通过刚性扩张穷尽 $\mathcal{C}(N)$

Jesús Hernández Hernández, Cristhian E. Hidber

摘要

设 N 是亏格至少为 6 的连通闭非定向曲面。在本文中，我们证明存在一个有限子图 $\mathfrak{X}$（Irmak 的有限刚性集 [13]），使得任何图自同态 φ，若其在 $\mathfrak{X}$ 上的限制为（局部）单射，则 $\mathcal{C}(N)$ 上的 φ 由 N 的一个同胚诱导。为证明这一点，我们首先证明 $\mathfrak{X}$ 及其刚性扩张穷尽 $\mathcal{C}(N)$。

关键词：非定向曲面；映射类群；曲线图；刚性扩张 s.

MSC 2020：57K20；20F65。

arXiv:2603.14736v1 [math.GT] 16 Mar 2026

引言

设 N 为亏格至少为 6 的连通闭非定向曲面。近年来，关于 N 研究最多的群之一是其映射类群，该群定义为 N的自同胚的同伦类所构成的群。在可定向情形下，这个群已得到广泛研究（入门资料参见 [5] ），尤其是该群中存在的刚性现象意义重大。为此，主要研究工具之一是曲面的曲线图：给定一个曲面，其曲线图是一个单纯图，顶点为本质简单闭曲线的同伦类，边由不相交性确定（更多详情见小节 1.2）。这一组合对象由 Harvey [6]引入，作为映射类群和 Teichmüller 空间研究背景下的类比物，对应于算术群和齐性空间研究中的 Tits 建筑。

后来，Ivanov [14] 利用可定向曲面的曲线图证明了一个类似于 Margulis 超刚性定理的结果，其关键结论是：在适当的假设下，曲线图的每个自同构都由曲面的一个同胚给出。此结果随后由 Korkmaz [15] 和 Luo [17], 分别推广至低亏格曲面，并由 Atalan-Korkmaz [3], 、Szepietowski [20] 和 Stukow-Szepietowski[19]推广至非定向曲面。

受这些结果的启发，后来出现了若干推广，其核心思路是先证明曲线图的组合刚性结果，再由此证明映射类群的代数刚性结果。这方面的例子包括 Irmak [10] [11] [12],、Behrstock-Margalit [4], 、Shackleton [18], 、Aramayona-Leininger [1] [2] 以及第一作者 [8] [7] [9]的研究。尤其值得关注的是 Aramayona-Leininger[1] 提出的刚性集 概念：若曲面的曲线图中一个由顶点组成的集合 X 满足，任何从 X 到曲线图的局部单射映射都由该曲面某个同胚在 X 上的限制所诱导，则称该集合为刚性的 。第一作者 [7] 将这一定义推广到了更一般的单纯图情形（见小节 1.1）。

在本文中，我们在非定向曲面的背景下证明了一个与第一作者 [9], 的定理 C 相对应的组合刚性结果。

定理 A. 设 N 是亏格为 $g \geq 6$的连通闭非定向曲面，并设$\varphi\colon \mathcal{C}(N) \to \mathcal{C}(N)$是一个图态射。若 $\varphi|_{\mathfrak{X}}$是（局部）单射，则 φ由一个同胚诱导

为了证明这一结果，我们使用刚性扩张和种子图：给定一个单纯连通图 Γ、一个顶点 v 以及一个非空顶点集 A，若 v是唯一一个不属于 A 、但与 A中的每个元素都由一条边相连的顶点，我们就称 A 唯一确定 v ，并将其记为 $v = \langle A \rangle$。给定 Γ的一个导出子图 Λ ，其第一次刚性扩张 是顶点集为 $V(\Lambda) \cup \{v \in V(\Gamma) : (\exists A \subset V(\Lambda)) \quad v = \langle A \rangle\}$的导出子图。由此可以归纳定义第 n次刚性扩张，记为 Λ^n；并将第 ω次刚性扩张定义为顶点集为 $\bigcup_{n<\omega} \Lambda^n$的导出子图。最后，如果 Γ 的每个顶点都是 Λ的某个刚性扩张中的顶点，则称 Λ 为一个种子图 。更多详情见第 1.1 小节；该定义适用于任意可数序数。

为证明定理 A，我们首先证明存在 $\mathcal{C}(N)$ 的有限种子子图 $\mathfrak{Y}$ 。

定理 B。 设 N 是亏格为 $g \geq 6$ 的连通闭非定向曲面。 $\mathcal{C}(N)$ 存在一个有限种子子图 $\mathfrak{Y}$ 。

Usi在此基础上，我们在第 3 节证明 Irmak 的有限刚性集 $\mathfrak{X}$ 也是一个种子子图 .

推论 C。 设 N 是亏格为 $g \geq 6$ 的连通闭非定向曲面。 $\mathcal{C}(N)$ 存在一个有限刚性种子子图 $\mathfrak{X}$ 。

于是，定理 A 由推论 C 以及以下结果得出（其中 Y^ω 表示 Y 的所有有限刚性扩张的并，见小节 1.1）。

推论 （C，[7]）。 设 Γ 是一个连通单纯图， Γ 的 Y 是一个刚性子图，且 $Y^\omega \to \Gamma$: $Y^\omega \to \Gamma$ 是一个图态射，满足 $\varphi|_Y$ 是局部单射。那么， φ 是 Γ 的某个自同构在 Y^ω 上的限制；除 $Aut(\Gamma)$ 中 Y 的逐点稳定子所包含的变换外，该自同构是唯一的。

致谢：第一作者在本文撰写期间获得了研究项目资助，项目编号为 UNAM-PAPIIT IA104620、IN102018 和 IN114323。第二作者获得了 CONACYT 博士后奖学金以及 UNAM-PAPIIT- IN105318 的资助。两位作者在本文撰写期间均获得了 CONACYT 2019 年前沿科学研究项目 CF2019 217392 的资助。

1 预备知识

本节介绍本文所需的术语和结果，涉及单纯图背景下的刚性扩张、非定向曲面的曲线图，以及用于描述非定向曲面的不同模型。最后，我们介绍子图$\mathfrak{Y}$ 以及一些辅助曲线，它们构成了下一节证明的基础。

1.1 刚性扩张

设 Γ 是一个连通单纯图。我们将其顶点集记为 $V(\Gamma)$，边集记为$E(\Gamma)$。

若 $v \in V(\Gamma)$，我们用 $\mathrm{adj}_\Gamma(v)$ 表示 Γ 中所有与 v 相邻的顶点组成的集合，即该集合为

$$\mathrm{adj}_\Gamma(v) := \{w \in V(\Gamma) : \{v, w\} \in E(\Gamma)\}.$$

设 $v \in V(\Gamma)$ 和 $A \subset V(\Gamma)$。若 v 是由 A 唯一确定的，记作 $v = \langle A \rangle$，则它是 Γ 中唯一一个与 A 中所有顶点都相邻的顶点，即

$$\{v\} = \bigcap_{w \in A} \mathrm{adj}_\Gamma(w).$$

回顾一下，若 Λ 是 Γ 的导出子图，则当且仅当 $V(\Lambda) \subset V(\Gamma)$ 和 $v,\ w \in V(\Lambda)$ 在 Λ 中构成一条边时，它们在 Γ 中也构成一条边。我们用 $\Lambda \leq \Gamma$ 表示 Λ 是 Γ 的导出子图。此后，我们始终假设任何子图都是导出子图。

若 $\Lambda \leq \Gamma$，我们将其定义为自身的零阶刚性扩张，并记作 Λ^0。然后，对于任意可数序数 α，我们归纳地定义 Λ 的 α阶刚性扩张，记作 Λ^α，如下:

1。若 α 是序数 β 的后继序数，则 Λ^α 是 Γ 的子图，其顶点集为 :

$$V(\Lambda^\alpha) := V(\Lambda^\beta) \cup \{v \in V(\Gamma) : (\exists A \subset V(\Lambda^\beta))\ \ v = \langle A \rangle\}.$$

2. 若 α 是极限序数，则 Λ^α 是 Γ 的子图，其顶点集为:

$$V(\Lambda^\alpha) := \bigcup_{\beta<\alpha} V(\Lambda^\beta).$$

设 $\Lambda \leq \Gamma$。如果 Γ 中的每个顶点都是 Λ 的某个刚性扩张中的顶点，即 $V(\Gamma) = \bigcup_{\alpha<\omega_1} V(\Lambda^\alpha)$。，则称 Λ 为种子子图 。

下面我们介绍一种证明子图 Λ 是 Γ 的种子子图的方法。这种方法基于第一作者 [8] 为可定向曲面的曲线图所采用的技巧。

设 G 是一个通过自同构作用于 Γ 的群，并设 $\mathcal{G}$ 是 G 的对称生成集。

引理 1.1. 设 $\Lambda \leq \Gamma$。假设存在一个可数序数 α，使得对所有 $g \in \mathcal{G}$ 和所有 $v \in V(\Lambda)$，都有 $g \cdot v \in V(\Lambda^\alpha)$。那么，对所有 $w \in V(\Lambda^1)$ 和所有 $g \in \mathcal{G}$，都有 $g \cdot w \in V(\Lambda^{1+\alpha})$。

证明。设 $w \in V(\Lambda^1)$。若 $w \in V(\Lambda)$，则结论成立。若 $w \notin V(\Lambda)$，则存在一个子集 $A \subset V(\Lambda)$，使得 $w = \langle A \rangle$。

由于 G 通过自同构作用，因此对于任意 $g \in G$，都有 $g \cdot w = \langle g \cdot A \rangle$。

若 $g \in \mathcal{G}$，根据假设，我们有 $g \cdot A \subset V(\Lambda^\alpha)$。因此，如所需，$g \cdot w \in V(\Lambda^{1+\alpha})$。 □

利用归纳法以及刚性扩张的定义方式，我们得到以下推论。

推论 1.2. 令 $\Lambda \leq \Gamma$。假设存在一个可数序数 α，使得对于所有 $g \in \mathcal{G}$ 和所有 $v \in V(\Lambda)$，都有 $g \cdot v \in V(\Lambda^\alpha)$。那么，对于任意可数序数 β，对于所有 $w \in V(\Lambda^\beta)$ 和所有 $g \in \mathcal{G}$，都有 $g \cdot w \in V(\Lambda^{\beta+\alpha})$。

若以 $|g|_{\mathcal{G}}$ 表示 $g \in G$ 与其单位元 e 之间关于由 $\mathcal{G}$ 诱导的词度量的距离，那么应用推论 1. $2|g|_{\mathcal{G}}$ 次即可得到以下结果。

引理 1.3. 令 $\Lambda \leq \Gamma$。假设存在一个可数序数 α，使得对于所有 $g \in \mathcal{G}$ 和所有 $v \in V(\Lambda)$，都有 $g \cdot v \in V(\Lambda^\alpha)$。那么，对于任意 $g \in G \setminus \{e\}$ 以及任意 $v \in V(\Lambda^\beta)$，都有 $g \cdot v \in V(\Lambda^{\beta+\alpha \cdot |g|_{\mathcal{G}}})$。特别地，$G \cdot v \subset V(\Lambda^{\beta+\alpha \cdot \omega})$。

由此可直接得出以下定理。

定理 1.4. 令 $\Lambda \leq \Gamma$，并令 $\{v_i\}_{i \in I}$ 为 $G \backslash \Gamma$ 的一组代表元。假设存在一个可数序数 α，使得对于所有 $g \in \mathcal{G}$ 以及所有 $v \in V(\Lambda)$，均有 $g \cdot v \in V(\Lambda^\alpha)$。若对于每个 $i \in I$，都存在一个可数序数 β_i，使得 $v_i \in V(\Lambda^{\beta_i})$，则 Λ 是 Γ 的种子子图。

1.2 曲线图

我们将亏格为 g 的闭非定向曲面记为 N_g。令 $N = N_g$，其中 $g \geq 6$。

曲线是从单位圆到 N 的拓扑嵌入。我们常常不严格地区分“曲线”指的是该嵌入、它在 N 上的像，还是它的同伦类。具体所指可由上下文判断。

如果一条曲线不同伦于边界曲线，且它不围成圆盘、带孔圆盘或莫比乌斯带，则称其为本质的。除非另有说明，所有曲线都假定为本质的。

两个本质曲线同伦类 α 和 β 的（几何）交数定义如下：

$$i(\alpha, \beta) := \min\{|a \cap b| : a \in \alpha, b \in \beta\}.$$

若曲线 α 使 $N \setminus \alpha$ 不连通，则称其为分离曲线；否则称其为非分离曲线。

如果曲线 α 的正则邻域同胚于莫比乌斯带，则称其为单侧曲线；否则称其为双侧曲线。

N 的曲线图 定义为一个单纯图，其顶点是 N 上本质曲线的同伦类；若 $i([\alpha], [\beta]) = 0$，则顶点 $[\alpha]$ 和 $[\beta]$ 之间有一条边。

1.3 N_g 的模型及子图 $\mathfrak{Y} \leq \mathcal{C}(N)$

设 H 和 H' 是一对 $2g$ 边形，其边分别标记为（a_1, e_1, ..., a_g, e_g）和（a'_1, e'_1, ..., a'_g, e'_g）。然后，我们将 P 定义为：

$$P := H \sqcup H' / \sim,$$

其中，$\sim$是将边 e_i 与 e'_i 粘合得到的，对所有 i均如此。注意，P 同胚于一个亏格为零且有 g 个边界分支的曲面。

最后，我们将 N 定义为 $P/\sim$，其中 $\sim$ 现在是将边 a_i^{-1}与 a'_i 粘合得到的，对所有 i均如此。因此，N 同胚于 N_g。

现在，我们定义构成 $\mathfrak{Y}$ 的顶点的曲线：

- 设 $1 \leq i, j \leq g$。我们将 $a_{i,j}$ 和 $a'_{i,j}$ 分别定义为端点为 (a_i, e_j) 和 (a'_i, e'_j) 的线段。然后，我们将曲线 $\alpha_{i,j}$ 定义为通过投影 $a_{i,j} \cup a'_{i,j}$ 在 N 中得到的曲线。见图1。注意，$\alpha_{i,j}$ 始终是单侧的。

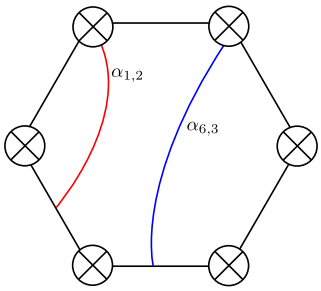


图1：红色的曲线 $\alpha_{1,2}$ 和蓝色的曲线 $\alpha_{6,3}$。

- 令 $1 \leq i, j \leq g$，模 g 下取 $|i-j| \geq 2$。我们将 $n^+_{i,j}$ 定义为H上的一对线段，一条从 e_i 延伸至 e_{j-1}，另一条从 e_{i-1} 延伸至 e_j。我们将 $(n^+)'_{i,j}$ 定义为 H'上的一对线段，一条从 e'_i 延伸至 e'_{i-1}，另一条从 e'_{j-1} 延伸至 e'_j。我们将$\nu^+_{i,j}$ 定义为 N 中的曲线，它是通过投影 $n^+_{i,j} \cup (n^+)'_{i,j}$得到的。参见图2。注意，$\nu^+_{i,j}$ 始终是双侧的。

• 令 $1 \le i, j \le g$，模 g 下取 $|i-j| \ge 2$。我们将 $n^-_{i,j}$ 定义为H'上的一对线段，一条从 e'_i 延伸至 e'_{j-1}，另一条从 e'_{i-1} 延伸至 e'_j。我们将 $(n^-)'_{i,j}$ 定义为 H上的一对线段，一条从 e_i 延伸至 e_{i-1}，另一条从 e_{j-1} 延伸至 e_j。我们将$\nu^-_{i,j}$ 定义为 N 中的曲线，它是通过投影 $n^-_{i,j} \cup (n^-)'_{i,j}$得到的。参见图2。注意，$\nu^-_{i,j}$ 始终是双侧的。

