P李共形代数上的后-Lie共形代数结构 s

Lamei Yuan*，Yuhui Tan，哈尔滨工业大学数学学院，中国哈尔滨
150001 电子邮箱：lmyuan@hit.edu.cn，26B312001@stu.hit.edu.cn

摘要： 本文引入并研究后-Lie共形代数（PLCAs），这是后李代数在共形代数中的推广。我们建立了 PLCA 结构与李共形代数上权为 1 的 Rota-Baxter 算子之间的等价关系。我们还证明，每个 PLCA 都会诱导出一个新的李共形代数，并研究李共形代数对上的 PLCA 结构。最后，我们通过权为 1 的 Rota–Baxter 算子，对两个重要类别的李共形代数—— $\mathfrak{B}(q)$ 和 $W(b)$——上的所有 PLCA 结构进行了分类。

Key 关键词： 李共形代数、后Lie共形代数、权 1 的 Rota-Baxter 算子
数学主题分类（2000）： 17A30,17A60,17B38, 17B68, 17B99.

arXiv:2603.14710v1 [math.RA] 16 Mar 2026

1 引言

Kac 于 [30, 31], 引入的李共形代数，在共形场论、顶点代数以及无限维李代数的研究中发挥着基础性作用（ [32]）。这些代数结构为手征场的算子乘积展开（ [5]）提供了公理化框架，并应用于非线性演化方程的哈密顿形式（ [19]）。有限李共形代数的结构理论、表示理论和上同调理论已得到充分发展（参见 [3, 4, 15–18]）。

Vallette 在研究拟群的 Koszul对偶性时引入的后李代数 [38], 推广了前李代数（或左对称代数），并出现在数学和物理的多个领域中，包括微分几何、流形上的数值积分 [34], 以及随机分析 [11, 12, 26]。后李代数 $(\mathfrak{A}, [\cdot,\cdot], \triangleright)$ 是一个李代数 $(\mathfrak{A}, [\cdot,\cdot])$，并配备一个乘积 $\triangleright\colon \mathfrak{A}\times\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}$，该乘积满足相容条件

$$x\triangleright[y,z] = [x\triangleright y, z] + [y, x\triangleright z]$$

and

$$[x,y]\triangleright z = a_{\triangleright}(x,y,z) - a_{\triangleright}(y,x,z),$$

其中，$a_{\triangleright}(x,y,z)$ 是乘积 $\triangleright$的结合子，定义为

$$a_{\triangleright}(x,y,z) = x\triangleright(y\triangleright z) - (x\triangleright y)\triangleright z.$$

后李代数已从多个角度得到研究，包括非阿贝尔广义拉克斯对的构造 [7], Poincar´e-Birkhoff-Witt 型定理 [20, 25], 分解定理 [21] 以及与后-Lie群的关系。

结合代数上的 Rota-Baxter 算子概念源于 G. Baxter 对概率论中涨落理论的研究 [10] ，随后 Rota [35], Atkinson [2], 和 Cartier [13] 通过探究其与组合学的联系，进一步发展了这一概念。这些算子此后在多个领域得到了重要应用，包括 Connes-Kreimer 对微扰量子场论中重整化的代数方法 [14], 歌剧代数分裂 [1, 8], 以及双重Poisson代数 [23, 24]。在李代数的背景下，Rota-Baxter 算子以经典Yang-Baxter方程的算子形式出现。此外，相对Rota-Baxter算子（或 $\mathcal{O}$-算子）自然诱导出前李或后李代数结构 [7, 13]。近年来，其向共形代数的推广已得到广泛研究 [27–29, 43, 44]。

本文引入并研究后-Lie共形代数（PLCAs），将其视为后李代数在共形情形下的自然类比。具体而言，后-Lie共形代数提供了一个统一框架，涵盖李共形代数和左对称

通讯作者*：Lamei Yuan，lmyuan@hit.edu.cn

共形代数，从而将后李代数的经典概念推广到共形情形。我们证明，每个后-Lie共形代数都会诱导出一种新的李共形代数结构，并系统地刻画由一对李共形代数产生的 PLCA 结构。此外，对于任意后-Lie共形代数（$V\circ_\lambda$，$[\cdot_\lambda\cdot]$），由$L(x)_\lambda y = x\circ_\lambda y$定义的左乘算子会诱导出底层李共形代数（$V\ [\cdot_\lambda\cdot]$）的一个共形导子。这一观察揭示了后-Lie共形代数与李共形代数上权 1 的 Rota–Baxter 算子之间的密切联系（见推论 3.15），并为分类给定李共形代数上的所有可能 PLCA 结构提供了基本工具。

本文组织如下。第 2 节回顾共形代数和Rota–Baxter算子的基本定义及预备结果。第 3 节介绍后李共形代数（后-Lie共形代数），并研究其基本性质。第 4 节和第 5 节分别致力于分类李共形代数 $W(b)$ 和 $\mathfrak{B}(q)$ 上的所有 PLCA 结构；对于后一种情形，我们将研究范围限制在参数 $q\neq 0$ 和 $q\notin\mathbb{Z}_-$。

全文中，所有向量空间及其张量积均取自复数域 $\mathbb{C}$。我们用 $\mathbb{N}$、$\mathbb{Z}_-$ 和 $\mathbb{Z}_+$ 分别表示所有正整数、负整数和非负整数的集合。对于代数 $\mathfrak{A}$，我们用 $Z(\mathfrak{A})$表示其中心。

2 预备知识

本节回顾李共形代数、其模、共形导子和Rota-Baxter算子的定义，以及左对称共形代数的概念。

定义 2.1。 共形代数 R是一个 $\mathbb{C}[\partial]$-模，并赋有一个 $\mathbb{C}$-双线性映射 $R\times R\to R[\lambda]$，记作 $a\times b\mapsto a_\lambda b$，满足共形半双线性条件（$a,b\in R$）：

$$(\partial a)_\lambda b = -\lambda(a_\lambda b),\ a_\lambda(\partial b) = (\partial+\lambda)(a_\lambda b).$$

如果一个共形代数作为 $\mathbb{C}[\partial]$-模是有限生成的，则称其为有限 共形代数。共形代数 R 的秩 是其作为 $\mathbb{C}[\partial]$-模的秩。

定义 2.2。 如果一个 $\mathbb{C}[\partial]$-模 R 配备了一族 $\mathbb{C}$-双线性乘积$-_{(n)}-$：$R\times R\to R$，并满足以下公理，则称其为**李共形代数**：

(L0)（局部性）对于任意 $a,b\in R$，存在正整数 N，使得对于所有 $n\geq N$，$a_{(n)}b=0$。 .

（L1）（导数 n 性质）对于任意 a、$b\in R$以及 $n\in\mathbb{Z}_+$，$(\partial a)_{(n)}b = -na_{(n-1)}b$，$a_{(n)}\partial b = \partial(a_{(n)}b)+na_{(n-1)}b$;

(L2)（反对称性）对于任意 a、$b\in R$以及 $n\in\mathbb{Z}_+$，$a_{(n)}b = -\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^{j+n}\partial^j j!_\big(b_{(n+j)}a\big)$;

(L3)（雅可比恒等式）对于任意 a、b、$c\in R$，m、$n\in\mathbb{Z}_+$,

$$a_{(m)}\left(b_{(n)}c\right) = \sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\left(a_{(j)}b\right)_{(m+n-j)}c + b_{(n)}\left(a_{(m)}c\right).$$

n-乘积可以通过 λ-括号 $[\cdot_\lambda\cdot]$ 表示：$R\otimes R\to\mathbb{C}[\lambda]\otimes R$定义为

$$[a_\lambda b] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}a_{(n)}b,\quad \forall a,b\in R$$

等价地，R是李共形代数，当且仅当 λ-括号满足下列公理（对于所有 a、b、$c\in R$）：

(L0$_\lambda$)（多项式性）$a\otimes b\mapsto[a_\lambda b]$ 确定了一个 $\mathbb{C}$-双线性映射 $R\otimes R\to\mathbb{C}[\lambda]\otimes R$;

$(\mathrm{L1}_\lambda)$（共轭线性） $[(\partial a)_\lambda b] = -\lambda[a_\lambda b],\ [a_\lambda \partial b] = (\partial+\lambda)[a_\lambda b]$;

（$\mathrm{L2}_\lambda$）（反对称性） $[a_\lambda b] = -[b_{-\partial-\lambda}a]$；

（$\mathrm{L3}_\lambda$）（雅可比恒等式） $[a_\lambda[b_\mu c]] - [b_\mu[a_\lambda c]] = [[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}c]$。

例 2.3。 *Virasoro* 共形代数 Vir 是一个由符号 L 生成的自由 $\mathbb{C}[\partial]$-模，使得 *at*

$$[L_\lambda L] = (\partial + 2\lambda)L.$$

例 2.4.（见 *[17]*）设 $\mathfrak{g}$ 是一个李代数，其李括号为 $[\cdot,\cdot]$，并令 $\mathrm{Curg} := \mathbb{C}[\partial]\otimes\mathfrak{g}$ 为自由的 $\mathbb{C}[\partial]$-模。那么，Curg 是一个李共形代数，称为当前李共形代数，其 λ-括号定义如下：

$$\big(f(\partial)\otimes a\big)_\lambda\big(g(\partial)\otimes b\big) := f(-\lambda)g(\lambda+\partial)\otimes[a,b],\quad \forall a,b\in\mathfrak{g},\ f(\partial),g(\partial)\in\mathbb{C}[\partial].$$

设 V 是一个 $\mathbb{C}[\partial]$-模，并令 $v(\lambda) = \sum_j v_j\lambda_j \in \mathbb{C}[\partial,\lambda]\otimes_{\mathbb{C}[\partial]}V$，其中 $v_j\in V$。定义 $\langle v\rangle$ 为由 V 中所有系数 v_j 所张成的 $\mathbb{C}[\partial]$-子模，其中 $v(\lambda)$。下文将用到以下引理（见 [17]）。

引理 2.5。 设 $p(\lambda) = m\sum p_i\lambda i \in \mathbb{C}[\partial,\lambda],\ p_i\in\mathbb{C}[\partial]$ 是一个首项系数 p_m 不依赖于 $\partial i{=}0$（即 $p_m\in\mathbb{C}^*$）的多项式。那么对于任意 $v\in\mathbb{C}[\partial,\lambda]$，有 $\langle p(\lambda)v\rangle = \langle v\rangle$。

李共形代数 R 的共形子代数 S 本身也是一个李共形代数，其运算继承自 R；等价地，$\langle[a_\lambda b]\rangle\in S$ 对所有 $a,b\in S$. 若 I 是 R 的一个 $\mathbb{C}[\partial]$-子模，且满足 $\langle[I_\lambda R]\rangle\subseteq I$，则 I 是 R 的理想；由 $(\mathrm{L3}_\lambda)$ 可得 $\langle[R_\lambda I]\rangle\subseteq I$.

