm gamma t) ^2 =实数集 . 圆周率 * 求和 ' n : 自然数 +, ((an) ^2 +(bn) ^2) )
```

```
( h_Wirtinger : 积分 t 属于 (0: 实数 ) ..(2* 实数集 . 圆周率 ) , ( 导数 ( fParm gamma ) t)^2 =实数集 . 圆周率 * 求和 ' n : 自然数 +, ((n: 实数 ) ^2* (( a n) ^2 +(b n) ^2) )) ( hsum : 可求和 ( fun n : 自然数 + => (n: 实数 )^2* (( a n) ^2 +(b n) ^2) )) : 积分 t 属于 (0: 实数 ) ..(2* 实数集 . 圆周率 ) , ( fParm gamma t) ^2 <=积分 t 属于 (0: 实数 ) ..(2* 实数集 . 圆周率 ) , ( 导数 ( fParm gamma ) t)^2:=by rw [h_帕塞瓦尔 , h_Wirtinger ]应用 mul_le_mul_of_nonneg_left _ ( le_of_lt 实数集 . 圆周率_pos ) -- 逐点比较和 ( an ^2+ bn ^2) <=求和 n ^2( an ^2+bn ^2), 因为 n >=1蕴含 n^2>=1有 hpw : 对所有 n : 自然数 +, (a n) ^2 + (b n) ^2 <=(n: 实数 ) ^2* (( a n) ^2 +(b n)^2) := fun n => by 有 hn : (1: 实数 ) <=(n: 实数 ) :=by exact_mod_cast n. one_le 有 hnn : (0: 实数 ) <=(a n)^2 +(b n)^2:=by positivity nlinarith [sq_非负 (( n: 实数 ) - 1)]有 hsum_left : 可求和 ( fun n : 自然数 + =>(a n)^2 +(b n) ^2) :=可求和 . of_非负_of_le ( fun n => by positivity ) hpw hsum exact hsum_left . 无穷和_le_无穷和 hpw hsum
```

注 5.2. nlinarith 调用通过提示 $0 \le (n-1)^2 = n^2 - 2n + 1$ 得出 $n^2 \ge 2n - 1 \ge 2 \cdot 1 - 1 = 1$，从而为 $n \ge 1$ 关闭目标 $1 \le n^2$。

6 简单闭曲线与弧长参数化

6.1 平面光滑曲线

平面曲线 *plane curve* 是一个连续映射 $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^2$。如果 $\gamma(0) = \gamma(L)$，我们称其为闭合；如果它在开区间 $(0, L)$ 上没有自交，则称其为简单；如果它可微且具有连续导数，则称其为C^1。

在分析中，通常将 γ 视为定义在整个 $\mathbb{R}$ 上且为 L-周期的函数，因此对所有 t，都有 $\gamma(t + L) = \gamma(t)$。这样曲线在全局上光滑，并且可以使用傅里叶分析。

γ 在时刻 t 的速度向量为 $\gamma'(t)$，速率为 $\|\gamma'(t)\|$。γ 在 $[a, b]$上的弧长为

$$\ell(\gamma; a, b) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt.$$

6.2 弧长参数化

若曲线 $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ 满足对所有 t都有 $\|\gamma'(t)\| = 1$，则称其为弧长参数化（或单位速率）曲线。对于这样的曲线，从 0 到 t 的弧长等于 t，曲线的总长度为 L。

任何正则（速率处处非零）的 C^1 曲线都可以按弧长重新参数化。在我们的形式化中，我们直接处理弧长参数化曲线，并将条件 IsArcLengthParametrized γ 作为假设。

6.3 曲线的 Lean 结构

我们用一个 Lean 结构来表示简单闭合的 C^1 曲线，其字段编码了所有必要的性质。

```
/- - 一条简单闭合 C^1实数集中的曲线 ^n, 以 [0,L]为参数, 其中 L 是弧长。 -/结构体
SimpleClosedC1Curve（n：自然数）其中/-- 参数化映射。 -/
```

```
曲线：实数集 -> 欧几里得空间 实数集（有限类型 n）/- - 周期（弧长），为正。 -/ 长度：实数集 length_
pos： 0 < length /- - 曲线连续。 -/ 连续：连续 曲线 /- - 曲线为 C ^ 1¹：每一点都存在导数。 -/ has_deriv:
对所有 t：实数集，存在 f：欧几里得空间 实数集（有限类型 n），HasDerivAt curve f t /- - 曲线闭合：端点
重合。 -/ 闭合：curve 0 = curve length /- - 曲线是 L 周期的。 -/ 周期：对所有 t：实数集，curve (t +
length ) = curve t /- - 曲线简单：在 (0，L) 上为单射。 -/ 简单：对所有 t s：实数集，t 属于 Set . Ioo 0
length -> s 属于 Set . Ioo 0 length ->curve t = curve s ->t = s
```

关于设计选择的几点说明：

•曲线映射到欧几里得空间 $\mathbb{R}$ (有限类型 n) 中，这是 Mathlib 的有限维欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$。对于平面（$n = 2$），坐标可通过 γ.curve t 0 和γ.curve t 1 访问。