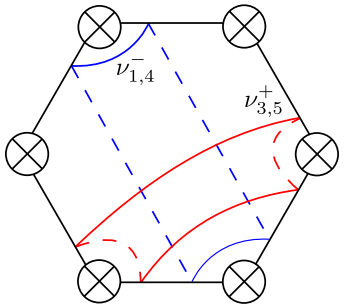


图2：红色曲线 $\nu^+_{3,5}$ 和蓝色曲线 $\nu^-_{1,4}$。

注意，$\alpha_{i,i}$ 和$\alpha_{i,i-1}$ 同伦。因此，为了简化记号，我们将 α_i 定义为$\alpha_{i,i}$ （与$\alpha_{i,i-1}$同伦）。

我们定义集合 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{M}$ 如下（下标以 g 为模）：

$$\mathcal{A} := \{\alpha_{i,i+1}\}_{1\le i\le g} \cup \{\alpha_{i,i-2}\}_{1\le i\le g},$$

$$\mathcal{M} := \{\nu^-_{5,7}\}.$$

最后，我们将 $\mathfrak{Y}$ 定义为 $\mathcal{C}(N)$ 的子图，其顶点集为 $\mathcal{A} \cup \mathcal{M}$。

1.4 有用的附加曲线

在本小节中，我们唯一确定了若干条曲线，它们对于证明定理 B 非常有用。

1.4.1 曲线$\varepsilon_{i,\ j}$ 和集合 $\mathcal{E}$

设 $1 \le i,\ j \le g$。我们将$e_{i,\ j}$ 和$e'_{i,\ j}$ 分别定义为端点为$(e_i,\ e_j)$和$(e'_i,\ e'_j)$的线段。接着，我们将曲线$\varepsilon_{i,\ j}$ 定义为 N 中由投影$e_{i,\ j} \cup e'_{i,\ j}$得到的曲线。见图3。注意，$\varepsilon_{i,\ j}$ 始终是双侧的。

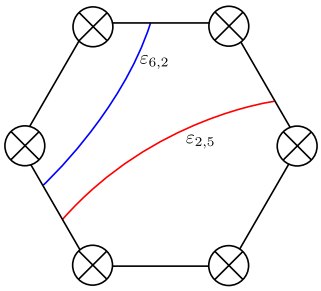


图3：红色的曲线$\varepsilon_{2,\ 5}$ 和蓝色的曲线$\varepsilon_{6,\ 2}$。

Lemma 1.5. 对于所有 $1 \le i,\ j \le g$ 使得 $\varepsilon_{i,\ j}$ 是本质的，我们有 $\varepsilon_{i,\ j} \in V(\mathfrak{Y}^1$).

证明。 如果 $|i-j|\leq 1$，那么 $\varepsilon_{i,\ j}$ 不是本质的。因此，我们假设 $|i-j|\geq 2$。我们定义以下集合：

$$A_1=\{\alpha_{i+1,i+2},\dots,\alpha_{j-1,j}\},$$
$$A_2=\{\alpha_{j,j-2},\dots,\alpha_{i+2,i}\},$$
$$A_3=\{\alpha_{j+1,j+2},\dots,\alpha_{i-1,i}\},$$
$$A_4=\{\alpha_{i,i-2},\dots,\alpha_{j+2,j}\}.$$

于是我们得到 $\varepsilon_{i,j}=\langle A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4\rangle\in V(\mathfrak{Y}^1)$。见图4。 □

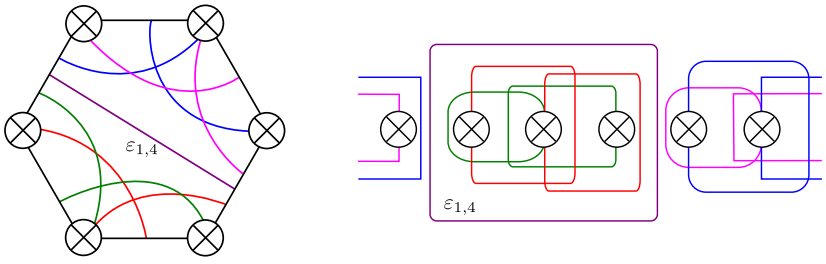


图4：紫色的曲线 $\varepsilon_{1,4}$ 。

鉴于它的实用性，我们定义如下集合：

$$\mathcal{E}:=\{\varepsilon_{i,i+2}\}_{1\leq i\leq g}\subset V(\mathfrak{Y}^1).$$

全文中我们都会充分使用这个集合。

1.4.2 曲线 α_i

这里我们证明以下引理：

引理 1.6。 对于所有 $1\leq i\leq g$，我们有 $\alpha_i\in V(\mathfrak{Y}^1)$ 。

证明。 固定 $1\leq i\leq g$ 。我们定义以下集合：

$$A_1=\{\alpha_{i+1,i+2},\dots,\alpha_{i-2,i-1}\},$$
$$A_2=\{\alpha_{i-1,i-3},\dots,\alpha_{i+2,i}\}.$$

于是， $\alpha_i=\langle A_1\cup A_2\rangle\in V(\mathfrak{Y}^1)$。参见图5。 □

1.4.3 曲线 μ_i^1

在本小小节中，我们为 $1\leq i\leq g$ 定义曲线族 μ_i^1 。之所以有上标 1，是因为这些曲线最终会成为稍大曲线族 $\{\mu_i^m$ 的一部分： $1\leq i\leq g$， $1\leq m\leq 2\}$（参见第2.2.1小小节）。

对于 $1\leq i\leq g$，我们按如下方式定义 μ_i^1：令

$$E_1=\mathcal{E}\setminus\{\varepsilon_{i-3,i-1},\varepsilon_{i-2,i},\varepsilon_{i-1,i+1},\varepsilon_{i,i+2}\}\subset V(\mathfrak{Y}^1)$$
$$E_2=\{\varepsilon_{i-2,i+1}\}\subset V(\mathfrak{Y}^1),$$
$$A_1=\{\alpha_{i,i+1},\alpha_{i,i-2}\}\subset V(\mathfrak{Y}),$$
$$A_2=\{\alpha_j\}_{j\neq i}\subset V(\mathfrak{Y}^1).$$

那么， $\mu_i^1:=\langle E_1\cup E_2\cup A_1\cup A_2\rangle\in V(\mathfrak{Y}^2)$。见图6。

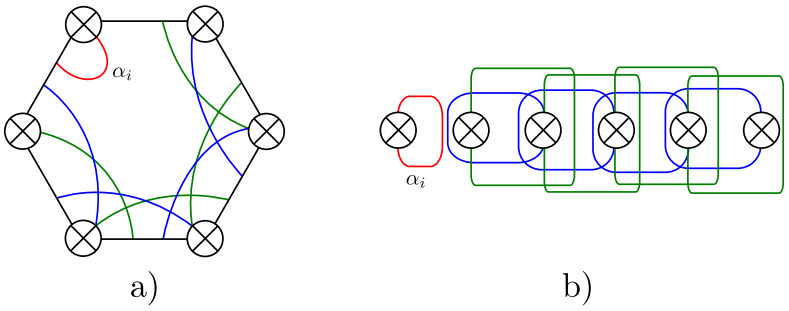


图5：红色的曲线 α_1。

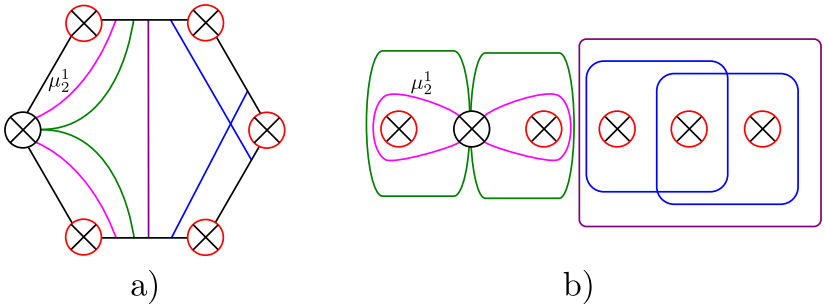


图6：集合 A_1 中的绿色曲线、集合 A_2 中的红色曲线、集合 E_1 中的蓝色曲线，以及集合 E_2 中的紫色曲线。这些曲线唯一确定曲线 μ_2^1。

1.4.4 曲线$\alpha_{i,\ j}$

引理 1.7。对于所有 $1 \le i$、$j \le g$，我们都有 $\alpha_{i,\ j} \in V\ (\mathfrak{Y}^3)$。

证明。固定 $1 \le i,\ j \le g$。如果 $j \in \{i-2, i-1, i, i+1\}$，那么 $\alpha_{i,\ j}$ 要么与 α_i 同伦，要么是 $\mathcal{A}$ 的一个元素。因此，$\alpha_{i,\ j} \in V\ (\mathfrak{Y}^1)$。

否则，我们定义以下集合：

$$E_1 = \{\varepsilon_{i,i+2}, \dots, \varepsilon_{j-2,j}\} \subset V(\mathfrak{Y}^1)$$

$$E_2 = \{\varepsilon_{j,j+2}, \dots, \varepsilon_{i-3,i-1}\} \subset V(\mathfrak{Y}^1)$$

$$E_3 = \{\varepsilon_{i,j}, \varepsilon_{i-1,j}\} \subset V(\mathfrak{Y}^1),$$

$$A = \{\alpha_j\}_{i \ne j} \subset V(\mathfrak{Y}^1),$$

$$M = \{\mu_i^1\} \subset V(\mathfrak{Y}^2).$$

于是，我们有 $\alpha_{i,\ j} = \langle E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup A \cup M \rangle \in V\ (\mathfrak{Y}^3)$。见图7。 □

1.4.5 曲线$\nu_{i,\ j}^{\pm}$

引理 1.8. 对于所有满足 $|i-j| \ge 2$（模 g）的 $1 \le i, j \le g$，我们有$\nu_{i,\ j}^{+}, \nu_{i,\ j}^{-} \in V\ (\mathfrak{Y}^6)$。

证明。设 $1 \le i,\ j \le g$ 满足 $|i-j| \ge 2$（模 g）。一般而言，我们证明 $\nu_{i,\ j}^{\pm}$ 由集合 $A(i,\ j) \subset V(\mathfrak{Y}^1)$ 和一条辅助曲线 ν 唯一确定。前者仅取决于 i，j，后者还取决于 $\nu_{i,\ j}^{\pm}$ 的符号。因此，我们描述集合 $A(i,\ j)$，然后用一张表指出 ν 是哪条曲线。

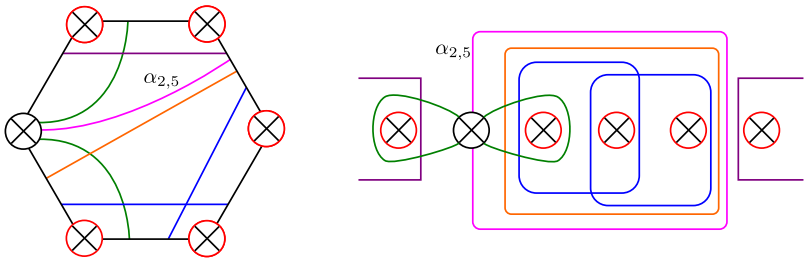


图7：集合 A 中的曲线为红色，集合 E_1 中的曲线为蓝色，集合 E_2 中的曲线为紫色，集合 E_3 中的曲线为橙色，集合 M 中的曲线为绿色。这些曲线唯一确定了集合$\alpha_{2,\ 5}$ 中呈品红色的曲线。

我们将 $A(i,\ j)$ 定义如下：

$$A(i,\ j)\vDash (\mathcal{E}\setminus\{\varepsilon_{i-2,i},\varepsilon_{i-1,i+1},\varepsilon_{j-2,j},\varepsilon_{j-1,j+1}\})\cup\{\varepsilon_{i,j-1},\varepsilon_{i-1,j}\}\cup\{\alpha_k : 1\le k\le g\}\subset V(\mathfrak{Y}^1)$$

在定义 ν 之前，我们需要先给出以下定义，以便于阐述。

令 $\mathfrak{i}\colon\{1,\dots,g\}\to\mathbb{S}^1$ 定义为 $k\mapsto\exp(\frac{2k\pi\sqrt{-1}}{g})$。再令 $1\le i,\ j,\ x,\ y\le g$，其中$|i-j|\ge 2$(模 g)。如果 x和 y位于 i和 j的不同侧，则称它们位于不同侧；也就是说，$\mathfrak{i}(x)$ 和 $\mathfrak{i}(y)$ 位于 $\mathbb{S}^1\setminus\{\mathfrak{i}(i)\ \mathfrak{i}(j)\}$的不同连通分支中；记作 $\{x,y\}\ idsf\ \{i,j\}$。

We 描述表 1 中的曲线 ν，以及 $\nu_{i,\ j}^{\pm}$ 所属的刚性扩张 s:

$\nu_{i,j}^{\pm}$	曲线 ν	m 用于 $\nu_{i,\ j}^{\pm}\in V(\mathfrak{Y}^m)$
$\nu_{i,6}^{+}$	$\nu_{5,7}^{-}$	2
$\nu_{i,j}^{-}$ 与 $i\neq 6\neq j$	$\nu_{k,6}^{+}$ 与 $\{k,6\}\ idsf\ \{i,j\}$	3
$\nu_{i,j}^{+}$ 与 $\{i,j\}\neq\{5,7\}$	$\nu_{k,l}^{-}$ 与 $\{k,l\}\ idsf\ \{i,j\}$和 $k\neq 6\neq l$	4
$\nu_{i,6}^{-}$	$\nu_{k,l}^{+}$ 与 $\{k,l\}\ idsf\ \{i,j\}$和 $\{k,l\}\neq\{5,7\}$	5
$\nu_{5,7}^{+}$	$\nu_{k,l}^{-}$ 与 $\{k,l\}\ idsf\ \{5,7\}$	6

表 1：曲线 ν 是唯一确定$\nu_{i,j}^{\pm}$所需的曲线。

参见图 8。因此，$\nu_{i,\ j}^{\pm}\in V(\mathfrak{Y}^6)$。 □

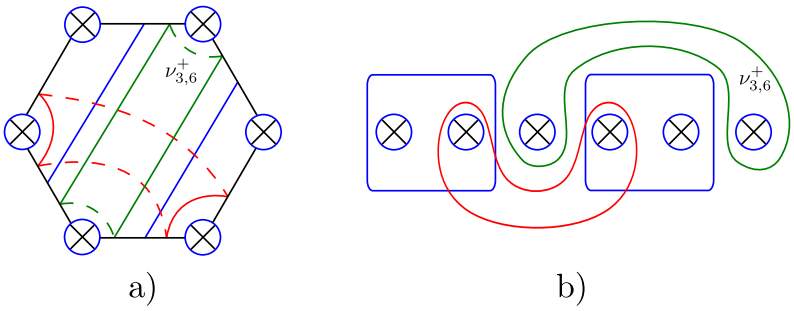


图 8：集合 $A(i,j)$ 中的蓝色曲线，以及红色曲线$\nu=\nu_{2,4}^{-}$。这些曲线唯一确定了绿色曲线$\nu_{3,6}^{+}$。

2 使用生成元对 $\mathfrak{Y}$ 进行变换

本节回顾 Szepietowski 为 Mod(N) 给出的生成集（见 [21]），并指出，将该生成集对称化后，$\mathfrak{Y}$ 经生成集中的元素任意平移所得的结果，都包含在某个 $\mathfrak{Y}$ 的刚性扩张中（见引理 2.2、2.3、2.11 和 2.20）。最后这一部分是为了应用引理 1.3。