下面我们定义李共形李代数中两个理想的乘积（见 [17]）。

定义 2.6. 设 R 是一个李共形代数，I 和 J 是 R 的理想。括号 $[I\ J]$ 定义为 R 的子空间，它由所有乘积 $[i_\lambda j]$, 的系数张成，其中 $i\in I,\ j\in J$。根据公理 $(L2_\lambda)$，此子空间构成一个 $\mathbb{C}[\partial]$-模；根据公理 $(L4_\lambda)$，它也是 R 的一个理想。换言之，$[I\ J] = \langle[I_\lambda J]\rangle$

对于给定的李共形代数 R，我们分别定义下中心列和导出列：

$$R^1 = R,\quad R^{k+1} = [R^k\cdot R]\quad\text{and}\quad R^{[1]} = R,\quad R^{[k+1]} = [R^{[k]}\cdot R^{[k]}],\quad k\geq 1,$$

定义 2.7. 若存在 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $R^n = 0$（相应地，$R^{[n]} = 0$），则称共形李代数 R 是幂零的（相应地，可解的）。

定义 2.8. ([27]) 左对称共形代数 R 是一个配备了 $\mathbb{C}$-双线性映射的共形代数 $\cdot_\lambda\cdot : R\times R\to\mathbb{C}[\lambda]\otimes R$，满足

$$(a_\lambda b)_{\lambda+\mu}c - a_\lambda(b_\mu c) = (b_\mu a)_{\lambda+\mu}c - b_\mu(a_\lambda c),\ \text{for all}\ a,b,c\in R.$$

定义 2.9. 李共形代数 R 上的模 M 是一个 $\mathbb{C}[\partial]$-模，其上赋予了一个 $\mathbb{C}$-双线性映射 $R\times M\to M[\lambda]$，$(a,v)\mapsto a_\lambda v$，满足以下公理（$\forall a,b\in R, v\in M$）

(1) $(\partial a)_\lambda v = -\lambda a_\lambda v,\ a_\lambda(\partial v) = (\partial+\lambda)a_\lambda v,$

(2) $[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}v = a_\lambda(b_\mu v) - b_\mu(a_\lambda v).$

若R-模M 作为一个 $\mathbb{C}[\partial]$-模是有限生成的，则称其为有限。

定义 2.10。 设有两个 $\mathbb{C}[\partial]$-模 M 和 N，从 M 到 N 的共形线性映射是一个 $\mathbb{C}$-线性映射 $\varphi : M \to \mathbb{C}[\lambda] \otimes_{\mathbb{C}[\partial]} N$，记作 $\varphi_\lambda : M \to N$，满足

$$[\partial, \varphi_\lambda] = -\lambda \varphi_\lambda, \text{ equivalently, } \partial^N \varphi_\lambda - \varphi_\lambda \partial^M = -\lambda \varphi_\lambda.$$

从 M 到 N 的所有共形线性映射构成的向量空间记作 $Chom(M,N)$，它可以通过以下方式构成一个 $\mathbb{C}[\partial]$-模

$$(\partial \varphi)_\lambda v = -\lambda \varphi_\lambda v, \quad \text{for } \varphi \in Chom(M,N),\ v \in M.$$

我们将 $Chom(M,M)$记作 $Cend(M)$。

定义 2.11。 设 R 是一个李共形代数。若共形线性映射 $d_\lambda : R \to R$ 满足

$$d_\lambda([x_\mu y]) = [(d_\lambda x)_{\lambda+\mu} y] + [x_\mu (d_\lambda y)], \ \forall\ x, y \in R. \tag{2.1}$$

R 的所有共形导子构成的空间记作 $\mathrm{CDer}(R)$。设 R 是一个李共形代数。每个 $a \in R$都确定一个共形线性映射 $(\mathrm{ad}a)_\lambda : R \to R$，其定义为

$$(\mathrm{ad}\, a)_\lambda b = [a_\lambda b], \ b \in R.$$

由雅可比恒等式，$(\mathrm{ad}a)_\lambda$ 对每个 $a \in R$都是 R 的共形导子。所有这类导子称为内导子。全体内导子的集合记作 $\mathrm{CInn}(R)$。

定义 2.12. 若李共形代数R 具有平凡中心，且 $\mathrm{CDer}(R) = \mathrm{CInn}(R)$，则称其为完备的。

定义 2.13. 设 R 是一个李共形代数，且 $h \in \mathbb{C}$。R 上权为 h 的Rota-Baxter 算子是一个 $\mathbb{C}[\partial]$-线性映射 $T : R \to R$，满足恒等式

$$[T(a)_\lambda T(b)] = T\big([T(a)_\lambda b] + [a_\lambda T(b)] + h[a_\lambda b]\big), \quad \forall a, b \in R.$$

注 2.14. 若 T 是李共形代数 R 上权为 $h \neq 0$ 的 *Rota–Baxter* 算子，则 $h^{-1}T$ 是权为1的 *Rota–Baxter* 算子。因此，带权 *Rota–Baxter* 算子的研究可归结为权为1 的情形。由此，只需考察权为1的 *Rota–Baxter* 算子，即满足下式的算子

$$[T(a)_\lambda T(b)] = T\big([T(a)_\lambda b] + [a_\lambda T(b)] + [a_\lambda b]\big), \qquad \forall a, b \in R. \tag{2.2}$$

注意，$T = 0$ 和 $T' = -\mathrm{id}_R$ 都是 R 上权为1 的 *Rota-Baxter* 算子。本文中，我们将它们称为权为1的平凡 *Rota-Baxter* 算子。

注 2.15. 设 R 是李共形代数，I 是 R 的一个理想。假设 T 是 R 上权 *1* 的 *Rota-Baxter* 算子。容易验证，T 在商李共形代数 R/I 上自然诱导出一个权 *1* 的 *Rota-Baxter* 算子。

引理 2.16。 *([22])* 若 T 是李共形代数 R 上权为1 的 *Rota-Baxter* 算子，则算子 $T' = -T - \mathrm{id}_R$ 也是 R 上权为1 的 *Rota-Baxter* 算子。

3 后Lie共形代数结构

后李代数结合了李代数和左对称代数的结构，已成为代数与数理物理中的一个基本研究对象。本节将介绍它们的共形类比——后-Lie共形代数（PLCAs），它们将这些思想自然地推广到共形代数的框架中。

3.1 李共形代数上的后李共形代数结构

定义 3.1. 设 V 是一个配备了两个 λ-乘积 $x\circ_\lambda y$ 和 $[x_\lambda y]$ 的 $\mathbb{C}[\partial]$-模。若三元组 $(V\circ_\lambda,[\cdot_\lambda\cdot])$ 满足以下条件，则称其为后Lie共形代数 （*PLCA*）：$(V\ [\cdot_\lambda\cdot])$ 是李共形代数，λ-乘积 $\circ_\lambda$ 是共形半双线性的，并且对所有 $x,y,z\in V$，以下相容条件成立：

$$x\circ_\lambda[y_\mu z]=\big[(x\circ_\lambda y)_{\lambda+\mu}z\big]+\big[y_\mu(x\circ_\lambda z)\big],\tag{3.1}$$

$$[x_\lambda y]\circ_{\lambda+\mu}z=x\circ_\lambda(y\circ_\mu z)-y\circ_\mu(x\circ_\lambda z)-(x\circ_\lambda y)\circ_{\lambda+\mu}z+(y\circ_\mu x)\circ_{\lambda+\mu}z.\tag{3.2}$$

设 $(V\circ_\lambda,[\cdot_\lambda\cdot])$ 是一个后李共形代数。对每个 $x\in V$，定义左乘算子 $L(x)$ 为 $L(x)_\lambda y=x\circ_\lambda y\ \ \forall y\in V$。那么 $L(x)$ 是李共形代数 $(V\ [\cdot_\lambda\cdot])$ 的共形导子。

定义 3.2. 设 $(V\ [\cdot_\lambda\cdot])$ 是一个李共形代数。V 上的一个PLCA 结构 是 V 上的 λ-乘积 $\circ_\lambda$，使得$(V\circ_\lambda,[\cdot_\lambda\cdot])$ 构成一个后*Lie*共形代数。

例 3.3. 给定 一个李共形代数 $(V\ [\cdot_\lambda\cdot])$，$V$ 上有两种自然的 *PLCA* 结构，定义如下：

$$x\circ_\lambda y=0,\ \ and\ \ x\circ_\lambda y=-[x_\lambda y],\ \ \forall\, x,y\in V.$$

它们被称为平凡 *PLCA* 结构。

例 3.4. 设 Cur$\mathfrak{g}$ 是由李代数 $\mathfrak{g}$ 关联的当前李共形代数。假设 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],\circ)$ 是一个后李代数。那么，λ-乘法

$$\big(f(\partial)\otimes a\big)\circ_\lambda\big(g(\partial)\otimes b\big)=f(-\lambda)\,g(\partial+\lambda)\otimes(a\circ b),\quad\forall\, a,b\in\mathfrak{g},\ f(\partial),g(\partial)\in\mathbb{C}[\partial]$$

在 Cur$\mathfrak{g}$ 上定义了一个 *PLCA* 结构。

命题 3.5. 设 $(R\circ_\lambda,[\cdot_\lambda\cdot])$ 是一个 *PLCA*。那么，$(R\ \{\cdot_\lambda\cdot\})$ 构成一个李共形代数，其中新的 λ-括号$\{\cdot_\lambda\cdot\}$ 定义如下：

$$\{x_\lambda y\}=x\circ_\lambda y-y\circ_{-\lambda-\partial}x+[x_\lambda y],\ \ \forall\ \ x,y\in R.\tag{3.3}$$

我们称$(R\ \{\cdot_\lambda\cdot\})$为$(R\ \circ_\lambda,[\cdot_\lambda\cdot])$关联的李共形代数。

证明。 对所有$x,y\in R$，我们首先验证共形半双线性：

$$\{(\partial x)_\lambda y\}=(\partial x)\circ_\lambda y-y\circ_{-\lambda-\partial}(\partial x)+[(\partial x)_\lambda y]=(-\lambda)x\circ_\lambda y-(\partial-\lambda-\partial)y\circ_{-\lambda-\partial}x+(-\lambda)[x_\lambda y]=-\lambda\{x_\lambda y\}$$

$$\{x_\lambda(\partial y)\}=x\circ_\lambda(\partial y)-(\partial y)\circ_{-\lambda-\partial}x+[x_\lambda(\partial y)]=(\partial+\lambda)x\circ_\lambda y-(\lambda+\partial)y\circ_{-\lambda-\partial}x+(\partial+\lambda)[x_\lambda y]=(\partial+\lambda)\{x_\lambda y\}.$$

反对称性由下式得出：

$$\{x_\lambda y\}+\{y_{-\lambda-\partial}x\}=x\circ_\lambda y-y\circ_{-\lambda-\partial}x+[x_\lambda y]+y\circ_{-\lambda-\partial}x-x\circ_\lambda y+[y_{-\lambda-\partial}x]=0.$$

雅可比恒等式可通过根据定义进行直接计算得出，并利用了以下事实：在后李共形代数中， $\circ_\lambda$ 和 $[\cdot_\lambda\cdot]$各自满足相应形式的雅可比恒等式：

$$
\begin{aligned}
&\{\{x_\lambda y\}_{\lambda+\mu}z\}+\{y_\mu\{x_\lambda z\}\}-\{x_\lambda\{y_\mu z\}\}\\
=&\{(x\circ_\lambda y)_{\lambda+\mu}z\}-\{(y\circ_{-\lambda-\partial}x)_{\lambda+\mu}z\}+\{[x_\lambda y]_{\lambda+\mu}z\}+\{y_\mu(x\circ_\lambda z)\}\\
&-\{y_\mu(z\circ_{-\lambda-\partial}x)\}+\{y_\mu[x_\lambda z]\}-\{x_\lambda(y\circ_\mu z)\}+\{x_\lambda(z\circ_{-\mu-\partial}y)\}-\{x_\lambda[y_\mu z]\}\\
=&[[x_\lambda y]_{\lambda+\mu}z]+[y_\mu[x_\lambda z]]-[x_\lambda[y_\mu z]]-x\circ_\lambda[y_\mu z]+[(x\circ_\lambda y)_{\lambda+\mu}z]+[y_\mu(x\circ_\lambda z)]\\
&+y\circ_\mu[x_\lambda z]-[(y\circ_{-\lambda-\partial}x)_{\lambda+\mu}z]-[x_\lambda(y\circ_\mu z)]-z\circ_{-\lambda-\mu-\partial}[x_\lambda y]-[y_\mu(z\circ_{-\lambda-\partial}x)]+[x_\lambda(z\circ_{-\mu-\partial}y)]\\
&+[x_\lambda y]\circ_{\lambda+\mu}z-x\circ_\lambda(y\circ_\mu z)+y\circ_\mu(x\circ_\lambda z)+(x\circ_\lambda y)\circ_{\lambda+\mu}z-(y\circ_{-\lambda-\partial}x)\circ_{\lambda+\mu}z\\
&-[x_\lambda z]\circ_{-\mu-\partial}y+x\circ_\lambda(z\circ_{-\mu-\partial}y)-z\circ_{-\lambda-\mu-\partial}(x\circ_\lambda y)-(x\circ_\lambda z)\circ_{-\mu-\partial}y+(z\circ_{-\lambda-\partial}x)\circ_{-\mu-\partial}y\\
&+[y_\mu z]\circ_{-\lambda-\partial}x+z\circ_{-\lambda-\mu-\partial}(y\circ_{-\lambda-\partial}x)-y\circ_\mu(z\circ_{-\lambda-\partial}x)-(z\circ_{-\mu-\partial}y)\circ_{-\lambda-\partial}x+(y\circ_\mu z)\circ_{-\lambda-\partial}x\\
=&0.
\end{aligned}
$$

□

命题 3.6. 设$(V\circ_\lambda,[\cdot_\lambda\cdot])$是一个后李共形代数，并设 $\{\cdot_\lambda\cdot\}$是 V 上由(3.3)定义的相关李共形代数结构。则以下恒等式成立：

$$\{x_\lambda y\}\circ_{\lambda+\mu}z=x\circ_\lambda(y\circ_\mu z)-y\circ_\mu(x\circ_\lambda z).$$