• C^1 条件表述为存在一个 HasDerivAt 意义下的导数，这表示 Fr´echet 可微。计算时我们使用经典导数（deriv）。

• 这里同时包含闭合和周期两种条件，因为证明的不同部分会用到它们：分部积分中的边界项需要闭合条件，而重新参数化则需要周期条件。

相关定义：

```
/- - 伽马曲线在 [a , b]. -/noncomputable def arcLength {n : Nat} ( gamma : SimpleClosedC1Curve n) (a b :
Real) : Real :=积分 t 属于 a ..b, || deriv gamma . curve t ||/- - 总周长。 -/noncomputable def perimeter
{n : Nat} ( gamma : SimpleClosedC1Curve n) : Real :=arcLength gamma 0 gamma . length/- - 单位速率（弧长参数
化）。 -/def IsArcLengthParametrized {n : Nat} ( gamma : SimpleClosedC1Curve n) : Prop :=对于所有 t : Real ,
|| deriv gamma . curve t || = 1
```

6.4 坐标函数与重新参数化

对于平面曲线 γ (简单闭合 C^1 曲线 2)，我们提取坐标函数，并引入重新参数化坐标。

```
/-- gamma 在 s 处的 x 坐标。 -/不可计算定义 xCoord ( gamma : 简单闭合 C¹ 曲线 2) (s : 实数 ) : 实数 :=
gamma . curve s 0/-- gamma 在 s 处的 y 坐标。 -/不可计算定义 yCoord ( gamma : 简单闭合 C¹ 曲线 2) (s : 实
数 ) : 实数 :=gamma . curve s 1
```

/- - 重新参数化后的 x: f(theta) =x(Ltheta /(2 实数集 .圆周率)). -/不可计算定义 fParm (gamma : 简单闭合 C¹ 曲线 2) (theta : 实数) : 实数 :=xCoord gamma (gamma . length * theta / (2 * 实数集 . 圆周率))

/- - 重新参数化后的 y: g(theta) =y(Ltheta/(2Real .pi)). -/不可计算定义 gParm (gamma : 简单闭合 C¹ 曲线 2) (theta : 实数) : 实数: =y 坐标 gamma (gamma . 长度 * theta / (2 * 实数 . 圆周率))

2π周期的 f 和 g 是 γ 周期性的直接结果 :

$$f(\theta+2\pi)=x\left(\frac{L(\theta+2\pi)}{2\pi}\right)=x\left(\frac{L\theta}{2\pi}+L\right)=x\left(\frac{L\theta}{2\pi}\right)=f(\theta). \tag{17}$$

引理 fParm_周期的 (gamma : 简单闭合 C¹ 曲线 2) (theta : 实数) : fParm gamma (theta + 2* 实数 . 圆周率) =fParmgammatheta:= 通过仅 simp [fParm , x 坐标]有 h : gamma . 长度 * (theta + 2* 实数 . 圆周率) / (2 * 实数 . 圆周率) =gamma . 长度 * theta / (2 * 实数 . 圆周率) +gamma . 长度: = 通过 field_simprw [h , gamma . 周期的]

6.5 重新参数化坐标的导数

根据链式法则，重新参数化坐标的导数为:

引理 6.1 (重新参数化导数)。 对于所有 $\theta\in\mathbb{R}$:

$$f'(\theta)=x'\left(\frac{L\theta}{2\pi}\right)\cdot\frac{L}{2\pi},\qquad g'(\theta)=y'\left(\frac{L\theta}{2\pi}\right)\cdot\frac{L}{2\pi}.$$

lemma fParm_deriv (gamma : 简单闭合 C¹ 曲线 2) (theta : 实数) : deriv (fParm gamma) theta = deriv (x 坐标 gamma) (gamma . length * theta / (2 * 实数 . 圆周率)) * (gamma . length / (2 * 实数 . 圆周率)) :=by have hinner : HasDerivAt (fun t =>gamma . length * t / (2 * 实数 . 圆周率)) (gamma . length / (2 * 实数 .圆周率)) theta :=by have heq : (fun t : 实数 =>gamma . length * t / (2 * 实数 . 圆周率)) = fun t =>t * (gamma . length / (2 * 实数 .圆周率)) :=by ext t; ring rw [heq]; simpa using (hasDerivAt_id theta). mul_const (gamma . length / (2 * 实数 . 圆周率)) have hg :=(x 坐标_hasDerivAt gamma _). differentiableAt . hasDerivAt exact HasDerivAt . deriv (HasDerivAt . comp theta hg hinner)

6.6 弧长约束

引理 6.2 （弧长约束）。 若 γ 是弧长参数化的，则对所有 θ:

$$[f'(\theta)]^2+[g'(\theta)]^2=\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2.$$

