arXiv:2603.14735v1 [math.RA] 16 Mar 2026

关于转置泊松共形代数

LAMEI YUAN 和 HAO FANG

Abstract. 本文旨在引入（非交换）转置泊松共形代数的概念，它是转置泊松代数的共形类比，并具有丰富的恒等式。我们证明，两个转置泊松共形代数的张量积仍是转置泊松共形代数。此外，我们建立了转置泊松共形代数与 Hom-李共形代数之间的密切联系，并给出泊松共形代数与转置泊松共形代数之间的相容条件。此外，我们还从相关代数结构出发，给出若干构造转置泊松共形代数的方法。最后，我们给出了李共形代数 $W(a,\ b)$ 上相容的非交换转置泊松共形代数结构的完整分类。

1. Introduction

泊松代数最初源于对哈密顿力学 [1, 29] 和泊松几何 [35, 36] 的研究，后来出现在数学和数学物理学的诸多领域，包括泊松流形 [8, 34], 、代数几何 [7, 31], 、量子群 [10, 15], 、量子化理论 [20, 25], 以及经典力学和量子力学[6, 14]。泊松代数的一个对偶概念称为转置泊松代数，由Bai等人 [3] 通过在定义泊松代数的莱布尼茨法则中反转两个双线性运算的作用而引入。以这种方式定义的转置泊松代数不仅在代数、运算与范畴层面上与经典泊松代数相对应，而且还与若干重要的代数结构密切相关，例如诺维科夫-泊松代数、前李泊松代数和前李交换代数。

由 Kac 引入的李共形代数概念，以公理化方式描述了二维共形场论中手征场算子乘积展开的奇异部分。李共形代数与顶点代数和形式分布李代数密切相关，并在代数的其他领域及可积系统中有着重要应用。特别是，它们为研究结合代数、仅满足局部性这一性质的无限维李代数，以及非线性演化方程理论中的哈密顿形式体系提供了有用工具。有限维李共形代数的结构理论、表示理论和上同调理论已得到广泛研究。值得注意的是，结合共形代数自然地源于对李共形代数表示理论的研究。

泊松共形代数这一概念由 Kolesnikov 引入 [23], ，它由一个李共形代数和一个满足某些相容条件的交换结合共形代数组成。文献 [23, 27] 指出，泊松共形代数与李共形代数的表示以及泊松-格尔范德-多夫曼代数密切相关

2020 *Mathematics Subject Classification.* 17B69, 17B63, 17B61, 17D25.*Key words and phrases.* （非交换）转置泊松共形代数，Hom-李共形代数，泊松共形代数，李共形代数。

。文献 [27],也研究了非交换泊松共形代数的概念，并考察了其上同调与变形量子化。由此证明，泊松共形代数是交换结合共形代数的共形形式变形的半经典极限。此外，文献 [18]引入并研究了泊松共形双代数这一概念，它由泊松共形代数的 Manin 三元组刻画。

近年来，经典代数结构的共形类比研究日益受到关注 [2, 17], ，这不仅将经典结果推广到共形情形，也促进了共形代数理论的发展。如前所述，泊松共形代数和泊松共形双代数可分别视为泊松代数和泊松双代数的共形类比。此外，文献 [16] 提出了 L-树状共形代数这一概念，作为L-树状代数的共形类比；它们自然源于对左对称共形代数上的 $\mathcal{O}$-算子以及共形 S-方程解的研究。受这些结果启发，自然可以考虑转置泊松代数的共形类比，即转置泊松共形代数。它由一个李共形代数和一个满足转置共形莱布尼茨法则的交换结合共形代数组成。

本文其余部分安排如下。第 2 节回顾李共形代数和泊松共形代数的若干相关概念与基本结果。第 3 节首先引入（非交换）转置泊松共形代数的概念，这类代数满足一系列丰富的恒等式。随后，我们证明两个转置泊松共形代数的张量积仍是转置泊松共形代数。此外，我们展示转置泊松共形代数与 Hom-李共形代数之间的密切关系，并给出泊松共形代数与转置泊松共形代数之间的相容条件。第 4 节介绍若干由相关代数结构构造转置泊松共形代数的方法。第 5 节对李共形代数 $W(a,\ b)$ 上相容的非交换转置泊松共形代数结构进行完整分类。

在本文中，我们用 $\mathbb{C}$ 表示复数集，用 $\mathbb{Z}_+$ 表示非负整数集。所有向量空间、线性映射和张量积均取在复数域 $\mathbb{C}$ 上。对于任意向量空间 A，系数属于 A 的 λ 多项式空间记为 $A[\lambda]$。

2. Preliminaries

本节回顾有关李共形代数和泊松共形代数的一些基本概念和结果。

定义 2.1 ([22])。 一个**共形代数** $(A, \circ_\lambda)$是一个 $\mathbb{C}[\partial]$-模 A ，配备有一个$\mathbb{C}$-双线性映射 $A \otimes A \to A[\lambda]$，记作 $a \otimes b \mapsto a \circ_\lambda b$，满足以下条件：

$$(\partial a) \circ_\lambda b = -\lambda a \circ_\lambda b,\ a \circ_\lambda (\partial b) = (\partial + \lambda) a \circ_\lambda b. \tag{2.1}$$

共形代数 $(A, \circ_\lambda)$ 的一个**导子** 是一个线性映射 $D: A \to A$ ，满足 $D\partial = \partial D$ 且对于所有 $a, b \in A$，有 $D(a \circ_\lambda b) = D(a) \circ_\lambda b + a \circ_\lambda D(b)$。例如， $D = \partial$ 是每个共形代数的导子。

定义 2.2 ([21])。 一个**结合共形代数** $(A, \circ_\lambda)$是一个 $\mathbb{C}[\partial]$-模 A ，配备了一个 $\mathbb{C}$-双线性映射 $A \otimes A \to A[\lambda]$，记作 $a \otimes b \mapsto a \circ_\lambda b$，使得 $(A, \circ_\lambda)$ 是一个

共形代数，并满足以下恒等式：

$$a \circ_\lambda (b \circ_\mu c) = (a \circ_\lambda b) \circ_{\lambda+\mu} c, \quad \forall\ a, b, c \in A. \tag{2.2}$$

若结合共形代数（A，$\circ_\lambda$）满足以下条件，则称其为**交换**的：

$$a \circ_\lambda b = b \circ_{-\partial-\lambda} a, \quad \forall\ a, b \in A. \tag{2.3}$$

注 2.3 ([13]**)**。 结合共形代数（A，$\circ_\lambda$）总是满足以下性质：

$$a \circ_\lambda (b \circ_{-\partial-\mu} c) = (a \circ_\lambda b) \circ_{-\partial-\mu} c, \tag{2.4}$$

$$a \circ_{-\partial-\lambda} (b \circ_\mu c) = (a \circ_{-\partial-\mu} b) \circ_{-\partial+\mu-\lambda} c, \tag{2.5}$$

$$a \circ_{-\partial-\lambda} (b \circ_{-\partial-\mu} c) = (a_{-\partial+\mu-\lambda} b) \circ_{-\partial-\mu} c. \tag{2.6}$$

注 2.4 ([24]**)**。 在每个交换结合共形代数（A，$\circ_\lambda$）中，以下恒等式成立：

$$a \circ_\lambda (b \circ_\mu c) = b \circ_\mu (a \circ_\lambda c), \quad \forall\ a, b, c \in A. \tag{2.7}$$

定义 2.5 ([4]**)**。 **李共形代数 (**A，$[\cdot_\lambda \cdot]$**)** 是一个 $\mathbb{C}[\partial]$-模 A，并赋有一个 $\mathbb{C}$-双线性映射 $A \otimes A \to A[\lambda]$，记作 $a \otimes b \mapsto [a_\lambda b]$，满足以下条件：

$$[(\partial a)_\lambda b] = -\lambda [a_\lambda b],\ [a_\lambda (\partial b)] = (\partial + \lambda)[a_\lambda b], \quad \text{(Conformal sesquilinearity)} \tag{2.8}$$

$$[a_\lambda b] = -[b_{-\lambda-\partial} a], \quad \text{(Skew-symmetry)} \tag{2.9}$$

$$[a_\lambda [b_\mu c]] = [[a_\lambda b]_{\lambda+\mu} c] + [b_\mu [a_\lambda c]], \quad \forall\ a, b, c \in A. \quad \text{(Jacobi identity)} \tag{2.10}$$

若李共形代数作为 $\mathbb{C}[\partial]$-模有限生成，则称其为**有限**。

例 2.6 ([13]**)**。 **Virasoro 李共形代数** Vir 是最简单的非平凡李共形代数。它定义为

$$Vir = \mathbb{C}[\partial] L, \quad [L_\lambda L] = (\partial + 2\lambda) L. \tag{2.11}$$

例 2.7 ([28]**)**。 带有两个参数 $a, b \in \mathbb{C}$ 的**李共形代数** $W(a, b)$ 是由 L和 M 生成的自由 $\mathbb{C}[\partial]$-模，满足

$$[L_\lambda L] = (\partial + 2\lambda) L, \quad [L_\lambda M] = (\partial + a\lambda + b) M, \quad [M_\lambda M] = 0.$$

定义 2.8 ([39]**)**。 **Hom-李共形代数 (**$A, [\cdot_\lambda \cdot], \alpha$**)** 是一个 $\mathbb{C}[\partial]$-模 A，它带有一个线性自同态 α，使得 $\alpha\partial = \partial\alpha$；并带有一个 λ-括号 $[\cdot_\lambda \cdot]$，这是一个 $\mathbb{C}$-双线性映射 $A \otimes A \to A[\lambda]$，满足以下公理，对所有 $a, b, c \in A$ 均成立：

$$[(\partial a)_\lambda b] = -\lambda [a_\lambda b], [a_\lambda (\partial b)] = (\partial + \lambda) [a_\lambda b], \quad \text{(Conformal sesquilinearity)} \tag{2.12}$$

$$[a_\lambda b] = -[b_{-\lambda-\partial} a], \quad \text{(Skew-symmetry)} \tag{2.13}$$

$$[\alpha(a)_\lambda [b_\mu c]] = [[a_\lambda b]_{\lambda+\mu} \alpha(c)] + [\alpha(b)_\mu [a_\lambda c]], \quad \text{(Hom-Jacobi identity)} \tag{2.14}$$

定义 2.9 ([21]**)**。 $\mathbb{C}[\partial]$-模 A 配备一个 $\mathbb{C}$-双线性映射 $A \otimes A \to A[\lambda]$，记作 $a \otimes b \mapsto a *_\lambda b$，使得 $(A, *_\lambda)$ 是一个共形代数并满足：**左对称共形代数**（也称为**前李共形代数**）**(**$A, *_\lambda$**)**

$$(a *_\lambda b) *_{\lambda+\mu} c - a *_\lambda (b *_\mu c) = (b *_\mu a) *_{\lambda+\mu} c - b *_\mu (a *_\lambda c), \quad \forall\ a, b, c \in A. \tag{2.15}$$

一个 **Noviko v 共形代数 (**$A, *_\lambda$**)** 是一个满足以下条件的左对称共形代数

$$(a *_\lambda b) *_{\lambda+\mu} c = (a *_\lambda c) *_{-\mu-\partial} b, \quad \forall\ a, b, c \in A. \tag{2.16}$$

命题 2.10 ([19])**.** 结合共形代数是左对称共形代数。如果$(A,*_\lambda)$ 是一个左对称共形代数，那么 λ-括号

$$[a_\lambda b]=a*_\lambda b-b*_{-\lambda-\partial}a,\quad \forall\ a,b\in A$$

定义一个李共形代数 $\mathfrak{g}(A)$，称其为 A 的次伴随李共形代数。

定义 2.11 ([27])。 泊松共形代数（PCA）是一个 $\mathbb{C}[\partial]$-模 A，配备两个 $\mathbb{C}$-双线性映射 $A\otimes A\to A[\lambda]$，分别记作 $a\otimes b\mapsto a\circ_\lambda b$ 和 $a\otimes b\mapsto [a_\lambda b]$，使得 $(A,\circ_\lambda)$ 是交换结合共形代数，$(A,[\cdot_\lambda\cdot])$ 是李共形代数，并且满足以下共形莱布尼茨法则：

$$[a_\lambda(b\circ_\mu c)]=[a_\lambda b]\circ_{\lambda+\mu}c+b\circ_\mu[a_\lambda c],\quad \forall\ a,b,c\in A. \tag{2.17}$$

如果泊松共形代数 $(A,\circ_\lambda,[\cdot_\lambda\cdot])$ 中的结合 λ-乘法是非交换的，我们称其为**非交换泊松共形代数**。

注 2.12 ([23])。 关系式 (2.17) 等价于

$$[(a\circ_\lambda b)_\mu c]=b\circ_{\mu-\lambda}[a_\lambda c]+a\circ_\lambda[b_{\mu-\lambda}c],\quad \forall\ a,b,c\in A. \tag{2.18}$$

定义 2.13 ([3])。 设 L 是一个向量空间，配备两个双线性运算

$$\cdot,[\ ,\ ]:L\otimes L\to L.$$

称三元组 $(L,\cdot,[\ ,\ ])$ 为一个**转置泊松代数**，如果 $(L,\cdot)$ 是交换结合代数，且 $(L,[\ ,\ ])$ 是李代数，并满足以下相容条件

$$2z\cdot[x,y]=[z\cdot x,y]+[x,z\cdot y],\quad \forall\ x,y,z\in L. \tag{2.19}$$

式 (2.19) 称为转置莱布尼茨法则，因为泊松代数中莱布尼茨法则所涉及的两个二元运算的作用被互换了。此外，通过在等式左侧引入因子 2，对所得运算进行了重新缩放。

3. Transposed Poisson conformal algebras

本节中，我们引入转置泊松共形代数的概念，它是转置泊松代数的共形类比。随后，我们给出转置泊松共形代数的一些恒等式和性质。

3.1. 转置泊松共形代数的定义。

定义 3.1. 转置泊松共形代数 (TPCA) 是一个 $\mathbb{C}[\partial]$-模 $\mathcal{L}$，带有两个 $\mathbb{C}$-双线性映射

$$\circ_\lambda,[\cdot_\lambda\cdot]:\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}\to\mathcal{L}[\lambda],$$