因此，V 是一个共形$(V\ \{\cdot_\lambda\cdot\})$-模，其 λ-作用由 $\circ_\lambda$ 给出。

证明。 这直接由 (3.2) 以及 (3.3) 中 $\{\cdot_\lambda\cdot\}$ 的定义得出。 □

3.2 李共形代数对上的后李共形代数结构

设 $\mathfrak{G}=(\mathrm{V}\ [\cdot_\lambda\cdot])$ 和 $\mathfrak{N}=(\mathrm{V}\ \{\cdot_\lambda\cdot\})$ 是同一个 $\mathbb{C}[\partial]$-模 V 上的两个李共形代数结构；我们称 $(\mathfrak{G},\mathfrak{N})$ 为 V 上的一对李共形代数。本小节中，提及这样的数对 $(\mathfrak{G},\mathfrak{N})$ 时，我们约定 $\mathfrak{G}$ 中的 λ-括号记为 $[\mathrm{x}_\lambda\mathrm{y}]$,，而 $\mathfrak{N}$ 中的 λ-括号记为 $\{\mathrm{x}_\lambda\mathrm{y}\}$； $\mathfrak{G}$ 和 $\mathfrak{N}$ 的底层 $\mathbb{C}[\partial]$-模均记为 V。此外，记号 $(\mathrm{ad\ a})_\lambda$ 专指李共形代数 $\mathfrak{G}$ 中的伴随算子，即对所有 $\mathrm{b}\in\mathrm{V}$，均有 $(\mathrm{ad\ a})_\lambda(\mathrm{b})=[\mathrm{a}_\lambda\mathrm{b}]$。

定义 3.7. 设$(\mathfrak{G},\mathfrak{N})$为一对李共形代数。在$(\mathfrak{G},\mathfrak{N})$上，后李共形代数结构是一个共形半双线性运算 $\circ_\lambda: V\times V\to V[\lambda]$，并满足以下公理：

$$\{x_\lambda y\}=x\circ_\lambda y-y\circ_{-\lambda-\partial}x+[x_\lambda y],\tag{3.4}$$

$$x\circ_\lambda[y_\mu z]=[(x\circ_\lambda y)_{\lambda+\mu}z]+[y_\mu(x\circ_\lambda z)],\tag{3.5}$$

$$\{x_\lambda y\}\circ_{\lambda+\mu}z=x\circ_\lambda(y\circ_\mu z)-y\circ_\mu(x\circ_\lambda z),\tag{3.6}$$

对所有 $x,y,z\in V$。

设 $(\mathfrak{G},\mathfrak{N})$ 是定义在同一 $\mathbb{C}[\partial]$-模 V 上的李共形代数对，其中 $\mathfrak{G}=(V\ [\cdot_\lambda\cdot])$ 且 $\mathfrak{N}=(V\ \{\cdot_\lambda\cdot\})$。若 $x\circ_\lambda y$ 是 $(\mathfrak{G},\mathfrak{N})$ 上的后李共形代数结构，则 $\mathfrak{N}$ 是 $(V\circ_\lambda,[\cdot_\lambda\cdot])$ 关联的李共形代数。反之，若 $(V\circ_\lambda,[\cdot_\lambda\cdot])$ 是一个后李共形代数，则 $\mathfrak{N}$ 是关联的李共形代数，且 $x\circ_\lambda y$ 是李共形代数对 $(\mathfrak{G},\mathfrak{N})$ 上的后李共形代数结构。

P命题 3.8。 设 $(\mathfrak{G},\mathfrak{N})$ 是定义在同一 $\mathbb{C}[\partial]$-模 V 上的李共形代数对。

(1) 若 $\mathfrak{G}$ 是阿贝尔的，则 $x\circ_\lambda y$ 在$(\mathfrak{G},\mathfrak{N})$上诱导出一个后李共形代数结构，当且仅当$(V\circ_\lambda)$构成一个左对称共形代数，且满足以下恒等式：

$$\{x_\lambda y\}=x\circ_\lambda y-y\circ_{-\lambda-\partial}x,\ \ x,y\in V.$$

(2) 若 $\mathfrak{N}$是阿贝尔的，则 $x\circ_\lambda y$ 在$(\mathfrak{G},\mathfrak{N})$上诱导出一个后李共形代数结构，当且仅当满足以下恒等式：

$$x\circ_\lambda y-y\circ_{-\lambda-\partial}x=-[x_\lambda y], \tag{3.7}$$

$$x\circ_\lambda(y\circ_\mu z)=y\circ_\mu(x\circ_\lambda z), \tag{3.8}$$

$$(x\circ_\lambda z)\circ_{-\mu-\partial}y=(x\circ_\lambda y)\circ_{\lambda+\mu}z. \tag{3.9}$$

证明。 (1) 可通过直接计算得出。这里我们给出(2)的证明。由于 $\mathfrak{N}$ 是阿贝尔的，我们可以分别由(3.4)和(3.6)得到(3.7)和(3.8)。并且由(3.5)和(3.7)可得以下等式

$$x\circ_\lambda(y\circ_\mu z)-x\circ_\lambda(z\circ_{-\mu-\partial}y)=(x\circ_\lambda y)\circ_{\lambda+\mu}z-z\circ_{-\lambda-\mu-\partial}(x\circ_\lambda y)+y\circ_\mu(x\circ_\lambda z)-(x\circ_\lambda z)\circ_{-\mu-\partial}y.$$

由(3.8)可得$x\circ_\lambda(y^{\circ}{}_\mu z)=y^{\circ}{}_\mu(x\circ_\lambda z)$，$x\circ_\lambda(z^{\circ}{}_{-\mu-\partial}y)=z^{\circ}{}_{-\lambda-\mu-\partial}(x\circ_\lambda y)$，于是得到等式(3.9)。反过来，若等式(3.7)–(3.9)成立，我们可以断定 $\circ_\lambda$ 在 $\mathfrak{G}$ 上构成一个后李共形代数结构，且关联的李共形代数$V\circ_\lambda,[\cdot_\lambda\cdot]$是阿贝尔的。 □

命题 3.9. 设 $\mathfrak{A}=(V\circ_\lambda)$是对 $(\mathfrak{G},\mathfrak{N})$ 上的一个 *PLCA* 结构。若 $\mathfrak{N}$是阿贝尔的，则 $\mathfrak{G}^{[3]}=0$。

证明。 对于 $u_1,v_1,u_2,v_2\in V$，由命题 3.8 (2)，可得

$$\begin{aligned}(u_1\circ_{\lambda_1}v_1)\circ_{-\mu-\partial}(u_2\circ_{\lambda_2}v_2)&=(u_1\circ_{\lambda_1}(u_2\circ_{\lambda_2}v_2))\circ_{\lambda_1+\mu}v_1=(u_2\circ_{\lambda_2}(u_1\circ_{\lambda_1}v_2))\circ_{\lambda_1+\mu}v_1\\&=(u_2\circ_{\lambda_2}v_1)\circ_{-\lambda_1-\mu+\lambda_2-\partial}(u_1\circ_{\lambda_1}v_2)=u_1\circ_{\lambda_1}((u_2\circ_{\lambda_2}v_1)\circ_{-\mu+\lambda_2-\partial}v_2)\\&=u_1\circ_{\lambda_1}((u_2\circ_{\lambda_2}v_2)\circ_\mu v_1)=(u_2\circ_{\lambda_2}v_2)\circ_\mu(u_1\circ_{\lambda_1}v_1).\end{aligned}$$

因此，对于$x,y\in\mathfrak{A}^{[2]}$，我们可以得出$x\circ_\lambda y=y\circ_{-\lambda-\partial}x$。此外，由命题 3.8 (2)，有 $[x_\lambda y]=0$。由于$\mathfrak{G}^{[2]}\subseteq\mathfrak{A}^{[2]}$，我们有 $\mathfrak{G}^{[3]}=0$。 □

定义 3.10. 李共形代数 R 上的交换后李共形代数（CPLCA）结构是一个满足以下条件的共形半双线性乘积 $\circ_\lambda$

$$x\circ_\lambda y=y\circ_{-\lambda-\partial}x, \tag{3.10}$$

$$x\circ_\lambda[y_\mu z]=[(x\circ_\lambda y)_{\lambda+\mu}z]+[y_\mu(x\circ_\lambda z)],$$

$$[x_\lambda y]\circ_{\lambda+\mu}z=x\circ_\lambda(y\circ_\mu z)-y\circ_\mu(x\circ_\lambda z), \tag{3.11}$$

对所有$x,y,z\in R$均成立。

李共形代数**上的平凡交换后李共形代数结构** R总是存在，其定义为

$$x\circ_\lambda y=0,\quad\text{for all } x,y\in R.$$

然而，判断给定的李共形代数是否具有非平凡交换后李共形代数结构通常并非易事。对于阿贝尔李共形代数，CPLCA 结构对应于交换结合代数，如下所示。

命题 3.11. 设 $(R\ [\cdot_\lambda\cdot])$ 是一个阿贝尔李共形代数，且对所有 $x, y \in R$，都有 $[x_\lambda y] = 0$。设 $\circ_\lambda$ 是 R 上的一个 *CPLCA* 结构，则 $\circ_\lambda$ 既是交换的，也是结合的。

证明。 交换性直接由 CPLCA 条件得到。对于结合性，利用关系式 (3.10) 和 (3.11)，我们计算得:

$$x \circ_\lambda (y \circ_\mu z) = x \circ_\lambda (z \circ_{-\mu-\partial} y) = z \circ_{-\mu-\partial-\lambda} (x \circ_\lambda y) = (x \circ_\lambda y) \circ_{\lambda+\mu} z,$$

对所有 x、y、 $z \in R$。这就证明了 $\circ_\lambda$ 的结合性。 □

命题 3.12。 设 R 是一个具有平凡中心的李共形代数，并设 ϕ： $R \to R$ 是一个 $\mathbb{C}[\partial]$-线性映射。在 R 上定义 $a\lambda$-乘积 $\circ_\lambda$ 为

$$x \circ_\lambda y = [\phi(x)_\lambda y], \qquad \forall x, y \in R.$$

则当且仅当 ϕ 是满足以下条件的李共形代数同态时， $\circ_\lambda$ 在 R 上定义一个 *CPLCA* 结构:

$$[\phi(x)_\lambda y] + [x_\lambda \phi(y)] = 0, \qquad \forall x, y \in R. \tag{3.12}$$

证明。 假设 $\circ_\lambda$ 在 R 上定义了一个 CPLCA 结构。交换性条件意味着

$$[\phi(x)_\lambda y] = x \circ_\lambda y = y \circ_{-\lambda-\partial} x = [\phi(y)_{-\lambda-\partial} x] = -[x_\lambda \phi(y)],$$

其中 t 最后一个等式由 λ-括号的共形反对称性得到。这就证明了 (3.12).

此外，结合 (3.11) 和共形雅可比恒等式（$L4_\lambda$），我们得到

$$[\phi(x)_\lambda \phi(y)] = \phi([x_\lambda y]),$$

这表明 ϕ 是李共形代数同态。

反过来，若 ϕ 是满足 (3.12) 的李共形代数同态，则直接验证可知，λ-乘积 $\circ_\lambda$ 满足 CPLCA 的所有公理。

□

3.3 与权为 1 的 Rota-Baxter 算子的联系

Lem命题 3.13. 设 R 为李共形代数。对于任意 $d \in Z(\mathrm{CDer}(R))$，有 $\langle d_\lambda R\rangle \subseteq Z(R)$。

证明。 由于d 属于 CDer(R) 的中心，因此它与 CDer(R) 中的每个元素都交换。特别地，对于任意$x \in R$，有 $[d_\lambda \mathrm{ad}_x] = 0$。这意味着

$$0 = [d_\lambda \mathrm{ad}_x]_{\lambda+\mu} y = d_\lambda([x_\mu y]) - [x_\mu (d_\lambda y)] = [(d_\lambda x)_{\lambda+\mu} y], \quad \forall y \in R$$

因此，对于 每个$x \in R$，元素$d_\lambda x$都属于R的中心$Z(R)$，因此 $\langle d_\lambda R\rangle \subseteq Z(R)$. □

定理 3.14。 设 R 是一个具有平凡中心的李共形代数，且 $\circ_\lambda$ 是 R 上的一个 *PLCA* 结构。则存在一个 $\mathbb{C}[\partial]$-线性映射 $T : R \to \mathrm{CDer}(R), x \mapsto T(x)$，使得对所有 $x, y \in R$，$x \circ_\lambda y = T(x)_\lambda y$。此外，映射 T 对所有 $x, y \in R$ 满足以下恒等式:

$$\big[T(x)_\lambda T(y)\big] = T\big([T(x)_\lambda y] + [x_\lambda T(y)] + [x_\lambda y]\big). \tag{3.13}$$