证明。 根据引理 6.1， $[f']^2+[g']^2=([x']^2+[y']^2)\cdot(L/(2\pi))^2$。在 $s=L\theta/(2\pi)$ 处，弧长条件给出 $\|(\gamma'(s))\|=1$，并且由于 $\gamma'(s)=(x'(s)\ y'(s))\in\mathbb{R}^2$，我们有 $[x'(s)]^2+[y'(s)]^2=1$。因此 $[f']^2+[g']^2=(L/(2\pi))^2$。

在 Lean 中，要从 $[x']^2+[y']^2=1$ 推导出 $\|\gamma'\|=1$，需要使用 EuclideanSpace.norm sq eq 恒等式和 Fin.sum univ two。 - □

```
引理 根据_的_弧长_长度_参数化 ( gamma : 简单闭合 C¹ 曲线 2)
      (h : 弧长参数化                    gamma ) ( theta : 实数) :
      导数 (x 坐标          gamma ) ( gamma . 长度 * theta / (2 * 实数 .圆周率 ))          ^ 2 +
      导数 (y 坐标          gamma ) ( gamma . 长度 * theta / (2 * 实数 .圆周率 ))          ^ 2 = 1 : = 作者:
  设 t : =      gamma . 长度 * theta / (2 * 实数 .圆周率 )
  有 hchoose : 导数 gamma . 曲线 t  = (gamma . has_导数 t). choose: =
     ( gamma . has_导数 t). choose_spec .导数
  have  hnorm:   ||( gamma . has_导数 t). choose || = 1 : = 由          rw [<- hchoose ];      exact h
     t
  rw  [( x 坐标_HasDerivAt      gamma t).导数,       ( y 坐标_HasDerivAt      gamma t). 导数 ]
  已知hsq : (gamma . has_导数 t). 选择 0                ^ 2 + (gamma. has_导数 t). 选择 1          ^ 2
     =
      ||( gamma . has_导数      t). 选择 ||      ^ 2 := by
    rw  [欧几里得空间 .norm_sq_eq ]; simp          [有限类型 . 求和_univ_two,     实数 . norm_eq_abs,
       sq_abs ]
  rw  [hsq,   hnorm,    一_次幂 ]

引理 fParm_gParm_导数_等于_求和_常量 ( gamma : 简单闭合 C¹ 曲线 2)
      (h : 弧长参数化                    gamma ) ( theta : 实数) :
      导数 ( fParm gamma) theta        ^ 2 + 导数 ( gParm gamma ) theta        ^ 2 =
         ( gamma . 长度 / (2 * 实数 .圆周率 ))       ^ 2: = 由
  rw  [fParm_gParm_导数_平方_求和,     由于_to_弧_长度_参数化 gamma h ]; ring
```

7 Hurwitz 的等周不等式证明

7.1 证明概述

Adolf Hurwitz 于 1902年 发表的证明，巧妙地通过傅里叶级数将一个几何定理化为纯粹的解析不等式。该论证分为五个主要步骤，下面我们将逐一详细展开。

给定 γ : 简单闭合 C¹ 曲线 2，其弧长为 L ，且满足弧长参数化条件 γ，令 f =fParm γ 和 g =gParm γ 为重新参数化坐标。我们证明 $A \le L^2/(4\pi)$，其中 A =面积 γ 0 γ.长度。

7.2 第一步：面积公式

7.2.1 鞋带公式

平面中的简单闭曲线 γ 所围成的有向面积，可由格林定理 [7] 计算如下：

$$A = \frac{1}{2}\int_0^L \big(x(t)\,y'(t) - y(t)\,x'(t)\big)\,dt. \tag{18}$$

这有时称为鞋带公式 或测量师公式。

在 Lean 中，面积定义如下：

```
不可计算的定义 面积 ( gamma : 简单闭合 C¹ 曲线 2) (a b : 实数 ) : 实数 :=(1/2) * 对 t 积分 在 a..b , ( ga
mma . 曲线 t 0 * gamma . 曲线的导数 t 1 - gamma . 曲线 t 1 * gamma . 曲线的导数 t 0)
```

7.2.2 重新参数化

替换后 ng $t = L\theta/(2\pi)$（即 $s = L\theta/(2\pi)$、 $ds = (L/(2\pi))\,d\theta$），面积公式变为 :

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \big(f(\theta)\,g'(\theta) - g(\theta)\,f'(\theta)\big)\,d\theta. \tag{19}$$

参数化面积的证明涉及:

1. 将 $x(s)$ 表示为 $f(2\pi s/L)$，并将 $x'(s)$ 表示为 $(2\pi/L)f'(2\pi s/L)$。

2. 应用积分换元 intervalIntegral.smul integral comp mul left，缩放因子为 $2\pi/L$。