使得 $(\mathcal{L},\circ_\lambda)$ 是交换结合共形代数，$(\mathcal{L},[\cdot_\lambda\cdot])$ 是李共形代数，并且满足以下转置共形莱布尼茨法则：

$$2(a\circ_\lambda[b_\mu c])=[(a\circ_\lambda b)_{\lambda+\mu}c]+[b_\mu(a\circ_\lambda c)],\quad \forall\ a,b,c\in\mathcal{L}. \tag{3.1}$$

如果转置泊松共形代数 $(\mathcal{L},\circ_\lambda,[\cdot_\lambda\cdot])$ 中的结合 λ-乘法是非交换的，我们称其为**非交换 TPCA**。

注 3.2。 关系式 (3.1) 可等价地写为

$$2([a_\lambda b]\circ_\mu c)=[a_\lambda(b\circ_{\mu-\lambda}c)]-[b_{\mu-\lambda}(a\circ_\lambda c)],\quad \forall\ a,b,c\in\mathcal{L}. \tag{3.2}$$

设 $(\mathcal{L}, \circ_\lambda, [\cdot_\lambda \cdot])$ 是一个（非交换的）转置泊松共形代数。分别在（交换的）结合共形代数 $(\mathcal{L}, \circ_\lambda)$ 和李共形代数 $(\mathcal{L}, [\cdot_\lambda \cdot])$ 上定义 n 次乘积，其中 $n \in \mathbb{Z}_+$，如下：

$$a \circ_\lambda b = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \lambda^{(n)} (a_{(n)} b), \quad [a_\lambda b] = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \lambda^{(n)} (a_{[n]} b),$$

其中 $\lambda^{(n)} = \lambda^n / n!$ 和 $a,\ b \in \mathcal{L}$。因此，交换结合共形代数和李共形代数的概念，可以分别用它们的 n 次乘积等价地表述。此外，（非交换）转置泊松共形代数的转置共形莱布尼茨法则可以用结合共形代数和李共形代数的 n 次乘积改写如下：

$$2(a_{(n)}(b_{[m]}c)) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (a_{(j)}b)_{[n+m-j]}c + b_{[m]}(a_{(n)}c), \quad \forall\ a, b, c \in \mathcal{L}. \tag{3.3}$$

例3.3. 设 $(A,\ \circ,\ [\cdot, \cdot])$ 是一个普通转置泊松代数。那么，赋予 $\mathcal{L} = \mathbb{C}[\partial] \otimes A$

$$a \circ_\lambda b = a \circ b, \quad [a_\lambda b] = [a, b], \quad \forall\ a, b \in A$$

是一个转置泊松共形代数。

例3.4. 设 $(\mathcal{L}_1,\ \circ_{1\lambda},\ [\cdot_\lambda \cdot]_1,\ \partial_1)$ 和 $(\mathcal{L}_2,\ \circ_{2\lambda},\ [\cdot_\lambda \cdot]_2,\ \partial_2)$ 是两个转置泊松共形代数。对所有 $x_1,\ y_1 \in \mathcal{L}_1$、$x_2,\ y_2 \in \mathcal{L}_2$，定义

$$(x_1 + x_2) \circ_\lambda (y_1 + y_2) = x_1 \circ_{1\lambda} y_1 + x_2 \circ_{2\lambda} y_2,$$
$$[(x_1 + x_2)_\lambda (y_1 + y_2)] = [x_{1\lambda} y_1]_1 + [x_{2\lambda} y_2]_2.$$

那么（$\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2,\ \circ_\lambda,\ [\cdot_\lambda \cdot],\ \partial = \partial_1 \oplus \partial_2$）是一个转置泊松共形代数。

3.2. 转置泊松共形代数中的恒等式。

转置泊松共形代数存在一大类恒等式。

定理3.5。 设（$\mathcal{L}$、$\circ_\lambda$、$[\cdot_\lambda \cdot]$）是一个转置泊松共形代数。则以下恒等式成立：

$$x \circ_\lambda [y_\mu z] + y \circ_\mu [z_{-\partial-\lambda} x] + z \circ_{-\partial-\lambda-\mu} [x_\lambda y] = 0, \tag{3.4}$$
$$[x_\lambda y] \circ_\mu z + [y_{\mu-\lambda} z] \circ_{-\partial-\lambda} x + [z_{-\partial-\lambda} x] \circ_{-\partial-\mu+\lambda} y = 0, \tag{3.5}$$
$$[(h \circ_\lambda [x_\gamma y])_{\lambda+\mu} z] + [(h \circ_\lambda [y_{\mu-\gamma} z])_{-\partial-\gamma} x] + [(h \circ_\lambda [z_{-\partial-\gamma} x])_{-\partial-\mu+\gamma} y] = 0, \tag{3.6}$$
$$[[x_\gamma y]_\mu (h \circ_\lambda z)] + [[y_{\mu-\gamma} z]_{-\partial-\lambda-\gamma} (h \circ_\lambda x)] + [[z_{-\partial-\gamma} x]_{-\partial-\lambda-\mu+\gamma} (h \circ_\lambda y)] = 0, \tag{3.7}$$
$$[h_\lambda x] \circ_{\lambda+\gamma} [y_{\mu-\gamma} z] + [h_\lambda y] \circ_{\lambda+\mu-\gamma} [z_{-\partial-\gamma} x] + [h_\lambda z] \circ_{-\partial-\mu} [x_\gamma y] = 0, \tag{3.8}$$
$$[(u \circ_\lambda x)_\mu (v \circ_\gamma y)] + [(v \circ_\gamma x)_{\gamma+\mu-\lambda} (u \circ_\lambda y)] = 2\,(u \circ_\lambda v) \circ_{\lambda+\gamma} [x_{\mu-\lambda} y], \tag{3.9}$$
$$x \circ_{\mu-\lambda} [u_\lambda (v \circ_\gamma y)] + [(v \circ_\gamma x)_{\gamma+\mu-\lambda} u] \circ_{\gamma+\mu} y = (u \circ_\lambda v) \circ_{\lambda+\gamma} [x_{\mu-\lambda} y], \tag{3.10}$$

对所有 x、y、z、h、u、$v \in \mathcal{L}$。

证明。设 $x, y, z, h, u, v \in \mathcal{L}$。事实上，式（3.5）等价于式（3.4）。由式（3.1）和式（3.2），我们有

$$2(x \circ_\lambda [y_\mu z]) = [(x \circ_\lambda y)_{\lambda+\mu} z] + [y_\mu (x \circ_\lambda z)],$$
$$2(y \circ_\mu [z_{-\partial-\lambda} x]) = -2(y \circ_\mu [x_\lambda z]) = -[(y \circ_\mu x)_{\lambda+\mu} z] - [x_\lambda (y \circ_\mu z)],$$
$$2(z \circ_{-\partial-\lambda-\mu} [x_\lambda y]) = 2([x_\lambda y] \circ_{\lambda+\mu} z) = [x_\lambda (y \circ_\mu z)] - [y_\mu (x \circ_\lambda z)].$$

注意，$[(x\circ_\lambda y)_{\lambda+\mu}z]=[(y\circ_{-\partial-\lambda}x)_{\lambda+\mu}z]=[(y\circ_\mu x)_{\lambda+\mu}z]$。将这三个恒等式相加，得到式（3.4）。

公式 (3.6) 的证明较为复杂。首先，根据公式 (3.1)，我们有

$$\begin{aligned}2(h\circ_\lambda[[x_\gamma y]_\mu z])&=[(h\circ_\lambda[x_\gamma y])_{\lambda+\mu}z]+[[x_\gamma y]_\mu(h\circ_\lambda z)],\\-2(h\circ_\lambda[x_\gamma[y_{\mu-\gamma}z]])&=[(h\circ_\lambda[y_{\mu-\gamma}z])_{-\partial-\gamma}x]+[[y_{\mu-\gamma}z]_{-\partial-\lambda-\gamma}(h\circ_\lambda x)],\\2(h\circ_\lambda[y_{\mu-\gamma}[x_\gamma z]])&=[(h\circ_\lambda[z_{-\partial-\gamma}x])_{-\partial-\mu+\gamma}y]+[[z_{-\partial-\gamma}x]_{-\partial-\lambda-\mu+\gamma}(h\circ_\lambda y)].\end{aligned}$$

将上述三个恒等式相加并应用雅可比恒等式 (2.10)，我们得到

$$\begin{aligned}&[(h\circ_\lambda[x_\gamma y])_{\lambda+\mu}z]+[(h\circ_\lambda[y_{\mu-\gamma}z])_{-\partial-\gamma}x]+[(h\circ_\lambda[z_{-\partial-\gamma}x])_{-\partial-\mu+\gamma}y]+\\&[[x_\gamma y]_\mu(h\circ_\lambda z)]+[[y_{\mu-\gamma}z]_{-\partial-\lambda-\gamma}(h\circ_\lambda x)]+[[z_{-\partial-\gamma}x]_{-\partial-\lambda-\mu+\gamma}(h\circ_\lambda y)]=0.\end{aligned}\tag{3.11}$$

然后，对 $[[x_\gamma y]_\mu(h\circ_\lambda z)]$ 应用雅可比恒等式，得到

$$[[x_\gamma y]_\mu(h\circ_\lambda z)]+[y_{\mu-\gamma}[x_\gamma(h\circ_\lambda z)]]=[x_\gamma[y_{\mu-\gamma}(h\circ_\lambda z)]]$$

并对 $[y_{\mu-\gamma}(h\circ_\lambda z)]$ 应用公式 (3.1)，得到

$$[y_{\mu-\gamma}(h\circ_\lambda z)]=2\,(h\circ_\lambda[y_{\mu-\gamma}z])-[(h\circ_\lambda y)_{\lambda+\mu-\gamma}z].$$

因此，我们得到

$$[[x_\gamma y]_\mu(h\circ_\lambda z)]+2[(h\circ_\lambda[y_{\mu-\gamma}z])_{-\partial-\gamma}x]=-[x_\gamma[(h\circ_\lambda y)_{\lambda+\mu-\gamma}z]]-[y_{\mu-\gamma}[x_\gamma(h\circ_\lambda z)]].$$

In a similar way, we have

$$\begin{aligned}[[y_{\mu-\gamma}z]_{-\partial-\lambda-\gamma}(h\circ_\lambda x)]+2[(h\circ_\lambda[z_{-\partial-\gamma}x])_{-\partial-\mu+\gamma}y]&\\=[y_{\mu-\gamma}[x_\gamma(h\circ_\lambda z)]]-[[(h\circ_\lambda x)_{\lambda+\gamma}y]_{\lambda+\mu}z],&\\[[z_{-\partial-\gamma}x]_{-\partial-\lambda-\mu+\gamma}(h\circ_\lambda y)]+2[(h\circ_\lambda[x_\gamma y])_{\lambda+\mu}z]&\\=[x_\gamma[(h\circ_\lambda y)_{\lambda+\mu-\gamma}z]]+[[(h\circ_\lambda x)_{\lambda+\gamma}y]_{\lambda+\mu}z].&\end{aligned}$$

将上述三个恒等式相加，得到

$$\begin{aligned}&2\,([(h\circ_\lambda[x_\gamma y])_{\lambda+\mu}z]+[(h\circ_\lambda[y_{\mu-\gamma}z])_{-\partial-\gamma}x]+[(h\circ_\lambda[z_{-\partial-\gamma}x])_{-\partial-\mu+\gamma}y])+\\&[[x_\gamma y]_\mu(h\circ_\lambda z)]+[[y_{\mu-\gamma}z]_{-\partial-\lambda-\gamma}(h\circ_\lambda x)]+[[z_{-\partial-\gamma}x]_{-\partial-\lambda-\mu+\gamma}(h\circ_\lambda y)]=0.\end{aligned}\tag{3.12}$$

将式 (3.11) 与式 (3.12) 相减，得到式 (3.6)。此外，将式 (3.6) 代入式 (3.11)，即可得到式 (3.7)。

由式 (3.1)，得到

$$2\,([x_\gamma y]\circ_\mu[h_\lambda z])=[([x_\gamma y]\circ_\mu h)_{\lambda+\mu}z]+[h_\lambda([x_\gamma y]\circ_\mu z)].\tag{3.13}$$

注意到

$$[(h\circ_\lambda[x_\gamma y])_{\lambda+\mu}z]=[([x_\gamma y]\circ_{-\partial-\lambda}h)_{\lambda+\mu}z]=[([x_\gamma y]\circ_\mu h)_{\lambda+\mu}z].$$

因此，式 (3.13) 可改写为

$$2\,([h_\lambda z]\circ_{-\partial-\mu}[x_\gamma y])=[(h\circ_\lambda[x_\gamma y])_{\lambda+\mu}z]+[h_\lambda(z\circ_{-\partial-\mu}[x_\gamma y])].$$

同理，由式 (3.2)，有

$$\begin{aligned}2([h_\lambda x]\circ_{\lambda+\gamma}[y_{\mu-\gamma}z])&=[(h\circ_\lambda[y_{\mu-\gamma}z])_{-\partial-\gamma}x]+[h_\lambda(x\circ_\gamma[y_{\mu-\gamma}z])],\\2([h_\lambda y]\circ_{\lambda+\mu-\gamma}[z_{-\partial-\gamma}x])&=[(h\circ_\lambda[z_{-\partial-\gamma}x])_{-\partial-\mu+\gamma}y]+[h_\lambda(y\circ_{\mu-\gamma}[z_{-\partial-\gamma}x])].\end{aligned}$$

将上述三个恒等式相加，并应用式 (3.4) 和 (3.6)，即可得到式 (3.8)。

最后，我们来证明式 (3.9) 和 (3.10)。由于 $(\mathcal{L}, \circ_\lambda)$ 是一个交换结合共形代数，我们有

$$(u \circ_\lambda v) \circ_{\lambda+\gamma} [x_{\mu-\lambda} y] = u \circ_\lambda (v \circ_\gamma [x_{\mu-\lambda} y]).$$

由式（3.1），我们得到

$$\begin{aligned} 4(u \circ_\lambda (v \circ_\gamma [x_{\mu-\lambda} y])) = {} & [(u \circ_\lambda x)_\mu (v \circ_\gamma y)] + [(v \circ_\gamma x)_{\gamma+\mu-\lambda} (u \circ_\lambda y)] \\ & + [(u \circ_\lambda (v \circ_\gamma x))_{\gamma+\mu} y] + [x_{\mu-\lambda} (u \circ_\lambda (v \circ_\gamma y))]. \end{aligned} \tag{3.14}$$

注意到

$$\begin{aligned} 2\,(u \circ_\lambda v) \circ_{\lambda+\gamma} [x_{\mu-\lambda} y] &= [((u \circ_\lambda v) \circ_{\lambda+\gamma} x)_{\mu+\gamma} y] + [x_{\mu-\lambda} ((u \circ_\lambda v) \circ_{\lambda+\gamma} y)] \\ &= [(u \circ_\lambda (v \circ_\gamma x))_{\gamma+\mu} y] + [x_{\mu-\lambda} (u \circ_\lambda (v \circ_\gamma y))]. \end{aligned} \tag{3.15}$$

于是，对式（3.14）与式（3.15）作差即可得到式（3.9） .