2.1 Szepietowski 生成集

在 [21]，的定理 3 中，Szepietowski 给出了 Mod(N) 的一个生成集；不过，要介绍它，我们需要定义一些曲线和记号。

给定一条双侧曲线 α，我们用 τ_α 表示沿 α 的（右）德恩扭转。

设 K 是嵌入在 N 中、边界曲线为 η 的一个克莱因瓶。由于 $N = N_g$ 与 $g \geq 5$，我们有 η 总是本质的。我们用 y_K 表示在 K 中引入的 Y-同胚，该同胚在 N 的补集中延拓为恒等映射。注意，$y_K^2 = \tau_\eta$。描述 y_K 的另一种方式是说， y_K 是将 K 中一个交叉帽滑动到另一个交叉帽上的交叉帽滑动。见图 9。

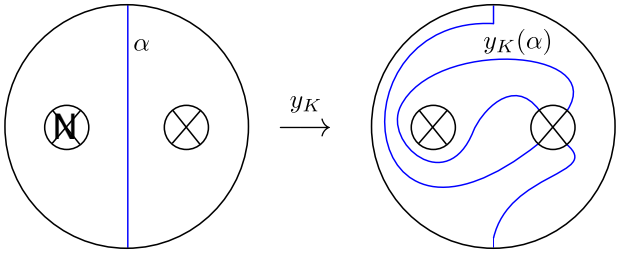


图 9：Y-同胚。

对于每个 $1 \leq i \leq g$，我们将 c_i 和 c_i' 定义为端点分别为 (a_i, a_{i+1}) 和 (a_i', a_{i+1}') 的线段（下标按模 g 计算）。然后，我们将曲线 γ_i 定义为通过投影 $c_i \cup c_i'$在N 中得到的曲线。见图10。注意， γ_i 始终是双侧的。

令 b 为 H 中的线段，其端点为 $((e_g)_+,(e_4)_-)$，其中 $(\cdot)_-$ 表示相应线段的起点，$(\cdot)_+$ 表示相应线段的终点。然后，我们将曲线β 定义为通过投影 $e_1 \cup e_2 \cup e_3 \cup b$在 N 中得到的曲线。见图10。注意， β 是一条双侧曲线。

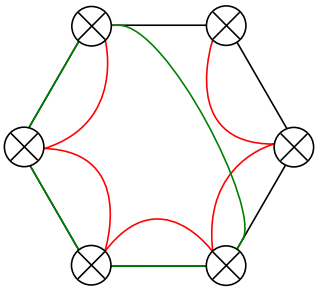


图10：红色的曲线 $\gamma_1, \ldots, \gamma_5$，以及绿色的曲线 β。

Szepietowski 证明了以下结果，现以 $g \geq 5$ 为背景并采用我们的记号表述如下:

定理 2.1（见 [21]）。设 K 是由 $\varepsilon_{g-2,\ g}$ 界定的克莱因瓶，$y = y_K$ 是相应的 Y-同胚。若 $g \geq 5$，则集合

$$C = \{\tau_{\gamma_i} : 1 \leq i \leq g-1\} \cup \{\tau_\beta\} \cup \{y\},$$

是$\mathrm{Mod}(N_g)$的生成集。

我们将 $\mathcal{G}$ 定义为由 C得到的 $\mathbf{Mod}(N)$ 的对称生成集。

2.2 $\tau_{\gamma_i}^{\pm 1}(\mathfrak{Y}) \subset \mathfrak{Y}^{11}$

在本小节中，我们证明以下引理。

引理 2.2. 对于所有 $1 \leq i \leq g-1$，我们有 $\tau_{\gamma_i}^{\pm 1}(\mathcal{A}) \subset V(\mathfrak{Y}^8)$。

引理 2.3. 对于所有 $1 \leq i \leq g-1$，我们有 $\tau_{\gamma_i}^{\pm 1}(\mathcal{M}) \subset V(\mathfrak{Y}^{11})$。

鉴于这些证明篇幅较长，我们为每个证明单独安排一个小小节。

2.2.1 引理 2.2 的证明

鉴于 $\tau_{\gamma_i}^{\pm 1}(\alpha_{j,\ k}) = \alpha_{j,\ k}$若 $i(\alpha_{j,\ k},\ \gamma_i) = 0$，要证明引理 2.2，我们只需验证 $\tau_{\gamma_i}^{\pm 1}(\alpha_{i+1,\ i+2})$、$\tau_{\gamma_i}^{\pm 1}(\alpha_{i,\ i+1})$、$\tau_{\gamma_i}^{\pm 1}(\alpha_{i-1,\ i})$、$\tau_{\gamma_i}^{\pm 1}(\alpha_{i,\ i-2})$、$\tau_{\gamma_i}^{\pm 1}(\alpha_{i+1,\ i-1})$、$\tau_{\gamma_i}^{\pm 1}(\alpha_{i+2,\ i}) \in V(\mathfrak{Y}^6)$。然而，要做到这一点，我们需要若干条辅助曲线和若干个引理。

令 $1 \leq j \leq g$ 固定，并令

$$E = (\mathcal{E} \setminus \{\varepsilon_{j-3,j-1}, \varepsilon_{j-2,j}, \varepsilon_{j-1,j+1}, \varepsilon_{j,j+2}, \varepsilon_{j+1,j+3}\}) \cup \{\varepsilon_{j-2,j+2}\} \subset V(\mathfrak{Y}^1),$$

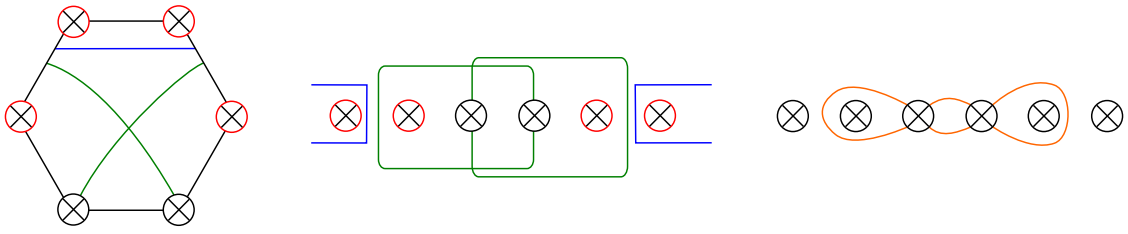
$$A_1 = \{\alpha_k : k \neq j, j+1\} \subset V(\mathfrak{Y}^1),$$

$$A_2 = \{\alpha_{j,j+2}, \alpha_{j+1,j-2}\} \subset V(\mathfrak{Y}^3).$$

然后我们将 μ_j^2 定义如下：

$$\mu_j^2 := \langle E \cup A_1 \cup A_2 \rangle \in V(\mathfrak{Y}^4).$$

见图 11。



a) b) c)

图 11：（a）和（b）展示了从两个角度观察的曲线，这些曲线对于唯一确定 μ_j^2是必要的；μ_j^2显示于（c）中。

引理2.4。对于所有 $1 \leq i \leq g-1$，都有 $\tau_{\gamma_i}^{\pm 1}(\alpha_{i+1,\ i+2})$、$\tau_{\gamma_i}^{\pm 1}(\alpha_{i,\ i-2}) \in V(\mathfrak{Y}^5)$。

证明。 要证明 $\tau_{\gamma_i}(\alpha_{i+1,\ i+2}) \in V(\mathfrak{Y}^5)$，令

$$E = (\mathcal{E} \setminus \{\varepsilon_{i-2,i}, \varepsilon_{i-1,i+1}, \varepsilon_{i,i+2}, \varepsilon_{i+1,i+3}\}) \cup \{\varepsilon_{i-1,i+2}\} \subset V(\mathfrak{Y}^1),$$

$$A_1 = \{\alpha_k : k \neq i, i+1\} \subset V(\mathfrak{Y}^1),$$

$$A_2 = \{\alpha_{i+1,i+2}, \alpha_{i+1,i-1}\} \subset V(\mathfrak{Y}),$$

$$M = \{\mu_i^2\} \subset V(\mathfrak{Y}^4).$$

于是有 $\tau_{\gamma_i}(\alpha_{i+1,\ i+2}) = \langle E \cup A_1 \cup A_2 \cup M \rangle \in V(\mathfrak{Y}^5)$；见图12。类似地，还有 $\tau_{\gamma_i}^{-1}(\alpha_{i,\ i-2}) \in V(\mathfrak{Y}^5)$。

由于 $\tau_{\gamma_i}^{-1}(\alpha_{i+1,\ i+2}) = \alpha_{i,\ i+2}$，因此有 $\tau_{\gamma_i}^{-1}(\alpha_{i+1,\ i+2}) \in V(\mathfrak{Y}^3)$。类似地，还有 $\tau_{\gamma_i}(\alpha_{i,\ i-2}) \in V(\mathfrak{Y}^3)$。 □

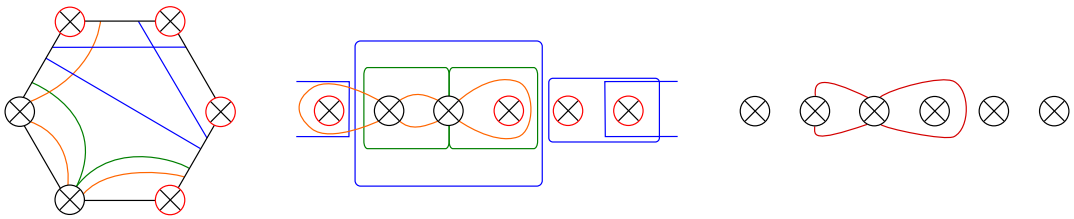


图12：（a）和（b）展示了用于唯一确定 $\tau_{\gamma_i}(\alpha_{i+1,\ i+2})$ 的曲线（从两个角度观察），该曲线展示于（c）中。

对于固定的 $1 \leq i \leq g$，我们定义如下辅助曲线：

$$E = (\mathcal{E} \setminus \{\varepsilon_{i-3,i-1}, \varepsilon_{i-2,i}, \varepsilon_{i-1,i+1}, \varepsilon_{i,i+2}\}) \cup \{\varepsilon_{i-2,i+1}\} \subset V(\mathfrak{Y}^1),$$

$$A_1 = \{\alpha_k : k \neq i, i+1\} \subset V(\mathfrak{Y}^1),$$

$$A_2 = \{\alpha_{i,i-2}, \alpha_{i,i+1}\} \subset V(\mathfrak{Y}),$$

$$M = \{\mu_i^2\} \subset V(\mathfrak{Y}^4).$$

然后我们定义 $\varkappa_i^1 := \langle E \cup A_1 \cup A_2 \cup M \rangle \in V(\mathfrak{Y}^5)$。注意，$\varkappa_i^1 = \tau_{\gamma_i}^{-1}(\alpha_{i,\ i-2})$。

另一方面，我们现在验证，对于所有 $1 \leq i \leq g$, $\gamma_i \in V(\mathfrak{Y}^3)$。

引理 2.5。 对于所有 $1 \leq i \leq g$，我们有 $\gamma_i \in V(\mathfrak{Y}^5)$。

证明。 固定 $1 \leq i \leq g$。我们定义以下集合：

$$E = \mathcal{E} \setminus \{\varepsilon_{i-2,i}, \varepsilon_{i,i+2}\} \subset V(\mathfrak{Y}^1),$$

$$A = \{\alpha_k : k \neq i, i+1\} \subset V(\mathfrak{Y}^1),$$

$$M = \{\mu_i^2\} \subset V(\mathfrak{Y}^4).$$

那么 $\gamma_i = \langle E \cup A \cup M \rangle \in V(\mathfrak{Y}^5)$。见图 13。 □

利用这个引理，我们现在可以定义以下辅助曲线。令

$$C = \{\gamma_i : 1 \leq i \leq g\}.$$

然后我们定义 $\eta := \langle C \rangle \in V(\mathfrak{Y}^6)$。见图 14。

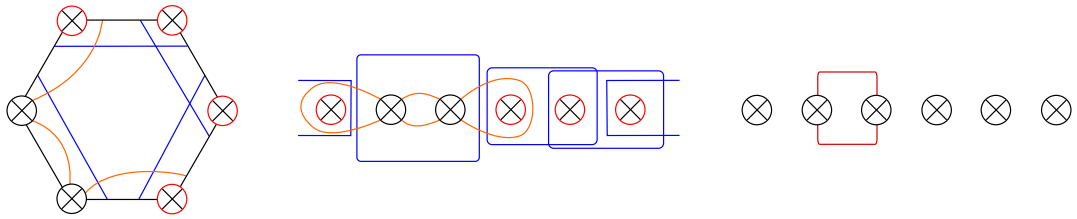
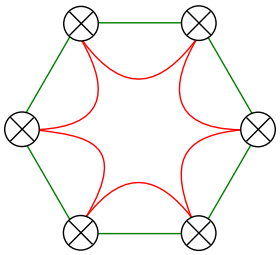


图 13：(a) 和 (b) 展示了唯一确定 γ_i 所需的曲线（从两个角度观察），γ_i 则展示于 (c) 中。



C 中的曲线为红色，曲线 $\eta = \langle C \rangle$ 为绿色（见图 14）。

引理 2.6. 对于所有 $1 \le i \le g-1$，我们有 $\tau_{\gamma_i}^{\pm 1}(\alpha_{i,i+1})$，$\tau_{\gamma_i}^{\pm 1}(\alpha_{i+1,i-1}) \in V(\mathfrak{Y}^8)$。

证明。设 $1 \le i \le g-1$ 固定。首先，我们定义一条辅助曲线：

$$E = (\mathcal{E} \setminus \{\varepsilon_{i-3,i-1}, \varepsilon_{i-2,i}, \varepsilon_{i-1,i+1}, \varepsilon_{i,i+2}\}) \cup \{\varepsilon_{i-2,i+1}\} \subset V(\mathfrak{Y}^1),$$

$$A = \{\alpha_k : k \neq i-1, i, i+1\} \subset V(\mathfrak{Y}^1),$$

$$K = \{\varkappa_i^1, \eta\} \subset V(\mathfrak{Y}^6).$$

利用这些集合，我们定义 $\gamma_i' := \langle E \cup A \cup K \rangle \in V(\mathfrak{Y}^7)$。见图 15。

现在，为了证明该引理，我们定义以下集合：

$$E = \mathcal{E} \setminus \{\varepsilon_{i-2,i}, \varepsilon_{i,i+2}\} \subset V(\mathfrak{Y}^1),$$

$$A = \{\alpha_k : k \neq i, i+1\} \subset V(\mathfrak{Y}^1),$$

$$C = \{\gamma_i'\} \subset V(\mathfrak{Y}^7).$$

于是，我们有 $\tau_{\gamma_i}(\alpha_{i,i+1}) = \langle E \cup A \cup C \rangle \in V(\mathfrak{Y}^8)$。见图 16。类似地，我们有 $\tau_{\gamma_i}^{-1}(\alpha_{i+1,i-1}) \in V(\mathfrak{Y}^8)$。

由于 $\tau_{\gamma_i}^{-1}(\alpha_{i,\ i+1}) = \alpha_{i+1}$，因此有 $\tau_{\gamma_i}^{-1}(\alpha_{i,\ i+1}) \in V(\mathfrak{Y}^1)$。类似地，有 $\tau_{\gamma_i}(\alpha_{i+1,\ i-1}) \in V(\mathfrak{Y}^1)$。 □

引理 2.7。 对于所有 $1 \le i \le g-1$，有 $\tau_{\gamma_i}^{\pm 1}(\alpha_{i-1,\ i})$，$\tau_{\gamma_i}^{\pm 1}(\alpha_{i+2,\ i}) \in V(\mathfrak{Y}^5)$。

