arXiv:2603.14746v1 [quant-ph] 16 Mar 2026

投影游戏的近乎完美策略近似为迹型

Eric Culf

滑铁卢大学

摘要

投影游戏构成了一类重要的非局域游戏，其中，对于第一位玩家给出的任意答案，第二位玩家都有唯一正确的答案。这类博弈涵盖了源自约束满足问题、预言机化和唯一博弈的非局域游戏。然而，由于玩家之间的不对称性，投影游戏通常不是同步游戏，因此限制同步游戏近乎完美策略结构的强有力结果并不适用。在这项工作中，我们将 Marrakchi 和 de la Salle 的结果 [MdlS23] 应用于同步游戏，以证明在量子模型和对易算子模型中，任何在投影游戏中以概率 $1-\varepsilon$ 获胜的策略，都会导出一个以概率 $1-O((L\varepsilon)^{1/4})$ 获胜的迹策略，其中 L 是给定第一位玩家的问题时，第二位玩家的问题被抽样到的最小条件概率的倒数。对于约束系统博弈，这通过消除对约束数量的依赖并改善对约束大小的依赖，加强了 Paddock 的舍入结果 [Pad22]，同时还推广到了对易算子情形。

1 引言

在非局域游戏中，裁判向互不通信的玩家 Alice 和 Bob 发送问题，玩家向裁判提供答案；如果问题和答案满足预先设定的谓词函数，玩家便获胜。如果玩家将纠缠态作为其策略的一部分共享，他们往往能够以更高的概率获胜 [CHTW04]。

投影游戏是一类结构良好的博弈，长期以来一直是经典近似算法领域的研究对象。对于给定的一对问题，如果针对 Alice 的任一答案，Bob 至多存在一个正确答案，则该非局域游戏就是投影游戏。已知投影游戏满足强并行重复性质 [Rao08，DS14], 这一性质也可推广到量子情形 [DSV15]。

投影游戏的一个启发性例子出现在约束系统（CS）这一背景下。约束系统由变量以及定义在变量子集上的一组约束构成，这些约束取值于某个字母表；当变量被赋予该字母表中的值时，所有约束都应得到满足。许多自然的计算问题，例如图着色，都可以表述为约束系统。

将约束系统表示为非局域游戏有两种自然的方式。我们将第一种称为约束-变量框架，沿用 Culf 和 Mastel 的记号 [CM24]；这是最初的框架，由 Cleve 和 Mittal 提出 [CM14]。在这一框架中，裁判根据约束系统上的给定概率分布抽取一个约束，并从该约束中均匀抽取一个变量。Alice 获得该约束，并需给出一个满足赋值；Bob 获得该变量，并需给出字母表中的一个元素。如果 Bob 的赋值与 Alice 的赋值一致，他们便获胜。由于 Bob 的正确答案是与其变量相对应的唯一一致赋值，这种表示方式构成一个投影游戏。

还有第二种表述，见于 [Ark12、PS25、MS24], ，我们称之为约束-约束框架。在这里，裁判根据某个概率分布抽取两个约束，并分别交给两位玩家。然后，Alice 和 Bob 必须分别给出满足各自约束的赋值。如果这些赋值在所有重叠变量上都一致，他们就获胜。不过，这种表述并非投影游戏。

两种框架在完美策略上是一致的，也就是说，如果在某一种框架下存在经典、量子或对易算子策略，能以概率1 获胜，那么在另一种框架下也存在能以概率1 获胜的策略 [CM24]。然而，对于一般的（非完美）策略，两者有所不同，因此在使用任一框架时各有利弊。例如，与约束-变量框架不同，约束-约束框架中的博弈对两位玩家是对称的。另一方面，约束-变量框架通过 Bob 的算子，为约束系统中的每个变量提供全局算子表示；而在约束-约束框架中，只有与各个约束相对应的局部表示。

重要的是，CS 的约束-约束博弈是同步游戏。在同步游戏中，玩家双方的问题分布是对称的；每当他们收到相同的问题时，只有给出相同的答案才能获胜 [PSS$^+$16]。谓词上的这一简单条件，最终对完美策略的代数结构施加了严格限制。特别是，任何同步量子关联都可以表示为迹关联，其中 Alice 和 Bob 的算子在同一个希尔伯特空间上建模，并相对于一个迹态定义。事实上，假设游戏通过一致性检查以高概率检验同步条件，那么近乎完美量子关联就接近迹关联 [Vid22]。这一结论也已推广到无限维情形下的一般对易算子关联 [MdlS23]。文献 [Lin23]研究了对易算子模型中的另一种方法。

在约束-变量框架中，情况也惊人地相似。事实上，由于 [CM14、ABdSZ17], ，人们已知完美量子策略也可以表示为迹关联。此外，近乎完美量子策略接近迹策略，而且这种结论具有很强的意义：近乎完美策略的算子可以舍入为迹策略的算子 [Pad22]。然而，这种舍入引入的误差无法随问题和答案的规模良好缩放——它随约束数量呈多项式增长，随每个约束中的变量数量呈指数增长。

这种缩放会导致一些问题：在博弈的显式策略与仅处理迹关联更有利的设置（例如加权代数形式化 [MS24，CM24]）之间进行转换时便是如此。一种绕开此问题的方法是通过对称化概率分布并添加一致性检查来使博弈同步，但这相当不优雅且缺乏系统性。

在预言机化的背景下也会出现类似的情况。非局域游戏的预言机化 会将其转换为一种新游戏，在这种游戏中，两位玩家中的一位知道完整的输出

在采用完美策略的情况下，这种做法会产生相应的统计数据。这一点在非局域游戏的应用中往往十分重要 [JNV+21]。一种简单的实现方式是向 Alice 提出两个问题，并随机向 Bob 提出其中一个问题。为了保证策略良好的迹型形式得以保留，先前的研究采用了一种稍复杂的预言机化版本，该版本会产生一个同步游戏 [JNV+21，MS24]。

在这项工作中，我们将 [MdlS23] 的技术推广到投影游戏的情形。更准确地说，我们证明如下结果：

主定理（定理 6.1及推论 6.5和6.6）。假设某个对易算子关联在约束-变量 CS 游戏中的获胜概率为 $1-\varepsilon$。那么，存在一个迹关联，其获胜概率至少为 $1-O((L\varepsilon)^{1/4})$，其中 L 是 Bob 的问题在给定 Alice 的某个问题条件下的最小概率的倒数。此外，如果原关联是量子的（即有限维的），那么该迹关联也是如此。

这一结果与同步游戏的类似结果之间，唯一的区别在于对条件问题概率存在逆多项式依赖。对于 CS 游戏而言，这恰好就是最大上下文大小。这是因为 Alice 的答案长度可能远长于 Bob 的答案长度，因为投影函数只需将 Alice 的答案映射到 Bob 的答案。因此，在证明中，需要将对应于 Bob 每个可能问题的 Alice 测量拼接起来，以得到联合测量的性质，这就引入了对 Bob 的问题中概率最低者的概率依赖。在这种情形下，是否必须依赖上下文大小仍是一个开放问题。不过，对于我们所关注的约束变量 CS 游戏的应用，例如 [CM24], 中的约束满足问题，上下文大小是常数，因此获胜概率为 $1-O(\varepsilon^{1/4})$。预言机化也同样如此。

为证明我们的主要结果，我们采用了 [Vid22]中引入、并在 [MdlS23]中进一步发展的技巧。在这些工作中，Alice 和 Bob 的测量算子是在它们所生成的冯·诺依曼代数这一背景下研究的，其中使用 Connes 引理 [Con76]（对于对易算子情形，则使用其广义版本 [MdlS23]），将测量转化为冯·诺依曼代数中的测量，使共享态成为迹型。为了在本文中应用这一结果，我们需要证明，联合可测的近投影测量存在一个近投影的联合测量。这样便能将 Alice 和 Bob 的测量舍入为投影。必须完成这一步，才能将关于 Alice 对每个变量的测量的性质，转化为关于她对每个约束所作联合测量的性质。

展望 许多关于非局域游戏的研究都借助游戏的同步形式，来简化完美策略的结构 [JNV+21、MS24、CM24]。然而，我们证明，投影游戏也具有类似的性质；而众所周知，投影游戏还满足指数级并行重复等强性质 [DSV15], ，这为简化非局域游戏的处理提供了途径。

投影游戏和同步游戏构成了两大类非局域游戏，在这些游戏中，完美策略以一种稳健的方式呈现为迹型。是否还有其他有意义的例子也会出现这种情况?

概述 在第2节中，我们介绍本研究所需的冯·诺依曼代数理论背景；在第3节中，我们回顾非局部

博弈，并研究投影游戏的一些基本性质。接下来，在第4节中，我们将 [CM14、ABdSZ 17] 关于完美量子策略结构的结果推广到投影游戏。在第5节中，我们将上一节的结果推广到对易算子关联的情形。在第6节中，我们证明量子情形和对易算子情形下的主要结果。最后，在第7节中，我们讨论主要结果在约束系统（CS）游戏和预言机化中的意义。

致谢 作者谨此感谢 Archishna Bhattacharyya 提供的宝贵评论与讨论，并感谢 Connor Paddock 对本手稿早期版本提出的有益意见。作者获得了加拿大 NSERC 的 CGS D 奖学金资助。

2 数学预备知识

2.1 记号

对于 $m \in \mathbb{N}$，记作 $[m] = \{1, 2, \ldots, m\} \subseteq \mathbb{N}$。我们将笛卡尔积 $A_1 \times \cdots \times A_n$ 用粗体表示为 $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$。

我们只考虑定义在有限集上的概率分布；在这种情况下，可以用其概率密度函数表示概率分布 π 在 X 上的取值，我们将其记为 $\pi\colon X \to [0,1]$。对于某个函数 $f\colon X \to \mathbb{C}$，我们将其期望值记为 $\mathbb{E}_{x\leftarrow\pi} f(x) = \sum_{x\in X} \pi(x) f(x)$。

