arXiv:2603.14788v1 [math.AT] 16 Mar 2026

关于不可定向曲面对称积的高阶对角映射余纤维的序列拓扑复杂度与 LS范畴

JES ´US GONZ ´ALEZ 和 EKANSH JAUHARI

Abstract. 对于满足 $k \geq 2$ 的正整数 k、 n 和 g ，我们给出了闭形式表达式，用于计算闭非定向曲面 N_g 的第 g 亏格的第 n 个对称积 $SP^n(N_g)$ 的第 k 个 $\mathbb{Z}_2$ 零因子杯长 $\mathrm{zcl}_k(SP^n(N_g))$。据此，我们得以估计，并在某些情况下完全确定第 k 个序列拓扑复杂度 $\mathrm{TC}_k(SP^n(N_g))$，以及第 k 个对角映射 $SP^n(N_g) \to (SP^n(N_g))^k$ 的同伦余纤维的 Lusternik–Schnirelmann 范畴。我们的结果重新得出了关于偶数维实射影空间（$g = 1$）和闭非定向曲面（$n = 1$）的已知结论。此外，我们证明，随着 g 增大，$\mathrm{TC}_2(SP^n(N_g))$ 的表现方式不同于其他所有不变量 $\mathrm{TC}_k(SP^n(N_g))$。同样，随着 k 增大，我们描述了 $\mathrm{zcl}_k(SP^n(N_g))$ 最终可能达到的最大线性增长，据此证明了 Farber 和 Oprea 关于 $SP^n(N_g)$ 的 TC 生成函数的有理性猜想。

Contents

1. 引言与主要结果 2 符号与约定 5 2. 预备知识与相关工作 6 2.A. 闭非定向曲面的对称积 6 2.B. 零因子杯长与序列拓扑复杂度 6 2.C. 对角映射的同伦余纤维的LS范畴 7 2.D. 来自 $SP^n(M_g)$ 与 P^{2n} 8 的计算比较 8 3. 推论与观察 8 4. 拓扑复杂度与有理性猜想 11 5. 上同调方面 15 5.A. $SP^n(N_g)$ 的上同调 15 5.B. 容量函数与 $SP^n(N_g)$ 乘积的上同调 16 6. k 阶零因子 17 7. $k = 2$ 20 的情形 8. 奇数 $k \geq 3$ 22 的情形 8.A. 一般准备 22 8.B. $k \geq 3$ 为奇数时定理 1.5（a）的证明 23

Date：2026年3月17日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主分类号：55S15、55M30；次分类号：57N65、70B15。*Key words and phrases.* 对称积、序列拓扑复杂度、零因子杯长、LS范畴、有理性猜想、实射影空间、对角映射的余纤维。

9. 偶数 $k \geq 4$参考文献 24
28

1. Introduction and main results

拓扑空间 X 的 k 阶序列拓扑复杂度 $\mathrm{TC}_k(X)$ 是一种数值同伦不变量，在拓扑机器人学领域中占据核心地位，用于衡量在空间 X 内连续移动点的难度 [Far03, Rud10]。更确切地说，$\mathrm{TC}_k(X)$ 比告知自主系统（例如机器人）如何在 X 的任意 k 个点之间移动所需的最少运动规划规则数少一。正如关于拓扑复杂度的大量文献所显示的那样，计算一般空间 X 的 $\mathrm{TC}_k(X)$ 是一项艰巨任务；因此，人们通常研究 $\mathrm{TC}_k(X)$ 的下界和上界，它们往往分别来自 X^k 的上同调和 X 的同伦维数。$\mathrm{TC}_k(X)$ 最有用的下界之一是 X 的 k 阶零因子杯长，记为 $\mathrm{zcl}_k(X)$；它是由 k 阶对角映射 $X \to X^k$ 在上同调中诱导的同态之核的杯长。事实上，当 X 是有限个球面的乘积 [Far03, BGRT14], 、单连通辛流形 [FTY03, BGRT14], 、可定向曲面 [Far03, Rud10] 或其有限对称积 [DCDJ, Jau25], ，或者当 $k \geq 3$ [为不可定向曲面时16], GGGL，这一不变量便可确定 $k \geq 2$ 的 $\mathrm{TC}_k(X)$；这里只列举闭流形的若干类。

在实射影空间 P^n 上，使点对之间连续移动的经典运动规划问题 [可追溯至03], 的研究；其中证明了，当$n \neq 1$为 3 或 7 时，$\mathrm{TC}_2(P^n)$ 与 P^n 的浸入维数相同，否则则与 n 相同。近来， P^n 上点的 k元组坐标之间移动的序贯运动规划问题在 [中得到了研究，并获得了 $\mathrm{TC}_k(P^n)$ 的尖锐下界，这些下界以 P^n的 k阶 $\mathbb{Z}_2$零因子杯长表示。本文将 [中关于偶数维实射影空间 P^{2n} 的研究从18] 推广至闭非定向曲面 N_g 的 n阶对称积 $SP^n(N_g)$，其中该曲面的亏格为 $g \geq 1$，且 $n \geq 1$。具体而言，我们通过给出任意 $SP^n(N_g)$的 k阶$\mathbb{Z}_2$零因子杯长的闭式表达式，估计（并在某些情况下精确确定）每个 $k \geq 2$ 对应的 $\mathrm{TC}_k(SP^n(N_g))$ 值。正如 Arnold 所指出的，这项工作是对既有研究的拓展：Maxwell 关于球谐函数多极表示的定理给出了一个同胚 $SP^n(P^2) \cong P^{2n}$；它也可被视为一种“四元数”类比，对应于由代数基本定理所蕴含的著名同胚 $SP^n(\mathbb{C}P^1) \cong \mathbb{C}P^n$，参见 [。