注意，式（3.9）左侧的第一项可改写为 as

$$[(u \circ_\lambda x)_\mu (v \circ_\gamma y)] = [(x \circ_{-\partial-\lambda} u)_\mu (v \circ_\gamma y)] = [(x \circ_{\mu-\lambda} u)_\mu (v \circ_\gamma y)]$$

并由式（3.1），我们得到

$$[(x \circ_{\mu-\lambda} u)_\mu (v \circ_\gamma y)] = 2(x \circ_{\mu-\lambda} [u_\lambda (v \circ_\gamma y)]) - [u_\lambda (x \circ_{\mu-\lambda} (v \circ_\gamma y))]. \tag{3.16}$$

对于第二项，由式 (3.2) 可得

$$[(v \circ_\gamma x)_{\gamma+\mu-\lambda} (u \circ_\lambda y)] = 2([(v \circ_\gamma x)_{\gamma+\mu-\lambda} u] \circ_{\gamma+\mu} y) + [u_\lambda ((v \circ_\gamma x) \circ_{\gamma+\mu-\lambda} y)]. \tag{3.17}$$

由于

$$x \circ_{\mu-\lambda} (v \circ_\gamma y) = (x \circ_{\mu-\lambda} v) \circ_{\gamma+\mu-\lambda} y = (v \circ_{-\partial-\mu+\lambda} x) \circ_{\gamma+\mu-\lambda} y = (v \circ_\gamma x) \circ_{\gamma+\mu-\lambda} y,$$

我们有

$$[u_\lambda (x \circ_{\mu-\lambda} (v \circ_\gamma y))] = [u_\lambda ((v \circ_\gamma x) \circ_{\gamma+\mu-\lambda} y)].$$

因此，将式 (3.16) 和式 (3.17) 相加，并应用式 (3.9)，即可得到式 (3.10)。□

3.3. **转置泊松共形代数的张量积**。

现在我们定义转置泊松共形代数的张量积如下:

定理 3.6。 设$(\mathcal{L}_1, \circ_\lambda^1, [\cdot_\lambda \cdot]^1)$ 和$(\mathcal{L}_2, \circ_\lambda^2, [\cdot_\lambda \cdot]^2)$ 是两个转置泊松共形代数。令 $\mathcal{L}$:
$= \mathcal{L}_1 \otimes_{\mathbb{C}[\partial]} \mathcal{L}_2$ ，并且 $\mathcal{L}$ 上的 $\mathbb{C}[\partial]$-模结构由下式给出

$$\partial(a \otimes b) := (\partial a) \otimes b = a \otimes (\partial b), \quad a \in \mathcal{L}_1,\, b \in \mathcal{L}_2.$$

分别在 $\mathcal{L}$ 上定义 λ-积和 λ-括号如下:

$$(a_1 \otimes a_2) \circ_\lambda (b_1 \otimes b_2) = (a_1 \circ_\lambda^1 b_1) \otimes (a_2 \circ_\lambda^2 b_2),$$
$$[(a_1 \otimes a_2)_\lambda (b_1 \otimes b_2)] = [a_{1\lambda} b_1]^1 \otimes (a_2 \circ_\lambda^2 b_2) + (a_1 \circ_\lambda^1 b_1) \otimes [a_{2\lambda} b_2]^2,$$

对所有 a_1、 $b_1 \in \mathcal{L}_1$、 a_2、 $b_2 \in \mathcal{L}_2$ 均成立。于是 $(\mathcal{L}$、 $\circ_\lambda$、 $[\cdot_\lambda \cdot])$ 是一个转置泊松共形代数。

证明。 设 a_1， b_1， $c_1 \in \mathcal{L}_1, a_2$， b_2， $c_2 \in \mathcal{L}_2$。容易验证，$(\mathcal{L}$， $\circ_\lambda)$ 是一个交换结合共形代数。接下来我们证明 $(\mathcal{L}$， $[\cdot_\lambda \cdot])$ 是一个李共形代数。

(a) **共形半双线性：**

$$[\partial(a_1\otimes a_2)_\lambda(b_1\otimes b_2)]=[((\partial a_1)\otimes a_2)_\lambda(b_1\otimes b_2)]=[(\partial a_1)_\lambda b_1]^1\otimes(a_2\circ_\lambda^2 b_2)$$
$$+((\partial a_1)\circ_\lambda^1 b_1)\otimes[a_{2\lambda}b_2]^2=-\lambda([a_{1\lambda}b_1]^1\otimes(a_2\circ_\lambda^2 b_2))-\lambda((a_1\circ_\lambda^1 b_1)\otimes[a_{2\lambda}b_2]^2)$$
$$=-\lambda([a_{1\lambda}b_1]^1\otimes(a_2\circ_\lambda^2 b_2)+(a_1\circ_\lambda^1 b_1)\otimes[a_{2\lambda}b_2]^2)=-\lambda[(a_1\otimes a_2)_\lambda(b_1\otimes b_2)].$$

(b) **斜对称性：**

$$[(b_1\otimes b_2)_{-\partial-\lambda}(a_1\otimes a_2)]=[b_{1-\partial-\lambda}a_1]^1\otimes(b_2\circ^2_{-\partial-\lambda}a_2)+(b_1\circ^1_{-\partial-\lambda}a_1)\otimes[b_{2-\partial-\lambda}a_2]^2$$
$$=-[a_{1\lambda}b_1]^1\otimes(a_2\circ_\lambda^2 b_2)-(a_1\circ_\lambda^1 b_1)\otimes[a_{2\lambda}b_2]^2=-[(a_1\otimes a_2)_\lambda(b_1\otimes b_2)].$$

(c) 雅可比恒等式： 对于雅可比恒等式，我们计算

$$[[(a_1\otimes a_2)_\lambda(b_1\otimes b_2)]_{\lambda+\mu}(c_1\otimes c_2)]+[(b_1\otimes b_2)_\mu[(a_1\otimes a_2)_\lambda(c_1\otimes c_2)]]$$
$$-[(a_1\otimes a_2)_\lambda[(b_1\otimes b_2)_\mu(c_1\otimes c_2)]]=(Y1)+(Y2)+(Q1)+(Q2),$$

其中

$$(Y1)=[[a_{1\lambda}b_1]^1{}_{\lambda+\mu}c_1]^1\otimes((a_2\circ_\lambda^2 b_2)\circ^2_{\lambda+\mu}c_2)+[b_{1\mu}[a_{1\lambda}c_1]^1]^1\otimes(b_2\circ_\mu^2(a_2\circ_\lambda^2 c_2))$$
$$-[a_{1\lambda}[b_{1\mu}c_1]^1]^1\otimes(a_2\circ_\lambda^2(b_2\circ_\mu^2 c_2)),$$
$$(Y2)=((a_1\circ_\lambda^1 b_1)\circ^1_{\lambda+\mu}c_1)\otimes[[a_{2\lambda}b_2]^2{}_{\lambda+\mu}c_2]^2+(b_1\circ_\mu^1(a_1\circ_\lambda^1 c_1))\otimes[b_{2\mu}[a_{2\lambda}c_2]^2]^2$$
$$-(a_1\circ_\lambda^1(b_1\circ_\mu^1 c_1))\otimes[a_{2\lambda}[b_{2\mu}c_2]^2]^2,$$
$$(Q1)=([a_{1\lambda}b_1]^1\circ^1_{\lambda+\mu}c_1)\otimes[(a_2\circ_\lambda^2 b_2)_{\lambda+\mu}c_2]^2+(b_1\circ_\mu^1[a_{1\lambda}c_1]^1)\otimes[b_{2\mu}(a_2\circ_\lambda^2 c_2)]^2$$
$$-(a_1\circ_\lambda^1[b_{1\mu}c_1]^1)\otimes[a_{2\lambda}(b_2\circ_\mu^2 c_2)]^2,$$
$$(Q2)=[(a_1\circ_\lambda^1 b_1)_{\lambda+\mu}c_1]^1\otimes([a_{2\lambda}b_2]^2\circ^2_{\lambda+\mu}c_2)+[b_{1\mu}(a_1\circ_\lambda^1 c_1)]^1\otimes(b_2\circ_\mu^2[a_{2\lambda}c_2]^2)$$
$$-[a_{1\lambda}(b_1\circ_\mu^1 c_1)]^1\otimes(a_2\circ_\lambda^2[b_{2\mu}c_2]^2).$$

由于 $(\mathcal{L}_1,\circ_\lambda^1)$、$(\mathcal{L}_2,\circ_\lambda^2)$ 是交换结合共形代数，且 $(\mathcal{L}_1,[\cdot_\lambda\cdot]^1)$、$(\mathcal{L}_2,[\cdot_\lambda\cdot]^2)$ 是李共形代数，因此 $(Y1)$ 和 $(Y2)$ 均为零。由式（3.4），我们得到

$$(b_1\circ_\mu^1[a_{1\lambda}c_1]^1)\otimes[b_{2\mu}(a_2\circ_\lambda^2 c_2)]^2=(a_1\circ_\lambda^1[b_{1\mu}c_1]^1+[a_{1\lambda}b_1]^1\circ^1_{\lambda+\mu}c_1)\otimes[b_{2\mu}(a_2\circ_\lambda^2 c_2)]^2,$$
$$[b_{1\mu}(a_1\circ_\lambda^1 c_1)]^1\otimes(b_2\circ_\mu^2[a_{2\lambda}c_2]^2)=[b_{1\mu}(a_1\circ_\lambda^1 c_1)]^1\otimes(a_2\circ_\lambda^2[b_{2\mu}c_2]^2+[a_{2\lambda}b_2]^2\circ^2_{\lambda+\mu}c_2).$$

分别将上述等式代入 $(Q1)$ 和 $(Q2)$，得到

$$(Q1)=(a_1\circ_\lambda^1[b_{1\mu}c_1]^1)\otimes([b_{2\mu}(a_2\circ_\lambda^2 c_2)]^2-[a_{2\lambda}(b_2\circ_\mu^2 c_2)]^2)$$
$$+([a_{1\lambda}b_1]^1\circ^1_{\lambda+\mu}c_1)\otimes([(a_2\circ_\lambda^2 b_2)_{\lambda+\mu}c_2]^2+[b_{2\mu}(a_2\circ_\lambda^2 c_2)]^2),$$
$$(Q2)=([b_{1\mu}(a_1\circ_\lambda^1 c_1)]^1-[a_{1\lambda}(b_1\circ_\mu^1 c_1)]^1)\otimes(a_2\circ_\lambda^2[b_{2\mu}c_2]^2)$$
$$+([(a_1\circ_\lambda^1 b_1)_{\lambda+\mu}c_1]^1+[b_{1\mu}(a_1\circ_\lambda^1 c_1)]^1)\otimes([a_{2\lambda}b_2]^2\circ^2_{\lambda+\mu}c_2).$$

由式（3.1）和式（3.2），我们得到

$$(Q1)=-2(a_1\circ_\lambda^1[b_{1\mu}c_1]^1)\otimes([a_{2\lambda}b_2]^2\circ^2_{\lambda+\mu}c_2)+2([a_{1\lambda}b_1]^1\circ^1_{\lambda+\mu}c_1)\otimes(a_2\circ_\lambda^2[b_{2\mu}c_2]^2),$$
$$(Q2)=-2([a_{1\lambda}b_1]^1\circ^1_{\lambda+\mu}c_1)\otimes(a_2\circ_\lambda^2[b_{2\mu}c_2]^2)+2(a_1\circ_\lambda^1[b_{1\mu}c_1]^1)\otimes([a_{2\lambda}b_2]^2\circ^2_{\lambda+\mu}c_2).$$

因此（$Q1$）+（$Q2$）$=0$。所以，$(\mathcal{L},[\cdot_\lambda\cdot])$ 是一个李共形代数。

接下来，我们证明关系式 (3.2) 成立。我们分别计算

$$[(a_1\otimes a_2)_\lambda((b_1\otimes b_2)\circ_\mu(c_1\otimes c_2))]=[(a_1\otimes a_2)_\lambda((b_1\circ_\mu^1 c_1)\otimes(b_2\circ_\mu^2 c_2))]$$

$$= [a_{1\lambda}(b_1 \circ_\mu^1 c_1)]^1 \otimes (a_2 \circ_\lambda^2 (b_2 \circ_\mu^2 c_2)) + (a_1 \circ_\lambda^1 (b_1 \circ_\mu^1 c_1)) \otimes [a_{2\lambda}(b_2 \circ_\mu^2 c_2)]^2,$$
$$[(b_1 \otimes b_2)_\mu((a_1 \otimes a_2) \circ_\lambda (c_1 \otimes c_2))] = [(b_1 \otimes b_2)_\mu((a_1 \circ_\lambda^1 c_1) \otimes (a_2 \circ_\lambda^2 c_2))]$$
$$= [b_{1\mu}(a_1 \circ_\lambda^1 c_1)]^1 \otimes (b_2 \circ_\mu^2 (a_2 \circ_\lambda^2 c_2)) + (b_1 \circ_\mu^1 (a_1 \circ_\lambda^1 c_1)) \otimes [b_{2\mu}(a_2 \circ_\lambda^2 c_2)]^2.$$