对于有限维希尔伯特空间 $H = \mathbb{C}^n$，我们总是固定一个标准基 $\{|i\rangle \mid i = 1, \ldots, n\}$。希尔伯特空间 H 上以（有限）集合 A 为结果集的正算子值测量（*POVM*）是一组正算子 $\{P_a\}_{a\in A} \subseteq \mathcal{B}(H)$，满足 $\sum_{a\in A} P_a = 1$。如果此外所有 P_a 都是投影，则 $\{P_a\}_{a\in A}$是投影值测量（*PVM*）。在这种情况下$P_a P_{a'} = \delta_{a,\,a'} P_a$。我们将两个元素 $A,\ B \in \mathcal{B}(H)$的对易子记为 $[A, B] = AB - BA$。给定有限集 $I_1, \ldots, I_n$和一个 POVM $\{A_{\boldsymbol{i}}\}_{\boldsymbol{i}\in I_1\times\cdots\times I_n}$，我们记

$$A_i^j = \sum_{\boldsymbol{i}\in\prod_k I_k\colon\, i_j = i} A_{\boldsymbol{i}}.$$

注意，$\{A_i^j\}_{i\in I_j}$是一个 POVM。反过来，如果存在一个 POVM $\{A_{\boldsymbol{i}}\}$，称为联合测量，使得 $A_i^j = \sum_{\boldsymbol{i}\colon\, i_j = i} A_{\boldsymbol{i}}$，则称 POVM $\{A_i^1\}$、…、$\{A_i^n\}$ 是联合可测的。

2.2 冯·诺依曼代数

冯·诺依曼代数 $\mathcal{M}$ 是某个希尔伯特空间 H 上的 $*$-子代数 $\mathcal{B}(H)$，并且在弱-$*$ 拓扑下闭。我们始终假设 $\mathcal{H}$ 是可分的。等价地，$\mathcal{M}$ 是一个关于双重对易子封闭的 $*$-子代数，其中集合 $S \subseteq \mathcal{B}(H)$ 的对易子 是 $S' = \{x \in \mathcal{B}(H) \mid [x, s] = 0\ \forall\ s \in S\}$。更抽象地说，冯·诺依曼代数是某个巴拿赫空间的对偶，称为前对偶，记作 $\mathcal{M}_*$。作为一个 C^*-代数，$\mathcal{M}$ 配备了一个正锥 $\mathcal{M}_+ = \{x^* x \mid x \in \mathcal{M}\}$。

冯·诺依曼代数上的一个权 是一个映射 $\tau\colon \mathcal{M}_+ \to [0, \infty]$，满足 $\tau(x + y) = \tau(x) + \tau(y)$，并且对所有 $x, y \in \mathcal{M}_+$和 $\lambda \geq 0$ 均有 $\tau(\lambda x) = \lambda\tau(x)$（其中取 $0 \cdot \infty = 0$）。如果对所有 $x \in \mathcal{M}$ 都有 $\tau(x^* x) = \tau(x x^*)$，则称该权为迹型，此时它称为迹。一个权

若对每个强算子拓扑收敛的递增网 $(x_\alpha)_\alpha$（其中 $\mathcal{M}_+$）均有 $\lim_\alpha \tau(x_\alpha) = \tau(\lim_\alpha x_\alpha)$，则称其为正规。若 $\tau(x) = 0$ 当且仅当 $x = 0$，则称该权为忠实。若 $\tau(1) < \infty$，则称该权为有限；此时 $\infty \notin \mathrm{im}\ \mathcal{M}_+$，且 τ 可以扩展为定义在整个 $\mathcal{M}$ 上的正线性泛函。满足 $\tau(1) = 1$ 的有限权称为态；对于一个态，正规等价于它可以具体地表示为希尔伯特空间上的态的 GNS 表示。若对每个 $x \in \mathcal{M}_+$，都存在一个递增网 $(x_\alpha)_\alpha$（其中 $\mathcal{M}_+$），使得 $\lim_\alpha x_\alpha = x$ 在强算子拓扑下成立，并且对所有 α 都有 $\tau(x_\alpha) < \infty$，则称该权为半有限。

2.3 非交换 L^p 空间

在 第 5 节和 第 6 节中，我们使用 Haagerup 的非交换 L^p 空间 [Haa79、Ter81],，用于 [MdlS23] 中的同步游戏。

设 $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{B}(H)$ 为一个冯·诺依曼代数。根据 Tomita-Takesaki 理论 [Tak03]，，存在唯一的（在同构意义下）冯·诺依曼代数 $c(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{B}(c(H))$，称为$\mathcal{M}$的核心，并配备一个正规忠实半有限迹 τ、一个连续群同态 $\theta\colon \mathbb{R} \to \mathrm{Aut}(\mathcal{M})$，以及一个嵌入 $\iota\colon \mathcal{M} \hookrightarrow c(\mathcal{M})$，满足 $\mathrm{im}\ \iota = \{x \in \mathcal{M} \mid \theta_s(x) = x\ \forall s \in \mathbb{R}\}$和 $\tau \circ \theta_s = e^{-s}\tau$。

设 $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{B}(H)$ 为一个带有正规忠实半有限迹 τ 的冯·诺依曼代数。若无界算子 y 在 H 上伴随 于 $\mathcal{N}$，则对所有 $x \in \mathcal{N}'$ 都有 $yx \subseteq xy$。如果一个闭稠密定义的 y 伴随于 $\mathcal{N}$ τ，且满足-可测 条件，即对所有 $\delta > 0$，都存在一个投影 $p \in \mathcal{N}$，使得 $\mathrm{im}\ p \subseteq D(y)$ 且 $\tau(1-p) < \delta$，则称其为-可测。关联算子集合在强和与强积运算下构成一个 $*$-代数；也就是说，算子的通常和与积是可闭的，我们将这些运算的强版本定义为各自的闭包。该集合带有一个豪斯多夫拓扑，并且相对于此拓扑，$\mathcal{N}$ 稠密。

对于 $p \geq 1$，定义 $L^p(\mathcal{M})$ 为所有与 $c(\mathcal{M})$ 关联的 τ-可测算子中满足以下条件的集合：对于所有 s，它们都是 θ_s 的 $e^{-s/p}$-特征向量。映射 $x \mapsto \|x\|_p = \tau(\chi_{(1,\infty)}(|x|))^{1/p}$ 是一个范数，且相对于该范数，$L^p(\mathcal{M})$ 是完备的。我们有自然的恒等识别 $L^\infty(\mathcal{M}) \cong \mathcal{M}$，$L^1(\mathcal{M}) \cong \mathcal{M}_*$。对于 $x \in L^1(\mathcal{M})$，定义 $\mathrm{tr}(x) = \varphi(1)$，其中 $\varphi \in \mathcal{M}_*$ 是与 x 对应的泛函。tr 是 $L^1(\mathcal{M})$ 上的线性泛函，满足对于 $x \in L^p(\mathcal{M})$ 和 $y \in L^q(\mathcal{M})$，若 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$，则 $\mathrm{tr}(xy) = \mathrm{tr}(yx)$。我们可以将 p-范数写为 $\|x\|_p = \mathrm{tr}(|x|^p)^{1/p}$；因此，对于正的 $x \in L^1(\mathcal{M})$，有 $\mathrm{tr}(x) = \tau(\chi_{(1,\infty)}(x))$。我们可以在 $L^2(M)$ 上定义内积 $\langle x, y\rangle = \mathrm{tr}(x^*y)$，从而使其成为一个希尔伯特空间。

例 2.1。为了说明这一构造，考虑 $\mathcal{M} = \mathrm{M}_n$ 的情形。在这种情况下，我们只需取 $c(H) = L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^n$ 和 $c(\mathcal{M}) = L^\infty(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{M}_n$，即实数直线上的有界可测矩阵值函数空间。在这种情况下，$\theta_s(x)(t) = x(t-s)$，而迹 $\tau(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Tr}(x(t))e^{-t}dt$，其中 Tr 是 M_n 上通常的迹。与$c(\mathcal{M})$相伴的无界算子是可测函数 $\mathbb{R} \to \mathrm{M}_n$；并且它们全都是 τ-可测的。$L^p(\mathcal{M})$ 由满足 $x(t) = x(0)e^{t/p}$ 的 τ-可测 x 构成；因此在这种情况下，对所有 p，$L^p(\mathcal{M})$ 都与 M_n 同构。同构 $L^1(\mathcal{M}) \to \mathcal{M}_*$ 由 $x \mapsto \mathrm{Tr}(\cdot x(0))$给出，因此 $\mathrm{tr}(x) = \mathrm{Tr}(x(0))$。这种情况下的 p-范数可化为 Schatten 范数。对任何有限冯·诺伊曼代数，同样的结论也成立。

3 非局域游戏

定义 3.1。一个非局域游戏 是一个元组 $G=(I,J,\{A_i\}_{i\in I},\{B_j\}_{j\in J},\mu,V)$，其中 I,J,A_i,B_j是有限集，分别表示问题集和答案集；μ 是 $I\times J$ 上的一个概率分布，表示问题分布；而 $V:\bigcup_{(i,j)\in I\times J}\{(i,j)\}\times A_i\times B_j\to\{0,1\}$ 是一个函数，称为谓词函数，表示正确答案。

非局域游戏的策略由一个关联、一个函数 $c:\bigcup_{(i,j)\in I\times J}\{(i,j)\}\times A_i\times B_j\to[0,1]$ 给出，使得对于所有 $i\in J$ 和 $j\in J$，$c(\cdot,\cdot|i,j)$ 都是一个概率分布。

- c 是量子关联，如果存在有限维希尔伯特空间 H_A 和 H_B、对于所有 $i\in I$、$j\in J$ 的 POVM $\{A_a^i\}_{a\in A_i}\subseteq\mathcal{B}(H_A)$ 和 $\{B_b^j\}_{b\in B_j}\subseteq\mathcal{B}(H_B)$，以及一个单位向量 $|\psi\rangle\in H_A\otimes H_B$，使得 $c(a,b|i,j)=\langle\psi|A_a^i\otimes B_b^j|\psi\rangle$。
- c 是对易算子 关联，如果存在一个希尔伯特空间 H、POVM $\{A_a^i\}_{a\in A_i}\subseteq\mathcal{B}(H)$ 和 $\{B_b^j\}_{b\in B_j}\subseteq\mathcal{B}(H)$，以及一个单位向量 $|\psi\rangle\in H$，使得对于所有i,j,a,b，$[A_a^i,B_b^j]=0$，并且 $c(a,b|i,j)=\langle\psi|A_a^iB_b^j|\psi\rangle$。
- c是一个迹型关联，如果存在一个冯·诺依曼代数 $\mathcal{M}\subseteq\mathcal{B}(H)$、投影值测度 $\{A_a^i\}_{a\in A_i}\subseteq\mathcal{M}$ 和 $\{B_b^j\}_{b\in B_j}\subseteq\mathcal{M}$，以及一个正规迹态 $\tau:\mathcal{M}\to\mathbb{C}$，使得 $c(a,b|i,j)=\tau(A_a^iB_b^j)$。