3. 通过 PiLp.proj 结构，将 x 坐标和 y 坐标的导数与 deriv γ.curve 的分量联系起来。

7.3 第 2 步：分部积分

引理 7.1 (对 fParm gParm 使用分部积分)。 如果 *deriv* γ.*curve*连续，则:

$$\int_0^{2\pi} f(\theta)\,g'(\theta)\,d\theta = -\int_0^{2\pi} g(\theta)\,f'(\theta)\,d\theta.$$

证明。 根据乘积法则， $[f\cdot g]' = f'g + fg'$。在 $[0, 2\pi]$ 上进行积分，并应用微积分基本定理:

$$\int_0^{2\pi} (f'g + fg')\,d\theta = \big[f(\theta)g(\theta)\big]_0^{2\pi} = f(2\pi)g(2\pi) - f(0)g(0) = 0,$$

where the boundary t$^{\text{erm van}}$ ishes b$_{\text{y }2\pi\text{-周期}}$ iodicity of f and g. Therefore $\int_0^{2\pi} fg'\,d\theta = -\int_0^{2\pi} f'g\,d\theta$ 。在 Lean 中，这是通过 intervalIntegral.integral eq sub of hasDerivAt（区间积分的微积分基本定理）建立的，具体步骤如下：(i) 通过链式法则（HasDerivAt.comp）验证 f 和 g 在每一点都有导数（HasDerivAt）；(ii) 根据 deriv γ.curve 的连续性和链式法则，证明 f' 和 g' 的连续性；(iii) 根据周期性，注意到边界项 $[fg]_0^{2\pi} = 0$ 。 □

将面积公式与分部积分结合:

引理 7.2 (面积简化)。 $A = \int_0^{2\pi} f(\theta)\ g'(\theta)\ d\theta.$

证明。 由 (19)， $A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(fg' - gf')\ d\theta$。根据引理 7.1， $\int fg' = -\int gf'$，因此 $\int(fg' - gf')$ $=\int fg' + \int fg' = 2\int fg'$。所以 $A = \int fg'$。 □

7.4 第 3 步：算术—几何平均不等式

引理 7.3 (fParm gParm 不等式)。 对所有 $\theta \in \mathbb{R}$:

$$2\,f(\theta)\,g'(\theta) \le [f(\theta)]^2 + [g'(\theta)]^2.$$

证明。 这是算术—几何平均不等式 $2uv \le u^2 + v^2$，由 $(u - v)^2 \ge 0$ 得出。在 Lean 中，可通过 nlinarith [sq nonneg (fParm _ γ θ - deriv (gParm γ) θ)] 来证明（或者等价地，通过 have h : 0 ≤ (f - g')^2 := sq nonneg ; nlinarith [h] 来证明）。 □

推论 7.4 (面积不等式)**.** $A \le \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi} \left([f(\theta)]^2 + [g'(\theta)]^2\right) d\theta.$

证明。由引理 7.2，$A = \int_0^{2\pi} fg'\,d\theta$。根据引理 7.3，逐点有 $fg' \le \frac{1}{2}(f^2 + (g')^2)$，因此由积分单调性（intervalIntegral.integral_mono_on）可得 $\int fg' \le \frac{1}{2}\int (f^2 + (g')^2)$。 □

```
引理 面积_不等式 ( gamma : 简单闭合 C¹ 曲线 2) ( hdc : 连续 ( 导数 gamma . 曲线 )) : 面积 gamma 0
gamma . 长度  <=(1/2) * 积分 t in (0: 实数 ) ..(2* 实数 .圆周率 ) , (( fParm gamma t) ^ 2  + ( 导数 ( gParm
gamma ) t) ^ 2) := by rw  [ 面积_simplified gamma hdc ]have hpw : forall t in Set . Icc (0: 实数 ) (2* 实数 .
圆周率) , fParm gamma t * 导数 ( gParm gamma ) t  <=(1/2) * (( fParm gamma t) ^ 2  + ( 导数 ( gParm
gamma ) t) ^ 2) :=fun t  _  =>  by linarith  [fParm_gParm_不等式 gamma t ]have hmono :=
intervalIntegral . integral_mono_on ( by positivity ) ( by fun_prop ) ( by fun_prop ) hpw linarith
```

7.5 第四步：应用维尔廷格不等式

必要时，我们可以沿 x 方向平移 γ，假设 $\int_0^{2\pi} f(\theta)\,d\theta = 0$，也就是说，曲线质心在 x 方向上位于原点。在此假设下，维尔廷格不等式（定理 5.1）适用于 f，从而得到 $\int_0^{2\pi} f^2 \le \int_0^{2\pi} (f')^2$。

在该不等式两边加上 $\int_0^{2\pi} (g')^2\,d\theta$：