此处我们将 R 与其在伴随表示 ad:$R \hookrightarrow \mathrm{CDer}(R)$ 下的像等同起来。

证明。对于任意 x ∈R，由 L(x) ∈CDer(R) 定义的左乘 L(x)$_\lambda$y =x ∘$_\lambda$y 是一个共形导子。因此，存在一个映射 T : R →CDer(R)，x ↦T (x)，使得 x ∘$_\lambda$y =T (x)$_\lambda$y。对于任意 x,y, z ∈R 和 k$_1$,k$_2$ ∈ℂ，有

$$T(\partial x)_\lambda y = (\partial x)\circ_\lambda y = -\lambda(x\circ_\lambda y) = -\lambda T(x)_\lambda y = (\partial T(x))_\lambda y,$$
$$T(k_1x+k_2y)_\lambda z = (k_1x+k_2y)\circ_\lambda z = k_1(x\circ_\lambda z)+k_2(y\circ_\lambda z) = k_1T(x)_\lambda z + k_2T(y)_\lambda z.$$

因此，T是一个 $\mathbb{C}[\partial]$-线性映射。我们可以将 R 与子代数 CInn(R) $\subseteq$CDer(R) 等同。根据定义 $x\circ_\lambda y = T(x)_\lambda y$ 以及 CDer(R) 中的共形雅可比恒等式，可得

$$\big[[T(x)_\lambda T(y)]_{\lambda+\mu}z\big] = \Big[T\big([T(x)_\lambda y]\big)_{\lambda+\mu}z\Big] + \Big[T\big([x_\lambda T(y)]\big)_{\lambda+\mu}z\Big] + \big[T\big([x_\lambda y]\big)_{\lambda+\mu}z\big], \quad \forall x,y,z\in R.$$

由引理 3.13，当 $Z(R) = 0$时，CDer(R) 的中心是平凡的；因此，前述算子等式推出恒等式 (3.13)。

反之，若一个 $\mathbb{C}[\partial]$-线性映射 T: $R \to$CDer(R) 满足 (3.13)，则定义 $x\circ_\lambda y := T(x)_\lambda y$ 便赋予 R 一个后李共形代数结构。 □

推论 3.15. 设 R 是一个完备李共形代数。那么，R 上的每个后李共形代数结构都由 R 上一个权 1 的 *Rota–Baxter* 算子诱导。

证明。由于 R 是完备的，我们有 CDer(R) =CInn(R)。因此，R ≅ CInn(R) ≅ CDer(R)。由定理 3.14，存在一个 $\mathbb{C}[\partial]$-线性映射 T : R →CDer(R)，使得 x ∘$_\lambda$y =T (x)$_\lambda$y，且 T 满足恒等式 (3.13)。由于 CDer(R) =CInn(R) ≅R，映射 T 可视为 R 上的线性自同态。在同一化 ad : R $\xrightarrow{\sim}$ CInn(R) 下，我们有 T (x)$_\lambda$y =(ad$^{T(x)}$)$_\lambda$y =[T (x)$_\lambda$y]。将此表达式代入 (3.13)，恰好得到 T 在 R 上满足的 Rota–Baxter 关系。因此，T 是 R 上一个权 1 的 Rota–Baxter 算子，且给定的后李共形代数结构与 T 诱导的结构一致。

□

定理 3.16. *Virasoro* 共形代数 Vir 上的每个 *PLCA* 结构都是平凡的。

证明. 由 [17, 引理 6.1], 可知，Virasoro 共形代数 Vir 的每个共形导子都是内导子。因此，对于 Vir 上的任意 PLCA 结构，λ-乘法 $\circ_\lambda$ 必具有如下形式

$$L\circ_\lambda L = (\partial+2\lambda)g(\lambda)L, \text{ for some } g(\lambda)\in\mathbb{C}[\lambda].$$

相容条件 (3.2) 给出函数方程

$$g(\lambda)g(\mu) = g(\lambda+\mu)\big(g(\lambda)+g(\mu)+1\big).$$

令 $\mu = 0$可得 $g(\lambda)(g(\lambda)+1) = 0$，其唯一解为 $g(\lambda) = 0$或 $g(\lambda) = -1$。这两种情况分别对应两个平凡 PLCA 结构:

$$L\circ_\lambda L = 0, \qquad L\circ_\lambda L = -(\partial+2\lambda)L = -[L_\lambda L].$$

证明完毕。 □

4 Block 型李共形代数上的 PLCA 结构

本节将完整分类块型李共形代数 $\mathfrak{B}(q)$ 上的权 1 Rota–Baxter 算子。在假设 $q\in\mathbb{C}$、$q\neq 0$ 和 $q\notin\mathbb{Z}_-$ 的条件下，$\mathfrak{B}(q)$ 的每个共形导子都是内导子（例如，参见 [37]）。基于这一结果，我们进一步确定了 $\mathfrak{B}(q)$ 上所有两两不同构的后李共形代数结构。

定义 4.1. 设 $q \in \mathbb{C}$。块型李共形代数 $\mathfrak{B}(q)$ 是以 $\{L_i \mid i \in \mathbb{Z}_+\}$ 为基的自由 $\mathbb{C}[\partial]$-模，其 λ-括号定义如下：

$$[L_{i\lambda}L_j] = \big((i+q)\partial + (i+j+2q)\lambda\big)L_{i+j}, \qquad i,j \in \mathbb{Z}_+. \tag{4.1}$$

李共形代数 $\mathfrak{B}(q)$ 具有自然的 $\mathbb{Z}_+$-分次

$$\mathfrak{B}(q) = \bigoplus_{n\geq 0} \mathfrak{B}_n, \qquad \mathfrak{B}_n = \mathbb{C}[\partial]L_n.$$

对于每个 $i \in \mathbb{Z}_+$，我们定义第 i 个截断代数 为

$$M_i := \mathfrak{B}(q)/I^{>i}, \qquad I^{>i} := \bigoplus_{k>i} \mathfrak{B}_k.$$

$\mathfrak{B}(q)$ 上权 1 的 Rota–Baxter 算子将通过考察它们在截断代数 M_i 上的限制来归纳构造。

引理 4.2. *Virasoro* 共形代数 Vir 上的任何权 *1 Rota-Baxter* 算子都是平凡的。

证明. 设 T是 Vir 上的权 1 Rota–Baxter 算子。记 $T(L) = f(\partial)L$，其中 $f(\partial) \in \mathbb{C}[\partial]$。由 (2.2)，有

$$f(-\lambda)f(\partial+\lambda) = \big(f(-\lambda) + f(\partial+\lambda) + 1\big)f(\partial).$$

在上述等式中令 $\lambda = 0$，并化简可得

$$\big(f(\partial)+1\big)f(\partial) = 0.$$

因此$f(\partial) = 0$或$f(\partial) = -1$，这两者都对应于权 1 的平凡 Rota–Baxter 算子 . □

Lem理 4.3. 在同构意义下，M_0 是秩为 *1* 且具有 λ-括号的自由李共形代数 t

$$[L_{0\lambda}L_0] = q(\partial + 2\lambda)L_0.$$

那么，M_0 上的每个权 *1 Rota–Baxter* 算子都是平凡的。

证明。 由于 $q \neq 0$，元素 $\widetilde{L}_0 := \frac{1}{q}L_0$ 满足

$$[\widetilde{L}_{0\lambda}\widetilde{L}_0] = \frac{1}{q^2}[L_{0\lambda}L_0] = \frac{1}{q^2}q(\partial+2\lambda)L_0 = (\partial+2\lambda)\widetilde{L}_0.$$

因此，将 L_0 映到 Vir 的典范生成元 L 的 $\mathbb{C}[\partial]$-线性映射是李共形代数的同构，因此 $M_0 \cong$与 Vir 同构。根据引理 4.2，Vir 上的所有 Rota–Baxter 算子都是平凡的。因此，M_0上的每个 Rota–Baxter 算子也都是平凡的。

□

引理 4.4。 在同构意义下，李共形代数 $M_1 = \mathbb{C}[\partial]L_0 \oplus \mathbb{C}[\partial]L_1$ 由以下 λ-括号确定：

$$[L_{1\lambda}L_1] = 0, \quad [L_{0\lambda}L_0] = q(\partial+2\lambda)L_0, \quad [L_{0\lambda}L_1] = (q\partial + (1+2q)\lambda)L_1, \quad [L_{1\lambda}L_0] = \big((1+q)\partial + (1+2q)\lambda\big)L_1.$$

L且 T 是 M_1 上权 *1* 的 *Rota–Baxter* 算子。则 $T(L_1) = \alpha L_1$, 其中 $\alpha = 0$ 或 $\alpha = -$ 1.

证明。由 Le 根据引理 2.16 和 4.3，我们可以将注意力集中在 T 作用于 M_1 上且具有以下形式的 Rota–Baxter 算子

$$T(L_0)=f(\partial)L_1,\qquad T(L_1)=g_1(\partial)L_0+g_2(\partial)L_1,$$

其中 $f(\partial)$，$g_1(\partial)$，$g_2(\partial)\in\mathbb{C}[\partial]$。在（2.2）中取 $x=y=L_0$，可得

$$\Big(f(-\lambda)\big((1+q)\partial+(1+2q)\lambda\big)+f(\partial+\lambda)\big(q\partial+(1+2q)\lambda\big)\Big)g_1(\partial)=0, \tag{4.2}$$

$$\Big(f(-\lambda)\big((1+q)\partial+(1+2q)\lambda\big)+f(\partial+\lambda)\big(q\partial+(1+2q)\lambda\big)\Big)g_2(\partial)+f(\partial)q(\partial+2\lambda)=0. \tag{4.3}$$

若 $g_1(\partial)\neq 0$，则由（4.2）可推出

$$f(-\lambda)\Big((1+q)\partial+(1+2q)\lambda\Big)+f(\partial+\lambda)\Big(q\partial+(1+2q)\lambda\Big)=0,$$

结合（4.3）可知 $f(\partial)=0$，从而 $T(L_0)=0$。

现在在（2.2）中令 $x=L_0$, 和 $y=L_1$，得到

$$(g_2(\partial+\lambda)+1)\,T(L_1)=0.$$

由于 $T(L_1)\neq 0$（因为 $g_1(\partial)\neq 0$），因此 $g_2(\partial+\lambda)+1=0$，进而 $g_2(\partial)=-1$。

接下来，在（2.2）中令$x=y=L_1$

$$q(\partial+2\lambda)g_1(\partial+\lambda)g_1(-\lambda)=\Big(g_1(\lambda)\big(q\partial+(1+2q)\lambda\big)+g_1(\partial+\lambda)\big((1+q)\partial+(1+2q)\lambda\big)\Big)g_1(\partial). \tag{4.4}$$

若 $\deg g_1(\partial)\geq 1$，则令 ∂_0 为$g_1(\partial)$的一个根。将 $\partial=\partial_0$ 代入（4.4），得到$q(\partial_0+2\lambda)g_1(\partial_0+\lambda)g_1(-\lambda)=0$，这是不可能的。因此，$g_1(\partial)$ 必为常数。令$g_1(\partial)=c$。则方程（4.4）变为

$$c^2q(\partial+2\lambda)=c^2(1+2q)(\partial+2\lambda),$$

这意味着$c^2(1+q)(\partial+2\lambda)=0$. 由于$q\neq -1$，我们必有$c=0$，这与$g_1(\partial)\neq 0$矛盾。因此，我们得到

$$g_1(\partial)=0.$$

于是$T(L_1)=g_2(\partial)L_1$。在（2.2）中令$x=L_0$且$y=L_1$，得到

$$T\left([L_{0\lambda}T(L_1)]+[L_{0\lambda}L_1]\right)=0.$$

注意到 $[L_{0\lambda}T(L_1)]=g_2(\partial+\lambda)[L_{0\lambda}L_1]=g_2(\partial+\lambda)\big(q\partial+(1+2q)\lambda\big)L_1$, 以及 $[L_{0\lambda}L_1]=\big(q\partial+(1+2q)\lambda\big)L_1$.。因此，其和为 $(g_2(\partial+\lambda)+1)\big(q\partial+(1+2q)\lambda\big)L_1$。应用 T 得

$$(g_2(\partial+\lambda)+1)\big(q\partial+(1+2q)\lambda\big)g_2(\partial)L_1=0,$$

因此我们得到 $(g_2(\partial+\lambda)+1)g_2(\partial)=0$.。因此，$g_2(\partial)=0$或 $g_2(\partial)=-1$，这意味着 $T(L_1)=0$或 $T(L_1)=-L_1$。