关联 c 在非局域游戏 G 中的获胜概率为

$$\mathfrak{w}_G(c)=\mathop{\mathbb{E}}_{(i,j)\leftarrow\mu}\sum_{a\in A_i,b\in B_j}V(a,b|i,j)c(a,b|i,j).$$

如果 $\mathfrak{w}_G(c)=1$，我们称 c 为一个完美策略。

一个标准事实是，每个迹关联都是一种交换算子关联，这是通过取 $\mathcal{M}$ [Haa75] 的标准形式得到的。此外，如果 H 是有限维的，那么 c 也是一种量子关联。

定义 3.2。如果对于所有的$i\in I$和 $j\in J$，都存在一个函数 $p_{i,j}:A_i\to B_j$，使得 $V(a,b|i,j)=\delta_{b,p_{i,j}(a)}$，则称非局域游戏 $G=(I,J,\{A_i\}_{i\in I},\{B_j\}_{j\in J},\mu,V)$ 为投影游戏。

现在，我们引入一个简单的新定义，以帮助我们控制投影游戏的结构。

定义 3.3。我们称投影游戏 G 是非退化的，如果函数 $p_i:A_i\to\prod_{j\in J:B_{j\mu(i,j)>0}}$

定义为 $p_i(a)=(p_{i,j}(a))_j$ 对所有 $i\in I$都是单射。

上文提到的投影游戏的主要例子——约束变量 CS 游戏和预言机化——总是非退化的。

如果一个博弈是退化的，那么无论 Alice 给出什么答案 a，她都可以自由选择 $p_i^{-1}(p_i(a))$ 中的任意元素，而不影响获胜概率。这可能会给确定玩家行为带来一些问题。不过，我们总能将问题化归为非退化投影游戏的情形，同时保留该博弈的重要性质。

˜**引理 3.4.** 设 G 是一个投影游戏。那么，存在一个非退化投影游戏 $G^{\tilde{}}$，使得对于 G 的每个关联 c，都存在 G 的一个关联 $\tilde{c}$，满足 $\mathfrak{w}_G(c) = \mathfrak{w}_{\tilde{G}}(\tilde{c})$，反之亦然。此外，从 c 到 $\tilde{c}$ 以及从 $\tilde{c}$ 到 c 的映射保留量子、对易算子和迹关联这几类关联。

尽管与本文无关，这些映射在构造上也保留了所有其他自然的（对经典后处理封闭的）关联类别，尤其是经典关联、无信号关联以及 NPA 层级的各个层级。

˜证明。设 $A_i \subseteq A_i$ 为由 p_i 诱导的 A_i 划分的一组代表元——也就是说，对于˜每个 $a \in A_i$，都存在唯一的 $\tilde{a} \in A_i$ 使得 $p_i(\tilde{a}) = p_i(a)$。于是，我们可以将 V定义为 V在$\bigcup_i$上的限制，$_j\{(i,j)\} \times A_i \times B_j$，并定义非局域游戏 $G = (I, J, \{A_i\}_{i\in I}, \{B_j\}_{j\in J}, \mu, V)$。根据定义，这是一个投影游戏，其投影函数为 $\tilde{p}_{i,j} = p_{i,j}|_{\tilde{A}_i}$。现在，设 c 是 G的一个关联。定义 $\tilde{c}$为关联 $\tilde{c}(a,b|i,j) = \sum_{a'\in p_i^{-1}(p_i(a))} c(a',b|i,j)$。由于 $\tilde{c}$是由 c经由对 Alice 系统进行经典后处理得到的，该映射保留量子、对易算子和迹关联。它也保留获胜概率，因为

$$\begin{aligned}
\mathfrak{w}_{\tilde{G}}(\tilde{c}) &= \mathop{\mathbb{E}}_{(i,j)\leftarrow\mu} \sum_{a\in\tilde{A}_i, b\in B_j} \tilde{V}(a,b|i,j)\tilde{c}(a,b|i,j) \\
&= \mathop{\mathbb{E}}_{(i,j)\leftarrow\mu} \sum_{a\in\tilde{A}_i, b\in B_j} \tilde{c}(a,p_{i,j}(a)|i,j) \\
&= \mathop{\mathbb{E}}_{(i,j)\leftarrow\mu} \sum_{a\in\tilde{A}_i, b\in B_j} \sum_{a'\in p_i^{-1}(p_i(a))} c(a',p_{i,j}(a)|i,j) \\
&= \mathop{\mathbb{E}}_{(i,j)\leftarrow\mu} \sum_{a'\in A_i, b\in B_j} c(a',p_{i,j}(a')|i,j) \\
&= \mathfrak{w}_G(c).
\end{aligned}$$

˜反过来，设 $\tilde{c}$ 是 G的一个关联。然后，定义 G 上的关联 c 如下：当 $a \in A_i$时，$c(a, b|i, j) = \tilde{c}(a, b|i, j)$；否则，$= 0$ $c(a, b|i, j)$。与之前一样，很容易看出，这个映射保持量子关联、对易算子关联和迹关联。最后，它保持获胜概率，具体为

$$\begin{aligned}
\mathfrak{w}_G(c) &= \mathop{\mathbb{E}}_{(i,j)\leftarrow\mu} \sum_{a\in A_i, b\in B_j} V(a,b|i,j)c(a,b|i,j) \\
&= \mathop{\mathbb{E}}_{(i,j)\leftarrow\mu} \sum_{a\in\tilde{A}_i, b\in B_j} \tilde{V}(a,b|i,j)\tilde{c}(a,b|i,j) \\
&= \mathfrak{w}_{\tilde{G}}(\tilde{c}).
\end{aligned}$$

■

在本文的大部分内容中，我们假设讨论的是非退化投影游戏，但利用上述引理，我们可以保证主要结果对退化游戏也成立。

4 完美量子情形

在本节中，我们将 [CM14、ABdSZ17] 关于约束—变量约束系统博弈中的完美关联是迹型的结果，推广到一般投影游戏的情形。我们使用冯·诺依曼代数的语言来表述证明，并在本文其余部分沿用这一语言。

引理 4.1 (例如 [ABdSZ17])。 设 c 是一个量子关联。那么，存在一个有限维希尔伯特空间 $H = \mathbb{C}^d$、POVM $\{P_a^i\}_{a\in A_i} \subseteq \mathcal{B}(H)$ 和 $\{Q_b^j\}_{b\in B_j} \subseteq \mathcal{B}(H)$，以及一个单位向量 $|\phi\rangle = \sum_{n=1}^d \lambda_n |n\rangle|n\rangle \in H \otimes H$，满足 $\lambda_n > 0$，使得 $c(a, b|i, j) = \langle\phi|P_a^i \otimes Q_b^j|\phi\rangle$。

证明。 由于 c 是一个量子关联，存在一些有限维希尔伯特空间 H_A, H_B、POVM $\{A_a^i\}_{a\in A_i} \subseteq \mathcal{B}(H_A)$、$\{B_b^j\}_{b\in B_j} \subseteq \mathcal{B}(H_B)$，以及单位向量 $|\psi\rangle \in H_A \otimes H_B$，使得$c(a, b|i, j) = \langle\psi|A_a^i \otimes B_b^j|\psi\rangle$。令 $|\psi\rangle = \sum_{n=1}^d \lambda_n|\psi_n\rangle|\phi_n\rangle$ 为$|\psi\rangle$的施密特分解，其中 d 是 $|\psi\rangle$ 的施密特秩。于是，对于 $H = \mathbb{C}^d$，定义等距映射 $U\colon\ H \to H_A$ 和$V\colon\ H \to H_B$，分别为 $U = \sum_n |\psi_n\rangle\langle n|$和 $V = \sum_n |\phi_n\rangle\langle n|$。令 $P_a^i = U^* A_a^i U$和 $Q_b^j = V^* B_b^j V$，可得

$$c(a, b|i, j) = \langle\psi|A_a^i \otimes B_b^j|\psi\rangle = \langle\phi|(U \otimes V)^*(A_a^i \otimes B_b^j)(U \otimes V)|\phi\rangle = \langle\phi|P_a^i \otimes Q_b^j|\phi\rangle\,. \quad \blacksquare$$

在本节的主定理中，我们将使用以下结果。

命题 4.2 ([HRS08])。 设 $\{A_i^1\}$、...、$\{A_i^n\}$ 是联合可测投影值测度。则联合测量 $A_{i_1\ldots i_n} = A_{i_1}^1 \cdots A_{i_n}^n$ 和 $\{A_{i_1,\ldots,i_n}\}_{i_1,\ \ldots i_n}$ 是一个投影值测度。

注意，上述命题与维数无关。

定理 4.3。 设 $G = (I,\ J,\ \{A_i\}_{i\in I},\ \{B_j\}_{j\in J},\ \mu,\ V)$是一个非退化投影游戏，并设 $c(a,\ b|i,\ j) = \langle\phi|P_a^i \otimes Q_b^j|\phi\rangle$是 G的一种量子关联，其形式由引理 4.1保证。假设 c 是 G的一个完美策略。定义 $D = \sum_{n=1}^d \lambda_n\,|n\rangle\langle n|$。于是，我们有

- P_a^i 和Q_b^j 是投影
- D 与 P_a^i 和 Q_b^j 对易
- $P_a^i(Q_b^j)^T = 0$ 当且仅当$p_{i,\ j}(a) \neq b$。