*Pro*关于。令 $1 \le i \le g-1$ 固定。首先，我们为每个 $1 \le j \le g$定义一条辅助曲线：

$$E = (\mathcal{E} \setminus \{\varepsilon_{j-3,j-1}, \varepsilon_{j-2,j}, \varepsilon_{j-1,j+1}, \varepsilon_{j,j+2}, \varepsilon_{j+1,j+3}\}) \cup \{\varepsilon_{j-2,j+2}\} \subset V(\mathfrak{Y}^1),$$

$$A_1 = \{\alpha_k : k \neq j, j+2\} \subset V(\mathfrak{Y}^1),$$

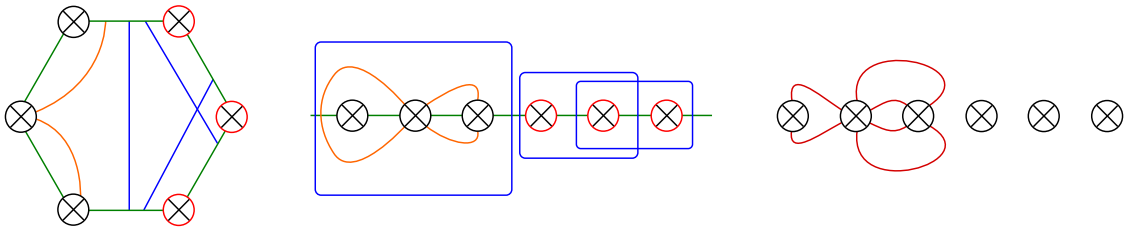


图 15：(a) 和 (b) 展示了唯一确定 γ_i'（进而唯一确定 $\tau_{\gamma_i}(\alpha_{i,\ i+1})$）所需的曲线（从两个角度观察），而 $\tau_{\gamma_i}(\alpha_{i,\ i+1})$ 展示于 (c) 中。

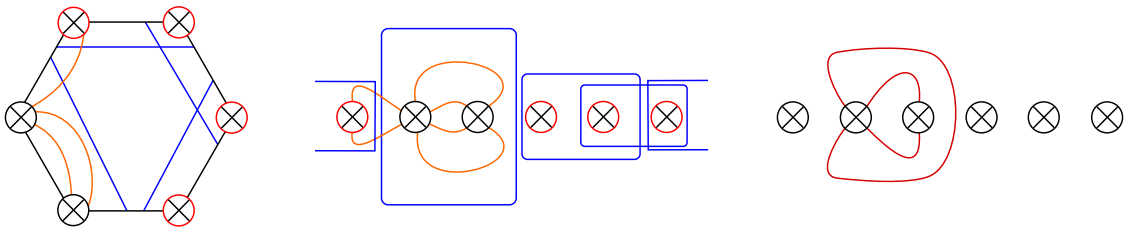


图 16：(a) 和 (b) 展示了唯一确定 $\tau_{\gamma_i}(\alpha_{i,\ i+1})$ 所需的曲线（从两个角度观察），而 $\tau_{\gamma_i}(\alpha_{i,\ i+1})$ 展示于 (c) 中。

$$A_2 = \{\alpha_{j,j-2}, \alpha_{j,j+2}\} \subset V(\mathfrak{Y}^3),$$
$$M = \{\mu_j^1, \mu_{j+2}^1\} \subset V(\mathfrak{Y}^2).$$

利用这些集合，我们定义 $\gamma_j' := \langle E \cup A_1 \cup A_2 \cup M \rangle \in V(\mathfrak{Y}^4)$。参见图17。

现在，为了证明该引理，我们定义以下集合：

$$E = (\mathcal{E} \setminus \{\varepsilon_{i-3,i-1}, \varepsilon_{i-2,i}, \varepsilon_{i-1,i+1}, \varepsilon_{i,i+2}\}) \cup \{\varepsilon_{i-2,i+1}\} \subset V(\mathfrak{Y}^1),$$
$$A_1 = \{\alpha_k : k \neq i-1, i+1\} \subset V(\mathfrak{Y}^1),$$
$$A_2 = \{\alpha_{i+1,i-1}\} \subset V(\mathfrak{Y}),$$
$$M = \{\mu_{i+1}^1\} \cup \{\gamma_{i-1}'\} \subset V(\mathfrak{Y}^4).$$

那么，我们有 $\tau_{\gamma_i}(\alpha_{i-1,\ i}) = \langle E \cup A_1 \cup A_2 \cup M \rangle \subset V(\mathfrak{Y}^5)$。见图18。类似地，我们有 $\tau_{\gamma_i}^{-1}(\alpha_{i+2,\ i}) \in V(\mathfrak{Y}^5)$。

鉴于 $\tau_{\gamma_i}^{-1}(\alpha_{i-1,\ i}) = \tau_{\gamma_{i-1}}(\alpha_{i,\ i+1})$，我们有 $\tau_{\gamma_i}^{-1}(\alpha_{i-1,\ i}) \in V(\mathfrak{Y}^5)$。类似地，我们有 $\tau_{\gamma_i}(\alpha_{i+2,\ i}) \in V(\mathfrak{Y}^5)$。 □

最后，根据引理2.4、2.6和2.7，以及本小小节开头的观察，我们有 $\tau_{\gamma_i}^{\pm 1}(\mathcal{A}) \subset V(\mathfrak{Y}^8)$，从而完成引理 2.2 的证明。

2.2.2 引理 2.3 的证明

鉴于 $\tau_{\gamma_i}^{\pm 1}(\nu_{\bar{5}},_7) = \nu_{\bar{5}},_7$ if $i(\gamma_i, \nu_{\bar{5}},_7) = 0$，要证明引理 2.3，我们只需验证：$\tau_{\gamma_i}^{\pm 1}(\nu_{\bar{5}},_7) \in V(\mathfrak{Y}^{11})$ 对于 $i = 4, 5, 6, 7$ （模 g）。

在证明这一点之前，我们需要以下结果。

推论 **2 8** $1 \leq i \leq g-1$ $1 \leq j\ k \leq g$ $\tau_{\gamma_i}^{\pm 1}\ \alpha_j\quad \tau_{\gamma_i}^{\pm 1}\ \varepsilon_{j\,k}$ ∈..对于所有且对于所有，我们有(), $V\ \mathfrak{Y}^9$ (,)()。

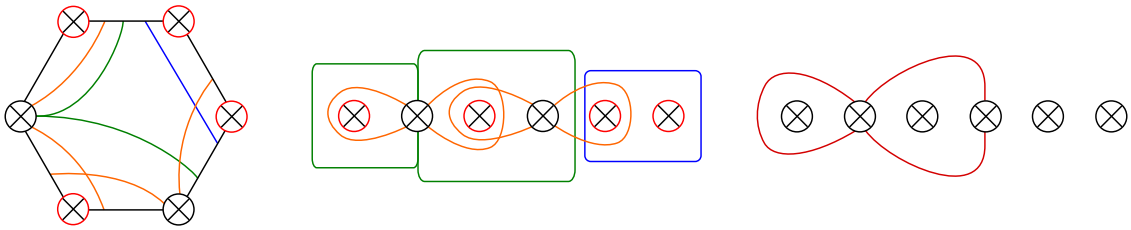


图17：（a）和（b）从两个角度描绘了唯一确定 γ_j'（其为唯一确定 $\tau_{\gamma_i}(\alpha_{i-1,\ i})$ 所必需）的曲线，γ_j' 如（c）所示。

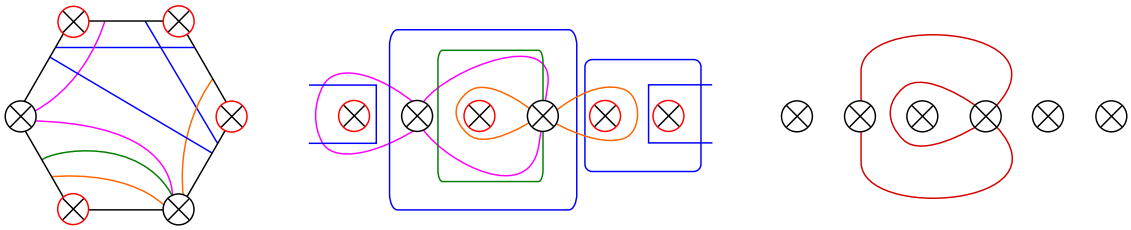


图18：（a）和（b）从两个角度描绘了唯一确定$\tau_{\gamma_i}(\alpha_{i-1,\ i})$ 所必需的曲线，该对象如（c）所示。

证明。根据引理1.5和1.6，存在子集 $A_1, A_2 \subset \mathcal{A}$，使得 $\alpha_j = \langle A_1 \rangle$ 和$\varepsilon_{j,k} = \langle A_2 \rangle$。因此 $\tau_{\gamma_i}^{\pm 1}(\alpha_j)$ $= \langle \tau_{\gamma_i}^{\pm 1}(A_1) \rangle$ 且 $\tau_{\gamma_i}^{\pm 1}(\varepsilon_{i,j})$ $= \langle \tau_{\gamma_i}^{\pm 1}(A_2) \rangle$。

由引理 2.2 可得 $\tau_{\gamma_i}^{\pm 1}(\alpha_j), \tau_{\gamma_i}^{\pm 1}(\varepsilon_{i,j}) \in V(\mathfrak{Y}^9)$ 正如所需。 □

引理 2.9。设 $1 \leq i \leq g-1$ 固定，则有 $\tau_{\gamma_i}^{\pm 1}(\nu_{i+1,\ i+3}^{\pm})$，$\tau_{\gamma_{i+3}}^{\pm 1}(\nu_{i+1,\ i+3}^{\pm}) \in V(\mathfrak{Y}^{10})$。

证明。我们定义以下集合：

$$A = \{\alpha_k : 1 \leq k \leq g\} \subset V(\mathfrak{Y}^1),$$

$$E = (\mathcal{E} \setminus \{\varepsilon_{i-1,i+1}, \varepsilon_{i,i+2}, \varepsilon_{i+1,i+3}, \varepsilon_{i+2,i+4}\}) \cup \{\varepsilon_{i,i+3}\} \subset V(\mathfrak{Y}^1),$$

$$M_1^+ = \{\nu_{i+2,i+4}^+\} \subset V(\mathfrak{Y}^6),$$

$$M_1^- = \{\nu_{i+2,i+4}^-\} \subset V(\mathfrak{Y}^6),$$

$$M_2^+ = \{\nu_{i,i+2}^+\} \subset V(\mathfrak{Y}^6),$$

$$M_2^- = \{\nu_{i,i+2}^-\} \subset V(\mathfrak{Y}^6).$$

于是，我们有：

$$\nu_{i+1,i+3}^- = \langle A \cup E \cup M_1^+ \rangle = \langle A \cup E \cup M_2^+ \rangle,$$

$$\nu_{i+1,i+3}^+ = \langle A \cup E \cup M_1^- \rangle = \langle A \cup E \cup M_2^- \rangle.$$

见图 19。

这意味着

$$\tau_{\gamma_i}^{\pm 1}(\nu_{i+1,i+3}^-) = \langle \tau_{\gamma_i}^{\pm 1}(A) \cup \tau_{\gamma_i}^{\pm 1}(E) \cup \tau_{\gamma_i}^{\pm 1}(M_1^+) \rangle,$$

$$\tau_{\gamma_{i+3}}^{\pm 1}(\nu_{i+1,i+3}^{-}) = \langle \tau_{\gamma_{i+3}}^{\pm 1}(A) \cup \tau_{\gamma_{i+3}}^{\pm 1}(E) \cup \tau_{\gamma_{i+3}}^{\pm 1}(M_2^{+}) \rangle,$$
$$\tau_{\gamma_i}^{\pm 1}(\nu_{i+1,i+3}^{+}) = \langle \tau_{\gamma_i}^{\pm 1}(A) \cup \tau_{\gamma_i}^{\pm 1}(E) \cup \tau_{\gamma_i}^{\pm 1}(M_1^{-}) \rangle,$$
$$\tau_{\gamma_{i+3}}^{\pm 1}(\nu_{i+1,i+3}^{+}) = \langle \tau_{\gamma_{i+3}}^{\pm 1}(A) \cup \tau_{\gamma_{i+3}}^{\pm 1}(E) \cup \tau_{\gamma_{i+3}}^{\pm 1}(M_2^{-}) \rangle.$$

γ_i 由推论 2.8，我们有 $\tau_{\gamma_i}^{\pm 1}(A)$、$\tau_{\gamma_{i+3}}^{\pm 1}(A)$、$\tau_{\gamma_i}^{\pm 1}(E)$、$\tau_{\gamma_{i+3}}^{\pm 1}(E) \subset V(\mathfrak{Y}^9)$。鉴于 $i($ $=$ $M_2^{\pm} \subset V\ \mathfrak{Y}^6$ $\tau_{\gamma_i}^{\pm 1}\ \nu_{i+1\ i+3}^{\pm}\ \tau_{\gamma_{i+3}}^{\pm 1}\ \nu_{i+1\ i+3}^{\pm} \in V\ \mathfrak{Y}^{10}$ $,\ \nu_{i+2,}^{\pm})\ = i(,$

$\nu_{i}^{\pm},) = 0$，我们有 $\tau_{\gamma_i}^{\pm 1}(M_1^{\pm}) = M_1^{\pm} \subset V(\mathfrak{Y}^6)$，以及 $\tau_{\gamma_{i+3}}^{\pm 1}(M_2^{\pm})$ ( )，因此可得 (.)、(.) ( )，如所要求。 □

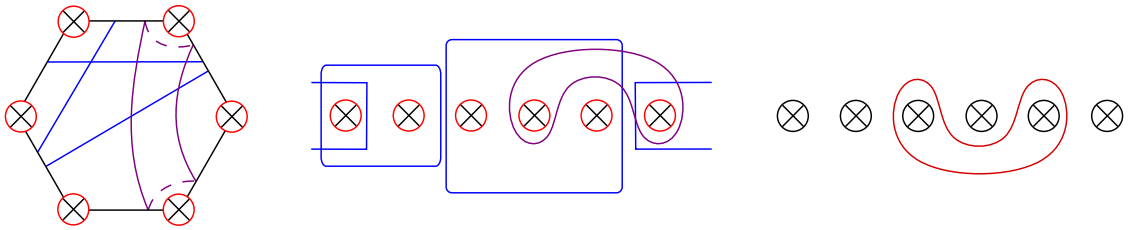


图 19：(a) 和 (b) 从两个角度展示了唯一确定$\nu_{i+1,i+3}^{-}$所需的曲线，$_{i+3}$见 (c)。

推论 2.10. 设 $1 \le i \le g-1$ 固定，则有 $\tau_{\gamma_{i+1}}^{\pm 1}(\nu_{i+1,i+3}^{\pm})$、$\tau_{\gamma_{i+2}}^{\pm 1}(\nu_{i+1,i+3}^{\pm}) \in V(\mathfrak{Y}^{11})$。