□

定理 4.5。设 $n\geq 1$，且 T 是 M_n 上权为 1 的 *Rota–Baxter* 算子。那么对于每个满足 $1\leq i\leq n$ 的整数 i，都有 $T(L_i)=\alpha L_i$，其中 $\alpha\in\{0,-1\}$。

证明。我们对 n 作归纳。由引理 4.4，命题在 $n=1$ 时成立。假设对于 M_k，其中$1 \le k \le n$ 且 $n \ge 1$，命题成立，并考虑截断代数 M_{n+1}。由引理 2.16 和 4.3，我们可以假设 $T(L_0) \in \bigoplus_{n+1 i=1} \mathfrak{B}_i$.根据归纳假设，我们还可以写成

$$T(L_i) = \alpha L_i + f_i(\partial) L_{n+1}, \quad f_i(\partial) \in \mathbb{C}[\partial], \quad 1 \le i \le n, \quad \alpha \in \{0, -1\}.$$

令$k_1 = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$，$k_2 = \left\lfloor \frac{n+2}{2} \right\rfloor$.。则 $1 \le k_1 \le k_2 \le n$且$k_1 + k_2 = n+1$。将$x = L^{k_1}$和$y = L^{k_2}$代入（2.2），得到

$$[T(L_{k_1})_\lambda T(L_{k_2})] = T\big([T(L_{k_1})_\lambda L_{k_2}] + [L_{k_1 \lambda} T(L_{k_2})] + [L_{k_1 \lambda} L_{k_2}]\big).$$

由于对所有$i \ge 1$，$[L_{i\lambda} L_{n+1}] = 0$，该恒等式化简为

$$\alpha^2 [L_{k_1 \lambda} L_{k_2}] = T\big((2\alpha+1)[L_{k_1 \lambda} L_{k_2}]\big).$$

因此，

$$\big((k_1+q)\partial + (n+1+2q)\lambda\big)\big((2\alpha+1)T(L_{n+1}) - \alpha^2 L_{n+1}\big) = 0.$$

由于（$k_1 + q$）∂ +（$n+1+2q$）$\lambda \ne 0$，可得

$$T(L_{n+1}) = \frac{\alpha^2}{2\alpha+1} L_{n+1}.$$

对于 $\alpha \in \{0, -1\}$，有 $\frac{\alpha^2}{2\alpha+1} = \alpha$，因此

$$T(L_{n+1}) = \alpha L_{n+1}.$$

还需证明，对所有 $1 \le i \le n$，f_i（∂）$= 0$。反设存在i使得f_i（∂）$\ne 0$，并令n_0 为具有此性质的最大正整数。将$x = L_0$ 和$y = L^{n_0}$ 代入（2.2），得到

$$[T(L_0)_\lambda T(L_{n_0})] = T\big([T(L_0)_\lambda L_{n_0}] + [L_{0\lambda} T(L_{n_0})] + [L_{0\lambda} L_{n_0}]\big).$$

由于

$$[T(L_0)_\lambda T(L_{n_0})] = [T(L_0)_\lambda \alpha L_{n_0}] = \alpha [T(L_0)_\lambda L_{n_0}] = T([T(L_0)_\lambda L_{n_0}]),$$

上述恒等式化简为

$$T\big((\alpha+1)[L_{0\lambda} L_{n_0}]\big) + f_{n_0}(\partial + \lambda) T([L_{0\lambda} L_{n+1}]) = 0.$$

若 $\alpha = -1$，则 $f^{n_0}(\partial+\lambda)T([L_{0\lambda}L_{n+1}]) = 0$，这意味着 $f^{n_0}(\partial) = 0$，因为 $T([L_{0\lambda}L_{n+1}]) \ne 0$。若 $\alpha = 0$，则 $T([L_{0\lambda} L_{n_0}]) = 0$，这意味着 $T(L^{n_0}) = 0$，进而 $f^{n_0}(\partial) = 0$。这两种情况都与 n_0 的选取矛盾。

因此，对于所有 $1 \le i \le n$，都有 $f_i(\partial) = 0$，归纳过程至此完成。 □

命题 4.6. 设 T 是 一个作用于 $\mathfrak{B}(q)$ 上的 *Rota–Baxter* 算子。则对每个 $i \ge 1$，都有 $T(L_i) = \alpha L_i$，其中 $\alpha \in \{0, -1\}$.

证明。反设存在整数$n \ge 1$，使得$T(L_n) \ne \alpha L_n$ 对 $\alpha = 0$ 和 $\alpha = -1$均成立。令$T(L_n) = \sum_{i=0}^{m} f_i(\partial) L_i$，并设$N = \max\{m, n\}$。由注 2.15，限制$T|_{M_N}$是$M_N$上的权 1 Rota–Baxter 算子。然而，定理 4.5 表明，对于某个 $\alpha \in \{0, -1\}$，有$T|_{M_N}(L_n) = \alpha L_n$，这与$n$的选取矛盾。因此，命题成立。

□

Prop命题 4.7. 设 T 是 $\mathfrak{B}(q)$上的 *Rota–Baxter* 算子。那么 $T(L_0) = \beta L_0$, 其中 $\beta = 0$ 或 -1.

证明。 记 $T(L_0)=\sum_{i=0}^{m} f_i(\partial)L_i$， $f_m(\partial)\neq 0$。假设 $m>0$。那么

$$[T(L_0)_\lambda T(L_0)] = f_m(-\lambda)f_m(\partial+\lambda)[L_{m\lambda}L_m]+L,$$

其中 $L\in M_{2m-1}$。另一方面，由命题 4.6 可得

$$T\big([T(L_0)_\lambda L_0]+[L_{0\lambda}T(L_0)]+[L_{0\lambda}L_0]\big)\in T(M_m)\subseteq M_m.$$

因此，

$$f_m(-\lambda)f_m(\partial+\lambda)[L_{m\lambda}L_m]\in M_{2m-1}+M_m\subseteq M_{2m-1}.$$

这是不可能的，因为 $[L_{m\lambda}L_m]\notin M_{2m-1}$。因此 $m=0$，从而 $T(L_0)=f_0(\partial)L_0$。将引理 4.3 应用于子代数 M_0,，得到

$$T(L_0)=T|_{M_0}(L_0)=\beta L_0,$$

其中 $\beta=0$ 或 -1。 □

定理 引理 4.8. 设 T 是 $\mathfrak{B}(q)$上的 *Rota–Baxter* 算子。那么 T 必为以下形式之一：

(i) T 是平凡的，即 $T=0$ 或 $T=-\mathrm{id}$；*(ii)* 对所有 $i\geqslant 1$，$T(L_0)=0$，$T(L_i)=-L_i$；*(iii)* 对所有 $i\geqslant 1$，$T(L_0)=-L_0$, $T(L_i)=0$。

证明。 由命题 4.6 和 4.7 可得，对所有 $i\in\mathbb{N}$，有 $T(L_0)=\beta L_0$，且$T(L_i)=\alpha L_i$，其中 α，$\beta\in\{0,-1\}$。反过来，可以直接验证，任何满足这些条件的映射T 确实是 $\mathfrak{B}(q)$ 上的 Rota–Baxter 算子。 □

定理 4 .9. 李共形代数 $\mathfrak{B}(q)$上的后李共形代数结构恰为以下之一 ：

(i) 对所有 $x,y\in\mathfrak{B}(q)$，$x\circ_\lambda y=0$；*(ii)* 对所有 $x,y\in\mathfrak{B}(q)$，$x\circ_\lambda y=-[x_\lambda y]$；*(iii)* 对所有 $i\in\mathbb{N}$ 及 $x\in\mathfrak{B}(q)$，$L_0\circ_\lambda x=0$，且 $L_i\circ_\lambda x=-[L_{i\lambda}x]$；*(iv)* 对所有 $i\in\mathbb{N}$ 及 $x\in\mathfrak{B}(q)$，$L_0\circ_\lambda x=-[L_{0\lambda}x]$，且 $L_i\circ_\lambda x=0$。

证明。 由于$q\neq 0$ 且$q\notin\mathbb{Z}_-$，李共形代数 $\mathfrak{B}(q)$ 是完备的。根据推论 3.15，$\mathfrak{B}(q)$ 上的任意后李共形代数结构都由 Rota–Baxter 算子T 通过下式诱导：

$$x\circ_\lambda y=[T(x)_\lambda y],\qquad x,y\in\mathfrak{B}(q).$$

$\mathfrak{B}(q)$ 上的所有 Rota–Baxter 算子已在定理 4.8 中分类。将这些算子代入上述公式，恰好得到上面列出的四种 PLCA 结构。 □

5 李共形代数$W(b)$上的后李共形代数结构

本节将对李共形代数$W(b)$ 上的所有后李共形代数结构进行分类。

当$b\in\mathbb{C}$ 时，李共形代数$W(b)$ 是一个由L和H生成的自由 $\mathbb{C}[\partial]$-模，满足以下λ-括号：

$$[L_\lambda L]=(\partial+2\lambda)L,\quad [L_\lambda H]=\big(\partial+(1-b)\lambda\big)H,\quad [H_\lambda L]=\big(-b\partial+(1-b)\lambda\big)H,\quad [H_\lambda H]=0. \tag{5.1}$$

该代数在 [40] 中引入，并在 [33,39]中得到进一步研究。当 $b=0$ 时，它还原为海森堡–维拉索罗共形代数。该代数最早见于 [36]，其平凡系数上同调在 [41]中得到了计算。当 $b=-1$ 时，它成为 W(2,2) 李共形代数，其结构性质在 [42]中得到了研究。

5.1 $W(b)$上的权为 1 的 Rota-Baxter 算子

注意，$W(b)$ 有一个非平凡的阿贝尔共形理想 $\mathbb{C}[\partial]H$，且商代数 $W(b)/\mathbb{C}[\partial]H$与 Virasoro 共形代数 Vir 同构。

命题 5.1。我们有

$$\mathrm{CDer}(W(b)) = \begin{cases} \mathrm{CInn}(W(b)), & if\ b \neq 0, \\ \mathrm{CInn}(W(0)) \oplus \mathbb{C}D_\lambda, & if\ b = 0, \end{cases}$$

其中，D_λ 是 $W(0)$的共形外导子，定义如下：

$$D_\lambda(L) = H,\ D_\lambda(H) = 0.$$

证明。设d_λ是$W(b)$的共形导子。记

$$d_\lambda(L) = u_1(\partial,\lambda)L + u_2(\partial,\lambda)H, \quad d_\lambda(H) = v_1(\partial,\lambda)L + v_2(\partial,\lambda)H,$$

其中$u_i(\partial,\lambda)$，$v_i(\partial,\lambda) \in \mathbb{C}[\partial,\lambda]$。在 (2.1) 中取$x = L$和$y = H$，得到

$$(\partial + \lambda + (1-b)\mu)v_1(\partial,\lambda) = (\partial + 2\lambda)v_1(\partial+\mu,\lambda), \tag{5.2}$$

$$(\partial + \lambda + (1-b)\mu)v_2(\partial,\lambda) = (\partial + (1-b)(\lambda+\mu))u_1(-\lambda-\mu,\lambda) + (\partial + (1-b)\mu)v_2(\partial+\mu,\lambda). \tag{5.3}$$

将 $\mu = 0$ 代入 (5.2) 得到 $\lambda v_1(\partial,\lambda) = 0$，因此

$$v_1(\partial,\lambda) = 0. \tag{5.4}$$

接下来，在 (2.1) 中取 $x = y = L$，得到

$$(\partial + \lambda + 2\mu)u_1(\partial,\lambda) = (\partial + 2\lambda + 2\mu)u_1(-\lambda-\mu,\lambda) + (\partial + 2\mu)u_1(\partial+\mu,\lambda), \tag{5.5}$$

$$(\partial + \lambda + 2\mu)u_2(\partial,\lambda) = (-b\partial + (1-b)(\lambda+\mu))u_2(-\lambda-\mu,\lambda) + (\partial + (1-b)\mu)u_2(\partial+\mu,\lambda). \tag{5.6}$$

将 $\partial = -\lambda - \mu$ 代入 (5.5)，得到

$$(\lambda - \mu)u_1(-\lambda,\lambda) = \lambda u_1(-\lambda-\mu,\lambda). \tag{5.7}$$

由于 λ 和 $\lambda - \mu$ 互素，因此 $\lambda \mid u_1(-\lambda,\lambda)$。令 $u_1(-\lambda,\lambda) = \lambda p_1(\lambda)$，其中 $p_1(\lambda) \in \mathbb{C}[\lambda]$。于是 (5.7) 推出

$$u_1(\partial,\lambda) = (\partial + 2\lambda)p_1(\lambda). \tag{5.8}$$

在 (5.3) 中令 $\mu = 0$，并利用 (5.8)，得到

$$v_2(\partial,\lambda) = (\partial + (1-b)\lambda)p_1(\lambda). \tag{5.9}$$

在 (5.6) 中取 $\partial = -\lambda - \mu$，得到

$$\lambda u_2(-\lambda-\mu,\lambda) = (\lambda + b\mu)u_2(-\lambda,\lambda). \tag{5.10}$$