于是我们得到

$$\begin{aligned}
&[(a_1 \otimes a_2)_\lambda((b_1 \otimes b_2) \circ_\mu (c_1 \otimes c_2))] - [(b_1 \otimes b_2)_\mu((a_1 \otimes a_2) \circ_\lambda (c_1 \otimes c_2))] \\
&= ([a_{1\lambda}(b_1 \circ_\mu^1 c_1)]^1 - [b_{1\mu}(a_1 \circ_\lambda^1 c_1)]^1) \otimes ((a_2 \circ_\lambda^2 b_2) \circ_{\lambda+\mu}^2 c_2) \\
&\quad + ((a_1 \circ_\lambda^1 b_1) \circ_{\lambda+\mu}^1 c_1) \otimes ([a_{2\lambda}(b_2 \circ_\mu^2 c_2)]^2 - [b_{2\mu}(a_2 \circ_\lambda^2 c_2)]^2) \\
&= 2([a_{1\lambda}b_1]^1 \circ_{\lambda+\mu}^1 c_1) \otimes ((a_2 \circ_\lambda^2 b_2) \circ_{\lambda+\mu}^2 c_2) + 2((a_1 \circ_\lambda^1 b_1) \circ_{\lambda+\mu}^1 c_1) \otimes ([a_{2\lambda}b_2]^2 \circ_{\lambda+\mu}^2 c_2) \\
&= 2([a_{1\lambda}b_1]^1 \otimes (a_2 \circ_\lambda^2 b_2)) \circ_{\lambda+\mu} (c_1 \otimes c_2) + 2((a_1 \circ_\lambda^1 b_1) \otimes [a_{2\lambda}b_2]^2) \circ_{\lambda+\mu} (c_1 \otimes c_2) \\
&= 2([a_{1\lambda}b_1]^1 \otimes (a_2 \circ_\lambda^2 b_2) + (a_1 \circ_\lambda^1 b_1) \otimes [a_{2\lambda}b_2]^2) \circ_{\lambda+\mu} (c_1 \otimes c_2) \\
&= 2[(a_1 \otimes a_2)_\lambda(b_1 \otimes b_2)] \circ_{\lambda+\mu} (c_1 \otimes c_2).
\end{aligned}$$

总之，$(\mathcal{L},\ \circ_\lambda,\ [\cdot_\lambda\cdot])$ 是一个转置泊松共形代数。 □

3.4. **与 Hom-李共形代数的关系**。

命题 3.7. 设 $(\mathcal{L}, \circ_\lambda, [\cdot_\lambda\cdot])$ 是一个转置泊松共形代数。对于任意 $h \in \mathcal{L}$，定义线性映射 $\alpha_h :\ \mathcal{L} \to \mathcal{L}$，使得

$$\alpha_h(x) := (h \circ_\lambda x)|_{\lambda=0} = h \circ_{(0)} x, \quad \forall\ x \in \mathcal{L}.$$

则 $(\mathcal{L}, [\cdot_\lambda\cdot], \alpha_h)$ 是一个 *Hom*-李共形代数。

证明。 众所周知，$(\mathcal{L},\ [\cdot_\lambda\cdot])$ 是一个满足共形半双线性和斜对称性公理的李共形代数。对于所有 $x \in \mathcal{L}$,

$$\alpha_h(\partial x) = (h \circ_\lambda \partial x)|_{\lambda=0} = (\partial + \lambda)(h \circ_\lambda x)|_{\lambda=0} = \partial(h \circ_{(0)} x) = \partial(\alpha_h x).$$

因此，$\alpha_h\partial = \partial\alpha_h$。在式 (3.7) 中取 $\gamma := \lambda,\ \mu := \lambda + \mu,\ \lambda := 0$，可得

$$[[x_\lambda y]_{\lambda+\mu}(h \circ_{(0)} z)] + [[y_\mu z]_{-\partial-\lambda}(h \circ_{(0)} x)] + [[z_{-\partial-\lambda}x]_{-\partial-\mu}(h \circ_{(0)} y)] = 0.$$

即,

$$[[x_\lambda y]_{\lambda+\mu}\alpha_h(z)] + [\alpha_h(y)_\mu[x_\lambda z]] = [\alpha_h(x)_\lambda[y_\mu z]],$$

它满足 Hom-Jacobi 恒等式公理。因此，$(\mathcal{L}, [\cdot_\lambda\cdot], \alpha_h)$ 是一个 Hom-李共形代数。□

3.5. **泊松共形代数与转置泊松共形代数之间的相容条件**。

命题 3.8. 设 $(\mathcal{L}, \circ_\lambda)$ 是一个交换结合共形代数，且 $(\mathcal{L}, [\cdot_\lambda\cdot])$是一个李共形代数。那么，$(\mathcal{L}, \circ_\lambda, [\cdot_\lambda\cdot])$ 既是泊松共形代数又是转置泊松共形代数，当且仅当

$$a \circ_\lambda [b_\mu c] = [b_{\mu-\lambda}a] \circ_\mu c = [(a \circ_\lambda b)_{\lambda+\mu}c] = 0, \quad \forall\ a, b, c \in \mathcal{L}.$$

证明。 “若”部分容易验证。对于“仅若”部分，令 $a, b, c \in \mathcal{L}$。由式 (3.2) 可得

$$2[a_\lambda b] \circ_\mu c = [a_\lambda(b \circ_{\mu-\lambda} c)] - [b_{\mu-\lambda}(a \circ_\lambda c)].$$

由式 (2.17) 可得

$$[a_\lambda(b\circ_{\mu-\lambda}c)]=[a_\lambda b]\circ_\mu c+b\circ_{\mu-\lambda}[a_\lambda c],\quad [b_{\mu-\lambda}(a\circ_\lambda c)]=[b_{\mu-\lambda}a]\circ_\mu c+a\circ_\lambda[b_{\mu-\lambda}c].$$

Thus, 我们有

$$[a_\lambda b]\circ_\mu c+a\circ_\lambda[b_{\mu-\lambda}c]-b\circ_{\mu-\lambda}[a_\lambda c]+[b_{\mu-\lambda}a]\circ_\mu c=0.$$

由式（3.5），得到

$$[a_\lambda b]\circ_\mu c+a\circ_\lambda[b_{\mu-\lambda}c]-b\circ_{\mu-\lambda}[a_\lambda c]=0.$$

因此，$[b_{\mu-\lambda}a]\circ_\mu c=0$。由此以及式（3.4），得到 $a\circ_\lambda[b_\mu c]=b\circ_\mu[a_\lambda c]$。由式（3.1），我们有

$$2a\circ_\lambda[b_\mu c]=[(a\circ_\lambda b)_{\lambda+\mu}c]+[b_\mu(a\circ_\lambda c)].$$

由式（2.17）和式（2.18），得到

$$[(a\circ_\lambda b)_{\lambda+\mu}c]=b\circ_\mu[a_\lambda c]+a\circ_\lambda[b_\mu c],\quad [b_\mu(a\circ_\lambda c)]=[b_\mu a]\circ_{\lambda+\mu}c+a\circ_\lambda[b_\mu c].$$

因此，$a\circ_\lambda[b_\mu c]=-[b_\mu a]\circ_{\lambda+\mu}c=0$, $[(a\circ_\lambda b)_{\lambda+\mu}c]=2a\circ_\lambda[b_\mu c]=0$。 □

4. Constructions of transposed Poisson conformal algebras

本节首先证明，通过定义适当的二元运算，可以从给定的转置泊松共形代数构造出一个新的转置泊松共形代数。然后，我们引入诺维科夫-泊松共形代数、前李交换共形代数、微分诺维科夫-泊松共形代数和前李泊松共形代数的概念，它们分别是诺维科夫-泊松代数 [38], 前李交换代数 [30], 微分诺维科夫-泊松代数 [9], 和前李泊松代数 [3], 的共形类比。此外，我们给出若干由这些代数结构导出的转置泊松共形代数构造。

命题 4.1. 设$(\mathcal{L},\circ_\lambda,[\cdot_\lambda\cdot])$是一个转置泊松共形代数。对任意 $h\in\mathcal{L}$，在 $\mathcal{L}$ 上定义新的二元运算 $[\cdot_\lambda\cdot]^h$，如下：

$$[x_\lambda y]^h:=(h\circ_\mu[x_\lambda y])|_{\mu=0}=h\circ_{(0)}[x_\lambda y],\quad \forall\ x,y\in\mathcal{L}.$$

那么，$(\mathcal{L},\circ_\lambda,[\cdot_\lambda\cdot]^h)$是一个转置泊松共形代数。

证明。 设 $x,y,z,h\in\mathcal{L}$。我们先证明 $(\mathcal{L},[\cdot_\lambda\cdot]^h)$ 是一个李共形代数。

(a)**共形半双线性：**

$$[(\partial x)_\lambda y]^h=h\circ_{(0)}[(\partial x)_\lambda y]=h\circ_{(0)}(-\lambda[x_\lambda y])=-\lambda(h\circ_{(0)}[x_\lambda y])=-\lambda[x_\lambda y]^h.$$

(b) **斜对称性：**

$$[x_\lambda y]^h=h\circ_{(0)}[x_\lambda y]=h\circ_{(0)}(-[y_{-\partial-\lambda}x])=-h\circ_{(0)}[y_{-\partial-\lambda}x]=-[y_{-\partial-\lambda}x]^h.$$

(c) **雅可比恒等式：** 在式 (3.6) 中取 $\gamma:=\lambda,\ \mu:=\lambda+\mu,\ \lambda:=0$，可得 n

$$[(h\circ_{(0)}[x_\lambda y])_{\lambda+\mu}z]+[(h\circ_{(0)}[y_\mu z])_{-\partial-\lambda}x]+[(h\circ_{(0)}[z_{-\partial-\lambda}x])_{-\partial-\mu}y]=0.$$

因此，我们有

$$h\circ_{(0)}([(h\circ_{(0)}[x_\lambda y])_{\lambda+\mu}z]+[(h\circ_{(0)}[y_\mu z])_{-\partial-\lambda}x]+[(h\circ_{(0)}[z_{-\partial-\lambda}x])_{-\partial-\mu}y])=0.$$

That is,

$$[[x_\lambda y]^h{}_{\lambda+\mu}z]^h+[[y_\mu z]^h{}_{-\partial-\lambda}x]^h+[[z_{-\partial-\lambda}x]^h{}_{-\partial-\mu}y]^h=0.$$

接下来我们证明转置共形莱布尼茨法则成立，由式（3.2）可得

$$\begin{aligned}&2([x_\lambda y]^h\circ_\mu z)=2((h\circ_{(0)}[x_\lambda y])\circ_\mu z)=2(h\circ_{(0)}([x_\lambda y]\circ_\mu z))=h\circ_{(0)}(2([x_\lambda y]\circ_\mu z))\\&=h\circ_{(0)}([x_\lambda(y\circ_{\mu-\lambda}z)]-[y_{\mu-\lambda}(x\circ_\lambda z)])=h\circ_{(0)}[x_\lambda(y\circ_{\mu-\lambda}z)]-h\circ_{(0)}[y_{\mu-\lambda}(x\circ_\lambda z)]\\&=[x_\lambda(y\circ_{\mu-\lambda}z)]^h-[y_{\mu-\lambda}(x\circ_\lambda z)]^h.\end{aligned}$$

因此，$(\mathcal{L},\circ_\lambda,[\cdot_\lambda\cdot]^h)$ 是一个转置泊松共形代数。 □

定义 4.2. 诺维科夫-泊松共形代数 $(\mathcal{N},\circ_\lambda,*_\lambda)$ 是一个 $\mathbb{C}[\partial]$-模 $\mathcal{N}$，配备一个 $\mathbb{C}$-双线性映射 $\mathcal{N}\otimes\mathcal{N}\to\mathcal{N}[\lambda]$，记作 $a\otimes b\mapsto a\circ_\lambda b$，以及一个 $\mathbb{C}$-双线性映射 $\mathcal{N}\otimes\mathcal{N}\to\mathcal{N}[\lambda]$，记作 $a\otimes b\mapsto a*_\lambda b$，使得 $(\mathcal{N},\circ_\lambda)$ 是交换结合共形代数，$(\mathcal{N},*_\lambda)$ 是 Novikov 共形代数，并且对所有 $a,b,c\in\mathcal{N}$，以下等式成立：

$$(a\circ_\lambda b)*_{\lambda+\mu}c=a\circ_\lambda(b*_\mu c),\tag{4.1}$$

$$(a*_\lambda b)\circ_{\lambda+\mu}c-a*_\lambda(b\circ_\mu c)=(b*_\mu a)\circ_{\lambda+\mu}c-b*_\mu(a\circ_\lambda c).\tag{4.2}$$

注 4.3. 类似于注 2.3，在 Novikov-泊松共形代数 $(\mathcal{N},\circ_\lambda,*_\lambda)$ 中，以下性质总是成立：

$$\begin{aligned}a\circ_\lambda(b*_{-\partial-\mu}c)&=(a\circ_\lambda b)*_{-\partial-\mu}c,\\a\circ_{-\partial-\lambda}(b*_\mu c)&=(a\circ_{-\partial-\mu}b)*_{-\partial+\mu-\lambda}c,\\a\circ_{-\partial-\lambda}(b*_{-\partial-\mu}c)&=(a\circ_{-\partial+\mu-\lambda}b)*_{-\partial-\mu}c.\end{aligned}$$