证明. 设 A、E、$M_1^{\pm}$ 和 $M_2^{\pm}$ 如引理 2.9 的证明中所述。于是，与引理 2.9 的证明一样，我们有：

$$\tau_{\gamma_{i+1}}^{\pm 1}(\nu_{i+1,i+3}^{-}) = \langle \tau_{\gamma_{i+1}}^{\pm 1}(A) \cup \tau_{\gamma_{i+1}}^{\pm 1}(E) \cup \tau_{\gamma_{i+1}}^{\pm 1}(M_1^{+}) \rangle,$$
$$\tau_{\gamma_{i+2}}^{\pm 1}(\nu_{i+1,i+3}^{-}) = \langle \tau_{\gamma_{i+2}}^{\pm 1}(A) \cup \tau_{\gamma_{i+2}}^{\pm 1}(E) \cup \tau_{\gamma_{i+2}}^{\pm 1}(M_2^{+}) \rangle,$$
$$\tau_{\gamma_{i+1}}^{\pm 1}(\nu_{i+1,i+3}^{+}) = \langle \tau_{\gamma_{i+1}}^{\pm 1}(A) \cup \tau_{\gamma_{i+1}}^{\pm 1}(E) \cup \tau_{\gamma_{i+1}}^{\pm 1}(M_1^{-}) \rangle,$$
$$\tau_{\gamma_{i+2}}^{\pm 1}(\nu_{i+1,i+3}^{+}) = \langle \tau_{\gamma_{i+2}}^{\pm 1}(A) \cup \tau_{\gamma_{i+2}}^{\pm 1}(E) \cup \tau_{\gamma_{i+2}}^{\pm 1}(M_2^{-}) \rangle.$$

同样，由推论 2.8 可得 $\tau_{\gamma_{i+1}}^{\pm 1}(A)$、$\tau_{\gamma_{i+2}}^{\pm 1}(A)$、$\tau_{\gamma_{i+1}}^{\pm 1}(E)$、$\tau_{\gamma_{i+2}}^{\pm 1}(E) \subset V(\mathfrak{Y}^9)$。现在，由引理 2.9 可得 $\tau_{\gamma_{i+1}}^{\pm 1}(M_1^{\pm})$ $\tau_{\gamma_{i+2}}^{\pm 1}(M_2^{\pm}) \subset V(\mathfrak{Y}^{10})$。因此，$\tau_{\gamma_{i+1}}^{\pm 1}(\nu_{i+1,i+3}^{\pm})$、$\tau_{\gamma_{i+2}}^{\pm 1}(\nu_{i+1,i+3}^{\pm}) \in V(\mathfrak{Y}^{11})$，如所需。 □

引理 2.3 可直接由引理 2.9 和推论 2.10 得出。

2.3 $y^{\pm 1}(\mathfrak{Y}) \subset \mathfrak{Y}^{13}$

在本小节中，我们证明以下引理。

引理 2.11。 我们有 $y^{\pm 1}(\mathcal{A})$、$y^{\pm 1}(\mathcal{M}) \subset \mathfrak{Y}^{13}$。

引理 2.11 的证明需要若干辅助曲线和引理。我们先给出引理 2.2 和推论 2.8 的两个推论。

推论 2.12. 对于所有 $1 \le i \le g$ 以及所有 $1 \le j \le g$，我们有 $\tau_{\gamma_i}^{\pm}(\mu_j^1) \in V(\mathfrak{Y}^{10})$。

证明。Le t E_1, E_2, A_1, A_2，如 μ_j^1 的定义中所述（见第 1.4.3 小节）。我们有：

$$\tau_{\gamma_i}^{\pm 1}(\mu_j^1) = \langle \tau_{\gamma_i}^{\pm 1}(E_1) \cup \tau_{\gamma_i}^{\pm 1}(E_2) \cup \gamma_i^{\pm 1}(A_1) \cup \tau_{\gamma_i}^{\pm 1}(A_2) \rangle.$$

由引理 2.2 可知 $\tau_{\gamma_i}^{\pm}(A_1) \subset V(\mathfrak{Y}^8)$，由推论 2.8 可知 $\tau_{\gamma_i}^{\pm 1}(E_1)$、$\tau_{\gamma_i}^{\pm 1}(E_2)$、$\tau_{\gamma_i}^{\pm 1}(A_2) \subset V(\mathfrak{Y}^9)$。因此 $\tau_{\gamma_i}^{\pm 1}(\mu_j^1) \in V(\mathfrak{Y}^{10})$。 □

推论 2.13。对于所有 $1 \le i \le g$ 以及所有 $1 \le j, k \le g$，我们有 $\tau_{\gamma_i}^{\pm}(\alpha_{j,k}) \in V(\mathfrak{Y}^{11})$。

证明。设 $1 \le i \le g$ 固定且 $1 \le j, k \le g$。若 $k \in \{j-2, j-1, j, j+1\}$，则 $\alpha_{j,k}$ 要么是 α_j，要么是 $\mathcal{A}$的一个元素；由引理 2.2 和推论 2.8 可知，$\tau_{\gamma_i}^{\pm}(\alpha_{j,k}) \in V(\mathfrak{Y}^8)$ 或 $\tau_{\gamma_i}^{\pm}(\alpha_{j,k}) \in V(\mathfrak{Y}^9)$。否则，令 E_1, E_2, E_3, A和 M如引理 1.7 的证明中所述。我们有：

$$\tau_{\gamma_i}^{\pm 1}(\alpha_{j,k}) = \langle \tau_{\gamma_i}^{\pm 1}(E_1) \cup \tau_{\gamma_i}^{\pm 1}(E_2) \cup \tau_{\gamma_i}^{\pm 1}(E_3) \cup \gamma_i^{\pm 1}(A) \cup \tau_{\gamma_i}^{\pm 1}(M) \rangle.$$

由推论 2.8 可知 $\tau_{\gamma_i}^{\pm 1}(E_1)$、$\tau_{\gamma_i}^{\pm 1}(E_2)$、$\tau_{\gamma_i}^{\pm 1}(E_3)$、$\tau_{\gamma_i}^{\pm 1}(A) \subset V(\mathfrak{Y}^8)$，由推论 2.12 可知 $\tau_{\gamma_i}^{\pm 1}(M) \in V(\mathfrak{Y}^{10})$。因此 $\tau_{\gamma_i}^{\pm 1}(\alpha_{j,k}) \in V(\mathfrak{Y}^{11})$。 □

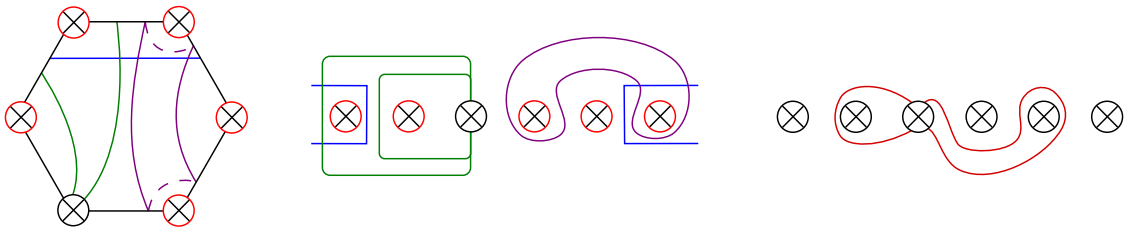
对于 $1 \le i \le g$，我们定义 $\mu_{i,\ i+2}^{\pm}$ 和 $\mu_{i,\ i-2}^{\pm}$ 如下（下标以 g 为模）。定义集合：

$$A = \{\alpha_k : k \ne i\} \subset V(\mathfrak{Y}^1),$$
$$E_1 = (\mathcal{E} \setminus \{\varepsilon_{i-3,i-1}, \varepsilon_{i-2,i}, \varepsilon_{i-1,i+1}, \varepsilon_{i,i+2}, \varepsilon_{i+1,i+3}\}) \cup \{\varepsilon_{i-2,i+2}\} \subset V(\mathfrak{Y}^1),$$
$$E_2 = (\mathcal{E} \setminus \{\varepsilon_{i-4,i-2}, \varepsilon_{i-3,i-1}, \varepsilon_{i-2,i}, \varepsilon_{i-1,i+1}, \varepsilon_{i,i+2}\}) \cup \{\varepsilon_{i-3,i+1}\} \subset V(\mathfrak{Y}^1),$$
$$A_1 = \{\alpha_{i,i-2}, \alpha_{i,i-3}\} \subset V(\mathfrak{Y}^3), \qquad A_2 = \{\alpha_{i,i+1}, \alpha_{i,i+2}\} \subset V(\mathfrak{Y}^3),$$
$$M_1^+ = \{\nu_{i+1,i+3}^+\} \subset V(\mathfrak{Y}^6), \qquad M_2^+ = \{\nu_{i-3,i-1}^+\} \subset V(\mathfrak{Y}^6),$$
$$M_1^- = \{\nu_{i+1,i+3}^-\} \subset V(\mathfrak{Y}^6), \qquad M_2^- = \{\nu_{i-3,i-1}^-\} \subset V(\mathfrak{Y}^6).$$

Then

$$\mu_{i,i+2}^+ := \langle A \cup E_1 \cup A_1 \cup M_1^- \rangle \subset V(\mathfrak{Y}^7),$$
$$\mu_{i,i+2}^- := \langle A \cup E_1 \cup A_1 \cup M_1^+ \rangle \subset V(\mathfrak{Y}^7),$$
$$\mu_{i,i-2}^+ := \langle A \cup E_2 \cup A_2 \cup M_2^- \rangle \subset V(\mathfrak{Y}^7),$$
$$\mu_{i,i-2}^- := \langle A \cup E_2 \cup A_2 \cup M_2^+ \rangle \subset V(\mathfrak{Y}^7).$$

见图 20。



a) b) c)

图 20：在 (a) 和 (b) 中，集合 A 的曲线为红色，集合 E_1 的曲线为蓝色，集合 A_1 的曲线为绿色，集合 M_1^+ 的曲线为紫色。这些曲线唯一确定了 (c) 中所示的曲线 $\mu_{3,\ 5}^-$。

引理 2.14。对于固定的 $1 \le i \le g$，我们有 $\tau_{\gamma_i}(\mu_i^{\pm},_{i+2})$、$\tau_{\gamma_{i+1}}(\mu_i^{\pm},_{i+2})$、$\tau_{\gamma_{i-1}}(\mu_i^{\pm},_{i-2})$、$\tau_{\gamma_{i-2}}(\mu_i^{\pm},_{i-2}) \in V(\mathfrak{Y}^{12})$。

证明。令 $1 \le i \le g$ 固定。存在子集 $A, E_1, A_1, M_1^+, M_1^- \subset V(\mathfrak{Y}^6)$，使得

$$\mu_{i,i+2}^+ = \langle A \cup E_1 \cup A_1 \cup M_1^- \rangle,$$

$$\mu_{i,i+2}^- = \langle A \cup E_1 \cup A_1 \cup M_1^+ \rangle.$$

我们有 $\tau_{\gamma_i}(E_1) = \tau_{\gamma_{i+1}}(E_1) = E_1 \subset V(\mathfrak{Y}^1)$，并且 $\tau_{\gamma_{i+1}}(A_1) = A_1 \subset V(\mathfrak{Y}^3)$。根据推论 2.13，我们有 $\tau_{\gamma_i}(A_1) \subset V(\mathfrak{Y}^{11})$。根据推论 2.8，我们有 $\tau_{\gamma_i}(A)$，$\tau_{\gamma_{i+1}}(A) \subset V(\mathfrak{Y}^9)$。最后，根据引理 2.9 和推论 2.10，我们有 $\tau_{\gamma_i}(M_1^{\pm}) \subset V(\mathfrak{Y}^{10})$，且 $\tau_{\gamma_{i+1}}(M_1^{\pm}) \subset V(\mathfrak{Y}^{11})$。因此，$\tau_{\gamma_i}(\mu_i^{\pm},_{i+2}) \subset V(\mathfrak{Y}^{12})$，且 $\tau_{\gamma_{i+1}}(\mu_i^{\pm},_{i+2}) \subset V(\mathfrak{Y}^{12})$。

类似地，存在子集 $A, E_2, A_2, M_2^+, M_2^- \subset V(\mathfrak{Y}^6)$，使得

$$\mu_{i,i-2}^+ = \langle A \cup E_2 \cup A_2 \cup M_2^- \rangle,$$

$$\mu_{i,i-2}^- = \langle A \cup E_2 \cup A_2 \cup M_2^+ \rangle.$$

我们有 $\tau_{\gamma_{i-1}}(E_2) = \tau_{\gamma_{i-2}}(E_2) = E_2 \subset V(\mathfrak{Y}^1)$，且 $\tau_{\gamma_{i-2}}(A_2) = A_2 \subset V(\mathfrak{Y}^3)$。由推论 2.13，我们有 $\tau_{\gamma_{i-1}}(A_2) \subset V(\mathfrak{Y}^{11})$。由推论 2.8，我们有 $\tau_{\gamma_{i-1}}(A)$，$\tau_{\gamma_{i-2}}(A) \subset V(\mathfrak{Y}^9)$。最后，由引理 2.9 和推论 2.10，我们有 $\tau_{\gamma_{i-1}}(M_2^{\pm}) \subset V(\mathfrak{Y}^{10})$，且 $\tau_{\gamma_{i-2}}(M_2^{\pm}) \subset V(\mathfrak{Y}^{11})$。因此，$\tau_{\gamma_{i-1}}(\mu_i^{\pm},_{i-2}) \subset V(\mathfrak{Y}^{12})$，且 $\tau_{\gamma_{i-2}}(\mu_i^{\pm},_{i-2}) \subset V(\mathfrak{Y}^{12})$。

□

对于 $1 \le i \le g$，我们定义 $\alpha_i^{\pm},_{i+2}$ 和 $\alpha_i^{\pm 1},_{i-2}$ 如下（下标按模 g 计算）。定义集合:

$$A = \{\alpha_k : k \ne i\} \subset V(\mathfrak{Y}^1),$$
$$M^+ = \{\nu_{i-1,i+1}^+\} \subset V(\mathfrak{Y}^6),$$
$$M^- = \{\nu_{i-1,i+1}^-\} \subset V(\mathfrak{Y}^6),$$
$$E_1 = (\mathcal{E} \setminus \{\varepsilon_{i-2,i}, \varepsilon_{i-1,i+1}, \varepsilon_{i,i+2}, \varepsilon_{i+1,i+3}\}) \cup \{\varepsilon_{i-1,i+2}\} \subset V(\mathfrak{Y}^1),$$
$$E_2 = (\mathcal{E} \setminus \{\varepsilon_{i-4,i-2}, \varepsilon_{i-3,i-1}, \varepsilon_{i-2,i}, \varepsilon_{i-1,i+1}\}) \cup \{\varepsilon_{i-3,i}\} \subset V(\mathfrak{Y}^1),$$
$$C_1^+ = \{\mu_{i,i+2}^+\} \subset V(\mathfrak{Y}^7), \qquad C_2^+ = \{\mu_{i,i-2}^+\} \subset V(\mathfrak{Y}^7),$$
$$C_1^- = \{\mu_{i,i+2}^-\} \subset V(\mathfrak{Y}^7), \qquad C_2^- = \{\mu_{i,i-2}^-\} \subset V(\mathfrak{Y}^7).$$

Then

$$\alpha_{i,i+2}^+ := \langle A \cup E_1 \cup M^- \cup C_1^+ \rangle \subset V(\mathfrak{Y}^8),$$
$$\alpha_{i,i+2}^- := \langle A \cup E_1 \cup M^+ \cup C_1^- \rangle \subset V(\mathfrak{Y}^8),$$
$$\alpha_{i,i-2}^+ := \langle A \cup E_2 \cup M^- \cup C_2^+ \rangle \subset V(\mathfrak{Y}^8),$$
$$\alpha_{i,i-2}^- := \langle A \cup E_2 \cup M^+ \cup C_2^- \rangle \subset V(\mathfrak{Y}^8).$$

参见图 21。

引理 2.15。对于固定的 $1 \le i \le g$，有 $\tau_{\gamma_i}(\alpha_i^{\pm},_{i+2})$、$\tau_{\gamma_{i+1}}(\alpha_i^{\pm},_{i+2})$、$\tau_{\gamma_{i-1}}(\alpha_i^{\pm},_{i-2})$、$\tau_{\gamma_{i-2}}(\alpha_i^{\pm},_{i-2}) \in V(\mathfrak{Y}^{13})$。