$$\int_0^{2\pi} \left(f^2 + (g')^2\right) d\theta \le \int_0^{2\pi} \left((f')^2 + (g')^2\right) d\theta. \tag{20}$$

结合推论 7.4:

$$A \le \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left((f')^2 + (g')^2\right) d\theta. \tag{21}$$

将其整理为引理中的不等式:

```
引理 addition_不等式 ( gamma : 简单闭合 C¹ 曲线 2) ( hdc : 连续 ( 导数 gamma . 曲线 )) (a b : 自然数 ->  实
数 ) ( h_parseval : 积分 t in (0: 实数 ) ..(2* 实数 .圆周率 ) , ( fParm gamma t) ^ 2  =实数 . 圆周率 * 求和 ' n :
自然数 +, ((a n) ^ 2  +(b n) ^ 2) ) ( h_wirtinger : 积分 t in (0: 实数 ) ..(2* 实数 .圆周率 ) , ( 导数 ( fParm
gamma ) t) ^ 2  =实数 . 圆周率 * 求和 ' n : 自然数 +, ((n: 实数 ) ^ 2* (( a n) ^ 2  +(b n) ^ 2) )) ( hsum : 可求和
( fun n : 自然数 +  =>(n: 实数 ) ^ 2* (( a n) ^ 2  +(b n) ^ 2) )) : 面积 gamma 0 gamma . length  <=(1/2) * 积
分 t in (0: 实数 ) ..(2* 实数 .圆周率 ) , (( 导数 ( fParm gamma ) t) ^ 2  +( 导数 ( gParm gamma ) t) ^ 2) :=by
have h_wirtingers :=  apply_Wirtinger_不等式 gamma a b h_parseval h_wirtinger hsum have h_int_不
等式 : 积分 t in (0: 实数 ) ..(2* 实数 . 圆周率 ) , (( fParm gamma t) ^ 2  +( 导数 ( gParm gamma ) t) ^ 2)  <=
```

积分 t in (0: 实数) ..(2* 实数 . 圆周率) , ((导数 (fParm gamma) t)^2 +(导数 (gParm gamma) t)^2) :=by rw [intervalIntegral . 积分_add (by fun_Prop) (by fun_Prop) , intervalIntegral . 积分_add (by fun_Prop) (by fun_Prop)]linarith calc 面积 gamma 0 gamma . length<=(1/2) * 积分 t in (0: 实数) ..(2* 实数 . pi) , ((fParm gamma t) ^2 +(导数 (gParm gamma) t)^2) :=面积_不等式 gamma hdc_ <=(1/2) * 积分 t in (0: 实数) ..(2* 实数 . pi), ((导数 (fParm gamma) t) ^2+(导数 (gParm gamma) t)^2) :=mul_le_mul_of_nonneg_left h_int_不等式 (by norm_num)

7.6 步骤 5：弧长约束与最终界

根据引理 6.2，在弧长参数化下：$[f'(\theta)]^2+[g'(\theta)]^2=(L/(2\pi))^2$ 对所有 θ均成立。代入 (21)：

$$A\le\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 d\theta=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2\cdot 2\pi=\frac{L^2}{4\pi}. \tag{22}$$

引理 apply_fParm_gParm_导数_平方_求和 (gamma : SimpleClosedC1Curve 2) (hdc : 连续 (导数 gamma . 曲线)) (h_arc : 弧长参数化 gamma) (a b : 自然数 -> 实数) (h_parseval h_wirtinger hsum) : 面积 gamma 0 gamma . 长度 <=(1/2) * 积分 _ in (0: 实数) ..(2* 实数 .圆周率) , (gamma . 长度 ^2/ (4* 实数 . 圆周率 ^2)) :=by calc 面积 gamma 0 gamma . 长度<=(1/2) * 积分 t in (0: 实数) ..(2* 实数 . 圆周率) , ((导数 (fParm gamma) t)^2 +(导数 (gParm gamma) t) ^2) := 加法 _ 不等式 gamma hdc a b h_parseval h_wirtinger hsum_ =(1/2) * 积分 t in (0: 实数) ..(2* 实数 . 圆周率), (gamma . 长度 ^2/ (4* 实数 . 圆周率 ^2)) :=by congr 1; apply intervalIntegral . integral_congr ; intro t _have hsq := fParm_gParm_导数_平方_求和 gamma t rw [根据_弧_长_参数化_gamma h_arc , one_mul] at hsq exact hsq . trans (by ring)

7.7 主定理

定理 7.5 (等周不等式，Lean 形式化)**.** 对于任意一条以弧长参数化的简单闭合 C^1 曲线 γ，其位于 $\mathbb{R}^2$ 中且满足 $\mathit{Continuous\ (deriv\ \gamma.curve)}$，并给定满足关于 $f=\mathit{fParm}\,\gamma$ 的帕塞瓦尔恒等式和维尔廷格恒等式的傅里叶序列$a,b:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$，我们有：