在诺维科夫-泊松共形代数中取交换子，可得

定理 4.4。 设$(\mathcal{N},\circ_\lambda,*_\lambda)$ 是一个诺维科夫-泊松共形代数。定义

$$[a_\lambda b]=a*_\lambda b-b*_{-\partial-\lambda}a,\quad\forall\ a,b\in\mathcal{N}.\tag{4.3}$$

那么$(\mathcal{N},\circ_\lambda,[\cdot_\lambda\cdot])$ 是一个转置泊松共形代数。

证明。 众所周知，$(\mathcal{N},[\cdot_\lambda\cdot])$ 是一个李共形代数（见命题 2.10）。对于所有 $a,b,c\in\mathcal{N}$，我们有

$$\begin{aligned}&[a_\lambda b]\circ_\mu c=(a*_\lambda b-b*_{-\partial-\lambda}a)\circ_\mu c=(a*_\lambda b)\circ_\mu c-(b*_{-\partial-\lambda}a)\circ_\mu c,\\&[a_\lambda(b\circ_{\mu-\lambda}c)]=a*_\lambda(b\circ_{\mu-\lambda}c)-(b\circ_{\mu-\lambda}c)*_{-\partial-\lambda}a,\\&[b_{\mu-\lambda}(a\circ_\lambda c)]=b*_{\mu-\lambda}(a\circ_\lambda c)-(a\circ_\lambda c)*_{-\partial-\mu+\lambda}b.\end{aligned}$$

由注 4.3 可得

$$\begin{aligned}&(a*_\lambda b)\circ_\mu c=c\circ_{-\partial-\mu}(a*_\lambda b)=(c\circ_{-\partial-\lambda}a)*_{-\partial+\lambda-\mu}b=(a\circ_\lambda c)*_{-\partial-\mu+\lambda}b,\\&(b*_{-\partial-\lambda}a)\circ_\mu c=c\circ_{-\partial-\mu}(b*_{-\partial-\lambda}a)=(c\circ_{-\partial+\lambda-\mu}b)*_{-\partial-\lambda}a=(b\circ_{\mu-\lambda}c)*_{-\partial-\lambda}a.\end{aligned}$$

因此，我们有

$$[a_\lambda(b\circ_{\mu-\lambda}c)]-[b_{\mu-\lambda}(a\circ_\lambda c)]=a*_\lambda(b\circ_{\mu-\lambda}c)-b*_{\mu-\lambda}(a\circ_\lambda c)+[a_\lambda b]\circ_\mu c.$$

在式 (4.2) 中取 $\lambda:=\lambda,\ \mu:=\mu-\lambda$，可得

$$(a*_\lambda b)\circ_\mu c-a*_\lambda(b\circ_{\mu-\lambda}c)=(b*_{\mu-\lambda}a)\circ_\mu c-b*_{\mu-\lambda}(a\circ_\lambda c).$$

由于 $(b*_{-\partial-\lambda}a)\circ_\mu c=(b*_{\mu-\lambda}a)\circ_\mu c$，进一步可得

$$(a*_\lambda b)\circ_\mu c-(b*_{\mu-\lambda}a)\circ_\mu c=a*_\lambda(b\circ_{\mu-\lambda}c)-b*_{\mu-\lambda}(a\circ_\lambda c)=[a_\lambda b]\circ_\mu c.$$

综合以上等式，可得

$$[a_\lambda(b\circ_{\mu-\lambda}c)]-[b_{\mu-\lambda}(a\circ_\lambda c)]=2[a_\lambda b]\circ_\mu c,$$

由此可得关系式 (3.2) 成立。因此结论成立。 □

引理 4.5. 设$(\mathcal{N},\circ_\lambda)$ 是一个交换结合共形代数， D 是一个导子。在 $\mathcal{N}$ 上定义二元运算 $*_\lambda$

$$a*_\lambda b=a\circ_\lambda D(b),\quad \forall\ a,b\in\mathcal{N}. \tag{4.4}$$

则有以下结论：

(1) $(\mathcal{N},*_\lambda)$ 是一个 *Novikov* 共形代数。

(2) $(\mathcal{N},\circ_\lambda,*_\lambda)$ 是一个诺维科夫-泊松共形代数。

证明。 (1) 设 $a,\ b,\ c\in\mathcal{N}$。(a) 首先证明 $(\mathcal{N},\ *_\lambda)$ 是一个共形代数。

$$(\partial a)*_\lambda b=(\partial a)\circ_\lambda D(b)=-\lambda(a\circ_\lambda D(b))=-\lambda(a*_\lambda b),$$
$$a*_\lambda(\partial b)=a\circ_\lambda D(\partial b)=a\circ_\lambda(\partial D(b))=(\partial+\lambda)(a\circ_\lambda D(b))=(\partial+\lambda)(a*_\lambda b).$$

(b) 接下来证明 $(\mathcal{N},\ *_\lambda)$ 是一个左对称共形代数。由于

$$(a*_\lambda b)*_{\lambda+\mu}c-a*_\lambda(b*_\mu c)=(a\circ_\lambda D(b))\circ_{\lambda+\mu}D(c)-a\circ_\lambda D(b\circ_\mu D(c))$$
$$=a\circ_\lambda(D(b)\circ_\mu D(c))-a\circ_\lambda(D(b)\circ_\mu D(c))-a\circ_\lambda(b\circ_\mu D^2(c))=-a\circ_\lambda(b\circ_\mu D^2(c)),$$

类似地，我们有

$$(b*_\mu a)*_{\lambda+\mu}c-b*_\mu(a*_\lambda c)=-b\circ_\mu(a\circ_\lambda D^2(c)).$$

由注 2.4，得到 $a\circ_\lambda(b\circ_\mu D^2(c))=b\circ_\mu(a\circ_\lambda D^2(c))$。因此，我们得到

$$(a*_\lambda b)*_{\lambda+\mu}c-a*_\lambda(b*_\mu c)=(b*_\mu a)*_{\lambda+\mu}c-b*_\mu(a*_\lambda c).$$

(c) 最后，我们证明 $(\mathcal{N},\ *_\lambda)$ 是一个 Novikov 共形代数。由于

$$(a*_\lambda c)*_{-\mu-\partial}b=(a\circ_\lambda D(c))\circ_{-\mu-\partial}D(b)=D(b)\circ_\mu(a\circ_\lambda D(c))$$
$$=a\circ_\lambda(D(b)\circ_\mu D(c))=(a\circ_\lambda D(b))\circ_{\lambda+\mu}D(c)=(a*_\lambda b)*_{\lambda+\mu}c.$$

因此，$(\mathcal{N},\ *_\lambda)$ 是一个 Novikov 共形代数。

(2) 设 $a,b,c\in\mathcal{N}$。(d) 关系 (4.1) 成立。因为

$$(a\circ_\lambda b)*_{\lambda+\mu}c=(a\circ_\lambda b)\circ_{\lambda+\mu}D(c)=a\circ_\lambda(b\circ_\mu D(c))=a\circ_\lambda(b*_\mu c).$$

(e) 关系 (4.2) 成立。因为

$$(a*_\lambda b)\circ_{\lambda+\mu}c-a*_\lambda(b\circ_\mu c)=(a\circ_\lambda D(b))\circ_{\lambda+\mu}c-a\circ_\lambda D(b\circ_\mu c)$$
$$=a\circ_\lambda(D(b)\circ_\mu c)-a\circ_\lambda(D(b)\circ_\mu c)-a\circ_\lambda(b\circ_\mu D(c))=-a\circ_\lambda(b\circ_\mu D(c)),$$

同理可得

$$(b*_\mu a)\circ_{\lambda+\mu}c-b*_\mu(a\circ_\lambda c)=-b\circ_\mu(a\circ_\lambda D(c)).$$

根据注 2.4，我们得到 $a\circ_\lambda(b\circ_\mu D(c))=b\circ_\mu(a\circ_\lambda D(c))$。因此，我们得到

$$(a*_\lambda b)\circ_{\lambda+\mu}c-a*_\lambda(b\circ_\mu c)=(b*_\mu a)\circ_{\lambda+\mu}c-b*_\mu(a\circ_\lambda c).$$

综上，$(\mathcal{N},\circ_\lambda,*_\lambda)$ 是一个诺维科夫-泊松共形代数。 □

结合定理 4.4 和引理 4.5，我们得到以下推论。

推论 4.6。 设$(\mathcal{N},\circ_\lambda)$是一个交换结合共形代数，且 D 是一个导子。则$(\mathcal{N},\circ_\lambda,[\cdot_\lambda\cdot])$是一个转置泊松共形代数，其中

$$[a_\lambda b]=a\circ_\lambda D(b)-b\circ_{-\partial-\lambda}D(a),\quad \forall\ a,b\in\mathcal{N}. \tag{4.5}$$

定义 4.7. $(\mathcal{L},\circ_\lambda,*_\lambda)$ 是一个前李交换共形代数，即一个配备了 $\mathbb{C}$-双线性映射 $\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}\to\mathcal{L}[\lambda]$（记作 $a\otimes b\mapsto a\circ_\lambda b$）和 $\mathbb{C}$-双线性映射 $\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}\to\mathcal{L}[\lambda]$（记作 $a\otimes b\mapsto a*_\lambda b$）的 $\mathbb{C}[\partial]$-模$\mathcal{L}$，使得 $(\mathcal{L},\circ_\lambda)$ 是交换结合共形代数，$(\mathcal{L},*_\lambda)$ 是左对称共形代数，并且对所有 $a,b,c\in\mathcal{L}$，下列等式成立：

$$a*_\lambda(b\circ_\mu c)=(a*_\lambda b)\circ_{\lambda+\mu}c+b\circ_\mu(a*_\lambda c). \tag{4.6}$$

例 4.8. 设 $(\mathcal{L},\circ_\lambda)$ 是一个交换结合共形代数，且 D 是一个导子。容易验证，$(\mathcal{L},\circ_\lambda,*_\lambda)$ 是一个前李交换共形代数，其中 $(\mathcal{L},*_\lambda)$ 定义为 $a*_\lambda b=a\circ_\lambda D(b)$，对所有 $a,b\in\mathcal{L}$ 均成立。

微分 Novikov-泊松共形代数 **定义**为三元组 $(\mathcal{N},\ \circ_\lambda,\ *_\lambda)$，其中 $(\mathcal{N},\ \circ_\lambda)$ 是交换结合共形代数，而 $(\mathcal{N},\ *_\lambda)$ 是满足方程 (4.1)、(4.2) 和 (4.6) 的 Novikov 共形代数。

定义 4.9。 前李泊松共形代数 $(,\ \circ_\lambda,\ *_\lambda)$ 是一个 $\mathbb{C}[\partial]$-模 $\mathcal{L}$，其上赋予一个 $\mathbb{C}$-双线性映射 $\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}\to\mathcal{L}[\lambda]$，记为 $a\otimes b\mapsto a\circ_\lambda b$，以及一个 $\mathbb{C}$-双线性映射 $\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}\to\mathcal{L}[\lambda]$，记为 $a\otimes b\mapsto a*_\lambda b$，使得 $(\mathcal{L},\ \circ_\lambda)$ 是交换结合共形代数，$(\mathcal{L},\ *_\lambda)$ 是左对称共形代数，并且对所有 $a,\ b,\ c\in\mathcal{L}$，以下方程成立：

$$(a\circ_\lambda b)*_{\lambda+\mu}c=a\circ_\lambda(b*_\mu c), \tag{4.7}$$

$$(a*_\lambda b)\circ_{\lambda+\mu}c-a*_\lambda(b\circ_\mu c)=(b*_\mu a)\circ_{\lambda+\mu}c-b*_\mu(a\circ_\lambda c). \tag{4.8}$$

Le命题 4.10. 这些概念之间的关系可描述如下：

(1) 诺维科夫-泊松共形代数是前李泊松共形代数。

(2) 满足式 (4.1) 的前李交换共形代数$(\mathcal{L},\circ_\lambda,*_\lambda)$是前李泊松共形代数。

(3) 微分 *Novikov*-泊松共形代数是满足式 (4.1) 的前李交换共形代数，因此也是前李泊松共形代数。

证明。 （1）和（3）的证明显然。只需证明（2）。令 $a,b,c\in\mathcal{L}$。由等式（4.1）和（4.6），可得

$$(a*_\lambda b)\circ_{\lambda+\mu}c-a*_\lambda(b\circ_\mu c)=-b\circ_\mu(a*_\lambda c)=-(b\circ_\mu a)*_{\lambda+\mu}c,$$
$$(b*_\mu a)\circ_{\lambda+\mu}c-b*_\mu(a\circ_\lambda c)=-a\circ_\lambda(b*_\mu c)=-(a\circ_\lambda b)*_{\lambda+\mu}c.$$

注意到

$$(a\circ_\lambda b)*_{\lambda+\mu}c=(b\circ_{-\partial-\lambda}a)*_{\lambda+\mu}c=(b\circ_\mu a)*_{\lambda+\mu}c.$$

因此，我们得到

$$(a*_\lambda b)\circ_{\lambda+\mu}c-a*_\lambda(b\circ_\mu c)=(b*_\mu a)\circ_{\lambda+\mu}c-b*_\mu(a\circ_\lambda c).$$

因此，$(\mathcal{L},\circ_\lambda,*_\lambda)$ 是一个前李泊松共形代数。 □

左对称共形代数的交换子是李共形代数（命题 2.10）。通过采用与定理 4.4 的证明类似的论证，我们得到以下命题。

命题 4.11. 设 $(\mathcal{L}, \circ_\lambda, *_\lambda)$ 是一个前李泊松共形代数。定义

$$[a_\lambda b] = a *_\lambda b - b *_{-\partial-\lambda} a, \quad \forall\ a, b \in \mathcal{L}. \tag{4.9}$$

那么 $(\mathcal{L}, \circ_\lambda, [\cdot_\lambda \cdot])$ 是一个转置泊松共形代数。

结合命题 4.11 和引理 4.10，我们得到以下推论 .