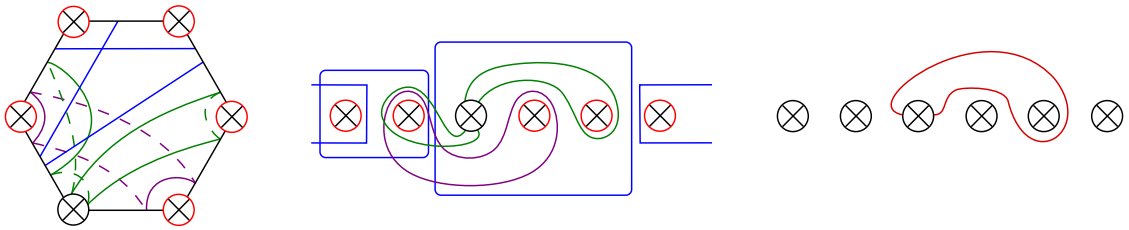


图 21：在 (a) 和 (b) 中，集合 A 的曲线为红色，集合 E_1 的曲线为蓝色，集合 M^- 的曲线为紫色，集合 C_1^+ 的曲线为绿色。这些曲线唯一确定了 (c) 中所示的曲线 $\alpha_{3,\ 5}^+$。

证明。对于固定的 $1 \le i \le g$，存在子集 A、M^+、M^-、E_1、E_2、C_1^+、C_1^-、C_2^+、$C_2^- \subset V(\mathfrak{Y}^7)$，使得:

$$\alpha_{i,i+2}^+ := \langle A \cup E_1 \cup M^- \cup C_1^+ \rangle \subset V(\mathfrak{Y}^8),$$
$$\alpha_{i,i+2}^- := \langle A \cup E_1 \cup M^+ \cup C_1^- \rangle \subset V(\mathfrak{Y}^8),$$
$$\alpha_{i,i-2}^+ := \langle A \cup E_2 \cup M^- \cup C_2^+ \rangle \subset V(\mathfrak{Y}^8),$$
$$\alpha_{i,i-2}^- := \langle A \cup E_2 \cup M^+ \cup C_2^- \rangle \subset V(\mathfrak{Y}^8).$$

我们有 $\tau_{\gamma_i}(E_1) = \tau_{\gamma_{i+1}}(E_1) = E_1 \subset (\mathfrak{Y}^1)$，且 $\tau_{\gamma_{i-1}}(E_2) = \tau_{\gamma_{i-2}}(E_2) = E_2 \subset (\mathfrak{Y}^1)$。由推论 2.8 可得 $\tau_{\gamma_i}(A)$、$\tau_{\gamma_{i+1}}(A)$、$\tau_{\gamma_{i-1}}(A)$、$\tau_{\gamma_{i-2}}(A) \subset V(\mathfrak{Y}^9)$。由引理 2.9 可得 $\tau_{\gamma_{i+1}} M^{\pm} \quad \tau_{\gamma_{i-2}} M^{\pm} \subset V\ \mathfrak{Y}^{10}$ $\quad 2\ 10 \quad \tau_{\gamma_i} M^{\pm} \quad \tau_{\gamma_{i-1}} M^{\pm} \subset V\ \mathfrak{Y}^{11}$ $\quad 2\ 14 \quad \tau_{\gamma_i} C_1^{\pm} \quad \tau_{\gamma_{i+1}} C_1^{\pm} \quad \tau_{\gamma_{i-1}} C_2^{\pm} \quad \tau_{\gamma_{i-2}} C_2^{\pm} \subset$ ()、() ()。由推论 . 可得 ()、() ()。最后，由引理 . 可得 ()、()、()、() $V\ \mathfrak{Y}^{12} \quad \tau_{\gamma_i}\ \alpha_{i\,i+2}^{\pm} \quad \tau_{\gamma_{i+1}}\ \alpha_{i\,i+2}^{\pm} \quad \tau_{\gamma_{i-1}}\ \alpha_{i\,i-2}^{\pm} \quad \tau_{\gamma_{i-2}}\ \alpha_{i\,i-2}^{\pm} \in V\ \mathfrak{Y}^{13}$. ()。因此 (.)、(.)、(.)、(.) () □

引理 2.16。对于所有的 $1 \le i \le g$，都有 $y^{\pm 1}(\alpha_{i,i+1}),\ y^{\pm 1}(\alpha_{i,i-2}) \in V(\mathfrak{Y}^{13})$。

证明。已知 $y^{\pm 1}(\alpha_{i,i+1}) = \alpha_{i,i+1}$ 当 $1 \le i \le g-3$ 时成立，并且 $y^{\pm 1}(\alpha_{i,i-2}) = \alpha_{i,i-2}$ 当 $2 \le i \le g-2$时成立，我们只需验证

$$y^{\pm 1}(\alpha_{g-2,g-1}), y^{\pm 1}(\alpha_{g-1,g}), y^{\pm 1}(\alpha_{g,1}), y^{\pm 1}(\alpha_{g-1,g-3}), y^{\pm 1}(\alpha_{g,g-2}), y^{\pm}(\alpha_{1,g-1}) \in V(\mathfrak{Y}^{13}).$$

我们有 $y^{\pm 1}(\alpha_{g,g-2}) = \alpha_g$，且 $y^{\pm 1}(\alpha_{g-1,g}) = \tau_{\gamma_{g-1}}(\alpha_{g,g-1})$。于是，由引理 1.6 可知 $y^{\pm 1}(\alpha_{g,g-2}) \in V(\mathfrak{Y}^1)$，由引理 2.2 可知 $y^{\pm 1}(\alpha_{g-1,g}) \in V(\mathfrak{Y}^8)$。

注意到

$$y^{\pm 1}(\alpha_{g-2,g-1}) = \tau_{\gamma_{g-1}}(\alpha_{g-2,g}^{\pm}),$$
$$y^{\pm}(\alpha_{g,1}) = \tau_{\gamma_{g-1}}(\alpha_{g-1,1}^{\pm}),$$
$$y^{\pm 1}(\alpha_{g-1,g-3}) = \tau_{\gamma_{g-1}}(\alpha_{g,g-2}^{\pm}),$$
$$y^{\pm 1}(\alpha_{1,g-1}) = \tau_{\gamma_{g-1}}(\alpha_{1,g-1}^{\pm}).$$

根据引理 2.15 $y^{\pm 1}(\alpha_{g-2,\ g-1})$，$y^{\pm 1}(\alpha_{g,\ 1})$、$y^{\pm 1}(\alpha_{g-1,\ g-3})$、$y^{\pm 1}(\alpha_{1,\ g-1}) \in V(\mathfrak{Y}^{13})$. □

我们需要更多辅助曲线。对于 $1 \le i \le g$，我们定义 $\kappa_{i\ i+3}^{\pm}$ 如下（下标以 g 为模）。定义这些集合:

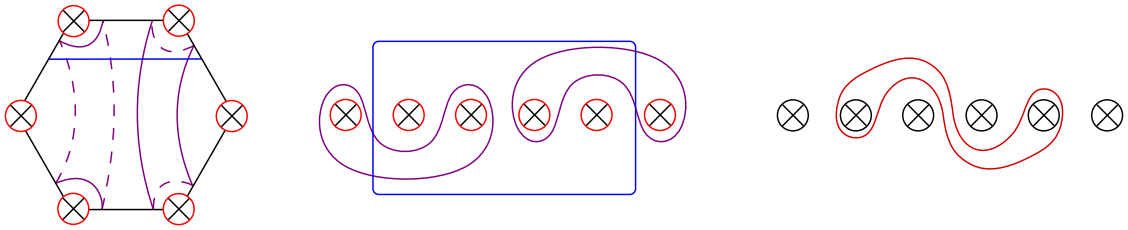
$$A = \{\alpha_k : 1 \le k \le g\} \subset V(\mathfrak{Y}^1),$$
$$E = (\mathcal{E} \setminus \{\varepsilon_{i-2,i}, \varepsilon_{i-1,i+1}, \varepsilon_{i,i+2}, \varepsilon_{i+1,i+3}, \varepsilon_{i+2,i+4}\}) \cup \{\varepsilon_{i-1,i+3}\} \subset V(\mathfrak{Y}^1),$$

$$M^+ = \{\nu^+_{i-1,i+1}, \nu^-_{i+2,i+4}\} \subset V(\mathfrak{Y}^6),$$
$$M^- = \{\nu^-_{i-1,i+1}, \nu^+_{i+2,i+4}\} \subset V(\mathfrak{Y}^6).$$

我们定义

$$\kappa^+_{i,i+3} := \langle A \cup E \cup M^- \rangle,$$
$$\kappa^-_{i,i+3} := \langle A \cup E \cup M^+ \rangle.$$

见图 22。



a) b) c)

图 22：在 (a) 和 (b) 中，集合 A 的曲线为红色，集合 E 的曲线为蓝色，集合 M^- 的曲线为紫色。这些曲线唯一确定了 (c) 中所示的曲线 $\kappa^+_{2,\,5}$。

引理 2.17。对于固定的 $1 \le i \le g$，我们有 $\tau^{\pm 1}_{\gamma_i}(\kappa^{\pm}_{i,i+3})$，$\tau^{\pm 1}_{\gamma_{i+2}}(\kappa^{\pm}_{i,i+3}) \subset V(\mathfrak{Y}^{12})$。

证明。设 A、E、M^+、M^- 如 $\kappa^+_{i,\,i+3}$ 和 $\kappa^-_{i,\,i+3}$ 的定义所述，我们有 th at:

$$\tau^{\pm 1}_{\gamma_i}(\kappa^+_{i,i+3}) = \langle \tau^{\pm 1}_{\gamma_i}(A) \cup \tau^{\pm 1}_{\gamma_i}(E) \cup \tau^{\pm 1}_{\gamma_i}(M^-) \rangle,$$
$$\tau^{\pm 1}_{\gamma_i}(\kappa^-_{i,i+3}) = \langle \tau^{\pm 1}_{\gamma_i}(A) \cup \tau^{\pm 1}_{\gamma_i}(E) \cup \tau^{\pm 1}_{\gamma_i}(M^+) \rangle,$$
$$\tau^{\pm 1}_{\gamma_{i+2}}(\kappa^+_{i,i+3}) = \langle \tau^{\pm 1}_{\gamma_{i+2}}(A) \cup \tau^{\pm 1}_{\gamma_{i+2}}(E) \cup \tau^{\pm 1}_{\gamma_{i+2}}(M^-) \rangle,$$
$$\tau^{\pm 1}_{\gamma_{i+2}}(\kappa^-_{i,i+3}) = \langle \tau^{\pm 1}_{\gamma_{i+2}}(A) \cup \tau^{\pm 1}_{\gamma_{i+2}}(E) \cup \tau^{\pm 1}_{\gamma_{i+2}}(M^+) \rangle.$$

根据推论 2.8，我们有 $\tau^{\pm 1}_{\gamma_i}(A)$、$\tau^{\pm 1}_{\gamma_{i+2}}(A)$、$\tau^{\pm 1}_{\gamma_i}(E)$、$\tau^{\pm 1}_{\gamma_{i+2}}(E) \in V(\mathfrak{Y}^9)$。根据推论 2.10 $\tau^{\pm 1}_{\gamma_i}(M^{\pm})$，$\tau^{\pm 1}_{\gamma_{i+2}}(M^{\pm}) \in V(\mathfrak{Y}^{11})$。因此，$\tau^{\pm 1}_{\gamma_i}(\kappa^{\pm}_{i,\,i+3})$、$\tau^{\pm 1}_{\gamma_{i+2}}(\kappa^{\pm}_{i,\,i+3}) \subset V(\mathfrak{Y}^{12})$。 □

我们还需要更多辅助曲线。对于 $1 \le i \le g$，我们按如下方式定义曲线 $\eta^{\pm}_{i,\,i-1}$ 和 $\eta^{\pm}_{i,\,i+1}$（下标以 g 为模）。定义集合：

$$A = \{\alpha_k : 1 \le k \le g\} \subset V(\mathfrak{Y}^1),$$
$$E = (\mathcal{E} \setminus \{\varepsilon_{i-3,i-1}, \varepsilon_{i-2,i}, \varepsilon_{i-1,i+1}, \varepsilon_{i,i+2}\}) \cup \{\varepsilon_{i-2,i+1}\} \subset V(\mathfrak{Y}^1),$$
$$M^+_1 = \{\kappa^+_{i-2,i+1}\} \subset V(\mathfrak{Y}^7), \qquad M^+_2 = \{\kappa^+_{i-1,i+2}\} \subset V(\mathfrak{Y}^7),$$
$$M^-_1 = \{\kappa^-_{i-2,i+1}\} \subset V(\mathfrak{Y}^7), \qquad M^-_2 = \{\kappa^-_{i-1,i+2}\} \subset V(\mathfrak{Y}^7).$$

我们定义

$$\eta^+_{i,i-1} := \langle A \cup E \cup M^-_1 \rangle,$$
$$\eta^-_{i,i-1} := \langle A \cup E \cup M^+_1 \rangle,$$
$$\eta^+_{i,i+1} := \langle A \cup E \cup M^+_2 \rangle,$$
$$\eta^-_{i,i+1} := \langle A \cup E \cup M^-_2 \rangle.$$

参见图 23。

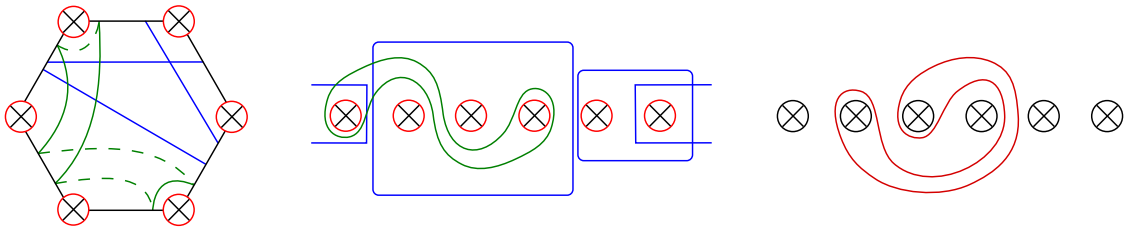


图 23：在 (a) 和 (b) 中，集合 A 的曲线为红色，集合 E 的曲线为蓝色，集合 M_1^+ 的曲线为绿色。这些曲线唯一确定了 (c) 中所示的曲线 $\eta_{3,2}^-$。

引理 2.18. 对于 $1 \le i \le g$ 固定的情形，我们有 $\tau_{\gamma_{i-1}}^{\pm 1}(\eta_{i,i+1}^{\pm}), \tau_{\gamma_i}^{\pm 1}(\eta_{i,i-1}^{\pm}) \subset V(\mathfrak{Y}^{13})$.