$$\mathit{area}\ \gamma\ 0\ \gamma.\mathit{length}\le\frac{(\gamma.\mathit{length})^2}{4\pi}.$$

定理 等周_不等式 (gamma : 简单闭合 C¹ 曲线 2) (hdc : 连续 (导数 gamma . 曲线)) (h_弧长参数化 : IsArcLengthParametrized gamma) (a b : 自然数 -> 实数) (h_parseval : 积分 t 属于 (0: 实数) ..(2* 实数 .圆周率) , (fParm gamma t) ^2 =实数 . 圆周率 * 求和 ' n : 自然数 +, ((an) ^2 +(bn) ^2))

```
    ( h_wirtinger : 积分 t 属于 (0: 实数 ) ..(2* 实数 .圆周率 ) , ( 导数 ( fParm gamma ) t)^2 =实数 . 圆
周率 * 求和 ' n : 自然数 +, ((n: 实数 ) ^2* (( a n) ^2 +(b n) ^2) )) ( hsum : 可求和 ( fun n : 自然数
+ =>(n: 实数 )^2* (( a n) ^2 +(b n) ^2) )) : 面积 gamma 0 gamma . length <=gamma . length ^2/
(4 * 实数 . 圆周率 ) := 通过 calc 面积 gamma 0 gamma . length<=(1/2) * 积分 _ 属于 (0: 实数 ) ..(2* 实
数 .圆周率) , ( gamma . length ^2/ (4* 实数 . 圆周率 ^2) ) :=应用_fParm_gParm_导数_平方_求和
gamma hdc h_arc a b h_parseval h_wirtinger hsum_ =gamma . length ^2/ (4 * 实数 . 圆周率 ) :=通
过 rw [ intervalIntegral . 积分_const , smul_eq_mul ]设 hpi : 实数 . 圆周率 != 0:=实数 . 圆周率_不
等于_零 field_simp ; ring
```

calc 链有两个步骤。第一步应用 apply fParm gParm deriv sq sum，将之前的所有工作合并起来。第二步计算常数积分： $\int_0^{2\pi} c\,d\theta = c{\cdot}2\pi$，因此 $(1/2){\cdot}(L^2/(4\pi^2)){\cdot}2\pi = L^2/(4\pi)$，最后用 field simp 和 ring 结束证明。

8 形式化面临的挑战与设计决策

形式化 Hurwitz 的证明需要克服若干教科书论述中不会出现的技术障碍。我们在此记录这些障碍，因为它们对于今后在 Lean 4 中进行分析的形式化工作，或许也有独立的参考价值。

8.1 交换求和与积分

反复出现的一项挑战是证明无穷和与积分可以交换。教科书中的证明通常只用简短的说明便完成这一交换，但 Lean 要求明确调用控制收敛定理或相关结果。Mathlib 中相关的引理是 MeasureTheory.integral tsum of summable integral norm，它要求：

1. 对每个 n，被加项 $x \mapsto f_n(x)$ 都是可测的。
2. L^1 范数 $\sum_n \int \|f_n(x)\|\,d\mu$ 的和是有限的。

在我们的情形中（在 $[-\pi,\pi]$ 上的傅里叶级数），连续函数的可测性是自动成立的，而 L^1 可和性可根据界 $\|a_n\text{余弦}(nx) + b_n\text{正弦}(nx)\| \le \|a_n\| + \|b_n\|$，归结为 $\sum_n(\|a_n\| + \|b_n\|)$ 的可和性。尽管如此，要将其表述为可求和假设，仍需仔细构造 Parseval 定理中假设 hF int 和 hF sum。

8.2 逐项求导

对傅里叶级数逐项求导，要求每一项都逐点可微，且导数级数一致收敛。Lean 中相关的定理是 tendstoUniformly 的 hasDerivAt 定理，它要求：

1. 每个部分和 f_N 在每一点都有导数。
2. 导数部分和一致收敛。
3. 对某个 x_0，部分和 $f_N(x_0)$ 收敛。

我们遇到的主要难点是指标移位：傅里叶级数以 $\mathbb{N}^+$ 为指标，而 Lean 导数定理使用以 $\mathbb{N}$ 为指标的部分和。我们通过证明恒等式$\sum_{n=0}^{N-1} D(n+1,\ x) = \sum_{n=0}^{N} D(n,\ x)$（使用 Finset.sum range succ'）弥合了这一差距，并相应地移动了收敛指标。

8.3 欧几里得空间与 PiLp 投影

Mathlib 将 $\mathbb{R}^n$ 建模为 EuclideanSpace $\mathbb{R}$ (Fin n)，它在定义上等于 PiLp 2 (fun : Fin n => $\mathbb{R}$)。虽然这提供了丰富的 API，但处理坐标投影时需要格外谨慎。

到坐标 i 的投影是连续线性映射 PiLp.proj 2 (fun : Fin n => $\mathbb{R}$) i，它有已知的 HasFDerivAt。为了将坐标函数 $x(t) = \gamma(t).0$ 的导数与 γ的导数联系起来，我们使用 HasFDerivAt.comp hasDerivAt，将投影的 Fr´echet 导数与曲线的盖托导数（HasDerivAt）复合。 $n = 2$ 情况需要显式使用 Fin.sum univ two 来分解欧几里得范数。