推论 4.12。 设 $(\mathcal{L}, \circ_\lambda, *_\lambda)$ 是一个前李交换共形代数。假设等式 (4.1) 成立。那么 $(\mathcal{L}, \circ_\lambda, [\cdot_\lambda \cdot])$ 是一个转置泊松共形代数，其中二元运算 $[\cdot_\lambda \cdot]$ 由 $[a_\lambda b] = a *_\lambda b - b *_{-\partial-\lambda} a$ 定义，对所有 $a, b \in \mathcal{L}$ 均成立。特别地，当 $(\mathcal{L}, \circ_\lambda, *_\lambda)$ 是一个微分 *Novikov*-泊松共形代数时，结论也成立。

5. Compatible noncommutative TPCA structures on the Lie conformal algebra $W(a, b)$

我们从以下定义开始本节。

定义 5.1. 设 $(A, [\cdot_\lambda \cdot])$ 是一个李共形代数。 A 上的一个（二元的）转置泊松代数结构是指一个二元 λ-乘法 $\circ_\lambda$，使得 $(A, \circ_\lambda, [\cdot_\lambda \cdot])$ 构成一个（非交换）转置泊松代数。

命题 5.2. *Virasoro* 李共形代数 Vir 上的相容（非交换）转置泊松代数结构具有如下形式:

$$Vir = \mathbb{C}[\partial]L, \quad L \circ_\lambda L = cL, \tag{5.1}$$

其中 c 是一个复数。

证明。 由等式 (2.2) 和 (3.1) 可得以下关系:

$$L \circ_\lambda (L \circ_\mu L) = (L \circ_\lambda L) \circ_{\lambda+\mu} L, \tag{5.2}$$

$$2(L \circ_\lambda [L_\mu L]) = [(L \circ_\lambda L)_{\lambda+\mu} L] + [L_\mu (L \circ_\lambda L)]. \tag{5.3}$$

令 $L \circ_\lambda L = f(\partial, \lambda)L$，其中 f 是某个多项式。则等式 (5.2) 等价于

$$f(\partial + \lambda, \mu) f(\partial, \lambda) = f(-\lambda - \mu, \lambda) f(\partial, \lambda + \mu), \tag{5.4}$$

这意味着 $deg_\partial f(\partial, \lambda) + deg_\partial f(\partial, \lambda) = deg_\partial f(\partial, \lambda)$，其中我们使用记号 $deg_\partial f(\partial, \lambda)$ 表示 ∂在 $f(\partial, \lambda)$ 中的最高次数。因此， $deg_\partial f(\partial, \lambda) = 0$。现在我们可以设 $f(\partial, \lambda) = f(\lambda)$，其中某个 $f(\lambda) \in \mathbb{C}[\lambda]$。于是公式（5.4）化为

$$f(\mu) f(\lambda) = f(\lambda) f(\lambda + \mu), \tag{5.5}$$

这意味着 $f(\lambda) = c$ 对于某个 $c \in \mathbb{C}$。此外，容易验证公式（5.3）成立且$L \circ_\lambda L = L \circ_{-\partial-\lambda} L$。因此结论成立。□

接下来我们转向研究李共形代数 $W(a, b)$ 上相容的非交换 TPCA 结构的分类。根据非交换 TPCA 的定义，我们可以假设

$$L \circ_\lambda L = f_1(\partial, \lambda)L + f_2(\partial, \lambda)M, \quad L \circ_\lambda M = g_1(\partial, \lambda)L + g_2(\partial, \lambda)M, \tag{5.6}$$

$$M \circ_\lambda L = h_1(\partial, \lambda)L + h_2(\partial, \lambda)M, \quad M \circ_\lambda M = q_1(\partial, \lambda)L + q_2(\partial, \lambda)M, \tag{5.7}$$

其中， $f_1(\partial, \lambda)$、 $f_2(\partial, \lambda)$、 $g_1(\partial, \lambda)$、 $g_2(\partial, \lambda)$、 $h_1(\partial, \lambda)$、 $h_2(\partial, \lambda)$、 $q_1(\partial, \lambda)$ 和 $q_2(\partial, \lambda)$ 均为 $\mathbb{C}[\partial, \lambda]$ 中的多项式。

根据结合共形恒等式 (2.2) 和转置共形莱布尼茨法则 (3.1)，由式 (5.6) 和 (5.7) 定义的代数在 $W(a,\ b)$ 上构成一个相容的非交换 TPCA 结构，当且仅当下列恒等式成立：

$$
\begin{aligned}
&L\circ_\lambda (L\circ_\mu L)=(L\circ_\lambda L)\circ_{\lambda+\mu} L, && 2L\circ_\lambda [L_\mu L]=[(L\circ_\lambda L)_{\lambda+\mu}L]+[L_\mu(L\circ_\lambda L)],\\
&L\circ_\lambda (L\circ_\mu M)=(L\circ_\lambda L)\circ_{\lambda+\mu} M, && 2L\circ_\lambda [L_\mu M]=[(L\circ_\lambda L)_{\lambda+\mu}M]+[L_\mu(L\circ_\lambda M)],\\
&L\circ_\lambda (M\circ_\mu L)=(L\circ_\lambda M)\circ_{\lambda+\mu} L, && 2L\circ_\lambda [M_\mu L]=[(L\circ_\lambda M)_{\lambda+\mu}L]+[M_\mu(L\circ_\lambda L)],\\
&L\circ_\lambda (M\circ_\mu M)=(L\circ_\lambda M)\circ_{\lambda+\mu} M, && 2L\circ_\lambda [M_\mu M]=[(L\circ_\lambda M)_{\lambda+\mu}M]+[M_\mu(L\circ_\lambda M)],\\
&M\circ_\lambda (L\circ_\mu L)=(M\circ_\lambda L)\circ_{\lambda+\mu} L, && 2M\circ_\lambda [L_\mu L]=[(M\circ_\lambda L)_{\lambda+\mu}L]+[L_\mu(M\circ_\lambda L)],\\
&M\circ_\lambda (L\circ_\mu M)=(M\circ_\lambda L)\circ_{\lambda+\mu} M, && 2M\circ_\lambda [L_\mu M]=[(M\circ_\lambda L)_{\lambda+\mu}M]+[L_\mu(M\circ_\lambda M)],\\
&M\circ_\lambda (M\circ_\mu L)=(M\circ_\lambda M)\circ_{\lambda+\mu} L, && 2M\circ_\lambda [M_\mu L]=[(M\circ_\lambda M)_{\lambda+\mu}L]+[M_\mu(M\circ_\lambda L)],\\
&M\circ_\lambda (M\circ_\mu M)=(M\circ_\lambda M)\circ_{\lambda+\mu} M, && 2M\circ_\lambda [M_\mu M]=[(M\circ_\lambda M)_{\lambda+\mu}M]+[M_\mu(M\circ_\lambda M)].
\end{aligned}
$$

将等式 (5.6) 和 (5.7) 代入上述恒等式，由等式 (5.6) 和 (5.7) 定义的代数在 $W(a,b)$ 上构成相容的非交换转置泊松共形代数结构，当且仅当 $f_1(\partial,\lambda)$,$f_2(\partial,\lambda)$，$g_1(\partial,\lambda)$，$g_2(\partial,\lambda)$，$h_1(\partial,\lambda)$，$h_2(\partial,\lambda)$，$q_1(\partial,\lambda)$ 和 $q_2(\partial,\lambda)$ 满足以下方程：

$$
\begin{aligned}
&f_1(\partial+\lambda,\mu)f_1(\partial,\lambda)\ +f_2(\partial+\lambda,\mu)g_1(\partial,\lambda)\\
&\qquad =f_1(-\lambda-\mu,\ \lambda)f_1(\partial,\ \lambda+\mu)\ +f_2(-\lambda-\mu,\ \lambda)h_1(\partial,\ \lambda+\mu), &(5.8)\\
&f_1(\partial+\lambda,\mu)f_2(\partial,\lambda)\ +f_2(\partial+\lambda,\mu)g_2(\partial,\lambda)\\
&\qquad =f_1(-\lambda-\mu,\lambda)f_2(\partial,\lambda+\mu)+f_2(-\lambda-\mu,\lambda)h_2(\partial,\lambda+\mu), &(5.9)\\
&g_1(\partial+\lambda,\ \mu)f_1(\partial,\ \lambda)\ +g_2(\partial+\lambda,\ \mu)g_1(\partial,\ \lambda)\\
&\qquad =f_1(-\lambda-\mu,\lambda)g_1(\partial,\lambda+\mu)+f_2(-\lambda-\mu,\lambda)q_1(\partial,\lambda+\mu), &(5.10)\\
&g_1(\partial+\lambda,\mu)f_2(\partial,\lambda)\ +g_2(\partial+\lambda,\mu)g_2(\partial,\lambda)\\
&\qquad =f_1(-\lambda-\mu,\lambda)g_2(\partial,\lambda+\mu)+f_2(-\lambda-\mu,\lambda)q_2(\partial,\lambda+\mu), &(5.11)\\
&h_1(\partial+\lambda,\mu)f_1(\partial,\lambda)\ +h_2(\partial+\lambda,\mu)g_1(\partial,\lambda)\\
&\qquad =g_1(-\lambda-\mu,\lambda)f_1(\partial,\lambda+\mu)+g_2(-\lambda-\mu,\lambda)h_1(\partial,\lambda+\mu), &(5.12)\\
&h_1(\partial+\lambda,\ \mu)f_2(\partial,\ \lambda)\ +h_2(\partial+\lambda,\ \mu)g_2(\partial,\ \lambda)\\
&\qquad =g_1(-\lambda-\mu,\lambda)f_2(\partial,\lambda+\mu)+g_2(-\lambda-\mu,\lambda)h_2(\partial,\lambda+\mu), &(5.13)\\
&q_1(\partial+\lambda,\mu)f_1(\partial,\lambda)\ +q_2(\partial+\lambda,\mu)g_1(\partial,\lambda)\\
&\qquad =g_1(-\lambda-\mu,\lambda)g_1(\partial,\lambda+\mu)+g_2(-\lambda-\mu,\lambda)q_1(\partial,\lambda+\mu), &(5.14)\\
&q_1(\partial+\lambda,\ \mu)f_2(\partial,\ \lambda)\ +q_2(\partial+\lambda,\ \mu)g_2(\partial,\ \lambda)\\
&\qquad =g_1(-\lambda-\mu,\lambda)g_2(\partial,\lambda+\mu)+g_2(-\lambda-\mu,\lambda)q_2(\partial,\lambda+\mu), &(5.15)\\
&f_1(\partial+\lambda,\mu)h_1(\partial,\lambda)\ +f_2(\partial+\lambda,\mu)q_1(\partial,\lambda)\\
&\qquad =h_1(-\lambda-\mu,\lambda)f_1(\partial,\lambda+\mu)+h_2(-\lambda-\mu,\lambda)h_1(\partial,\lambda+\mu), &(5.16)\\
&f_1(\partial+\lambda,\ \mu)h_2(\partial,\ \lambda)\ +f_2(\partial+\lambda,\ \mu)q_2(\partial,\ \lambda)\\
&\qquad =h_1(-\lambda-\mu,\lambda)f_2(\partial,\lambda+\mu)+h_2(-\lambda-\mu,\lambda)h_2(\partial,\lambda+\mu), &(5.17)\\
&g_1(\partial+\lambda,\mu)h_1(\partial,\lambda)\ +g_2(\partial+\lambda,\mu)q_1(\partial,\lambda)\\
&\qquad =h_1(-\lambda-\mu,\lambda)g_1(\partial,\lambda+\mu)+h_2(-\lambda-\mu,\lambda)q_1(\partial,\lambda+\mu), &(5.18)
\end{aligned}
$$