首先假设$b \neq 0$。那么 λ和 $\lambda + b\mu$互素，由（5.10）可得 $\lambda \mid u_2(-\lambda,\lambda)$。因此

$$u_2(-\lambda,\lambda) = \lambda p_2(\lambda), \tag{5.11}$$

对于某个$p_2(\lambda) \in \mathbb{C}[\lambda]$。将$\mu = 0$代入（5.6）并利用（5.11），得到

$$u_2(\partial, \lambda) = \big(-b\partial + (1-b)\lambda\big)p_2(\lambda). \tag{5.12}$$

令$a_1 = p_1(-\partial)L + p_2(-\partial)H$。由 (5.4)、(5.8)、(5.9) 和 (5.12)，可得

$$d_\lambda(L) = (\mathrm{ad}\, a_1)_\lambda(L), \qquad d_\lambda(H) = (\mathrm{ad}\, a_1)_\lambda(H).$$

因此，d_λ是一个内共形导子。

现在假设$b = 0$。在 (5.6) 中令 $\mu = 0$，可得$u_2(\partial, \lambda) = u_2(-\lambda, \lambda)$。因此

$$u_2(\partial, \lambda) = \lambda p(\lambda) + c, \tag{5.13}$$

对某个$p(\lambda) \in \mathbb{C}[\lambda]$且$c \in \mathbb{C}$。令$a_2 = p_1(-\partial)L + p(-\partial)H$。由 (5.4)、(5.8)、(5.9) 和 (5.13)，可得

$$d_\lambda(L) = (\mathrm{ad}\, a_2)_\lambda(L) + cD_\lambda(L), \qquad d_\lambda(H) = (\mathrm{ad}\, a_2)_\lambda(H) + cD_\lambda(H).$$

因此，$d_\lambda = (\mathrm{ad} a_2)_\lambda + cD_\lambda$。证明至此完成。 □

定理 5.2. 设 T 是 $W(b)$ 上权为 1 的非平凡 *Rota–Baxter* 算子，其中 $b \neq 0$。回顾一下，算子 T'，定义为 $T' = -T - \mathrm{id}$，也是权为 1的 *Rota–Baxter* 算子。则 T 和 T'具有以下形式：

(1) 当 $b = 1$ 时：

$$T(L) = (a\partial^2 + c\partial)H, \quad T(H) = -H, \quad T'(L) = -L - (a\partial^2 + c\partial)H, \quad T'(H) = 0, \ a, c \in \mathbb{C};$$

(2) 当 $b = 2$ 时：

$$T(L) = (a\partial^3 + c\partial)H, \quad T(H) = -H, \quad T'(L) = -L - (a\partial^3 + c\partial)H, \quad T'(H) = 0, \ a, c \in \mathbb{C};$$

(3) 当 $b \neq 1,2$ 时：

$$T(L) = c\partial H, \quad T(H) = -H, \quad T'(L) = -L - c\partial H, \quad T'(H) = 0, \ c \in \mathbb{C}.$$

证明。显然，$W(b)/\mathbb{C}[\partial]H \cong \mathrm{Vir}$。根据引理 4.2，$W(b)$ 上的 Rota–Baxter 算子 T满足以下两种情况之一：$T(L) = f(\partial)H$，或$T(L) = -L + f(\partial)H$。如有必要，将T替换为 $-T - \mathrm{id}$，我们可以假设

$$T(L) = f(\partial)H, \qquad T(H) = g_1(\partial)L + g_2(\partial)H.$$

在 (2.2) 中取$x = y = H$，并比较L的系数，得到

$$(\partial + 2\lambda)g_1(-\lambda)g_1(\partial + \lambda) = \Big(\big(\partial + (1-b)\lambda\big)g_1(-\lambda) + \big(-b\partial + (1-b)\lambda\big)g_1(\partial + \lambda)\Big)g_1(\partial). \tag{5.14}$$

在（5.14）中令 $\lambda = 0$，得到$b\partial g_1^2(\partial) = 0$。由于$b \neq 0$，可得$g_1(\partial) = 0$。

接下来，在（2.2）中令$x = L$，$y = H$，得到

$$(\partial + (1-b)\lambda)\big(g_2(\partial + \lambda) + 1\big)g_2(\partial) = 0,$$

这意味着$g_2(\partial) = 0$，或$g_2(\partial) = -1$。

现在，在（2.2）中取$x = y = L$。则

$$\big((-b\partial + (1-b)\lambda)f(-\lambda) + (\partial + (1-b)\lambda)f(\partial + \lambda)\big)g_2(\partial) + (\partial + 2\lambda)f(\partial) = 0.$$

如果 $g_2(\partial) = 0$，那么 $f(\partial) = 0$，因此 $T \equiv 0$。于是我们假设 $g_2(\partial) = -1$，在这种情况下，上述恒等式化简为

$$(-b\partial + (1-b)\lambda)f(-\lambda) + (\partial + (1-b)\lambda)f(\partial + \lambda) = (\partial + 2\lambda)f(\partial). \tag{5.15}$$

在 (5.15) 中令 $\lambda = 0$，得到 $b\partial f(0) = 0$，因此 $f(0) = 0$。所以，对于某个 $f_0(\partial) \in \mathbb{C}[\partial]$，有 $f(\partial) = \partial f_0(\partial)$。将其代入 (5.15)，得到

$$(-b\partial + (1-b)\lambda)(-\lambda)f_0(-\lambda) + (\partial + (1-b)\lambda)(\partial + \lambda)f_0(\partial + \lambda) = (\partial + 2\lambda)\partial f_0(\partial).$$

经过变量替换 $(\partial + \lambda, -\lambda) \to (\partial, \lambda)$ 后，该方程变为

$$\partial(\partial + b\lambda)\big(f_0(\partial + \lambda) - f_0(\partial)\big) = \lambda(b\partial + \lambda)\big(f_0(\partial + \lambda) - f_0(\lambda)\big). \tag{5.16}$$

显然，当 $\deg(f_0) = 0$ 时，(5.16) 自动成立。以下假设 $\deg(f_0) \geq 1$，并记 $f_0(\lambda) = \sum_{i=0}^{n} a_i \lambda^i, a_n \neq 0.$。我们比较 (5.16) 两边 ∂ 中的最高次项。在左边，首项来自

$$\partial(\partial + b\lambda)\Big((\partial + \lambda)^n - \partial^n\Big),$$

其在 ∂中的最高次项为 $n\lambda\partial^{n+1}$。在等式右侧，首项贡献来自

$$\lambda(b\partial + \lambda)(\partial + \lambda)^n,$$

其在 ∂中的最高次项为 $b\lambda\partial^{n+1}$。为了使 (5.16) 两侧 ∂ 的次数一致，两侧 ∂^{n+1} 的系数必须相同，这迫使 $n = b$。若 $n > 2$，则比较 (5.16) 中 ∂^n 的系数可得

$$\binom{n}{2} a_n \lambda^2 + a_{n-1}(n-1)\lambda = a_n \lambda^2,$$

由于 $\binom{n}{2} > 1$ for $n > 2$，这是不可能的。因此，必有 $n = b = 1$ 或 $n = b = 2$。当 $b = 2$时，(5.16) 进一步推出 $a_1 = 0$，从而 $f_0(\partial) = a_2\partial^2 + a_0$. 当 $b = 1$时，(5.16) 恒等成立，且 $f_0(\partial) = a_1\partial + a_0$. 令 $a = a_n$ 且 $c = a_0$,，便恰好得到定理 5.2 中描述的算子 T。剩下的算子 T′ 由 $T' = -T - \mathrm{id}$ 得到。

□

5.2 $W(b)$上的 PLCA 结构

在本小节中，我们对$W(b)$上的所有 PLCA 结构进行分类。也就是说，我们确定所有满足条件的 λ-乘积，使得 $(W(b), \circ_\lambda, [\cdot_\lambda \cdot])$ 成为后Lie共形代数，其中 λ-括号由 (5.1) 给出。

如第 3.1 节所述，若 $(W(b), \circ_\lambda, [\cdot_\lambda \cdot])$ 是一个后李共形代数，则与 $\circ_\lambda$ 相关联的左乘算子 $L(x)_\lambda$ $\circ_\lambda$ 定义了$W(b)$的一个共形导子。当$b \neq 0$时，命题 5.1 表明$W(b)$的每个共形导子都是内导子。由于$W(b)$的中心是平凡的，李共形代数$W(b)$是完备的。因此，根据推论 3.15，$W(b)$上的每个 PLCA 结构都由一个权 1 的 Rota–Baxter 算子T诱导，因此具有如下形式

$$x \circ_\lambda y = [T(x)_\lambda y], \qquad x, y \in W(b).$$

作为定理 5.2 的推论——该定理对 $W(b)$ 上所有权 1 的 Rota–Baxter 算子进行了分类——当 $b \neq 0$ 时，我们得到 $W(b)$ 上非平凡 PLCA 结构的完整列表如下（其中a 和c 是 $\mathbb{C}$ 中的常数）：

（1）对于 $b=1$，有

$$L\circ_\lambda L=-\partial(a\lambda^2-c\lambda)H,\ L\circ_\lambda H=0,\ H\circ_\lambda L=-\partial H,\ H\circ_\lambda H=0, \tag{5.17}$$

and

$$L\circ_\lambda L=-(\partial+2\lambda)L+\partial(a\lambda^2-c\lambda)H,\ L\circ_\lambda H=-\partial H,\ H\circ_\lambda L=0,\ H\circ_\lambda H=0. \tag{5.18}$$

(2) 对于$b=2$，我们有

$$L\circ_\lambda L=(a\lambda^3+c\lambda)(2\partial+\lambda)H,\ L\circ_\lambda H=0,\ H\circ_\lambda L=-(2\partial+\lambda)H,\ H\circ_\lambda H=0, \tag{5.19}$$

and

$$L\circ_\lambda L=-(\partial+2\lambda)L-(a\lambda^3+c\lambda)(2\partial+\lambda)H,\ L\circ_\lambda H=-(\partial-\lambda)H,\ H\circ_\lambda L=0,\ H\circ_\lambda H=0. \tag{5.20}$$

(3) 对于$b\neq 0,\ 1,\ 2$，我们有

$$L\circ_\lambda L=-c\lambda(-b\partial+(1-b)\lambda)H,\ L\circ_\lambda H=0,\ H\circ_\lambda L=(-b\partial+(1-b)\lambda)H,\ H\circ_\lambda H=0, \tag{5.21}$$

and

$$L\circ_\lambda L=-(\partial+2\lambda)L+c\lambda(-b\partial+(1-b)\lambda)H,\ L\circ_\lambda H=-(\partial+(1-b)\lambda)H,\ H\circ_\lambda L=0,\ H\circ_\lambda H=0. \tag{5.22}$$

注意，$W(1)$ 的 λ-括号由下式给出

$$[L_\lambda L]=(\partial+2\lambda)L,\quad [L_\lambda H]=\partial H,\quad [H_\lambda L]=-\partial H,\quad [H_\lambda H]=0.$$

设$N=\partial H$。则

$$[L_\lambda L]=(\partial+2\lambda)L,\quad [L_\lambda N]=(\partial+\lambda)N,\quad [N_\lambda L]=\lambda N,\quad [N_\lambda N]=0.$$

因此，由L和N生成的李共形代数同构于$W(0)$。特别地，$W(0)$ 可嵌入$W(1)$ 作为李共形子代数。回忆一下，$W(0)$ 有一个非平凡的外共形导子D_λ，它满足

$$D_\lambda(L)=N,\qquad D_\lambda(N)=0.$$

在上述嵌入下，该导子可实现为$W(1)$的一个内导子：

$$D_\lambda x=[(-H)_\lambda x],\qquad x\in W(0).$$

因此，$W(0)$的每个共形导子都由$W(1)$中某个元素的伴随作用诱导，且有

$$\mathrm{CDer}(W(0))\cong W(1).$$

由定理 3.14，存在一个 $\mathbb{C}[\partial]$-线性映射T：$W(0)\to W(1)$，使得

$$x\circ_\lambda y=L(x)_\lambda y=[T(x)_\lambda y],\qquad x,y\in W(0),$$

并且T 满足恒等式 (3.13)。仿照定理 5.2 的证明，我们可以假设

$$T(L)=f(\partial)H,\qquad T(N)=g_1(\partial)L+g_2(\partial)H. \tag{5.23}$$

Theorem 5.3. 设 T 为由(5.23)定义的算子。则 T 必为以下形式之一：

(i) $T(L)=0,\quad T(N)=cL-N;$

(ii) $T(L)=-L,\quad T(N)=-cL;$

(iii) $T(L)=(a_1\partial+a_0)N,\quad T(N)=-N;$

(iv) $T(L)=-L-(a_1\partial+a_0)N,\quad T(N)=0,$

其中 $a_0,a_1,c\in\mathbb{C},\ c\neq 0$。

证明。 在 (3.13) 中令 $x=y=L$，得到

$$\big(f(\partial+\lambda)-f(-\lambda)\big)g_1(\partial)=0, \tag{5.24}$$

$$\big(f(\partial+\lambda)-f(-\lambda)\big)g_2(\partial)+(\partial+2\lambda)f(\partial)=0. \tag{5.25}$$