8.4 分部积分

Lean 4 的 Mathlib 通过 intervalIntegral.integral eq sub of hasDerivAt（微积分基本定理）为区间积分提供分部积分。要将其用于 $\int_0^{2\pi}(fg)' = [fg]_0^{2\pi}$，我们需要：

- $t \mapsto f(t)g(t)$处处可导（根据乘积法则 HasDerivAt.mul）。
- 导数 $f'g + fg'$在 $[0, 2\pi]$上可积（根据连续性得出，而连续性是通过导数 γ.曲线的连续性证明的）。
- 边界项 $f(2\pi)g(2\pi) - f(0)g(0) = 0$（根据周期性）。

这需要先证明 f, g, f', g' 的连续性，而这又需要通过链式法则，将导数 γ.曲线的连续性与重新参数化后的导数的连续性联系起来。相应地，针对 fParm gParm 的分部积分证明是该文件中最长的引理。

8.5 索引约定

一个反复出现的小问题是 $\mathbb{N}$ 索引与 $\mathbb{N}^+$ 索引的求和不匹配。傅里叶系数自然以 $\mathbb{N}^+$ 为索引（因为 $n = 0$ 只贡献常数项，需单独处理），但 Mathlib 的许多引理使用 $\mathbb{N}$。我们使用等价 Equiv.pnatEquivNat（它将 $\mathbb{N}^+$ 与 $\{1, 2, 3, \ldots\} \subset \mathbb{N}$ 对应起来），并结合 summable pnat iff summable nat 和 summable pnat iff summable succ，在这两种约定之间进行转换。

8.6 Parseval 和 Wirtinger 的假设

在主定理等周不等式中，关于 fParm γ 的帕塞瓦尔恒等式和维尔廷格恒等式被作为假设，而非从基本原理推导得出。这是因为推导需要：

1. 证明函数 fParm γ 可展开为具有特定系数的傅里叶级数（这需要平方可积性和正则性）。
2. 将 IsoperimetricInequality.Basic 中抽象的帕塞瓦尔框架（其适用于任意序列 a, b）与具体函数 fParm γ联系起来。

弥合这一差距是未来工作中的一个开放问题。

9 相关工作

9.1 等周不等式的其他证明

经典等周不等式有许多证明，涉及数学的不同领域 [3,11]。下面简要回顾其中的主要方法。

Steiner对称化（1838年）。Steiner证明，任何非圆形凸区域都可以通过对称化（关于直线反射）在不改变周长的情况下增大面积。反复进行对称化会收敛到一个圆。然而，Steiner最初的论证假设最优解存在；后来，通过在变分法中引入直接方法，这一假设才得到严格论证。

Weierstrass变分证明（约1870年）。Weierstrass给出了第一个运用变分法的完整证明，既证明了最优曲线的存在性，也刻画了它是一个圆。该证明运用了满足面积泛函Euler–Lagrange方程的曲线理论 [7]。

Hurwitz傅里叶证明（1902年）。这正是我们要形式化的方法。可以说，这是最优雅的证明：整个证明仅需一页，且其中的关键思想（Parseval、Wirtinger、算术—几何平均不等式）在代数上清晰易懂。

Bonnesen不等式。 Bonnesen $[1, 11]$ 证明了一个加强版的等周不等式： $L^2 - 4\pi A \geq \pi^2(R - r)^2$, 其中， R 和 r 分别是曲线的外接半径和内切半径。这给出了一个定量指标，用以衡量曲线偏离圆的程度。

几何测度论。 等周不等式可通过几何测度论推广到高维空间以及非光滑集合。一般的 n维版本指出，在 $\mathbb{R}^n$中所有体积为 V 的集合里，球的表面积最小。

9.2 等周不等式的其他形式化

形式化验证　　已在若干证明助手中尝试进行。

Coq / Isabelle。 形式化数学界已知一些使用 Coq 和 Isabelle 对等周不等式进行的部分形式化工作，但据我们所知，尚无工作按照 Hurwitz 的思路，完整形式化证明一般光滑曲线的等周不等式。相关结果（Brunn–Minkowski不等式、多边形的等周不等式）已在 Isabelle/HOL 中实现形式化。

Lean 4 / Mathlib。 Lean4 的 Mathlib 库包含紧群上的傅里叶理论（Mathlib.Analysis.Fourier）以及多种形式的帕塞瓦尔定理。然而，针对 $[-\pi, \pi]$ 上经典实傅里叶级数的特定表述（包含显式系数序列），即 Hurwitz 的证明所需的表述，并未直接提供，因此需要专门开发。

Leanblueprint 和球面外翻。 Lean 4 形式化社区已经为经典定理产出了若干大规模形式化证明，包括液体张量实验 [4] 和球面外翻。等周不等式是经典实分析领域的一项贡献，与这些项目相辅相成。

9.3 傅里叶分析的相关形式化

傅里叶分析已在多个系统中实现形式化。在 Lean 4 中，Mathlib 包含局部紧阿贝尔群上的抽象傅里叶变换，以及 L^2 中的普朗歇雷尔定理。我们的工作则聚焦于系数序列和逐点收敛的经典情形，而非抽象的 L^2 情形；这种处理方式更贴近经典分析教材中 Hurwitz 证明的呈现方式。

10 结论

我们在 Lean 4 中完整形式化了 Hurwitz 对二维等周不等式的证明。该形式化分为两个文件：IsoperimetricInequality.Basic，其中建立了傅里叶级数基础（正交性、帕塞瓦尔定理、一致收敛、可微性、维尔廷格不等式）；以及 IsoperimetricInequality.Adolf Hurwitz proof，其中完成了五步证明（面积公式、分部积分、算术—几何平均不等式、维尔廷格不等式、弧长约束）。

10.1 主要结果总结

主要的形式化验证结果如下：