证明。令 A、E、M_1^+、M_1^-、M_2^+、M_2^- 与 $\eta_{i,i+1}^+$ 和 $\eta_{i,i-1}^-$ 的定义中相同，我们有：

$$\tau_{\gamma_{i-1}}^{\pm 1}(\eta_{i,i+1}^+) = \langle \tau_{\gamma_{i-1}}^{\pm 1}(A) \cup \tau_{\gamma_{i-1}}^{\pm 1}(E) \cup \tau_{\gamma_{i-1}}^{\pm 1}(M_2^+) \rangle,$$

$$\tau_{\gamma_{i-1}}^{\pm 1}(\eta_{i,i+1}^+) = \langle \tau_{\gamma_{i-1}}^{\pm 1}(A) \cup \tau_{\gamma_{i-1}}^{\pm 1}(E) \cup \tau_{\gamma_{i-1}}^{\pm 1}(M_2^-) \rangle,$$

$$\tau_{\gamma_i}^{\pm 1}(\eta_{i,i-1}^+) = \langle \tau_{\gamma_i}^{\pm 1}(A) \cup \tau_{\gamma_i}^{\pm 1}(E) \cup \tau_{\gamma_i}^{\pm 1}(M_1^-) \rangle,$$

$$\tau_{\gamma_i}^{\pm 1}(\eta_{i,i-1}^-) = \langle \tau_{\gamma_i}^{\pm 1}(A) \cup \tau_{\gamma_i}^{\pm 1}(E) \cup \tau_{\gamma_i}^{\pm 1}(M_1^+) \rangle.$$

由推论 2.8，我们有 $\tau_{\gamma_{i-1}}^{\pm 1}(A)$、$\tau_{\gamma_i}^{\pm 1}(A)$、$\tau_{\gamma_{i-1}}^{\pm 1}(E)$、$\tau_{\gamma_i}^{\pm 1}(E) \in V(\mathfrak{Y}^9)$。由引理 2.17 $\tau_{\gamma_{i-1}}^{\pm 1}(M_2^{\pm})$，$\tau_{\gamma_i}^{\pm 1}(M_1^{\pm}) \in V(\mathfrak{Y}^{12})$。因此，$\tau_{\gamma_{i-1}}^{\pm 1}(\eta_{i,i+1}^{\pm})$、$\tau_{\gamma_i}^{\pm 1}(\eta_{i,i-1}^{\pm}) \subset V(\mathfrak{Y}^{13})$。 □

Lemma 2.19. 对于所有 $g \ge 6$，都有 $y^{\pm 1}(\nu_{5,7}^-) \in V(\mathfrak{Y}^{13})$（下标按模 g 计算）.

证明。如果 $g \ge 9$，那么 $y^{\pm 1}(\nu_{5,7}^-) = \nu_{5,7}^- \in \mathfrak{Y}$。因此，我们只需在 $6 \le g \le 8$ 时验证 $y^{\pm 1}(\nu_{5,7}^-) \in V(\mathfrak{Y}^{13})$。

情形 $g = 8$： 我们定义以下集合：

$$A = \{\alpha_k : k \ne 8\} \subset V(\mathfrak{Y}^1),$$

$$E = (\mathcal{E} \setminus \{\varepsilon_{3,5}, \varepsilon_{4,6}, \varepsilon_{5,7}, \varepsilon_{6,8}, \varepsilon_{7,1}\}) \cup \{\varepsilon_{4,8}\} \subset V(\mathfrak{Y}^1),$$

$$M = \{\nu_{4,6}^+\} \subset V(\mathfrak{Y}^6).$$

我们有 $y(\nu_{5,7}^-) = \langle A \cup E \cup M \rangle \in V(\mathfrak{Y}^7)$。另一方面，注意到 $y^{-1}(\nu_{5,7}^-) = \tau_{\gamma_7}(\kappa_{5,8}^-)$，由引理 2.17 可得 $y^{-1}(\nu_{5,7}^-) \in V(\mathfrak{Y}^{12})$。

情形 $g = 7$： 注意到 $y(\nu_{5,7}^-) = \tau_{\gamma_6}(\eta_{6,5}^-)$，且 $y^{-1}(\nu_{5,7}^-) = \tau_{\gamma_6}(\varepsilon_{4,6})$。因此，由引理 2.18 $y(\nu_{5,7}^-) \in V(\mathfrak{Y}^{13})$，并由推论 2.8 可得 $y^{-1}(\nu_{5,7}^-) \in V(\mathfrak{Y}^9)$。

情形 $g = 6$： 注意到 $y(\nu_{5,1}^-) = \mu_g^1$ 且 $y^{-1}(\nu_{5,1}^-) = \tau_{\gamma_5}(\eta_{6,1}^-)$。根据 μ_g^1 的定义（见第 1.4.3.3 小节），我们有 $y(\nu_{5,1}^-) \in V(\mathfrak{Y}^2)$；由引理 2.18 可得$y^{-1}(\nu_{5,1}^-) \in V(\mathfrak{Y}^{13})$。

□

引理 2.11 可由引理 2.16 和引理 2.19 推出。

2.4 $\tau_\beta^{\pm 1}(\mathfrak{Y}) \subset \mathfrak{Y}^{13}$

在本小节中，我们证明以下引理。

引理 2.20. 我们有 $\tau_\beta^{\pm 1}(\mathfrak{Y}) \subset \mathfrak{Y}^{13}$。

由于 $i(\delta, \beta) = 0$ 蕴含 $\tau_\beta^{\pm 1}(\delta) = \delta$，为了证明引理 2.20，我们只需验证 $\mathfrak{Y}$ 中与 β 相交的曲线。这样的曲线集合可如下划分：

$$C_1 = \{\alpha_{1,2}, \alpha_{2,3}, \alpha_{3,4}, \alpha_{4,5}, \alpha_{1,g-1}, \alpha_{2,g}, \alpha_{3,1}, \alpha_{4,2}\},$$
$$C_2 = \{\alpha_{5,3}, \alpha_{g,1}\},$$
$$C_3 = \begin{cases} \{\nu_{5,7}^-\} & \text{if } g = 6, \\ \varnothing & \text{otherwise.} \end{cases}$$

于是，引理 2.20 的证明以及本小节均划分为 $\tau_\beta^{\pm 1}(C_1) \subset \mathfrak{Y}^{10}$、$\tau_\beta^{\pm 1}(C_2) \subset \mathfrak{Y}^{12}$ 和 $\tau_\beta^{\pm 1}(C_3) \subset \mathfrak{Y}^{13}$。

2.4.1 $\tau_\beta^{\pm 1}(C_1) \subset \mathfrak{Y}^{10}$

对于证明的这一部分，首先注意，对于所有 $\delta \in C_1$，我们有 $i(\delta, \beta) = 1$；还要注意，β 和集合 C_1 都在其轴“穿过”第二个与第三个亏格之间的反射同胚下保持不变（见第 1.3 小节和图 24）。因此，我们只需对一半曲线证明 $\tau_\beta^{\pm 1}(\delta) \in \mathfrak{Y}^{10}$（确保所用曲线要么在同一反射下保持不变，要么曲线及其像都属于同一刚性扩张）。更具体地说，我们只需证明 $\tau_\beta^{\pm 1}(\{\alpha_{1,2}, \alpha_{2,3}, \alpha_{3,4}, \alpha_{4,5}\}) \subset \mathfrak{Y}^{10}$。

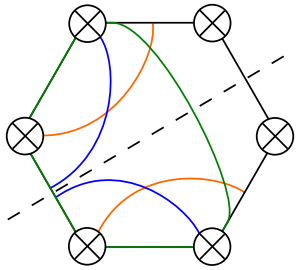


图 24：曲线 β 为绿色、$\{\alpha_{1,2}, \alpha_{4,2}\}$ 为蓝色、$\{\alpha_{3,4}, \alpha_{2,g}\}$ 为橙色。

为此，我们引入本节中将贯穿使用的辅助曲线。令 $1 \le i, j, k \le g$ 满足：i 和 j 在 $\mathbb{Z}/g\mathbb{Z}$ 中的循环序里不相邻。参见表2和图25。

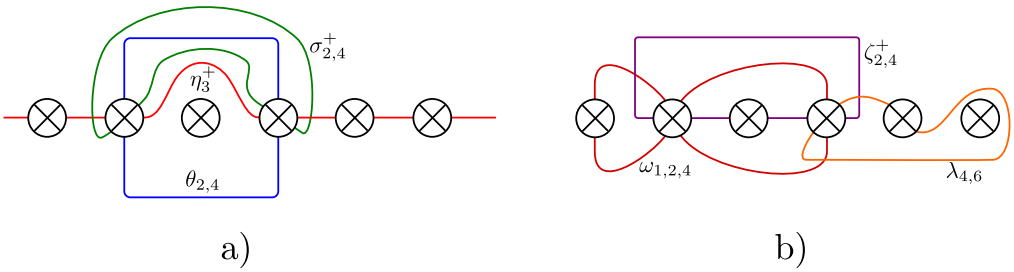


图25：表2中的曲线示例以及曲线 $\omega_{1,2,4}$。

辅助曲线	其并集所需的曲线集合 以唯一确定辅助曲线	针对该对象的第 k 次刚性扩张 辅助曲线
$\theta_{i,j}$	$\{\alpha_k:\ i\neq k\neq j\}$ $\{\eta\}$	7
$\sigma_{i,j}^{\pm}$	$\{\alpha_k:\ i\neq k\neq j\}$ $\{\alpha_{k,k+1}:\ i-1\neq k\neq i,\ \ j-1\neq k\neq j\}$ $\{\nu_{i-1,\ i+1}^{\mp},\nu_{j-1,\ j+1}^{\mp}\}$ $\{\theta_{i,j}\}$	8
$\eta_i^{\pm}$	$\{\alpha_i\}$ $\{\gamma_k:\ i-1\neq k\neq i\}$ $\sigma_{i-1,\ i+1}^{\pm}$	9
$\zeta_{i,j}^{\pm}$	$\{\alpha_k:\ k\notin\{i,\dots,j\}\}$ $\{\gamma_i,\dots,\gamma_{j-1}\}$ $\{\gamma_{j+1},\dots,\gamma_{i-2}\}$（如果 $i\neq j+2$） $\{\sigma_{i,j}^{\pm}\}\cup\{\varepsilon_{i-1,j}\}$	9
$\lambda_{i,i\pm2}$	$\{\alpha_k:\ i\neq k\neq i\pm1\}$ $\{\gamma_{i-1}\}\cup\{\gamma_{i+1},\dots,\gamma_{i-4}\}$（如果 $-$） $\{\gamma_i\}\cup\{\gamma_{i+3},\dots,\gamma_{i-2}\}$（如果 $+$） $\{\mu_{i,i\pm2}^{-}\}$	8

表2：本节使用的辅助曲线，其中所有下标均模 g。

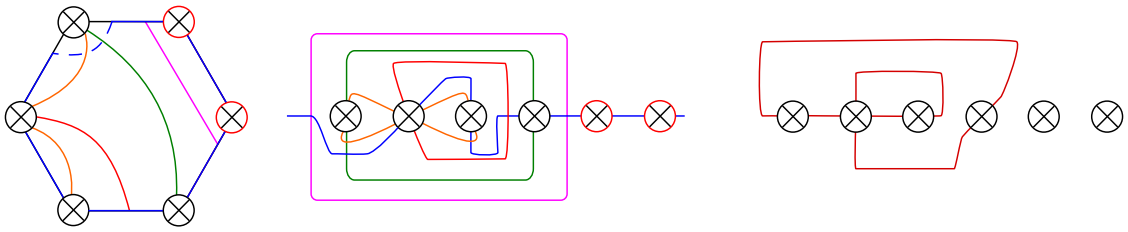
另一方面，令 $1\leq i,j,k\leq g$ 满足：$i<j<k$ 相对于 $\mathbb{Z}/g\mathbb{Z}$中的循环序。我们定义：

$$\omega_{i,j,k}=\langle\{\alpha_l:l\neq i,j,k\}\cup\{\alpha_{j,i-1},\alpha_{j,k}\}\cup\{\eta\}\rangle\in\mathfrak{Y}^7.$$

现在，要看出 $\tau_\beta^{\pm1}(C_1)\subset\mathfrak{Y}^{10}$，请参见表3

注意，在表3中，$\tau_\beta^{-1}(\alpha_{4,\ 5})$中有一条曲线 δ；该曲线 δ 的生成方式如下：

$$\delta=\langle\{\alpha_1\}\cup\{\alpha_5,\dots,\alpha_g\}\cup\{\alpha_{4,5},\alpha_{4,1}\}\cup\{\gamma_2\}\cup\{\gamma_6,\dots,\gamma_g\}\cup\{\lambda_{3,1}\}\rangle\in\mathfrak{Y}^9$$



a) b) c)

图26：（a）和（b）展示了从两个角度观察的、唯一确定$\tau_\beta(\alpha_{2,\ 3})$所需的曲线，这些曲线在（c）中展示。

2.4.2 $\tau_\beta^{\pm1}(C_2)\subset\mathfrak{Y}^{12}$

与前一小节类似，我们只需证明 $\tau_\beta^{\pm1}(\alpha_{5,\ 3})\in\mathfrak{Y}^{12}$，这是由于同样可以利用轴线“穿过”第二个和第三个的反射同胚

γ	A 对于 $\gamma = \langle A \rangle$	k 对于 $\gamma \in \mathfrak{Y}^k$
$\tau_\beta(\alpha_{1,\ 2})$	$\{\alpha_5, \ldots, \alpha_g\} \cup \{\alpha_{1,2}\}$ $\{\gamma_3\} \cup \{\gamma_5, \ldots, \gamma_{g-1}\}$ $\{\eta_3^+, \eta_4^-\} \cup \{\varepsilon_{4,g}\}$	10
$\tau_\beta^{-1}\ (\alpha_{1,\ 2})$	$\{\alpha_5, \ldots, \alpha_g\}$ $\{\gamma_3\} \cup \{\eta_2^+\} \cup \{\zeta_{1,3}^+\}$	8
$\tau_\beta(\alpha_{2,\ 3})$	$\{\alpha_5, \ldots, \alpha_g\} \cup \{\alpha_{2,3}\}$ $\{\theta_{1,4}\} \cup \{\omega_{1,2,3}\} \cup \{\eta_1^-\} \cup \{\varepsilon_{4,g}\}$	10
$\tau_\beta^{-1}\ (\alpha_{2,\ 3})$	$\{\alpha_5, \ldots, \alpha_g\} \cup \{\alpha_{2,3}\}$ $\{\theta_{1,4}\} \cup \{\omega_{1,2,3}\} \cup \{\eta_4^-\} \cup \{\varepsilon_{4,g}\}$	10
$\tau_\beta(\alpha_{3,\ 4})$	$\{\alpha_5, \ldots, \alpha_g\} \cup \{\alpha_{3,4}\}$ $\{\gamma_1\} \cup \{\gamma_5, \ldots, \gamma_{g-1}\}$ $\{\zeta_{2,4}^+, \zeta_{g,2}^-\}$	10
$\tau_\beta^{-1}\ (\alpha_{3,\ 4})$	$\{\alpha_5, \ldots, \alpha_g\}$ $\{\gamma_1\} \cup \{\omega_{2,3,4}\} \cup \{\theta_{3,5}\} \cup \{\eta_4^+\}$	10
$\tau_\beta(\alpha_{4,\ 5})$	$\{\alpha_4, \ldots, \alpha_g\}$ $\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_4\} \cup \{\zeta_{2,4}^+, \zeta_{g,2}^-\}$ $\{\gamma_6, \ldots, \gamma_{g-1}\}$ (如果 $g \geq 7$)	10
$\tau_\beta^{-1}\ (\alpha_{4,\ 5})$	$\{\alpha_5, \ldots, \alpha_g\} \cup \{\alpha_{4,5}, \alpha_{4\ g}\}$ $\{\gamma_1, \gamma_2\} \cup \{\delta\} \cup \{\zeta_{g,2}^-\}$ $\{\gamma_6, \ldots, \gamma_{g-1}\}$ (如果 $g \geq 7$)	10

表3: $\tau_\beta^{\pm 1}(C_1) \subset \mathfrak{Y}^{10}$。

亏格。注意，$\alpha_{5,\ 3} = \langle A_1 \cup A_2 \cup A_3 \rangle$，其中 $A_1 = \{\alpha_{2,3}, \alpha_{3,1}, \alpha_{2,g}, \alpha_{1,g-1}\}$、$A_2 = \{\alpha_{g,g-2}, \ldots, \alpha_{7,5}\} \subset \mathfrak{Y}^3$，以及 $A_3 = \{\omega_{4,5,6}\}$。于是，我们有：