该定理已针对约束变量 BCS 游戏在 [CM14] 中的情形得到证明；对于一般字母表上的约束变量 BCS 游戏，则在 [ABdSZ17]中得到了证明。

证明。要使 c完美，我们需要 $c(a, b|i, j) = 0$当 $V(a, b|i, j) = 0$时成立。因此，$\langle\phi|P_a^i \otimes Q_b^j|\phi\rangle = 0$ 若p_i，则$j(a) \neq b$。在这种情况下，我们有 $\sqrt{P_a^i \otimes Q_b^j}|\phi\rangle = 0$，这意味着$(P_a^i \otimes Q_b^j)|\phi\rangle = 0$。将其改写为矩阵形式，得到 $P_a^i D(Q_b^j)^T = 0$。设 $P^{i,}{}_b = \sum_{a\in p_i^{-1},j(b)} P_a^i$。对所有$b \neq p_i$求和$j(a)$，可得 $P_a^i D(1 - (Q_b^j)^T) = 0$，若$b = p_i,j(a)$。接着，对满足$p_i$的$a$ 求和$j(a) = b$，可得 $P^{i,}{}_b{}^j D(Q_b^j)^T = P^{i,}{}_b{}^j D$。另一方面，对满足$p_i$的那些$a$ 求和$j(a) \neq b$，可得$(1 - P^{i,}{}_b{}^j)D(Q_b^j)^T$。综上，$P^{i,}{}_b{}^j D(Q_b^j)^T = P^{i,}{}_b{}^j D = D(Q_b^j)^T$。

于是，$(P^{i,}{}_b{}^j)^2 D = P^{i,}{}_b{}^j D(Q_b^j)^T = P^{i,}{}_b{}^j D$，因此由 D 的可逆性可得，$(P^{i,}{}_b{}^j)^2 = P^{i,}{}_b{}^j$。由此，$P^{i,}{}_b{}^j$ 是一个投影。对于每个 x，我们在 $\prod_{j\in J:\ \mu(i,\ j)>0} B_j$ 上定义一个测量为 $P^{i}{}_{\boldsymbol{b}} = \sum_{a\in p_i^{-1}(\boldsymbol{b})} P_{a}^{i}$。

根据构造，这就是 $\{P_b^{i,j}\}$ 在 j上的联合测量。利用 命题 4.2， $P^i_{\boldsymbol{b}}$ 是一个投影，且 $P^i_{\boldsymbol{b}} = \prod_j P^{i,j}_{b_j}$。由于 G 是非退化的， $P^i_{\boldsymbol{b}}$ 是至多 1 项之和，因此我们得到 $P^i_a = \prod_j P^{i,\,p_{i,j}(a)}_{\quad j}$，并且是一个投影。类似地， $D((Q_b^j)^2)^T = P^{i,\,j}_{\quad b} D(Q_b^j)^T = D(Q_b^j)^T$，因此 $(Q_b^y)^T$，从而 Q_b^y 也是一个投影。

接下来， $P^{i,\,j}_{\quad b} D^2 = D(Q_b^j)^T D = D(D(Q_b^j)^T)^* = D^2 P^{i,\,j}_{\quad b}$，因此 P_a^i与 D^2可交换。根据连续函数演算， P_a^i与 $(D^2)^{1/2} = D$可交换。同理， Q_b^j与 D可交换。

最后请注意，若 $p_{i,\,j}(a) \neq b$， $0 = P_a^i D(Q_b^j)^T = P_a^i (Q_b^j)^T D$。由 D的可逆性， $P_a^i\ Q_b^{j\ T} = 0$ ■( )。

请注意，若 G是退化的，我们就无法从 $P^{x,\,y}_{\quad b}$重建 P_a^x。因此， P_a^x可能不是投影，也可能不与 D可交换。尽管如此，其他结论仍然成立。

推论 4.4。 设 G 是一个非退化投影游戏，且 c 是一个量子关联。假设 c 是 G的一个完美策略。那么， c 是一个迹关联。

对于约束变量 CS 游戏的情形，这个推论可由 [ABdSZ17、Pad22、CM14]得出。

证明。根据定理 4.3，我们知道 $c(a,b|i,j) = \mathrm{Tr}(P_a^i D(Q_b^j)^T D)$，其中 $D > 0$ 可逆，且 $\mathrm{Tr}(D^2) = 1$， P_a^i 和 Q_b^j 是投影算子， D 与 P_a^i 和 Q_b^j 对易。首先注意到 $c(a,b|i,j) = \mathrm{Tr}(P_a^i (Q_b^j)^T D^2)$。现在，令 $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{B}(H)$ 为由 P_a^i 和 $(Q_b^j)^T$ 生成的冯·诺依曼代数。根据构造，我们有 $D \in \mathcal{M}'$。令 τ 为定义在 $\mathcal{M}$ 上的态，其定义为 $\tau(x) = \mathrm{Tr}(xD^2)$。由于 $D^2 \in \mathcal{M}'$， τ 是迹型的。令 $A_a^i = P_a^i \in \mathcal{M}$ 和 $B_b^j = (Q_b^j)^T \in \mathcal{M}$。我们有 $c(a,b|i,j) = \tau(A_a^i B_b^j)$，因此它是一个迹关联。■

5 完美对易算子情形

利用第 2.3 节中的思想，可以将上一节的结果从量子关联推广到对易算子关联。

定理 5.1。 设 $G = (I,\ J,\ \{A_i\}_{i\in I},\ \{B_j\}_{j\in J},\ \mu,\ V)$ 是一个非退化投影游戏，且设 $c(a,b|i,\ j) = \langle\psi|P_a^i Q_b^j|\psi\rangle$ 是对 G 完美的对易算子关联。则 c 是迹关联。

证明。设 $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{B}(H)$ 是由 Q_b^j 生成的冯·诺依曼代数。则 $P_a^i \in \mathcal{M}'$。映射 $\mathcal{M} \to \mathbb{C}$， $x \mapsto \langle\psi|x|\psi\rangle$ 是 $\mathcal{M}_*$ 的一个元素，因此存在一个对应元素 $h_\psi \in L^1(\mathcal{M})$。注意， h_ψ 是正的，且 $\mathrm{tr}(h_\psi) = \psi(1) = 1$。通过标准论证，存在 POVM $\{\bar{P}_a^i\}_{a\in A_i} \subseteq \mathcal{M}$，使得 $\langle\psi|P_a^i Q_b^j|\psi\rangle = \mathrm{tr}(\bar{P}_a^i h_\psi^{1/2} Q_b^j h_\psi^{1/2})$（参见 [MdlS23] 中定理 2.1 的证明）。由于 c 是完美的，我们知道，只要 $p_{i,j}(a) = b$，就有 $c(a,b|i,j) = 0$。由 tr 的迹性质，在这种情况下我们有

$$0 = \mathrm{tr}((\bar{P}_a^i)^{1/2} h_\psi^{1/2} Q_b^j h_\psi^{1/2} (\bar{P}_a^i)^{1/2}) = \|(\bar{P}_a^i)^{1/2} h_\psi^{1/2} (Q_b^j)^{1/2}\|_2^2,$$

因此 $(\bar{P}_a^i)^{1/2} h_\psi^{1/2} (Q_b^j)^{1/2} = 0$ (按照强乘积的表述)。因此， $\bar{P}_a^i h_\psi^{1/2} Q_b^j = 0$。令 $\bar{P}^{i,\,b\ j} = \sum_{a\in p_i^{-1}{}_{,\,j}(b)} \bar{P}_a^i$。任取 $b \neq b' \in B_j$，我们有 $\bar{P}^{i,\,b\ j} h_\psi^{1/2} Q_{b'}^j = \sum_{a\in p_i^{-1}{}_{,\,j}(b')} \bar{P}_a^i h_\psi^{1/2} Q_b^j =$

0 作为 $p_{i,j}(a) = b' \neq b$。现在，$\bar{P}^{i,\ j}_{b}h_{\psi}^{1/2} = \sum_{b'\in B_j}\bar{P}^{i,\ j}_{b}h_{\psi}^{1/2}Q_{b'}^{j} = \bar{P}^{i,\ j}_{b}h_{\psi}^{1/2}Q_{b}^{j}$ 和 $h_{\psi}^{1/2}Q_b^x = \sum_{b'\in B_j}\bar{P}^{i,\ j}_{b'}h_{\psi}^{1/2}Q_{b}^{j} = \bar{P}^{i,\ j}_{b}h_{\psi}^{1/2}Q_{b}^{j}$。现在，按照有限维情形中的相同方法，$(\bar{P}^{i,\ j}_{b})^2h_{\psi}^{1/2} = \bar{P}^{i,\ j}_{b}h_{\psi}^{1/2}Q_b^j = \bar{P}^{i,\ j}_{b}h_{\psi}^{1/2}$；$h_{\psi}^{1/2}(Q_b^j)^2 = \bar{P}^{i,\ j}_{b}h_{\psi}^{1/2}Q_b^j = h_{\psi}^{1/2}Q_b^j$；以及 $Q_b^jh_{\psi} = (h_{\psi}^{1/2}Q_b^j)^*h_{\psi}^{1/2} = h_{\psi}^{1/2}\bar{P}^{i,\ j}_{b}h_{\psi}^{1/2} = h_{\psi}Q_b^j$。由于 Q_b^j 生成了 $\mathcal{M}$，h_{ψ} 与 $\mathcal{M}'$相关联。令 p 为投影到 h_{ψ}支撑上的投影。那么，$p\mathcal{M} \subseteq \mathcal{B}(pc(H))$ 是一个冯·诺依曼代数，并且 $p^{i,j}_{b} = \bar{P}^{i,\ j}_{b}p$ 和 $q_b^j = Q_b^jp$ 是 $p\mathcal{M}$中的投影。由于 $p^{i,\ j}_{b}$ 联合可测，且 G 非退化，我们有 $p_a^i = \prod_{j\in J}p^{i,\ j}_{p_{i\ j}}$，$(a)$ 是定理 4.3 中的一个投影值测度；注意 $p_a^i = \bar{P}_a^ip$。现在，令 $\rho: p\mathcal{M} \to \mathbb{C}$ 定义为 $\rho(x) = \mathrm{tr}(xh_{\psi})$。$\rho$ 是一个迹态：由于 $\rho(1_{p\mathcal{M}}) = \rho(p) = \mathrm{tr}(h_{\psi}) = 1$，对于 $x \geq 0$, $\rho(x) = \mathrm{tr}(h_{\psi}^{1/2}xh_{\psi}^{1/2}) \geq 0$，并且 $\rho(xy) = \mathrm{tr}(xyh_{\psi}) = \mathrm{tr}(xh_{\psi}y) = \mathrm{tr}(yxh_{\psi}) = \rho(yx)$。综上，

$$c(a,b|i,j) = \mathrm{tr}(p_a^ih_{\psi}^{1/2}q_b^jh_{\psi}^{1/2}) = \mathrm{tr}(p_a^iq_b^jh_{\psi}) = \rho(p_a^iq_b^j),$$