$$g_1(\partial+\lambda,\mu)h_2(\partial,\lambda)+g_2(\partial+\lambda,\mu)q_2(\partial,\lambda)$$
$$=h_1(-\lambda-\mu,\lambda)g_2(\partial,\lambda+\mu)+h_2(-\lambda-\mu,\lambda)q_2(\partial,\lambda+\mu), \quad (5.19)$$
$$h_1(\partial+\lambda,\ \mu)h_1(\partial,\ \lambda)+h_2(\partial+\lambda,\ \mu)q_1(\partial,\ \lambda)$$
$$=q_1(-\lambda-\mu,\lambda)f_1(\partial,\lambda+\mu)+q_2(-\lambda-\mu,\lambda)h_1(\partial,\lambda+\mu), \quad (5.20)$$
$$h_1(\partial+\lambda,\ \mu)h_2(\partial,\ \lambda)+h_2(\partial+\lambda,\ \mu)q_2(\partial,\ \lambda)$$
$$=q_1(-\lambda-\mu,\lambda)f_2(\partial,\lambda+\mu)+q_2(-\lambda-\mu,\lambda)h_2(\partial,\lambda+\mu), \quad (5.21)$$
$$q_1(\partial+\lambda,\ \mu)h_1(\partial,\ \lambda)+q_2(\partial+\lambda,\ \mu)q_1(\partial,\ \lambda)$$
$$=q_1(-\lambda-\mu,\lambda)g_1(\partial,\lambda+\mu)+q_2(-\lambda-\mu,\lambda)q_1(\partial,\lambda+\mu), \quad (5.22)$$
$$q_1(\partial+\lambda,\ \mu)h_2(\partial,\ \lambda)+q_2(\partial+\lambda,\ \mu)q_2(\partial,\ \lambda)$$
$$=q_1(-\lambda-\mu,\lambda)g_2(\partial,\lambda+\mu)+q_2(-\lambda-\mu,\lambda)q_2(\partial,\lambda+\mu), \quad (5.23)$$
$$2(\partial+\lambda+2\mu)f_1(\partial,\lambda)=(\partial+2\lambda+2\mu)f_1(-\lambda-\mu,\lambda)+(\partial+2\mu)f_1(\partial+\mu,\lambda), \quad (5.24)$$
$$2(\partial+\lambda+2\mu)f_2(\partial,\lambda)=((a-1)\partial+a(\lambda+\mu)-b)f_2(-\lambda-\mu,\lambda)$$
$$+(\partial+a\mu+b)f_2(\partial+\mu,\lambda), \quad (5.25)$$
$$2(\partial+\lambda+a\mu+b)g_1(\partial,\lambda)=(\partial+2\mu)g_1(\partial+\mu,\lambda), \quad (5.26)$$
$$2(\partial+\lambda+a\mu+b)g_2(\partial,\lambda)=(\partial+a(\lambda+\mu)+b)f_1(-\lambda-\mu,\lambda)+(\partial+a\mu+b)g_2(\partial+\mu,\lambda), \quad (5.27)$$
$$2((a-1)(\partial+\lambda)+a\mu-b)g_1(\partial,\lambda)=(\partial+2\lambda+2\mu)g_1(-\lambda-\mu,\lambda), \quad (5.28)$$
$$2((a-1)(\partial+\lambda)+a\mu-b)g_2(\partial,\lambda)=((a-1)\partial+a(\lambda+\mu)-b)g_2(-\lambda-\mu,\lambda)$$
$$+((a-1)\partial+a\mu-b)f_1(\partial+\mu,\lambda), \quad (5.29)$$
$$(\partial+a(\lambda+\mu)+b)g_1(-\lambda-\mu,\lambda)+((a-1)\partial+a\mu-b)g_1(\partial+\mu,\lambda)=0, \quad (5.30)$$
$$2(\partial+\lambda+2\mu)h_1(\partial,\lambda)=(\partial+2\lambda+2\mu)h_1(-\lambda-\mu,\lambda)+(\partial+2\mu)h_1(\partial+\mu,\lambda), \quad (5.31)$$
$$2(\partial+\lambda+2\mu)h_2(\partial,\lambda)=((a-1)\partial+a(\lambda+\mu)-b)h_2(-\lambda-\mu,\lambda)$$
$$+(\partial+a\mu+b)h_2(\partial+\mu,\lambda), \quad (5.32)$$
$$2(\partial+\lambda+a\mu+b)q_1(\partial,\lambda)=(\partial+2\mu)q_1(\partial+\mu,\lambda), \quad (5.33)$$
$$2(\partial+\lambda+a\mu+b)q_2(\partial,\lambda)=(\partial+a(\lambda+\mu)+b)h_1(-\lambda-\mu,\lambda)+(\partial+a\mu+b)q_2(\partial+\mu,\lambda), \quad (5.34)$$
$$2((a-1)(\partial+\lambda)+a\mu-b)q_1(\partial,\lambda)=(\partial+2\lambda+2\mu)q_1(-\lambda-\mu,\lambda), \quad (5.35)$$
$$2((a-1)(\partial+\lambda)+a\mu-b)q_2(\partial,\ \lambda)=((a-1)\partial+a(\lambda+\mu)-b)q_2(-\lambda-\mu,\ \lambda)$$
$$+((a-1)\partial+a\mu-b)h_1(\partial+\mu,\lambda), \quad (5.36)$$
$$(\partial+a(\lambda+\mu)+b)q_1(-\lambda-\mu,\lambda)+((a-1)\partial+a\mu-b)q_1(\partial+\mu,\lambda)=0. \quad (5.37)$$

引理 5.3。 根据 $a=2$ 是否成立，我们有以下两种情况：*(A1)* 如果 $a\neq 2$，那么

$$f_1(\partial,\ \lambda)=f_2(\partial,\ \lambda)=g_1(\partial,\ \lambda)=g_2(\partial,\ \lambda)=h_1(\partial,\ \lambda)=h_2(\partial,\ \lambda)=q_1(\partial,\ \lambda)=q_2(\partial,\ \lambda)=0;$$

(A2) 如果 $a=2$，那么

$$g_1(\partial,\lambda)=q_1(\partial,\lambda)=0,\quad h_1(\partial,\lambda)=q_2(\partial,\lambda)=c_0,$$
$$f_1(\partial,\lambda)=g_2(\partial,\lambda)=p(\lambda),\quad f_2(\partial,\lambda)=s(\lambda),\quad h_2(\partial,\lambda)=l(\lambda),$$

其中 $p(\lambda)\ s(\lambda)\ l(\lambda)\in\mathbb{C}[\lambda]$ 以及 $c_0\in\mathbb{C}$。

证明。 分别比较式 (5.26) 和 (5.33) 中 λ 的最高次数项，可得 $g_1(\partial,\lambda)=q_1(\partial,\lambda)=0$。此外，式 (5.23) 化简为

$$q_2(\partial+\lambda,\mu)q_2(\partial,\lambda)=q_2(-\lambda-\mu,\lambda)q_2(\partial,\lambda+\mu), \tag{5.38}$$

这意味着与公式（5.4）相同的方程，因此对于某个 $c_0\in\mathbb{C}$，有 $q_2(\partial,\lambda)=c_0$。将$\mu=0$代入公式（5.31），得到 $(\partial+2\lambda)(h_1(\partial,\lambda)-h_1(-\lambda,\lambda))=0$，从而 $h_1(\partial,\lambda)=h_1(-\lambda,\lambda)$。同样地，将 $\mu=0$ 代入公式（5.34），可得

$$c_0(\partial+2\lambda+b)=(\partial+a\lambda+b)h_1(-\lambda,\lambda). \tag{5.39}$$

如果 $a=2$，则 $(\partial+2\lambda+b)(h_1(-\lambda,\lambda)-c_0)=0$，因此 $h_1(\partial,\lambda)=h_1(-\lambda,\lambda)=c_0$。如果 $a\neq 2$，通过比较公式（5.39）中的相似项，可以得到 $h_1(\partial,\lambda)=c_0=0$。

在式 (5.24) 中令 $\mu=0$，得到 $(\partial+2\lambda)(f_1(\partial,\lambda)-f_1(-\lambda,\lambda))=0$，因此 $f_1(\partial,\lambda)=f_1(-\lambda,\lambda)=p(\lambda)$，其中 $p(\lambda)\in\mathbb{C}[\lambda]$。将此结果和 $\mu=0$ 代入式 (5.27)，得到

$$(\partial+2\lambda+b)g_2(\partial,\lambda)=(\partial+a\lambda+b)p(\lambda). \tag{5.40}$$

若 $a=2$，则 $(\partial+2\lambda+b)(g_2(\partial,\lambda)-p(\lambda))=0$，因此 $g_2(\partial,\lambda)=p(\lambda)$。若 $a\neq 2$，通过比较式 (5.40) 中 ∂ 的最高次数项，得到 $g_2(\partial,\lambda)=p(\lambda)$。进一步可得 $(2-a)\lambda p(\lambda)=0$，从而得到 $p(\lambda)=0$。

在方程（5.25）中令 $\mu=0$，得到

$$(\partial+2\lambda-b)f_2(\partial,\lambda)=((a-1)\partial+a\lambda-b)f_2(-\lambda,\lambda). \tag{5.41}$$

若 $a=2$，则 $(\partial+2\lambda-b)(f_2(\partial,\lambda)-f_2(-\lambda,\lambda))=0$，因此对于某个 $s(\lambda)\in\mathbb{C}[\lambda]$，有 $f_2(\partial,\lambda)=f_2(-\lambda,\lambda)=s(\lambda)$。若 $a\neq 2$，通过比较方程（5.41）中 ∂ 的最高次数项，可以得到 $f_2(\partial,\lambda)=f_2(-\lambda,\lambda)=0$。类似地，在方程（5.32）中令 $\mu=0$，得到

$$(\partial+2\lambda-b)h_2(\partial,\lambda)=((a-1)\partial+a\lambda-b)h_2(-\lambda,\lambda). \tag{5.42}$$

这意味着得到与方程（5.41）相同的方程。因此，当 $a=2$ 时，$h_2(\partial,\lambda)=h_2(-\lambda,\lambda)=l(\lambda)$，其中 $l(\lambda)\in\mathbb{C}[\lambda]$；而当 $a\neq 2$ 时，$h_2(\partial,\lambda)=h_2(-\lambda,\lambda)=0$。证明至此结束。□

引理 *5.4.* 在引理 *5.3* 中的 *Case (A2)* 里，我们有以下结果：*(B1)* $f_2(\partial,\lambda)=s(\lambda)$，$h_1(\partial,\lambda)=q_2(\partial,\lambda)=f_1(\partial,\lambda)=g_2(\partial,\lambda)=h_2(\partial,\lambda)=0$, 其中$s(\lambda)\in\mathbb{C}[\lambda]$; *(B2)* $f_2(\partial,\lambda)=c_2\lambda$, $f_1(\partial,\lambda)=g_2(\partial,\lambda)=c_1$, $h_1(\partial,\lambda)=q_2(\partial,\lambda)=h_2(\partial,\lambda)=0$, 其中$c_2\in\mathbb{C}, c_1\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$; *(B3)* $f_2(\partial,\lambda)=c_3$, $f_1(\partial,\lambda)=g_2(\partial,\lambda)=h_2(\partial,\lambda)=c_1$, $h_1(\partial,\lambda)=q_2(\partial,\lambda)=0$, 其中$c_3\in\mathbb{C}$, $c_1\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$; *(B4)* $f_2(\partial,\lambda)=\frac{km}{c_0}\lambda-\frac{k^2}{c_0}\lambda^2$, $f_1(\partial,\lambda)=g_2(\partial,\lambda)=m-k\lambda$, $h_2(\partial,\lambda)=k\lambda$, $h_1(\partial,\lambda)=q_2(\partial,\lambda)=c_0$, 其中 $m,k\in\mathbb{C}, c_0\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$.

证明。 在引理 5.3 中的 Case (A2) 里，方程（5.8）–（5.37）等价于以下方程：

$$c_0l(\lambda)+c_0l(\mu)=c_0l(\lambda+\mu), \tag{5.43}$$
$$c_0s(\mu)+p(\mu)l(\lambda)=c_0s(\lambda+\mu)+l(\lambda)l(\lambda+\mu), \tag{5.44}$$
$$c_0l(\lambda)+c_0p(\lambda+\mu)=c_0p(\mu), \tag{5.45}$$
$$p(\lambda)l(\mu)+c_0s(\lambda)=p(\lambda)l(\lambda+\mu), \tag{5.46}$$
$$p(\lambda)s(\mu)+p(\mu)s(\lambda)=p(\lambda)s(\lambda+\mu)+s(\lambda)l(\lambda+\mu), \tag{5.47}$$
$$p(\lambda)p(\lambda+\mu)+c_0s(\lambda)=p(\lambda)p(\mu). \tag{5.48}$$

为求解方程（5.43）–（5.48），我们区分以下两种情况：

Case (I)： $c_0 = 0$。于是，方程（5.43）和（5.45）成立。由方程（5.48），可得$p(\lambda)p(\lambda+\mu) = p(\lambda)p(\mu)$，这意味着对于某个 $c_1 \in \mathbb{C}$， $p(\lambda) = c_1$。

Subcase (IA)： $c_1 = 0$。由式 (5.44)，可得 $l(\lambda)l(\lambda+\mu) = 0$，因此 $l(\lambda) = 0$。从而，容易验证，对于所有 $s(\lambda) \in \mathbb{C}[\lambda]$，式 (5.46) 和 (5.47) 均成立。

Subcase (IB)： $c_1 \neq 0$。结合式 (5.44) 和 (5.46)，可得 $l(\lambda)(l(\lambda) - c_1) = 0$，这意味着 $l(\lambda) = 0$ 或 $l(\lambda) = c_1$。若 $l(\lambda) = 0$，则由式 (5.47) 可得 $s(\mu) + s(\lambda) = s(\lambda+\mu)$。因此， $s(\lambda)$ 的次数至多为一。故可设 $s(\lambda) = c_4 + c_2\lambda$，其中 $c_4, c_2 \in \mathbb{C}$，将其代入上述方程，得到 $c_4 = 0$。于是，对某个 $c_2 \in \mathbb{C}$，有 $s(\lambda) = c_2\lambda$。若 $l(\lambda) = c_1$，则由式 (5.47)，得到 $s(\mu) = s(\lambda+\mu)$，从而对某个 $c_3 \in \mathbb{C}$，有 $s(\lambda) = c_3$。

Case (II)： $c_0 \neq 0$。由式 (5.43)，可得 $l(\lambda)+l(\mu) = l(\lambda+\mu)$。因此，对于某个 $k \in \mathbb{C}$，有 $l(\lambda) = k\lambda$。将其代入式 (5.45)，得到 $p(\lambda+\mu) - p(\mu) = -k\lambda$。显然， $p(\lambda)$ 的次数至多为一。令 $p(\lambda) = m + k_1\lambda$，其中 $m, k_1 \in \mathbb{C}$，进一步可得 $k_1 = -k$。因此，对于某些 $m, k \in \mathbb{C}$，有 $p(\lambda) = m - k\lambda$。结合式 (5.43) 和 (5.46)，可得 $c_0 s(\lambda) = p(\lambda)l(\lambda)$。因此， $s(\lambda) = \frac{km}{c_0}\lambda - \frac{k^2}{c_0}\lambda^2$，其中 $m, k \in \mathbb{C}, c_0 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$。此外，容易验证式 (5.44)、(5.47) 和 (5.48) 均成立。

证明完成。 □

定理 5.5。 李共形代数 $W(a, b)$ 上的相容的非交换 *TPCA* 结构具有以下形式：

(*1*) 如果 $a \neq 2$，则

$$L \circ_\lambda L = L \circ_\lambda M = M \circ_\lambda L = M \circ_\lambda M = 0;$$

(2) If $a = 2$, then

(2.1) $L \circ_\lambda L = s(\lambda)M, \quad L \circ_\lambda M = M \circ_\lambda L = M \circ_\lambda M = 0;$

(2.2) $L \circ_\lambda L = c_1L + c_2\lambda M, \quad L \circ_\lambda M = c_1M, \quad M \circ_\lambda L = M \circ_\lambda M = 0;$

(2.3) $L \circ_\lambda L = c_1L + c_3M, \quad L \circ_\lambda M = M \circ_\lambda L = c_1M, \quad M \circ_\lambda M = 0;$

(2.4) $L \circ_\lambda L = (m - k\lambda)L + (\frac{km}{c_0}\lambda - \frac{k^2}{c_0}\lambda^2)M, \quad L \circ_\lambda M = (m - k\lambda)M,$
$M \circ_\lambda L = c_0L + k\lambda M, \quad M \circ_\lambda M = c_0M;$

where $s(\lambda) \in \mathbb{C}[\lambda]$, $c_0, c_1 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $c_2, c_3, m, k \in \mathbb{C}$.