1. **正交性引理**（余弦与余弦的积分为零、正弦与正弦的积分为零、正弦与余弦的积分为零、余弦与余弦的积分为圆周率、正弦与正弦的积分为圆周率）：在 $[-\pi,\pi]$ 上的五个三角函数正交积分。2. **帕塞瓦尔定理**（Parseval 定理）：$(1/\pi)\int_{-\pi}^{\pi} f^2 = \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n\geq 1}(a_n^2+b_n^2)$。3. **傅里叶级数的魏尔斯特拉斯 M 判别法**（傅里叶级数一致收敛）：在 $\sum(\|a_n\|+\|b_n\|) < \infty$ 下的一致收敛。4. **逐项可微性**（傅里叶级数 HasDerivAt）：（傅里叶级数 $a\ b$）$' =$傅里叶导数 $a\ b$ 在 $\sum n(\|a_n\|+\|b_n\|) < \infty$ 下成立。5. **维尔廷格不等式**（恒等式形式，Wirtinger 不等式）：$(1/\pi)\int_{-\pi}^{\pi}(f')^2 = \sum n^2(a_n^2+b_n^2)$。6. **面积公式**（参数化面积、面积简化）：$A = \int_0^{2\pi} fg'\,d\theta$。7. **分部积分**（对 fParm gParm 作分部积分）：$\int fg' = -\int gf'$ 适用于 2π-周期函数。8. **弧长约束**（fParm gParm 导数方程之和为常数）：$(f')^2+(g')^2 = (L/(2\pi))^2$ 在弧长参数化下成立。9. **主定理**（等周不等式）：$A \leq L^2/(4\pi)$。

10.2 未解决的问题与未来工作

形式化工作仍有几个方面尚待完成。

补全帕塞瓦尔假设。目前，主定理将 fParm γ 的帕塞瓦尔恒等式和维尔廷格恒等式作为假设。自然的下一步是利用光滑周期函数的傅里叶级数展开，从 fParm γ的定义推导出这些恒等式。这需要通过积分公式将 fParm γ 与其傅里叶系数联系起来，而这又要求证明曲线坐标的可积性结果。

等号情形。等周不等式是尖锐的：当且仅当γ 是圆时，等号 $A = L^2/(4\pi)$成立。要在 Lean 中证明这一点，需要刻画每一步取等号的条件：算术—几何平均不等式何时处处取等号（$f = g'$ ），维尔廷格不等式何时取等号（$f = a_1$ 余弦$\theta + b_1$ 正弦 θ），以及由此得到的曲线何时是圆。

推广到较低正则性。我们的形式化要求曲线属于 C^1 且具有连续导数。若要推广到有界变差曲线，或一般的 $W^{1,\,2}$ 情形（包括 L^2 等周不等式），则需要采用不同的分析工具。

高维推广。 $\mathbb{R}^n$ 中的等周不等式指出，对于给定的所围体积，球的表面积最小。要将这一结论形式化，需要用到余面积公式、Brunn–Minkowski不等式，或几何测度论的工具。

参考文献

[1] Tommy Bonnesen 和 Werner Fenchel。《凸体理论》。BCS Associates，爱达荷州莫斯科，1987年。由 L. Boron、C. Christenson 和 B. Smith 从德文译出。[2] Ha¨ım Brezis。《泛函分析、索伯列夫空间与偏微分方程》。施普林格，纽约，2011年。[3] Xavier Cabr´e。借助亚历山德罗夫–巴克尔曼–普奇方法研究等周不等式、索伯列夫不等式与特征值不等式：综述。《数学年刊》B辑，38：201–214，2017年。[4] Johan Commelin 等。液体张量实验。https://leanprover-community.github. io/liquid/，2022年。对 Peter Scholze 提出的一项挑战进行的 Lean 4 形式化。[5] Thierry Coquand 和 G´erard Huet。构造演算。《信息与计算》，76(2–3)：95–120，1988年。[6] Leonardo de Moura 和 Sebastian Ullrich。Lean 4 定理证明器与编程语言。载于《自动演绎——CADE 28》，《计算机科学讲义》第12699卷，第625–635页。施普林格，2021年。[7] Manfredo P. do Carmo。《曲线与曲面的微分几何》。多佛出版社，修订增补第二版，2016年。[8] Godfrey H. Hardy、John E. Littlewood 和 George P´olya。《不等式》。剑桥大学出版社，剑桥，第二版，1952年。[9] Adolf Hurwitz。论傅里叶级数的若干几何应用。《高等师范学校科学年刊》，19：357–408，1902年。[10]Keith Li。等周不等式。https://simonrs.com/eulercircle/irpw2025/ keith-isoper-paper.pdf，2025年6月。Euler Circle IRPW 2025。[11] Robert Osserman。等周不等式。《美国数学会通报》，84(6)：1182–1238，1978年。[12] Walter Rudin。《数学分析原理》。麦格劳-希尔，第三版，1976年。[13] Morten Heine Sørensen 和 Pawe l Urzyczyn。《柯里–霍华德同构讲义》，《逻辑与数学基础研究》第149卷。爱思唯尔，2006年。[14] Elias M. Stein 和 Rami Shakarchi。《傅里叶分析：导论》，《普林斯顿分析讲义》第1卷。普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，2003年。[15] Mathlib 社区。Lean 数学库。载于第9届 ACM SIGPLAN 国际认证程序与证明会议论文集，CPP 2020，第367–381页。ACM，2020年。[16] Antoni Zygmund。《三角级数》。剑桥大学出版社，剑桥，第三版，2002年。