这是一个迹关联。 ■

推论 5.2. 沿用前一个证明中的记号，对于完美交换算子策略，我们有：$p_a^iq_b^j = 0$当且仅当 $p_{i,\ j}(a) \neq b$。

6 近似情形

本节中，我们证明以下定理，将结果推广到几乎完美的交换算子策略这一最一般的情形。

定理 6.1. 设 $G = (I, J, \{A_i\}_{i\in I}, \{B_j\}_{j\in J}, \mu, V)$ 是一个非退化投影游戏，并设 $c(a,b|i,j) = \langle\phi|P_a^iQ_b^j|\phi\rangle$ 是 G的量子关联。假设 $\mathfrak{w}_G(c) \geq 1-\varepsilon$。那么，存在一个迹关联 c'，使得 $\mathfrak{w}_G(c') \geq 1 - 148(L\varepsilon)^{1/4}$，其中 $L = \max_{i,j:\pi(i,j)\neq 0}{}_{\pi}^{\pi}(i)\,(i,j)$，对 $\pi(i) = \sum_{j\in J}\pi(i,j)$ 成立。

我们的主要技术工具是以下引理，出自 [MdlS23], ，他们用它证明了同步博弈的类似结果。

引理 6.2（[MdlS23]）。设 $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{B}(H)$为一个冯·诺依曼代数，$h \in L^1(\mathcal{M})$为正元，满足 $\mathrm{tr}(h) = 1$，且 $q = \chi_{(1,\infty)}(h)$。设 X 和 A 为有限集，并设 π 是定义在 $X\times X$ 上的对称概率分布，其在 X上的边缘分布为 ν。假设 $\{p_a^x\}_{a\in A}$ 是满足 $\mathbb{E}_{x\leftarrow\nu}\sum_a\|[p_a^x, h^{1/2}]\|_2^2 \leq \delta$的投影值测度。则存在投影值测度 $\{r_a^x\}_{a\in A} \subseteq qc(\mathcal{M})q$，使得

$$\mathop{\mathbb{E}}_{(x,y)\leftarrow\pi}\sum_{a,b\in A}\left|\mathrm{tr}(p_a^xh^{1/2}p_b^yh^{1/2}) - \tau(r_a^xr_b^y)\right| \leq 38\delta^{1/4}.$$

注意，$\tau|_{qc(\mathcal{M})q}$是一个迹态，因为 $\tau(q) = \mathrm{tr}(h) = 1$。

我们还需要以下定理，以便将 POVM 舍入为投影值测度。

定理 6.3 ([dlS22])。设 ρ 是冯·诺依曼代数 $\mathcal{M}$上的正规态。假设$\{a_i\} \subseteq \mathcal{M}$ 是一个 POVM，满足 $\sum_i\rho(a_i^2) \geq 1-\varepsilon$。那么，存在一个投影值测度 $\{p_i\} \subseteq \mathcal{M}$ 使得$\sum_i\rho(|a_i - p_i|^2) \leq 9\varepsilon$。

下面的引理表明，若联合可测的 POVM 在 KMS 范数意义下近似为投影值测度，则它们的联合测量也近似为投影值测度。请注意，定理 6.1 中对每个约束所含变量数量的依赖，唯独在此结果中出现。定理 6.1 由此产生。

引理 6.4. 设 $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{B}(H)$ 是一个冯·诺依曼代数，且 $h \in L^1(\mathcal{M})$ 是一个正元素，满足 $\mathrm{tr}(h) = 1$。设 π 是 $[n]$ 的一个严格为正的概率分布。假设 $\{A_{\boldsymbol{i}}\}_{\boldsymbol{i}\in[k]^n} \subseteq \mathcal{M}$ 是一个 POVM，满足 $\sum_{j=1}^{n} \pi(j) \sum_{i=1}^{k} \|h^{1/4} A_i^j h^{1/4}\|_2^2 \geq 1-\delta$。那么，

$$\sum_{\boldsymbol{i}\in[k]^n} \|h^{1/4} A_{\boldsymbol{i}} h^{1/4}\|_2^2 \geq 1 - M\delta,$$

其中 $M = \max_i \frac{1}{\pi(i)}$。

在开始证明之前，请注意，当 δ趋近于零时，这个界是紧的。取 $k=2$, π为均匀分布，$\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathbb{C}^2)^{\otimes n}$ 带有迹态 $\frac{1}{2^n}\mathrm{Tr}$，且 $A_{\boldsymbol{i}} = \bigotimes_j \big((1-\varepsilon)\,|i_j\rangle\langle i_j| + \frac{\varepsilon}{2} I\big)$。那么，对于任意 j,

$$\sum_{i=1,2} \frac{1}{2^n} \mathrm{Tr}((A_i^j)^2) = \frac{1}{2} \sum_{i=1,2} \mathrm{Tr}\big(((1-\varepsilon)\,|i\rangle\langle i| + \tfrac{\varepsilon}{2} I)^2\big) = \frac{1}{2} \sum_{i=1,2} \mathrm{Tr}\Big((1-\varepsilon)\,|i\rangle\langle i| + \tfrac{\varepsilon^2}{4} I\Big) = 1-\varepsilon+\tfrac{\varepsilon^2}{2},$$

得到 $\delta = \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2}$。同理，我们有

$$\sum_{\boldsymbol{i}} \frac{1}{2^n} \mathrm{Tr}(A_{\boldsymbol{i}}) = \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1,2} \mathrm{Tr}\big(((1-\varepsilon)\,|i\rangle\langle i| + \tfrac{\varepsilon}{2} I)^2\big)\right)^n = (1-\delta)^n \leq 1 - n\delta + \binom{n}{2}\delta^2.$$

当 $\delta \ll \frac{1}{n}$ 很小时，这近似为 $1-n\delta$。

证明。令 $\delta_j = 1 - \sum_{i=1}^{k} \|h^{1/4} A_i^j h^{1/4}\|_2^2$。则，

$$\sum_i \|h^{1/4} \sum_{\boldsymbol{i}\in[k]^n :\, i_j = i} A_{\boldsymbol{i}} h^{1/4}\|_2^2 = \sum_i \|h^{1/4} A_i^j h^{1/4}\|_2^2 \geq 1 - \delta_j.$$

因此，

$$\begin{aligned}
\delta_j &\geq \Big\|\sum_{\boldsymbol{i}} h^{1/4} A_{\boldsymbol{i}} h^{1/4}\Big\|_2^2 - \sum_i \Big\|\sum_{\boldsymbol{i}:\, i_j = i} h^{1/4} A_{\boldsymbol{i}} h^{1/4}\Big\|_2^2 \\
&= \sum_{\boldsymbol{i},\boldsymbol{i}'} \mathrm{tr}(A_{\boldsymbol{i}} h^{1/2} A_{\boldsymbol{i}'} h^{1/2}) - \sum_{\boldsymbol{i},\boldsymbol{i}' :\, i_j = i'_j} \mathrm{tr}(A_{\boldsymbol{i}} h^{1/2} A_{\boldsymbol{i}'} h^{1/2}) \\
&= \sum_{\boldsymbol{i},\boldsymbol{i}' :\, i_j \neq i'_j} \mathrm{tr}(A_{\boldsymbol{i}} h^{1/2} A_{\boldsymbol{i}'} h^{1/2}).
\end{aligned}$$

将这些结果结合起来并应用并集界，

$$\begin{aligned}
\sum_{\boldsymbol{i}} \big\|h^{1/4} A_{\boldsymbol{i}} h^{1/4}\big\|_2^2 &= 1 - \sum_{\boldsymbol{i},\boldsymbol{i}' :\, \boldsymbol{i} \neq \boldsymbol{i}'} \mathrm{tr}(A_{\boldsymbol{i}} h^{1/2} A_{\boldsymbol{i}'} h^{1/2}) \\
&\geq 1 - \sum_j \sum_{\boldsymbol{i},\boldsymbol{i}' :\, i_j \neq i'_j} \mathrm{tr}(A_{\boldsymbol{i}} h^{1/2} A_{\boldsymbol{i}'} h^{1/2}) \\
&\geq 1 - \sum_j \delta_j \geq 1 - M \sum_j \pi(j) \delta_j \geq 1 - M\delta.
\end{aligned}$$

■

定理定理 *6.1*的证明。我们还可以假设 $\varepsilon \le \frac{1}{L}$，否则结论显然成立。

与上一节一样，我们令 $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{B}(H)$ 为由 Q_b^j 生成的冯·诺依曼代数。于是，存在一个正的 $h_\psi \in \bigcap_j L^1(\mathcal{M})$ 以及 POVM $\{\bar{P}_a^i\}_{a\in A_i} \subseteq \mathcal{M}$，使得$\langle\psi|P_a^iQ_b^j|\psi\rangle = \mathrm{tr}(\bar{P}_a^i h_\psi^{1/2} Q_b^j h_\psi^{1/2})$。因此，记 $\bar{P}^{i,j}_b = \sum_{a\in p_i^{-1},j(b)} \bar{P}_a^i$

$$\begin{aligned}\mathfrak{w}_G(c) &= \sum_{i,j}\mu(i,j)\sum_{a\in A_i}\langle\psi|P_a^iQ^j_{p_{i,j}(a)}|\psi\rangle\\ &= \sum_{i,j}\mu(i,j)\sum_{a\in A_i}\mathrm{tr}(\bar{P}_a^i h_\psi^{1/2}Q^j_{p_{i,j}(a)}h_\psi^{1/2})\\ &= \sum_{i,j,b}\mu(i,j)\Big\langle h_\psi^{1/4}\bar{P}_b^{i,j}h_\psi^{1/4}, h_\psi^{1/4}Q_b^jh_\psi^{1/4}\Big\rangle.\end{aligned}$$