证明。 该定理直接由引理 5.3 和引理 5.4 得出。 □

为了对底层李共形代数同构于 $W(2, b)$ 的所有非同构非交换 TPCA 结构进行分类，我们讨论定理 5.5 中的每种情形（2.1）–（2.4），并给出非零的 λ-乘积。

在 Case (2.1) 中，当 $0 \neq s(\lambda) \in \mathbb{C}[\lambda]$ 时， $W(2, b)$ 上的相容的非交换 TPCA 结构是非平凡的。

在 Case (2.2) 中，由于 $c_1 \neq 0$，因此经过 $\mathbb{C}[\partial]$-基的变换 $[L' := L - \frac{c_2}{c_1}(\partial - b)M, \quad M' := M]$ 后，我们得到

$$L' \circ_\lambda L' = c_1L', \quad L' \circ_\lambda M' = c_1M', \quad M' \circ_\lambda L' = M' \circ_\lambda M' = 0.$$

在 Case (2.3) 中，若 $b \neq 0$，则经过 $\mathbb{C}[\partial]$-基的变换 $[L' := L + \frac{c_3}{bc_1}(\partial - b)M, \quad M' := M]$ 后，我们得到

$$L' \circ_\lambda L' = c_1L', \quad L' \circ_\lambda M' = M' \circ_\lambda L' = c_1M', \quad M' \circ_\lambda M' = 0.$$

对于 $b = 0$，我们考虑以下两个子情形。

Subcase (I)：在 $c_3 = 0$的情况下，我们直接得到

$$L \circ_\lambda L = c_1L, \quad L \circ_\lambda M = M \circ_\lambda L = c_1M, \quad M \circ_\lambda M = 0.$$

Subcase(II)：在 $c_3 \neq 0$的情况下，将 $\mathbb{C}[\partial]$基变换为 $[L' := L, \quad M' := c_3 M]$后，我们得到

$$L' \circ_\lambda L' = c_1 L' + M', \quad L' \circ_\lambda M' = M' \circ_\lambda L' = c_1 M', \quad M' \circ_\lambda M' = 0.$$

在 Case(2.4) 中，由于 $c_0 \neq 0$，那么在进行 $\mathbb{C}[\partial]$-基变换 $[L' := L, \quad M' := \frac{1}{c_0} M]$ 后，我们得到

$$\begin{aligned} &L' \circ_\lambda L' = (m - k\lambda)L' + (km\lambda - k^2\lambda^2)M', \\ &L' \circ_\lambda M' = (m - k\lambda)M', \quad M' \circ_\lambda L' = L' + k\lambda M', \quad M' \circ_\lambda M' = M'. \end{aligned}$$

接下来，我们进行变换 $[L := L' - k(\partial - b)M', \quad M := M']$，并得到

$$L \circ_\lambda L = cL, \quad L \circ_\lambda M = cM, \quad M \circ_\lambda L = L, \quad M \circ_\lambda M = M, \quad where\ c = m + kb.$$

我们将上述讨论总结为以下定理：

定理5.6。 设 $(W(a,b) \ \circ_\lambda, [\cdot_\lambda \cdot])$ 是李共形代数 $W(a,b)$上的非平凡非交换转置泊松共形代数结构。那么，$(W(a,b) \ \circ_\lambda, [\cdot_\lambda \cdot])$ 同构于以下其中一种：

(1) $L \circ_\lambda L = s(\lambda)M, \quad L \circ_\lambda M = M \circ_\lambda L = M \circ_\lambda M = 0$; *(2)* $L \circ_\lambda L = c_1 L$, $L \circ_\lambda M = c_1 M, \quad M \circ_\lambda L = M \circ_\lambda M = 0$; *(3)* $L \circ_\lambda L = c_1 L$, $L \circ_\lambda M = M \circ_\lambda L = c_1 M, \quad M \circ_\lambda M = 0$; *(4)* $L \circ_\lambda L = c_1 L + M$, $L \circ_\lambda M = M \circ_\lambda L = c_1 M, \quad M \circ_\lambda M = 0$; *(5)* $L \circ_\lambda L = cL, \quad L \circ_\lambda M = cM$, $M \circ_\lambda L = L, \quad M \circ_\lambda M = M$;

其中 $0 \neq s(\lambda) \ \in \mathbb{C}[\lambda]$, $c_1 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $c \in \mathbb{C}$。

References

[1] V. I. 阿诺德。

Mathematical methods of classical mechanics 60 *Graduate Texts in Mathemat-* ，第 卷。*ics* 1978 Springer-Verlag，纽约-海德堡，。由 K. Vogtmann 和 A. Weinstein 从俄文译出。[2] Sania Asif 和 Yao Wang。Bihom-（前）泊松共形代数的构造与分析。 *Symmetry*，16 11 2024 10 3390 16111533（），。doi: 。/sym 。[3] 白成明、Ruipu Bai、Li Guo 和 Yong Wu。转置泊松代数、诺维科夫-泊松代数与3-李代数。 *Journal of Algebra*，632:535–566，2023。doi:10.1016/j.jalgebra.2023.06.006。[4] Bojko Bakalov、维克多·G·卡茨和 Alexander A. Voronov。共形代数上同调。

Comm.， （）：–。*Math. Phys.* 200 3 561 598, 1999 10 1007 002200050541 doi: 。/s 。[5] Aliaa Barakat、Alberto De Sole 和维克多·G·卡茨。哈密顿方程理论中的泊松顶点代数。 *Jpn. J. Math.*，4(2):141–252，2009。doi:10.1007/s11537-009-0932-y。[6] F. Bayen、M. Flato、C. Fronsdal、A. Lichnerowicz 和 D. Sternheimer。量子力学作为经典力学的变形。 *Lett. Math. Phys.*，1(6):521–530，1975/77。doi:10.1007/BF00399745。[7] Jason Bell、St´ephane Launois、Omar Le´on S´anchez 和 Rahim Moosa。通过模型论与微分代数几何研究泊松代数。 *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*，19(7):2019–2049，2017。doi:10.4171/JEMS/712。[8] K. H. Bhaskara 和 K. Viswanath。

Poisson algebras and Poisson manifolds 174 *Pitman Research* ，第 卷。*Notes in Mathematics Series* Longman Scientific & Technical，Harlow；与 John Wiley & Sons, Inc. 联合在美国纽约出版，1988。[9] L. A. Bokut、Yuqun Chen 和 Zerui Zhang。关于自由盖尔范德-多尔夫曼-诺维科夫-泊松代数及PBW定理。 *J. Algebra*，500:153–170，2018。doi:10.1016/j.jalgebra.2016.12.006。[10] Vyjayanthi Chari 和 Andrew Pressley。 *A guide to quantum groups*。剑桥大学出版社，剑桥，1994。[11] Fulin Chen、Xiaoling Liao、Shaobin Tan 和 Qing Wang。由形式分布李代数构造李共形代数的新方法。 *J. Algebra*，680:96–133，2025。doi:10.1016/j.jalgebra.2025.04. 045。

[12] 郑顺仁和维克多·G·卡茨。共形模。 *Asian J. Math.*，1(1):181–193，1997。doi:10. 4310/AJM.1997.v1.n1.a6。
[13] 亚历山德罗·德安德烈亚和维克多·G·卡茨。有限共形代数的结构理论。
Selecta Math.， （）：–。
(N.S.) 4 3 377 418, 1998 10 1007 000290050036
doi: 。/s 。[14] 保罗·A·M·狄拉克。
Lectures on quantum mechanics 2 *Belfer Graduate School of Science Mono-*，第 卷。
graphs Series
贝尔弗科学研究生院，纽约；由学术出版社在纽约制作并发行，1967。1964年原版的第二次印刷。[15] 帕维尔·埃廷戈夫和奥利维耶·希夫曼。 *Lectures on quantum groups*。数理物理讲义。国际出版社，波士顿，马萨诸塞州，1998。
[16] 阿提夫·哈贾吉和 Lamei Yuan。关于 L-分 dendriform 共形代数。预印本，24页，2025。网址：https: // arxiv.org/abs/2509.07316。[17] 洪延勇和白成明。关于反对称无穷小共形双代数。 *J. Algebra*，586 325 356，2021 10 1016 2021 06 029：–。doi: 。/j.jalgebra. . . .[18] 洪延勇和白成明。关于泊松共形双代数。预印本，30页，2024。网址：https: //arxiv.org/abs/2409.01619。[19] 洪延勇和李芳。左对称共形代数与顶点代数。 *J. Pure Appl. Algebra*，219 8 3543 3567，2015 10 1016 2014 12 012（）：–。doi: 。/j.jpaa. . . .[20] 约翰内斯·许布施曼。泊松上同调与量子化。 *J. Reine Angew. Math.*，408:57–113，1990。doi:10.1515/crll.1990.408.57。[21] 维克多·卡茨。
Vertex algebras for beginners，第10卷，见 *University Lecture Series*。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，第二版，1998。doi:10.1090/ulect/010。[22] 维克多·G·卡茨。形式分布代数与共形代数，I，见 *XIIth International Congress of Mathematical Physics (ICMP '97) (Brisbane)* 80 97 1999 ，第–页。
国际出版社，剑桥，马萨诸塞州，。[23] P. S. 科列斯尼科夫。万有包络泊松共形代数。 *Internat. J. Algebra Comput.*，30 5 1015 10 1142 0218196720500289（）：–1034，2020。doi: 。/S 。[24] P. S. 科列斯尼科夫和 A. A. 涅斯捷连科。诺维科夫-泊松代数的共形包络。 *Sib. Math. J.*，64 3 598 610，2023 64 2023 3，546 561（）：–。西伯利亚数学杂志（），第–期的译文。[25] 马克西姆·孔采维奇。泊松流形的变形量子化。 *Lett. Math. Phys.*，66 216，2003 3 157 10 1023 0000027508 00421（）：–。doi: 。/B:MATH. . .bf。[26] 李海生。顶点算子的局部系统、顶点超代数与模。 *J. Pure Appl. Algebra*，109 2 143 195，1996 10 1016 0022 4049 95 00079 8（）：–。doi: 。/ - （） - 。[27] 刘杰峰和周宏宇。泊松共形代数的上同调与变形量子化。*J. Algebra*，630:92–127，2023。
doi:10.1016/j.jalgebra.2023.03.047。[28] 罗立鹏、洪延勇和吴志祥。李共形代数 W(a,b) 及若干 Schr¨ odinger-Virasoro 型李共形代数有限不可约模的扩张。 *Communications in Algebra*，48 11 4774 4795，2020 10 1080 00927872 2020 1770779（）：–。doi: 。/ . . .[29] 桑德斯·麦克莱恩。哈密顿力学与几何学。
Amer. Math. Monthly，77:570–586，1970。doi: 10.2307/2316733。[30] 安东尼·芒叙。预序森林、紧致词与收缩代数。 *J. Algebra*，411 311，2014 259 10 1016 2014 04 017：–。doi: 。/j.jalgebra. . . .[31] A. 波利什丘克。泊松括号的代数几何。第84卷，第1413–1444页。1997。代数几何，7。doi:10.1007/BF02399197。[32] 苏育才、夏春光和 Lamei Yuan。Block 型李共形代数上共形模的扩张。 *J. Pure Appl. Algebra*，224(5):106232，24，2020。
doi:10.1016/j.jpaa.2019.106232。[33] 苏育才和 Lamei Yuan。Schr ¨ 54 5 053503, 16,
2013 10 1063 1 4803029
odinger-Virasoro 李共形代数。 *J. Math. Phys.*， （）：。doi: 。/ . .[34] 伊祖·魏斯曼。
Lectures on the geometry of Poisson manifolds，第118卷，见 *Progress in Mathematics*。Birkh¨auser Verlag，巴塞尔，1994。doi:10.1007/978-3-0348-8495-2。[35] 伊祖·魏斯曼。
Lectures on symplectic and Poisson geometry 23 *Textos de Matemática. Série* ，第 卷。
B [Texts in Mathematics. Series B]
科英布拉大学数学系，科英布拉，2000。[36] 艾伦·温斯坦。
Lectures on symplectic manifolds 29 *Regional Conference Series in Math-* ，第 卷，
ematics 1977
见。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，。CBMS区域会议系列报告，会议于1976年3月8日至12日在北卡罗来纳大学举行。

[37] Henan Wu 和 Lamei Yuan。与 Virasoro 共形代数相关的若干李共形代数上的有限不可约共形模的分类。 *J. Math. Phys.*, 58(4):041701, 10, 2017。doi:10.1063/ 1.4979619。[38] Xiaoping Xu。诺维科夫-泊松代数。 *J. Algebra*, 190(2):253–279, 1997。doi:10.1006/jabr.1996.6911。[39] Lamei Yuan。Hom Gel'fand-Dorfman双代数与Hom-李共形代数。 *J. Math. Phys.*, 55 4 043507, 17, 2014 10 1063 1 4870870 ( ): . doi: . / . . [40] E. Zelmanov。论共形代数的结构。 *Contemporary Mathematics*, 第139–153页，2000。doi:10.1090/con m/264/04216。[41] E. Zelmanov。共形代数中的幂等元。载于 *Proceedings of the Third International Algebra Conference (Tainan, 2002)* 257 266 2003 ，第–页。 Kluwer Acad. Publ.，多德雷赫特。

Lamei Yuan (corresponding author), School of Mathematics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, People's Republic of China*Email address*: lmyuan@hit.edu.cn

Hao Fang, School of Mathematics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, People'sRepublic of China*Email address*: 23s012028@stu.hit.edu.cn