情形 1。 $g_1(\partial)\neq 0$。

由 (5 .24)，我们推得 $f(\partial)=0$，因此 $T(L)=0$。在 (3.13) 中令 $x=L,\ y=N$，得到 n

$$((\partial+\lambda)+g_2(\partial+\lambda))T(N)=0.$$

由于 $g_1(\partial)\neq 0$意味着 $T(N)\neq 0$，因此 $g_2(\partial)=-\partial$。在 (3.13) 中令 $x=y=N$，得到

$$(\partial+2\lambda)g_1(-\lambda)g_1(\partial+\lambda)=\big((\partial+\lambda)g_1(-\lambda)+\lambda g_1(\partial+\lambda)\big)g_1(\partial).$$

改写该方程可得

$$(\partial+\lambda)g_1(-\lambda)\big(g_1(\partial+\lambda)-g_1(\partial)\big)=\lambda g_1(\partial+\lambda)\big(g_1(\partial)-g_1(\lambda)\big). \tag{5.26}$$

令 $g_1(\partial)=\sum_{i=0}^{n}a_i\partial i$，其中 $a_n\neq 0$。比较 (5.26) 两边关于 ∂（即 $\partial^2{}_n$）的最高次项，可得 $g_1(\partial)$ 必为非零常数。因此，我们得到

$$T(L)=0,\quad T(N)=cL-\partial H,$$

其中 $c\neq 0$为常数。将 N代入 ∂H，得到 (i) 部分。将 $-T-\mathrm{id}$ 代入 T，得到 (ii) 部分。**情形 2.** $g_1(\partial)=0$。

在此情形下，我们有

$$T(L)=f(\partial)H,\quad T(N)=g_2(\partial)H.$$

若 $g_2(\partial)=0$，则 (5.25) 蕴含 $f(\partial)=0$，从而 $T=0$。若 $g_2(\partial)\neq 0$，则在 (3.13) 中令 $x=L$、$y=N$，可得

$$\big(g_2(\partial+\lambda)+(\partial+\lambda)\big)g_2(\partial)=0,$$

这意味着 $g_2(\partial)=-\partial$，因为 $g_2(\partial)\neq 0$。将其代入 (5.25)，得到

$$-\partial f(\partial+\lambda)+\partial f(-\lambda)+(\partial+2\lambda)f(\partial)=0. \tag{5.27}$$

在 (5.27) 中令 $\partial=0$，得到 $f(0)=0$。令 $f(\partial)=\partial h(\partial)$；则 (5.27) 变为

$$(\partial+2\lambda)h(\partial)=(\partial+\lambda)h(\partial+\lambda)+\lambda h(-\lambda). \tag{5.28}$$

假设 $\deg(h) > 1$，并写作 $h(\partial) = \sum_{i=0}^{n} a_i \partial^i$，其中 $n > 1$ 且 $a_n \neq 0$。比较 (5.28) 两边 ∂^n 的系数，得到 $(n-1)\lambda a_n = 0$，这与我们的假设矛盾。因此，$h(\partial) = a_1\partial + a_0,$，其中 a_0, a_1 均为常数。由此可得

$$T(L) = (a_1\partial^2 + a_0\partial)H, \quad T(N) = -\partial H,$$

将 ∂H 替换为 N，即可得到 (iii)。将 T 替换为 $-T - \mathrm{id}$，即可得到 (iv)。 □

注 5.4. 注意，若 $T(L)$ 和 $T(N)$ 均属于 $\mathbb{C}[\partial]L + \mathbb{C}[\partial]N$，则 T 实际上是 $W(0)$ 上的 *Rota–Baxter* 算子。因此，$W(0)$ 上 *Rota–Baxter* 算子的分类完全由定理 *5.3* 确定。

由定理 3.14 和定理 5.3，可得以下结果。

命题 5.5. $W(0)$ 上的所有后李共形代数结构均由以下 λ-乘积给出：

(1) $L \circ_\lambda L = L \circ_\lambda H = 0, H \circ_\lambda L = c(\partial + 2\lambda)L - \lambda H, H \circ_\lambda H = c(\partial + \lambda)H$; *(2)* $L \circ_\lambda L = -(\partial + 2\lambda)L, L \circ_\lambda H = -(\partial + \lambda)H, H \circ_\lambda L = -c(\partial + 2\lambda)L, H \circ_\lambda H = -c(\partial + \lambda)H$; *(3)* $L \circ_\lambda L = (a_1\lambda^2 - a_0\lambda)\lambda H, H \circ_\lambda L = -\lambda H, L \circ_\lambda H = H \circ_\lambda H = 0$; *(4)* $L \circ_\lambda L = -(\partial + 2\lambda)L - (a_1\lambda^2 - a_0\lambda)\lambda H, L \circ_\lambda H = -(\partial + \lambda)H, H \circ_\lambda L = H \circ_\lambda H = 0.$

其中 $a_0, a_1, c \in \mathbb{C}$，$c \neq 0$。

为对底层李共形代数同构于 $(W(b), [\cdot_\lambda \cdot])$ 的非同构 PLCA 结构进行分类，我们逐一讨论。我们分别处理 $b = 0$ 的情形，以及上一小节中得到的 $b \neq 0$ 时的三个族 (1)–(3)。在每种情形下，我们都明确写出定义该 PLCA 结构的非零 λ-乘积。

对于 $b = 0$，我们通过采用适当的基变换，简化命题 5.5 中列出的 PLCA 结构。

对于命题 5.5 的情形 (i) 和 (ii)，我们分别应用变换 $[L' = L - \frac{1}{c}H, H' = \frac{1}{c}H]$ 和 $[L' = L, H' = -\frac{1}{c}H]$，以得到统一结构：

$$L' \circ_\lambda L' = -(\partial + 2\lambda)L', L' \circ_\lambda H' = -(\partial + \lambda)H', H' \circ_\lambda L' = (\partial + 2\lambda)L', H' \circ_\lambda H' = (\partial + \lambda)H'.$$

对于命题 5.5 的情形（iii）和（iv），我们考虑两个子情形：

子情形 1： $a_1 = 0$。应用变换 $[L' = L + a_0(\partial)H, H' = H]$，我们得到：

$$L' \circ_\lambda L' = 0, L' \circ_\lambda H' = 0, H' \circ_\lambda L' = -\lambda H', H' \circ_\lambda H' = 0$$

对于情形（iii），以及

$$L' \circ_\lambda L' = -(\partial + 2\lambda)L', L' \circ_\lambda H' = -(\partial + \lambda)H', H' \circ_\lambda L' = 0, H' \circ_\lambda H' = 0$$

对于情形（iv）。

子情形 2： $a_1 \neq 0$。分别将变换 $[L' = L + a_0(\partial)H, H' = \frac{1}{a_1}H]$ 和 $[L' = L + a_0(\partial)H, H' = -\frac{1}{a_1}H]$ 应用于情形（iii）和（iv），我们得到：

$$L' \circ_\lambda L' = \lambda^3 H', L' \circ_\lambda H' = 0, H' \circ_\lambda L' = -\lambda H', H' \circ_\lambda H' = 0$$

对于情形（iii），以及

$$L' \circ_\lambda L' = -(\partial + 2\lambda)L' + \lambda^3 H', L' \circ_\lambda H' = -(\partial + \lambda)H', H' \circ_\lambda L' = 0, H' \circ_\lambda H' = 0$$

对于情形（iv）。

对于$b \neq 0$，在情形（1）中，当$a = c = 0$时，方程（5.17）和（5.18）给出以下两个非同构 PLCA 结构：

$$L \circ_\lambda L = L \circ_\lambda H = H \circ_\lambda H = 0,\ H \circ_\lambda L = -\partial H;$$
$$L \circ_\lambda L = -(\partial + 2\lambda)L,\ L \circ_\lambda H = -\partial H,\ H \circ_\lambda L = H \circ_\lambda H = 0.$$

对于$c \neq 0$，令$k = ac$。基变换$L' = L$，$H' = cH$分别将（5.17）和（5.18）变为以下两个非同构 PLCA 结构：

$$L' \circ_\lambda L' = -\partial(k\lambda^2 - \lambda)H',\ H' \circ_\lambda L' = -\partial H',\ L' \circ_\lambda H' = H' \circ_\lambda H' = 0;$$
$$L' \circ_\lambda L' = -(\partial + 2\lambda)L' + \partial(k\lambda^2 - \lambda)H',\ L' \circ_\lambda H' = -\partial H',\ H' \circ_\lambda L' = H' \circ_\lambda H' = 0.$$

若$c = 0$且$a \neq 0$，我们进行基变换$[L' = L,\ H' = aH]$。则方程（5.17）和（5.18）分别化为以下两个非同构 PLCA 结构：

$$L' \circ_\lambda L' = -\partial\lambda^2 H',\ H' \circ_\lambda L' = -\partial H',\ L' \circ_\lambda H' = H' \circ_\lambda H' = 0;$$
$$L' \circ_\lambda L' = -(\partial + 2\lambda)L' + \partial\lambda^2 H',\ L' \circ_\lambda H' = -\partial H',\ H' \circ_\lambda L' = H' \circ_\lambda H' = 0.$$

在情形（2）中，当$a = c = 0$时，方程（5.19）和（5.20）分别给出以下两个非同构 PLCA 结构：

$$H \circ_\lambda L = -(2\partial + \lambda)H,\ L \circ_\lambda L = L \circ_\lambda H = H \circ_\lambda H = 0;$$
$$L \circ_\lambda L = -(\partial + 2\lambda)L,\ L \circ_\lambda H = -(\partial - \lambda)H,\ H \circ_\lambda L = H \circ_\lambda H = 0.$$

对于$c \neq 0$，令$k = ac$。我们进行基变换$[L' = L,\ H' = cH],$，于是（5.19）和（5.20）分别变为以下两个非同构 PLCA 结构：

$$L' \circ_\lambda L' = (k\lambda^3 + \lambda)(2\partial + \lambda)H',\ L' \circ_\lambda H' = 0,\ H' \circ_\lambda L' = -(2\partial + \lambda)H',\ H' \circ_\lambda H' = 0;$$
$$L' \circ_\lambda L' = -(\partial + 2\lambda)L' - (k\lambda^3 + \lambda)(2\partial + \lambda)H',\ L' \circ_\lambda H' = -(\partial - \lambda)H',\ H' \circ_\lambda L' = 0,\ H' \circ_\lambda H' = 0.$$

若$c = 0$且$a \neq 0$，对方程（5.19）和（5.20）应用基变换$[L' = L、H' = aH]$，可得两个非同构 PLCA 结构：

$$L' \circ_\lambda L' = \lambda^3(2\partial + \lambda)H',\ L' \circ_\lambda H' = 0,\ H' \circ_\lambda L' = -(2\partial + \lambda)H',\ H' \circ_\lambda H' = 0;$$
$$L' \circ_\lambda L' = -(\partial + 2\lambda)L' - \lambda^3(2\partial + \lambda)H',\ L' \circ_\lambda H' = -(\partial - \lambda)H',\ H' \circ_\lambda L' = H' \circ_\lambda H' = 0.$$

现在分析情形（3）。当$c = 0$时，方程（5.21）和（5.22）直接给出两个非同构 PLCA 结构：

$$H \circ_\lambda L = (-b\partial + (1-b)\lambda)H,\ L \circ_\lambda L = L \circ_\lambda H = H \circ_\lambda H = 0;$$
$$L \circ_\lambda L = -(\partial + 2\lambda)L,\ L \circ_\lambda H = -(\partial + (1-b)\lambda)H,\ H \circ_\lambda L = H \circ_\lambda H = 0.$$