从这里开始，我们经常会用到三个希尔伯特空间： $V_1 = L^2(\mathcal{M})^{\bigcup_{j\in J} I\times\{j\}\times B_j}$，其内积为

$$\langle(u_{i,j,b})_{i,j,b},(v_{i,j,b})_{i,j,b}\rangle_{V_1} = \sum_{i,j,b}\mu(i,j)\langle u_{i,j,b}, v_{i,j,b}\rangle,$$

以及 $V_2 = L^2(\mathcal{M})^{\bigsqcup_{i\in I}\{i\}\times J\times A_i}$，其内积为

$$\langle(u_{i,j,a})_{i,j,a},(v_{i,j,a})_{i,j,a}\rangle_{V_2} = \sum_{i,j,a}\mu(i,j)\langle u_{i,j,a}, v_{i,j,a}\rangle.$$

将 $(h_\psi^{1/4}\bar{P}^{i,j}_b h_\psi^{1/4})_{i,j,b}$ 和 $(h_\psi^{1/4}Q_b^jh_\psi^{1/4})_{i,j,b}$ 视为 V_1 中的向量。首先，这些向量的范数均不超过 1。事实上，

$$\begin{aligned}\|(h_\psi^{1/4}\bar{P}_b^{i,j}h_\psi^{1/4})_{i,j,b}\|_{V_1}^2 &= \sum_{i,j,b}\pi(i,j)\,\mathrm{tr}(\bar{P}_b^{i,j}h_\psi^{1/2}\bar{P}_b^{i,j}h_\psi^{1/2})\\ &\le \sum_{i,j,b}\mu(i,j)\,\mathrm{tr}(h_\psi^{1/2}\bar{P}_b^{i,j}h_\psi^{1/2})\\ &\le \sum_{i,j}\mu(i,j)\,\mathrm{tr}(h_\psi) = 1,\end{aligned}$$

并且恒等地 $\|(h_\psi^{1/4}Q_b^jh_\psi^{1/4})_{i,\ j,\ b}\|_{V_1}\le 1$。根据假设，我们知道

$$\Big\langle(h_\psi^{1/4}\bar{P}_b^{i,j}h_\psi^{1/4})_{i,j,b},(h_\psi^{1/4}Q_b^jh_\psi^{1/4})_{i,j,b}\Big\rangle_{V_1}\ge 1-\varepsilon,$$

因此，根据柯西-施瓦茨不等式，

$$1-\varepsilon\le\|(h_\psi^{1/4}\bar{P}_b^{i,j}h_\psi^{1/4})_{i,j,b}\|_{V_1}\|(h_\psi^{1/4}Q_b^jh_\psi^{1/4})_{i,j,b}\|_{V_1}\le\min\Big\{\|(h_\psi^{1/4}\bar{P}_b^{i,j}h_\psi^{1/4})_{i,j,b}\|_{V_1},\|(h_\psi^{1/4}Q_b^jh_\psi^{1/4})_{i,j,b}\|_{V_1}\Big\}.$$

这表明对易子

$$\begin{aligned}\sum_{i,j,b}\mu(i,j)\big\|[Q_b^j,h_\psi^{1/2}]\big\|_2^2 &= \sum_{i,j,b}\mu(i,j)\,\mathrm{tr}\Big((Q_b^jh_\psi^{1/2}-h_\psi^{1/2}Q_b^j)(h_\psi^{1/2}Q_b^j-Q_b^jh_\psi^{1/2})\Big)\\ &= 2\sum_{i,j,b}\mu(i,j)\,\mathrm{tr}\Big((Q_b^j)^2h_\psi - h_\psi^{1/2}Q_b^jh_\psi^{1/2}Q_b^j\Big)\\ &\le 2-2\|(h_\psi^{1/4}Q_b^jh_\psi^{1/4})_{i,j,b}\|_{V_1}^2\le 2-2(1-\varepsilon)^2\le 4\varepsilon.\end{aligned}$$

接下来，根据 $\sum_{i,\ j,\ b}\mu(i,\ \ j)\left\|h_\psi^{1/4}\bar{P}^{i}_{,\ b}{}^{j}h_\psi^{1/4}\right\|_2^2 \geq (1-\varepsilon)^2 \geq 1-2\varepsilon$这一事实，我们可以使用 引理 6.4得到 $\sum_{i\in I,\ j\in J,\ a\in A_i}\mu(i,\ \ j)\left\|h_\psi^{1/4}\bar{P}^i_a h_\psi^{1/4}\right\|_2^2 \geq 1-2L\varepsilon$。因此，同理可得

$$\sum_{i,j,a}\mu(i,j)\left\|[\bar{P}^i_a, h_\psi^{1/2}]\right\|_2^2 \leq 4L\varepsilon.$$

由此可得

$$\begin{aligned}
1-2\varepsilon &\leq \sum_{i,j,b}\mu(i,j)\operatorname{tr}(Q^j_b h_\psi^{1/2} Q^j_b h_\psi^{1/2}) \\
&= \sum_{i,j,b}\mu(i,j)\left\langle h_\psi^{1/2}Q^j_b, Q^j_b h_\psi^{1/2}\right\rangle \\
&\leq \sum_{i,j,b}\mu(i,j)\|h_\psi^{1/2}Q^j_b\|_2\|Q^j_b h_\psi^{1/2}\|_2 \\
&= \sum_{i,j,b}\mu(i,j)\operatorname{tr}((Q^j_b)^2 h_\psi).
\end{aligned}$$

同理，

$$\sum_{i,j,a}\mu(i,j)\operatorname{tr}((\bar{P}^i_a)^2 h_\psi) \geq 1-2L\varepsilon.$$

由于对所有 $x\in\mathcal{M}$，$\operatorname{tr}(xh_\psi) = \langle\psi|x|\psi\rangle$，映射 $x\mapsto\operatorname{tr}(\cdot h_\psi)$ 是 $\mathcal{M}$上的正规态。因此，根据定理 6.3，存在投影值测度 $\{p^i_a\}_{a\in A_i}$，$\{q^j_b\}_{b\in B_j}\subseteq\mathcal{M}$ 使得

$$\begin{aligned}
\|((Q^j_b - q^j_b)h_\psi^{1/2})_{i,j,b}\|^2_{V_1} &= \sum_{i,j,b}\mu(i,j)\operatorname{tr}\left(\left(Q^j_b - q^j_b\right)^2 h_\psi\right) \leq 18\varepsilon, \\
\|((\bar{P}^i_a - p^i_a)h_\psi^{1/2})_{i,j,a}\|^2_{V_2} &= \sum_{i,j,a}\mu(i,j)\operatorname{tr}(\left(\bar{P}^i_a - p^i_a\right)^2 h_\psi) \leq 18L\varepsilon.
\end{aligned}$$

现在，再次使用 V_1上的范数，我们得到近似对易关系

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j,b}\mu(i,j)\left\|[q^j_b, h_\psi^{1/2}]\right\|_2^2 &= \|([q^j_b, h_\psi^{1/2}])_{i,j,b}\|^2_{V_1} \\
&= \left\|([Q^j_b, h_\psi^{1/2}])_{i,j,b} - ((Q^j_b - q^j_b)h_\psi^{1/2})_{i,j,b} + (h_\psi^{1/2}(Q^j_b - q^j_b))_{i,j,b}\right\|^2_{V_1} \\
&\leq \left(\left\|([Q^j_b, h_\psi^{1/2}])_{i,j,b}\right\|_{V_1} + 2\left\|((Q^j_b - q^j_b)h_\psi^{1/2})_{i,j,b}\right\|_{V_1}\right)^2 \\
&\leq (\sqrt{4\varepsilon} + 2\sqrt{18\varepsilon})^2 \leq 110\varepsilon
\end{aligned}$$

并以相同的方式使用 V_2，$\sum_{i,\ j,\ a}\mu(i,\ \ j)\left\|[p^i_a, h_\psi^{1/2}]\right\|_2^2 \leq 110L\varepsilon$。为完成证明，我们希望利用引理 6.2。定义 $X = I\sqcup J$ 和 $A = \sqcup_{i,\ j}A_i\sqcup B_j$。令 π 为定义在 $X\times X$ 上的概率分布，如下所示

$$\pi(x,x') = \begin{cases} \frac{1}{2}\mu(x,x') & x\in I\wedge x'\in J \\ \frac{1}{2}\mu(x',x) & x'\in I\wedge x\in J \\ 0 & \text{else} \end{cases}.$$

注意， π 是对称的，而 π 在 X 的一个副本上的边缘分布为

$$\nu(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sum_{j\in J}\mu(x,j) & x \in I \\ \frac{1}{2}\sum_{i\in I}\mu(i,x) & x \in J \end{cases}.$$

令 $\tilde{p}_a^x = p_a^x$ 若 $x \in I$，且 $\tilde{p}_a^x = q_a^x$ 若 $x \in J$。根据上述内容，我们有

$$\mathop{\mathbb{E}}_{x\leftarrow\nu}\sum_a \|[\tilde{p}_a^x, h_\psi^{1/2}]\|_2^2 \le 110L\varepsilon.$$

然后，利用 引理 6.2，可得存在投影值测度 $\{r_a^x\}_{a\in A} \subseteq qc(\mathcal{M})q$ 使得

$$\mathop{\mathbb{E}}_{(x,y)\leftarrow\pi}\sum_{a,b\in A}\left|\mathrm{tr}(\tilde{p}_a^x h_\psi^{1/2}\tilde{p}_b^y h_\psi^{1/2}) - \tau(r_a^x r_b^y)\right| \le 38(110L\varepsilon)^{1/4} \le 124(L\varepsilon)^{1/4},$$

这意味着

$$\sum_{i,j,a}\mu(i,j)\left|\mathrm{tr}(p_a^i h_\psi^{1/2} q^j_{p_{i,j}(a)} h_\psi^{1/2}) - \tau(r_a^i r^j_{p_{i,j}(a)})\right| \le 124(L\varepsilon)^{1/4}.$$

现在，注意到

$$\begin{aligned}\sum_{i,j,a}\mu(i,j)\,\mathrm{tr}\big((\bar{P}_a^i - (\bar{P}_a^i)^{1/2})^2 h_\psi\big) &= \sum_{i,j,a}\mu(i,j)\,\mathrm{tr}\big(((\bar{P}_a^i)^2 + \bar{P}_a^i - 2(\bar{P}_a^i)^{3/2})h_\psi\big)\\ &\le \sum_{i,j,a}\mu(i,j)\,\mathrm{tr}\big((\bar{P}_a^i - (\bar{P}_a^i)^2)h_\psi\big)\\ &\le 1 - (1-2L\varepsilon) = 2L\varepsilon,\end{aligned}$$