- $A_1 \subset C_1$，以及
- $A_2 \subset \mathfrak{Y}^3$ 中的每条曲线都与 β不相交。

因此，$\tau_\beta^{\pm 1}(\alpha_{5,\ 3}) = \langle \tau_\beta^{\pm 1}(A_1) \cup \tau_\beta^{\pm 1}(A_2) \cup \tau_\beta^{\pm 1}(A_3) \rangle$。

鉴于 $\tau_\beta^{\pm 1}(A_1) \subset \mathfrak{Y}^{10}$（由于前一小节），且 $\tau_\beta^{\pm 1}(A_2) = A_2 \subset \mathfrak{Y}^3$，我们只需证明 $\tau_\beta^{\pm 1}(\omega_{4,\ 5,\ 6}) \in \mathfrak{Y}^{11}$。

再次注意，$\omega_{4,\ 5,\ 6} = \langle A_1 \cup A_2 \cup A_3 \rangle$ 满足 $A_1 = \{\alpha_{2,3}, \alpha_{2,g}, \alpha_{3,1}\}$、$A_2 = \{\eta\} \cup \{\alpha_{5,6}\} \subset \mathfrak{Y}^3$，且要么 A_3 为空（若 $g = 6$），要么 $A_3 = \{\alpha_7, \ldots, \alpha_g\} \subset \mathfrak{Y}^6$（若 $g \geq 7$）。

因此，$\tau_\beta^{\pm 1}(\omega_{4,\ 5,\ 6}) = \langle \tau_\beta^{\pm 1}(A_1) \cup \tau_\beta^{\pm 1}(A_2) \cup \tau_\beta^{\pm 1}(A_3) \rangle$。由于 $\tau_\beta^{\pm 1}(A_1) \subset \mathfrak{Y}^{10}$（由前一小节可知），且 $\tau_\beta^{\pm 1}(A_2 \cup A_3) = A_2 \cup A_3 \subset \mathfrak{Y}^6$，我们得到 $\tau_\beta^{\pm 1}(\omega_{4,\ 5,\ 6}) \in \mathfrak{Y}^{11}$。

2.4.3 $\tau_\beta^{\pm 1}(C_3) \subset \mathfrak{Y}^{13}$

如果 $g \geq 7$, C_3 为空。因此，本小节中我们假设 $g = 6$，从而 $C_3 = \{\nu_{5,7}^-\}$.

由于 $\tau_\beta^{\pm 1}(\nu_{5,\ 7}^-)$ 如图27所示，而第一作者对这些曲线怕得要命，因此我们采用与前一小节相同的策略。为此，我们先证明$\tau_\beta^{\pm 1}(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_4\}) \subset \mathfrak{Y}^{11}$ 以及 $\tau_\beta^{\pm 1}(\nu_{3,\ 6}^+) \in \mathfrak{Y}^{12}$。

- $\tau_\beta^{\pm 1}(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_4\}) \subset \mathfrak{Y}^{11}$: 对于每个 $1 \leq i \leq 4$，都存在集合 $A_1 \subset C_1$ 和 A_2，使得 $\alpha_i = \langle A_1 \cup A_2 \rangle$，且 A_2 中的每条曲线都与 β不相交。参见表4。

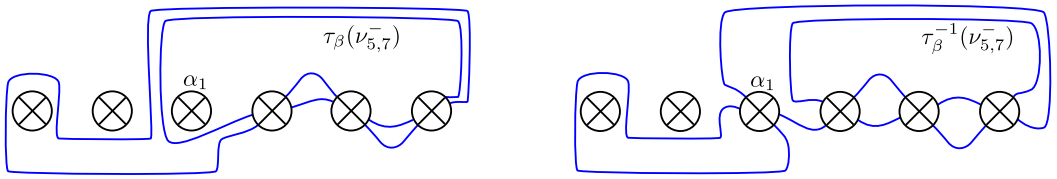


图27：曲线 $\tau_\beta(\nu_{5,7}^-)$ 和 $\tau_\beta^{-1}(\nu_{5,7}^-)$。

i	A_1	A_2
1	$\alpha_{3,1}, \alpha_{2,3}, \alpha_{3,4}, \alpha_{4,5}$	$\alpha_{5,6}, \alpha_{6,4}$
2	$\alpha_{2,g-1}, \alpha_{4,2}, \alpha_{3,4}$	$\alpha_{5,6}, \alpha_{6,4}, \theta_{1,3}$
3	$\alpha_{1,2}, \alpha_{1,g-1}, \alpha_{2,g}$	$\alpha_{5,6}, \alpha_{6,4}, \theta_{2,3}$
4	$\alpha_{2,3}, \alpha_{1,g-1}, \alpha_{2,g}, \alpha_{3,1}$	$\alpha_{5,6}, \alpha_{6,4}$

表4：第2.4.3小节中 $\alpha_i = \langle A_1 \cup A_2 \rangle$ 所需的集合 A_1 和 A_2。

- $\tau_\beta^{\pm 1}(\nu_{3,6}^+) \in \mathfrak{Y}^{12}$：令 $\delta = \langle \{\alpha_3, \ldots, \alpha_6\} \cup \{\gamma_1\} \cup \{\eta_5^+\} \rangle \in \mathfrak{Y}^{10}$；参见图28。于是，$\nu_{3,6}^+ = \langle A_1 \cup A_2 \rangle$ 其中 $A_1 = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_4\} \cup \{\alpha_{4,5}\}$ 且 $A_2 = \{\alpha_5, \alpha_6, \delta\}$。这意味着 $\tau_\beta^{\pm 1}(\nu_{3,6}^+) = \langle \tau_\beta^{\pm 1}(A_1) \cup \tau_\beta^{\pm 1}(A_2) \rangle = \langle \tau_\beta^{\pm 1}(A_1) \cup A_2 \rangle \in \mathfrak{Y}^{12}$。

现在，我们有 $\nu_{5,7}^- = \langle A_1 \cup A_2 \cup A_3 \rangle$，其中 $A_1 = \{\alpha_{3,1}, \alpha_{4,2}, \alpha_{2,3}, \alpha_{3,4}\} \subset C_1$，$A_2 = \{\alpha_1, \nu_{3,6}^+\}$ 且 $A_3 = \{\alpha_5, \alpha_6\}$。因此，$\tau_\beta^{\pm 1}(\nu_{5,7}^-) = \langle \tau_\beta^{\pm 1}(A_1) \cup \tau_\beta^{\pm 1}(A_2) \cup \tau_\beta^{\pm 1}(A_3) \rangle = \langle \tau_\beta^{\pm 1}(A_1) \cup \tau_\beta^{\pm 1}(A_2) \cup A_3 \rangle$。根据前一小节和上述论证，我们有 $\tau_\beta^{\pm 1}(A_1) \subset \mathfrak{Y}^{10}$ 且 $\tau_\beta^{\pm 1}(A_2) \subset \mathfrak{Y}^{12}$。因此，$\tau_\beta^{\pm 1}(\nu_{5,7}^-) \in \mathfrak{Y}^{13}$。

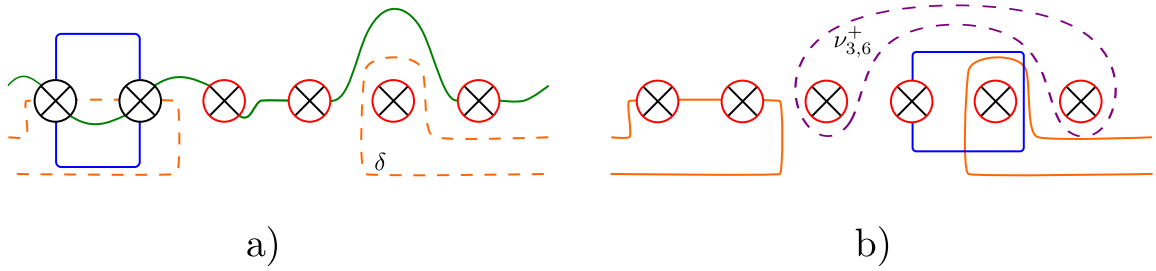


图28：（a）描绘了曲线 δ（橙色虚线）以及唯一确定该曲线所需的曲线；（b）描绘了曲线 $\nu_{3,6}^+$（紫色虚线）以及唯一确定该曲线所需的曲线。

3 定理B的证明

给定非定向曲面 N中的一条本质曲线 γ，令 N_γ 为沿 γ切开 N 后得到的曲面。

定理 B 的证明。令 N 为亏格 $g \geq 6$ 的连通非定向曲面，并令 γ为一条本质曲线。

假设 g 为奇数。若 γ 为单侧曲线，根据欧拉示性数可知， N_γ 是亏格为 $\frac{g-1}{2}$ 且有一个边界分支的可定向曲面，或是亏格为 $g-1$ 且有一个边界分支的非定向曲面。若 γ 为双侧非分离曲线，则 N_γ 是亏格为 $g-2$ 的非定向曲面。这意味着，在 Mod(N) 对 $\mathcal{C}(N)$ 的作用下，有两类单侧曲线，其代表元为 $\alpha_{1,\ 2} \in V(\mathfrak{Y})$ 和 $\eta \in V(\mathfrak{Y}^6)$（见引理 2.6 前的段落）；此外，还有一类双侧非分离曲线，其代表元为 $\gamma_1 \in V(\mathfrak{Y}^5)$（见引理 2.5）。

类似地，如果 g 为偶数，在 $\mathcal{C}(N)$ 上 Mod(N) 的作用下，我们有一类单侧曲线，其代表元为 $\alpha_{1,\ 2} \in V(\mathfrak{Y})$；以及两类双侧非分离曲线，其代表元分别为 $\gamma_1 \in V(\mathfrak{Y}^5)$ 和 $\eta \in V(\mathfrak{Y}^6)$。于是，由引理 1.3 和第 2 节可知，对于任意非分离曲线 $\gamma \in V(\mathcal{C}(N))$，存在 $k \in \mathbb{N}$ 使得 $\gamma \in V(\mathfrak{Y}^k)$；特别地，每条非分离曲线都是 $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathfrak{Y}^i$ 的一个元素。

现在设 γ 为一条分离曲线，我们知道，每条这样的曲线都可以由一个非分离曲线的有限集 C 唯一确定（我们可以用非分离曲线填充 N_γ 的每个分支）。我们知道，对于某个 $k \in \mathbb{N}$，有 $C \subseteq V(\mathfrak{Y}^k)$，因此 $\gamma \in V(\mathfrak{Y}^{k+1})$。所以， $\mathcal{C}(N) = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathfrak{Y}^i$。 □

令 B_1、 B_2 和 $\mathfrak{X}$ 为以下集合：

$$\begin{aligned} B_1 &= \{\alpha_i \mid 1 \le i \le g\} \cup \{\alpha_{i,j} \mid 1 \le i,j \le g,\ j \ne i,\ j \ne i-1\} \\ &\quad \cup \{\varepsilon_{i,j} \mid 1 \le i,j \le g,\ 2 \le |i-j| \le g-2\}, \end{aligned}$$

$$B_2 = \{\nu^+_{i,i+2}, \nu^-_{i,i+2} \mid 1 \le i \le g \ \text{ and } \ i+2 \text{ modulo } g\},$$

$$\mathfrak{X} = B_1 \cup B_2.$$

Irmak 证明了 $\mathfrak{X}$ 是一个具有平凡逐点稳定子的有限刚性集（见 [13] 中的引理 3.6）。

推论 C 的证明。 根据构造， $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}$，于是对任意 $k \in \mathbb{N}$，都有 $\mathfrak{Y}^k \subseteq \mathfrak{X}^k$。这意味着 $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathfrak{Y}^i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathfrak{X}^i$，因此 $\mathfrak{X}$ 是 $\mathcal{C}$ 的一个有限刚性种子子图（N）。 □

参考文献

[1] Javier Aramayona 和 Christopher J. Leininger. 曲线复形中的有限刚性集. *J. Topol. Anal.*, 5(2):183–203, 2013年.[2] Javier Aramayona 和 Christopher J. Leininger. 用有限刚性集穷尽曲线复形. *Pacific J. Math.*, 282(2):257–283, 2016年.[3] Ferihe Atalan 和 Mustafa Korkmaz. 不可定向曲面上曲线复形的自同构. *Groups Geom. Dyn.*, 8(1):39–68, 2014年.[4] Jason Behrstock 和 Dan Margalit. 曲线复形与映射类群的有限指数子群. *Geom. Dedicata*, 118:71–85, 2006年.[5] Benson Farb 和 Dan Margalit. 映射类群入门，普林斯顿数学丛书第49卷。普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，2012年.[6] W. J. Harvey. 模群的边界结构。载于黎曼曲面及相关主题：*1978*年石溪会议论文集（纽约州立大学，石溪，纽约，*1978*年），Ann. of Math. Stud. 第97卷，第245–251页。普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，1981年。

[7] Jesús Hernández Hernández. 曲线图的保边映射. *Topology Appl.*, 246:83– 105, 2018年.[8] Jesús Hernández Hernández. 通过刚性扩张穷尽曲线图. 《格拉斯哥数学杂志》, 61(1):195–230, 2019年.[9] Jesús Hernández Hernández. 低亏格曲面的图态射与曲线图的穷尽. *Proc. Edinb. Math. Soc. (2)*, 68(4):1018–1068, 2025年.[10] Elmas Irmak. 曲线复形的超单射单纯映射与映射类群子群的单射同态. 《拓扑学》, 43(3):513–541, 2004年.[11] Elmas Irmak. 不可定向曲面上曲线复形的超单射单纯映射. 《土耳其数学杂志》, 36(3):407–421, 2012年.[12] Elmas Irmak. 非分离曲线图的保边映射、曲线图以及 Hatcher-Thurston 图的保矩形映射. 《结理论及其分支》, 29(11):2050078, 41, 2020年.[13] Elmas Irmak. 用有限刚性集穷尽不可定向曲面上的曲线复形. *J.Topol. Anal.*, 16(2):261–289, 2024年.[14] Nikolai V. Ivanov. 曲线复形与 Teichmüller 空间的自同构. *Inter-nat. Math. Res. Notices*, (14):651–666, 1997年.[15] Mustafa Korkmaz. 带 puncture 的球面和带 puncture 的环面上曲线复形的自同构. *Topology Appl.*, 95(2):85–111, 1999年.[16] W. B. R. Lickorish. 不可定向二维流形的同胚. 《剑桥哲学会会刊》, 59:307–317, 1963年.[17] Feng Luo. 曲线复形的自同构. 《拓扑学》, 39(2):283–298, 2000 年 .[18]Kenneth J. Shackleton. 曲线复形与映射类群中的组合刚性 . *Pacific J. Math.*, 230(1):217–232, 2007年.[19] Michał Stukow 和 Błażej Szepietowski. 不可定向曲面裤子图的自同构。arXiv:2507 预印本。12613 [math.GT].[20] Błażej Szepietowski. 关于三孔射影平面曲线复形的一则注记. 《数学通讯》, 25(2):289–296, 2020年.[21] Błażej Szepietowski. 不可定向曲面的映射类群由三个元素以及四个对合生成. *Geom. Dedicata*, 117:1–9, 2006年。

JesúsHernández
H
e
r
n
ándezjhdez@matmor.unam.mxhttps://sites.google.com/site/jhdezhdez/
数学科学中心，墨西哥国立自治大学，莫雷利亚，米却肯州 *58190*，墨西哥
CristhianE. Hidber

hidber@matmor.unam.mxhttps://sites.google.com/view/cristhian-e-hidber数学科学中心，墨西哥国立自治大学，墨西哥国立自治大学，莫雷利亚，米却肯州 *58190*，墨西哥