对于$c \neq 0$，我们进行基变换$[L' = L - {}^1_c H, H' = {}^1_c H]$。这将（5.21）和（5.22）变为以下非同构 PLCA 结构：

$$L' \circ_\lambda L' = -\lambda(-b\partial + (1-b)\lambda)H', L' \circ_\lambda H' = 0, H' \circ_\lambda L' = (-b\partial + (1-b)\lambda)H', H' \circ_\lambda H' = 0 \quad ;$$
$$L' \circ_\lambda L' = -(\partial + 2\lambda)L' + \lambda(-b\partial + (1-b)\lambda)H',\ L' \circ_\lambda H' = -(\partial + (1-b)\lambda)H',\ H' \circ_\lambda L' = H' \circ_\lambda H' = 0$$

我们将上述讨论总结为以下定理：

定理 5.6。 设 $\left(W(b)\circ_\lambda,[\cdot_\lambda\cdot]\right)$ 是李共形代数 $W(b)$ 上一个非平凡的 *PLCA* 结构，其中 λ-括号由(5.1)定义。那么

(1) 对于 $b=0$，在同构意义下， λ-乘积 $\circ_\lambda$ 由以下情形之一给出：

(i) $L\circ_\lambda L=-(\partial+2\lambda)L$，$L\circ_\lambda H=-(\partial+\lambda)H$，$H\circ_\lambda L=(\partial+2\lambda)L$，$H\circ_\lambda H=(\partial+\lambda)H$。*(ii)* $L\circ_\lambda L=0$，$L\circ_\lambda H=0$，$H\circ_\lambda L=-\lambda H$，$H\circ_\lambda H=0$.*(iii)* $L\circ_\lambda L=-(\partial+2\lambda)L$，$L\circ_\lambda H=-(\partial+\lambda)H$，$H\circ_\lambda L=0$，$H\circ_\lambda H=0$.*(iv)* $L\circ_\lambda L=\lambda^3H$，$L\circ_\lambda H=0$，$H\circ_\lambda L=-\lambda H$，$H\circ_\lambda H=0$.*(v)* $L\circ_\lambda L=-(\partial+2\lambda)L+\lambda^3H$，$L\circ_\lambda H=-(\partial+\lambda)H$，$H\circ_\lambda L=0$，$H\circ_\lambda H=0$.

（*2*）对于 $b=1$，在同构意义下， λ-乘积 $\circ_\lambda$ 可由以下情形之一给出：

（*i*） $L\circ_\lambda L=L\circ_\lambda H=H\circ_\lambda H=0$，$H\circ_\lambda L=-\partial H$。（*ii*） $L\circ_\lambda L=-\partial\lambda^2H$，$L\circ_\lambda H=0$，$H\circ_\lambda L=-\partial H$，$H\circ_\lambda H=0$.（*iii*） $L\circ_\lambda L=-(\partial+2\lambda)L$，$L\circ_\lambda H=-\partial H$，$H\circ_\lambda L=0$，$H\circ_\lambda H=0$.（*iv*） $L\circ_\lambda L=-(\partial+2\lambda)L+\partial\lambda^2H$，$L\circ_\lambda H=-\partial H$，$H\circ_\lambda L=0$，$H\circ_\lambda H=0$.（*v*） $L\circ_\lambda L=-\partial(k\lambda^2-\lambda)H$，$L\circ_\lambda H=0$，$H\circ_\lambda L=-\partial H$，$H\circ_\lambda H=0$，$k\in\mathbb{C}$.（*vi*） $L\circ_\lambda L=-(\partial+2\lambda)L+\partial(k\lambda^2-\lambda)H$，$L\circ_\lambda H=-\partial H$，$H\circ_\lambda L=0$，$H\circ_\lambda H=0$，$k\in\mathbb{C}$.

(3) 对于 $b=2$，在同构意义下， λ-乘积 $\circ_\lambda$ 由以下情形之一给出：

(i) $L\circ_\lambda L=0,\quad L\circ_\lambda H=0,\quad H\circ_\lambda L=-(2\partial+\lambda)H,\quad H\circ_\lambda H=0.$

(ii) $L\circ_\lambda L=-(\partial+2\lambda)L,\quad L\circ_\lambda H=-(\partial-\lambda)H,\quad H\circ_\lambda L=0,\quad H\circ_\lambda H=0.$

(iii) $L\circ_\lambda L=\lambda^3(2\partial+\lambda)H,\quad L\circ_\lambda H=0,\quad H\circ_\lambda L=-(2\partial+\lambda)H,\quad H\circ_\lambda H=0.$

(iv) $L\circ_\lambda L=-(\partial+2\lambda)L-\lambda^3(2\partial+\lambda)H,\quad L\circ_\lambda H=-(\partial-\lambda)H,\quad H\circ_\lambda L=0,\quad H\circ_\lambda H=0.$

(v) $L\circ_\lambda L=(k\lambda^3+\lambda)(2\partial+\lambda)H,\quad L\circ_\lambda H=0,\quad H\circ_\lambda L=-(2\partial+\lambda)H,\quad H\circ_\lambda H=0,\quad k\in\mathbb{C}.$

(vi) $L\circ_\lambda L=-(\partial+2\lambda)L-(k\lambda^3+\lambda)(2\partial+\lambda)H$, $L\circ_\lambda H=-(\partial-\lambda)H$, $H\circ_\lambda L=0$, $H\circ_\lambda H=0$, $k\in\mathbb{C}$.

(4) 对于 $b\neq 01、2$，在同构意义下， λ-乘积 $\circ_\lambda$由以下情形之一给出：

(i) $L\circ_\lambda L=0$，$L\circ_\lambda H=0$，$H\circ_\lambda L=(-b\partial+(1-b)\lambda)H$，$H\circ_\lambda H=0$ *(ii)* $L\circ_\lambda L=-(\partial+2\lambda)L$，$L\circ_\lambda H=-(\partial+(1-b)\lambda)H$，$H\circ_\lambda L=0$，$H\circ_\lambda H=0$.*(iii)* $L\circ_\lambda L=-\lambda(-b\partial+(1-b)\lambda)H$，$L\circ_\lambda H=0$，$H\circ_\lambda L=(-b\partial+(1-b)\lambda)H$，$H\circ_\lambda H=0$ *(vi)* $L\circ_\lambda L=-(\partial+2\lambda)L+\lambda(-b\partial+(1-b)\lambda)H$，$L\circ_\lambda H=-(\partial+(1-b)\lambda)H$，$H\circ_\lambda L=0$，$H\circ_\lambda H=0$.

参考文献

[1] M. Aguiar，预泊松代数。《数学物理快报》54（2000），263–277。[2] F.V. Atkinson，关于 Baxter 函数方程的若干方面。《数学分析及其应用杂志》7（1963），1–30。[3] B. Bakalov、A. D'Andrea 和 V. G. Kac，有限伪代数理论。《数学进展》162（2001），1–140。

[4] B. Bakalov、V. Kac 和 A. Voronov，共形代数的上同调。数学物理通讯 200（1999），561–598。[5] B. Bakalov 和 V. Kac，场代数。国际数学研究通知 3（2003），123–159。[6] C. Bai，经典Yang-Baxter方程的统一代数方法。物理学杂志A：数学与理论 40（2007），11073–11082。[7] C. Bai、L. Guo 和 X. Ni，非阿贝尔广义拉克斯对、经典Yang-Baxter方程与后李代数。数学物理通讯 297（2010），553–596。[8] C. Bai、O. Bellier、L. Guo 和 X. Ni，运算的拆分、马宁积与Rota-Baxter算子。国际数学研究通知 IMRN 3（2013），485–524。[9] D. Burde，几何与物理中的左对称代数，亦称前李代数。Cent. Eur. J. Math. 4 (3)（2006），323–357。[10] G. Baxter，一个解可由简单代数恒等式推出的分析问题。Pacific J. Math. 10（1960），731–742。[11] Y. Bruned 和 F. Katsetsiadis，正则性结构中的后李代数。Forum Math. Sigma 11（2023），1–20。[12] Y. Bruned、M. Hairer 和 L. Zambotti，正则性结构的代数重整化。Invent. Math. 215（2019），1039–1156。[13] P. Cartier，关于自由巴克斯特代数的结构。《数学进展》9（1972），253–265。[14] A. Connes 和 D. Kreimer，量子场论中的重整化与黎曼-希尔伯特问题 I：图的霍普夫代数结构及主定理。数学物理通讯 210（2000），249–273。[15] S. Cheng 和 V. Kac，共形模。Asian J. Math. 1（1997），181–193。[16] S. Cheng、V. Kac 和 M. Wakimoto，共形模的扩张，载于：拓扑场论、原始形式及相关主题（京都），载于：Progress in Math.，Birkh¨auser，波士顿，160（1998），33–57。[17] A. D’Andrea 和 V.G. Kac，有限共形代数的结构理论。Selecta Math. (N.S.) (3) 4（1998），377–418。[18] A. De Sole 和 V.G. Kac，李共形代数上同调与变分复形。数学物理通讯 292（2009），667–719。[19] I. Dorfman，狄拉克结构与非线性演化方程的可积性：非线性科学：理论与应用（奇切斯特：Wiley），1993。[20] V. Dotsenko，后李代数的函子性PBW定理。Comm. Algebra 48（2020），2072–2080。[21] K. Ebrahimi-Fard、I. Mencattini 和 H. Z. Munthe-Kaas，后李代数与分解定理。J. Geom. Phys. 119（2017），19–33。[22] L. Guo，Rota-Baxter代数导论。现代数学综述，4。国际出版社，萨默维尔，马萨诸塞州；高等教育出版社，北京，（2012），xii+226 页。[23] M. Goncharov 和 V. Gubarev，非零权双李代数。《数学进展》409（2022），论文编号108680，30页。[24] M. Goncharov 和 P. Kolesnikov，简单有限维双代数。《代数杂志》500（2018），425–438。[25] V. Gubarev，前李代数与后李代数的Poincar´e-Birkhoff-Witt定理。《李理论杂志》30（2020），223–238。[26] M. Hairer，正则性结构理论。Invent. Math. 198（2014），269–504。

[27] Y. Hong 和 F. Li，左对称共形代数与顶点代数。《纯粹与应用代数杂志》219（2015），3543–3567。[28] Y.Y. Hong 和 C.M. Bai，关于反对称无穷小共形双代数。《代数杂志》586（2021），325–356。[29] Y.Y. Hong 和 C.M. Bai，共形经典杨-巴克斯特方程、S-方程与 $\mathcal{O}$-算子。《数学物理快报》110（2020），885–909。[30] V. Kac，《初学者的顶点代数》，第2版，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，（1998）。[31] V. Kac，形式分布代数与共形代数，布里斯班数学物理大会，7月（1997）。[32] V. Kac，局部性思想，载于《几何、群与代数的物理应用及数学方面》，H.-D.Doebner 等编（世界科学出版社，新加坡，1997），16–32。[33] K.J. Ling 和 L.M. Yuan，一类李共形代数 $W(b)$ 上模的扩张。《代数及其应用杂志》18(9)（2019），1950164。[34] H. Munthe-Kaas 和 A. Lundervold，关于后李代数、李-巴彻级数与移动标架。《计算数学基础》13（2013），583–613。[35] G.-C. Rota，巴克斯特代数与组合恒等式 I，《美国数学会通报》75（1969），325–329。[36] Y.C. Su 和 L.M. Yuan，薛定谔-维拉索罗李共形代数。《数学物理杂志》54（2013），053503。[37] Y.C. Su、C.G. Xia、L.M. Yuan。一类 Block 型李共形代数上有限不可约共形模的分类。《代数杂志》（2018）499：321–336。[38] B. Vallette，广义分拆偏序集的同调。《纯粹与应用代数杂志》208（2007），699–725。[39] H.N. Wu 和 L.M. Yuan，若干与 Virasoro 共形代数相关的李共形代数上有限不可约共形模的分类。《数学物理杂志》58（2017），041701。[40] Xu, Y. 和 Yue, X.，W(a, b) 李共形代数及其秩一共形模，《代数汇刊》22 (3)（2015），405–412。[41] L.M. Yuan 和 H.N. Wu，海森堡-维拉索罗共形代数的上同调。《李理论杂志》26（2016），1187–1197。[42] L.M. Yuan 和 H.N. Wu，$W(2,2)$ 李共形代数的结构。《开放数学》14（2016），629–640。[43] L.M. Yuan，结合共形代数的 $\mathcal{O}$-算子与尼延赫斯算子。《代数杂志》609（2022），245–291。[44] L.M. Yuan 和 J.F. Liu，李共形代数上的扭曲理论、相对罗塔-巴克斯特型算子与L_∞-代数。《代数杂志》636（2023），88–122。