并且在 以相同的方式，$\sum_{i,\ j,\ b}\mu(i,\ \ j)\,\mathrm{tr}\big((Q_b^j - (Q_b^j)^{1/2})^2 h_\psi\big) \le 2\varepsilon$。然后，我们可以提出 nd

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{i,j,a}\mu(i,j)\,\mathrm{tr}(\bar{P}_a^i h_\psi^{1/2} Q^j_{p_{i,j}(a)} h_\psi^{1/2}) - \sum_{i,j,a}\mu(i,j)\,\mathrm{tr}(p_a^i h_\psi^{1/2} q^j_{p_{i,j}(a)} h_\psi^{1/2})\right|\\ &= \left|\big\|((\bar{P}_a^i)^{1/2} h_\psi^{1/2}(Q^j_{p_{i,j}(a)})^{1/2})_{i,j,a}\big\|_{V_2}^2 - \big\|(p_a^i h_\psi^{1/2} q^j_{p_{i,j}(a)})_{i,j,a}\big\|_{V_2}^2\right|\\ &\le 2\left|\big\|((\bar{P}_a^i)^{1/2} h_\psi^{1/2}(Q^j_{p_{i,j}(a)})^{1/2})_{i,j,a}\big\|_{V_2} - \big\|(p_a^i h_\psi^{1/2} q^j_{p_{i,j}(a)})_{i,j,a}\big\|_{V_2}\right|\\ &\le 2\big\|((\bar{P}_a^i)^{1/2} h_\psi^{1/2}(Q^j_{p_{i,j}(a)})^{1/2})_{i,j,a} - (p_a^i h_\psi^{1/2} q^j_{p_{i,j}(a)})_{i,j,a}\big\|_{V_2}\\ &\le 2\big\|((p_a^i - (\bar{P}_a^i)^{1/2}) h_\psi^{1/2}(Q^j_{p_{i,j}(a)})^{1/2})_{i,j,a}\big\|_{V_2} + 2\big\|(p_a^i h_\psi^{1/2}(q^j_{p_{i,j}(a)} - (Q^j_{p_{i,j}(a)})^{1/2}))_{i,j,a}\big\|_{V_2}\\ &= 2\sqrt{\sum_{i,j,a}\mu(i,j)\,\mathrm{tr}((p_a^i - (\bar{P}_a^i)^{1/2})^2 h_\psi^{1/2} Q^j_{p_{i,j}(a)} h_\psi^{1/2})} + 2\sqrt{\sum_{i,j,b}\mu(i,j)\,\mathrm{tr}(p_b^{i,j} h_\psi^{1/2}(q_b^j - (Q_b^j)^{1/2})^2 h_\psi^{1/2})}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le 2\sqrt{\sum_{i,j,a}\mu(i,j)\,\mathrm{tr}((p_a^i-(\bar P_a^i)^{1/2})^2 h_\psi)}+2\sqrt{\sum_{i,j,b}\mu(i,j)\,\mathrm{tr}((q_b^j-(Q_b^j)^{1/2})^2 h_\psi)}\\
&=2\big\|((p_a^i-(\bar P_a^i)^{1/2})h_\psi^{1/2})_{i,j,a}\big\|_{V_2}+2\big\|((q_b^j-(Q_b^j)^{1/2})h_\psi^{1/2})_{i,j,b}\big\|_{V_1}\\
&\le 2\big\|((p_a^i-\bar P_a^i)h_\psi^{1/2})_{i,j,a}\big\|_{V_2}+\big\|((\bar P_a^i-(\bar P_a^i)^{1/2})h_\psi^{1/2})_{i,j,a}\big\|_{V_2}+2\big\|((q_b^j-Q_b^j)h_\psi^{1/2})_{i,j,b}\big\|_{V_1}\\
&\qquad\qquad+2\big\|((Q_b^j-(Q_b^j)^{1/2})h_\psi^{1/2})_{i,j,b}\big\|_{V_1}\\
&\le 2\sqrt{18L\varepsilon}+2\sqrt{2L\varepsilon}+2\sqrt{18\varepsilon}+2\sqrt{2\varepsilon}\\
&\le 23(L\varepsilon)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

通过三角不等式，我们得到

$$
\Big|\sum_{i,j,a}\mu(i,j)\Big(\langle\psi|P_a^iQ^j_{p_{i,j}(a)}|\psi\rangle-\tau(r_a^ir^j_{p_{i,j}(a)})\Big)\Big|\le 23(L\varepsilon)^{1/2}+124(L\varepsilon)^{1/4}\le 147(L\varepsilon)^{1/4}.
$$

最后，令 $\{\hat{p}_a^i\}_{a\in A_i}$ 为将 $\{r_a^i\}_{a\in A_i}$ 补全为投影值测度所得，其中添加 $1-\sum_{a\in A_i}r_a^i$ 作为任意元素；并以同样方式由 $\{r_b^j\}_{b\in B_j}$构造 $\{\hat{q}_b^j\}_{b\in B_j}$。于是 $c'(a,\ b|i,\ j)=\tau(\hat{p}_a^i\hat{q}_b^j)$ 是一个迹关联，因此我们得到

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{w}_G(c')&=\sum_{i,j}\mu(i,j)\sum_{a\in A_i}\tau(\hat{p}_a^i\hat{q}^j_{p_{i,j}(a)})\\
&\ge\sum_{i,j}\mu(i,j)\sum_{a\in A_i}\tau(r_a^ir^j_{p_{i,j}(a)})\\
&\ge\mathfrak{w}_G(c)-\big|\sum_{i,j,a}\mu(i,j)\Big(\langle\psi|P_a^iQ^j_{p_{i,j}(a)}|\psi\rangle-\tau(r_a^ir^j_{p_{i,j}(a)})\Big)\big|\\
&\ge 1-148(L\varepsilon)^{1/4}.
\end{aligned}
$$

■

推论 6.5。设 G 如定理中所述。假设 $c(a,\ b|i,\ j)=\langle\psi|P_a^i\otimes Q_b^j|\psi\rangle$ 是一个量子关联，且 $\mathfrak{w}_G(c)\ge 1-\varepsilon$。那么，存在一个有限维迹关联 c'，使得 $\mathfrak{w}_G(c')\ge 1-148(L\varepsilon)^{1/4}$。

证明。令 $\mathcal{M}$ 为由 $1\otimes Q_b^j$ 生成的冯·诺依曼代数；这是一个包含于 $\mathcal{B}(H_A\otimes H_B)$ 中的有限维冯·诺伊曼代数。接着，按照例 2.1，$c(\mathcal{M})=L^\infty(\mathbb{R})\otimes$
$\mathcal{M}$ $c'\ a\ b|i\ j\ =\tau\ p_a^iq_b^j$ $\mathfrak{w}_G\ c'\ \ge 1-$。根据定
$148\ L\varepsilon\ ^{1/4}$ τ $\tau\ x\ =\int_{-\infty}^{\infty}\ x\ t\ e^{-t}dt$ $c\ \mathcal{M}$ $p_a^i\ q_b^j\in$
理，存在一个关联 (, ,) ( )，使得 ( ) ( )，其中 是 ( ) 上的有限权重 ( ) Tr(( ))，并且，$qc(\mathcal{M})q$，其中某个投影 $q\in c(\mathcal{M})$ 满足 $\tau(q)=1$。根据构造，对于每个 $t\in\mathbb{R}$，$q(t)\,p_a^i(t)\ q_b^j(t)$ 都是投影，因此

$$
\tau(p_a^iq_b^j)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Tr}(p_a^i(t)q_b^j(t))e^{-t}dt=\int_{\{t|\mathrm{Tr}(q(t))\neq 0\}}\frac{1}{\mathrm{Tr}(q(t))}\,\mathrm{Tr}(p_a^i(t)q_b^j(t))\,\mathrm{Tr}(q(t))e^{-t}dt
$$

是有限维迹关联的凸组合。这意味着至少有一个关联的获胜概率为 $\ge 1-148(L\varepsilon)^{1/4}$，从而完成证明。■

现在，我们证明对于退化博弈也可以得到相同的结果。

推论 6.6. 设 G 是任意投影游戏。假设存在一个关于 G 的对易算子关联 c，使得 $\mathfrak{w}_G(c) \geq 1-\varepsilon$。那么，存在一个关于 G 的迹关联 c'，使得 $\mathfrak{w}_G(c') \geq 1-148(L\varepsilon)^{1/4}$。若 c 是量子关联，则可将 c' 选为有限维的。

证明. 若 G 是非退化的，这正是定理 6.1 和推论 6.5 的结论。现在，~假设 G 是退化的。令 G 为引理 3.4 中构造的非退化博弈。根据该引理，存在一个对易算子关联 $\tilde{c}$，使得 $\mathfrak{w}_{\tilde{G}}(\tilde{c}) = \mathfrak{w}_G(c) \geq 1-\varepsilon$。于是，根据定理 6.1，存在一个关于 $\tilde{G}$ 的迹关联 $\tilde{c}'$，使得 $\mathfrak{w}_{\tilde{G}}(\tilde{c}') \geq 1-148(L\varepsilon)^{1/4}$。再次使用引理 3.4，存在一个关于 G 的迹关联 c'，使得 $\mathfrak{w}_G(c') = \mathfrak{w}_{\tilde{G}}(\tilde{c}') \geq 1-148(L\varepsilon)^{1/4}$。量子关联的结论可由推论 6.5 得出。■

7 应用

本节将探讨我们的主要结果对 CS 游戏和预言机化的影响，

7.1 约束系统博弈

定义 7.1. 字母表 Σ 上的一个约束 是一个二元组 (V, C)，其中 V 是一个有限集合，称为变量集或上下文，而 $C \subseteq \Sigma^V$。有时，当 V 明确时，我们将 C 称为约束；我们将 $C \subseteq \Sigma^n$ 视为施加在 $[n]$上的约束。字母表 Σ 上的一个约束系统（*CS*） 是一个二元组 $S = (X, \{(V_i, C_i)\}_{i=1}^m)$，其中 X 是一个有限集合，称为变量集，而 (V_i, C_i) 是定义在 Σ 上的约束，并且 $V_i \subseteq X$。

我们始终使用有限字母表。约束系统 S 的经典满足赋值是一个函数 $f: X \to \Sigma$，满足 $f|_{V_i} \subseteq C_i$ 对每个 $i \in [m]$均成立。我们通过非局域游戏来表示量子赋值。这里，我们采用非同步版本的博弈，该版本最早由 [CM14]提出。

定义 7.2。 给定一个定义在 Σ 上的约束系统 $S = (X, \{(V_i, C_i)\}_{i=1}^m)$，以及 $[m]$ 上的概率分布 π，约束-变量 CS 游戏 $G(S, \pi)$ 是一个非局域游戏，其输入集合为$I = [m]$ 和 $J = X$，输出集合为 $A_i = C_i$ 和 $B_j = \Sigma$，问题分布和谓词函数为

$$\mu(i,x) = \begin{cases} \frac{\pi(i)}{|V_i|} & x \in V_i \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$V(\phi, \sigma | i, x) = \begin{cases} 1 & \phi(x) = \sigma \\ 0 & \text{else} \end{cases}.$$

不失一般性，我们可以假设 π 严格为正；否则，有些约束永远不会被询问，因此我们可以将它们从约束系统中移除。

$G(S, \pi)$ 总是一个投影游戏，其投影函数为 $p_{i,x}(\phi) = \phi(x)$。

推论 7.3。设 $S=(X,\ \{(V_i,\ C_i)\}_{i=1}^m)$ 是定义在 Σ 上的约束系统，且 π 是 $[m]$ c G S π $\mathfrak{w}_{G(S,\pi)}$ c $\geq$ 上的概率分布。若 是满足 (,) $1-\varepsilon$ c' G S π $c' \geq 1-148$ $L\varepsilon^{1/4}$ 的对易算子关联，且 ( )，则存在满足 (,) 的迹关联，使得 $\mathfrak{w}_{G(S,\pi)}$( ) ( )，其中 $L=\max_i |V_i|$。若 c 是量子的，则可将 c' 选为有限维。

证明。 这可直接由 定理 6.1和 推论 6.5 得出，只需注意到 t

$$L=\max_{i,x:\,\mu(i,x)\neq 0}\frac{\mu(i)}{\mu(i,x)}=\max_i\frac{\pi(i)}{\frac{\pi(i)}{|V_i|}}=\max_i|V_i|. \qquad \blacksquare$$

这也意味着，现在可以将加权代数框架中仅考虑迹态的结果直接转换到博弈框架中，而无需处理带有一致性检查的博弈同步版本。

推论 7.4。 设 S, π, 和 L 如前一推论所述。设 $\mathcal{A}_{c-v}(S,\pi)$ 为 [CM24].

1. 若存在对易算子关联 c，使得 $\mathfrak{w}_{G(S,\pi)}(c) \geq 1-\varepsilon$，则存在 $\mathcal{A}_{c-v}(S,\pi)$ 上的迹态 τ，使得 $\mathrm{def}(\tau) \leq 148(L\varepsilon)^{1/4}$。

2. 若存在量子关联 c，使得 $\mathfrak{w}_{G(S,\pi)}(c) \geq 1-\varepsilon$，则存在 $\mathcal{A}_{c-v}(S,\pi)$ 上的有限维迹态 τ，使得 $\mathrm{def}(\tau) \leq 148(L\varepsilon)^{1/4}$。

7.2 预言机化

定义 7.5。设 $G=(I,\ J,\ \{A_i\}_{i\in I},\ \{B_j\}_{j\in J},\ \mu,\ V)$ 是一个非局域游戏。G 的（投影）预言机化是非局域游戏 $G^{\mathrm{orac}}=(I\times J,\ I\sqcup J,\ \{A_i\times B_j\}_{(i,j)\in I\times J},\ \{A_i\}_{i\in I}\cup\{B_j\}_{j\in J},\ \mu^{\mathrm{orac}},\ V_{\mathrm{orac}})$，其中

$$\mu^{\mathrm{orac}}((i,j),k)=\begin{cases}\frac{1}{2}\mu(i,j) & k=i\vee k=j\\ 0 & \text{else,}\end{cases}$$

and

$$V^{\mathrm{orac}}((a,b),c|(i,j),k)=\begin{cases}1 & V(a,b|i,j)=1\wedge k=i\wedge c=a\\ 1 & V(a,b|i,j)=1\wedge k=j\wedge c=b\\ 0 & \text{else.}\end{cases}$$

显然，预言机化是由投影函数 $p_{(i,j),\ i}((a,\ b))\ =\ a$和 $p_{(i,j),\ j}((a,\ b))\ =b$构成的投影游戏。以往的研究 [JNV+21, MS24] 采用了更复杂的预言机化同步版本，但我们证明这是不必要的。

推论 7.6。设 G 是一个非局域游戏，且 c 是 G^{orac} 的一个对易算子关联。若 $\mathfrak{w}_{G^{\mathrm{orac}}}(c) \geq 1-\varepsilon$，则存在 G^{orac} 的一个迹关联 c'，使得 $\mathfrak{w}_{G^{\mathrm{orac}}}(c') \geq 1-177\varepsilon^{1/4}$。若 c 是量子的，则可将 c' 选为有限维的。

证明。 这直接由定理 6.1和推论 6.5 注意到

$$L=\max_{i,j,k:\,\mu^{\mathrm{orac}}((i,j),k)\neq 0}\frac{\mu^{\mathrm{orac}}((i,j))}{\mu^{\mathrm{orac}}((i,j),k)}=\max_{i,j:\,\mu(i,j)\neq 0}\frac{\mu(i,j)}{\frac{1}{2}\mu(i,j)}=2$$

然后是 $148(2)^{1/4}\leq 177$。 $\blacksquare$

参考文献

[ABdSZ17] S. Abramsky、R. S. Barbosa、N. de Silva 和 O. Zapata。《关系结构上的量子单子》。载于 K. G. Larsen、H. L. Bodlaender 和 J.-F. Raskin（编），第42届国际计算机科学数学基础研讨会（MFCS 2017），莱布尼茨国际信息学论文集（LIPIcs）第83卷，第35:1–35:19页，德国达格施图尔，2017年。Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum für Informatik。数字对象唯一标识符：10.4230/LIPIcs.MFCS.2017.35。[Ark12] A. Arkhipov。《扩展并刻画量子魔术游戏》。arXiv预印本 arXiv:1209.3819，2012年。[CHTW04] R. Cleve、P. Høyer、B. Toner 和 J. Watrous。《非局域策略的后果与局限》。载于第19届计算复杂性年度会议——CCC 2004，第236–249页，2004年。数字对象唯一标识符：10.1109/CCC.2004.1313847。[CM14] R. Cleve 和 R. Mittal。《二元约束系统游戏的刻画》。载于《自动机、语言与编程：第41届国际学术讨论会，ICALP 2014，哥本哈根，丹麦，2014年7月8日至11日，会议录》，第I部分41，第320–331页。施普林格，2014年。[CM24] E. Culf 和 K. Mastel。《纠缠约束满足问题的递归可枚举完全性》，2024年。在线：https://arxiv.org/abs/2410.21223。[Con76] A. Connes。《内射因子的分类：II_λ、II_∞、III_λ情形》。《数学年刊》，104(1)：73–115，1976年。数字对象唯一标识符：10.2307/1971057。[dlS22] M. de la Salle。《正算子值测度的正交化》。《数学报告》，360(G5)：549–560，2022年。[DS14] I. Dinur 和 D. Steurer。《并行重复的分析方法》。载于第四十六届美国计算机协会计算理论研讨会论文集，第624–633页，2014年。[DSV15] I. Dinur、D. Steurer 和 T. Vidick。《纠缠投影博弈的平行重复定理》。《计算复杂性》，24(2)：201–254，2015年。[Haa75] U. Haagerup。《冯·诺依曼代数的标准形式》。《斯堪的纳维亚数学学报》，37(2)：271–283，1975 年。[Haa79] U. Haagerup。《与任意冯·诺依曼代数相关的Lp空间》。载于《算子代数及其在数学物理中的应用》（会议论文集，马赛，1977年），第274卷，第175–184页，1979年。

[HRS08] T. Heinosaari、D. Reitzner 和 P. Stano。量子可观测量联合可测性的笔记。《物理学基础》，38：1133–1147，2008年。[JNV+21] Z. Ji、A. Natarajan、T. Vidick、J. Wright 和 H. Yuen。MIP* = RE。《ACM通讯》，64(11)：131–138，2021年。数字对象唯一标识符：10.1145/3485628。[Lin23] J. Lin。迹可嵌入策略：将MIP*技巧提升至 MIPco。arXiv预印本 arXiv:2304.01940，2023年。[MdlS23] A. Marrakchi 和 M. de la Salle。近同步关联与 Tomita-Takesaki 理论。arXiv预印本 arXiv:2307.08129，2023年。[MS24] K. Mastel 和 W. Slofstra。MIP*的双证明者完美零知识。载于第56届美国计算机协会计算理论年度研讨会论文集，第991–1002页，2024年。[Pad22] C. Paddock。将非局域游戏的近最优量子策略舍入为使用最大纠缠态的策略。arXiv预印本 arXiv:2203.02525，2022年。[PS25] C. Paddock 和 W. Slofstra。可满足性问题与布尔约束系统游戏代数。《伊利诺伊数学杂志》，69(1)：81–107，2025年。[PSS+16] V. I. Paulsen、S. Severini、D. Stahlke、I. G. Todorov 和 A. Winter。量子色数的估计。《泛函分析杂志》，270(6)：2188–2222，2016年。[Rao08] A. Rao。投影游戏中的并行重复与集中界。载于第40届美国计算机协会计算理论年度研讨会论文集，第1–10页，2008年。[Tak03] M. Takesaki。《算子代数理论 II》，第125卷。施普林格，2003年。[Ter81] M. Terp。与冯·诺依曼代数相关的 Lp空间。笔记，哥本哈根大学数学研究所，3(4)：5，1981年。[Vid22] T. Vidick。近同步量子关联。《数学物理杂志》，63(2)，2022年。