$\mathrm{TC}_k(X)$ 的另一个有用下界，可由 k 次对角映射 $X \to X^k$ 的同伦余纤维的 Lusternik–Schnirelmann 范畴数给出。我们将这一不变量记作 $\mathrm{cat}(C_{\Delta_k X})$；例如, GCV13、Dra14、Dra16、GGV18], 对 $k = 2$ 的研究中对此进行了详细探讨，并且它在研究闭非定向曲面的经典拓扑复杂度时发挥了核心作用。对于一般的 k, $\mathrm{TC}_k(X)$ 与 $\mathrm{cat}(C_{\Delta_k X})$ 之间的密切关系最近已在 [CAC+26 的命题 2.1 (2)] 中得到解决。本文建立了 $\mathrm{zcl}_k(X)$、$\mathrm{cat}(C_{\Delta_k X})$ 与 $\mathrm{TC}_k(X)$ 之间的一般比较结果，推广了已知的 $k = 2$ 性质，并将在评估 $\mathrm{cat}(C_{\Delta_k SP^n(N_g)})$ 和 $\mathrm{TC}_k(SP^n(N_g))$ 时发挥核心作用。特别地，$\mathrm{cat}(C_{\Delta_k X})$ 的下界为 $\mathrm{zcl}_k(X)$,

因此，本文对 $SP^n(N_g)$ 的 k 次 $\mathbb{Z}_2$ 零因子杯长的计算，给出了 $\mathsf{cat}(C_{\Delta_k SP^n(N_g)})$ 的估计（在某些情况下还得到了精确值）。这使我们能够比较 $\mathsf{TC}_k(SP^n(N_g))$ 与 $\mathsf{cat}(C_{\Delta_k SP^n(N_g)})$ 的值，并证明它们在若干情形下相等。

我们将在第 2 节回顾有关不可定向曲面的对称积、拓扑复杂度、Lusternik–Schnirelmann 范畴和零因子杯长的一些标准且有用的事实。现在，我们给出闭非定向曲面亏格为 $g \geq 1$ 时，对于每个 $k \geq 2$ 和 $n \geq 1$，其 n 阶对称积的 k 阶 $\mathbb{Z}_2$ 零因子杯长的精确公式，以及这些公式在计算 $\mathsf{TC}_k(SP^n(N_g))$ 和 $\mathsf{cat}(C_{\Delta_k SP^n(N_g)})$ 中的应用。该杯长记作 $\mathsf{zcl}_k(SP^n(N_g))$，并将在第 6 节中进行详细研究。为简便起见，我们将 $\mathsf{zcl}_k(SP^n(N_g))$ 的描述分为几个不同的情形。

最简单的情形是 $k = 2$。为了描述 $\mathsf{zcl}_2(SP^n(N_g))$，事实证明，只需知道从上下两侧对 n 进行最佳界定的相邻 2 的幂。也就是说，对于任意给定的整数 $n \geq 1$，存在 $e \geq 0$ 使得$2^e \leq n < 2^{e+1}$，于是 $\mathsf{zcl}_2(SP^n(N_g))$ 完全可以用 g、n和 e来描述，具体取决于 g 如何与 n和 2^e之间的间隙7相互作用。精确表述如下，将在第

1.1. **定理**。设 $2^e \leq n < 2^{e+1}$，其中 $e \geq 0$。那么对于 $g \geq 1$，我们有

$$\mathsf{zcl}_2(SP^n(N_g)) = \begin{cases} 2^{e+2} + g - 2 & \text{if } g \leq 2n - 2^{e+1} + 1; \\ 2^{e+1} + 2n - 1 & \text{if } g \geq 2n - 2^{e+1} + 1. \end{cases}$$

当 $k \geq 3$ 时，需要用到更多工具。特别是，与 $k = 2$的情形不同，为了描述 n （实际上是 $2n$）的二进制展开，我们需要更深入地了解它，进而计算 零因子杯长$_k(SP^n(N_g))$。为此，我们沿用 [Dav18] 的记号，并作如下定义。

1.2. **定义**。设 $m \geq 1$ （其中 $2^e \leq m < 2^{e+1}$，且 $e \geq 0$）的二进制展开为 $m = \delta_e 2^e + \delta_{e-1} 2^{e-1} + \cdots + \delta_1 2^1 + \delta_0 2^0$，其中 $\delta_j \in \{0, 1\}$。定义集合

$$S(m) := \{i \in \{0, \ldots, e\} \mid \delta_i = \delta_{i-1} = 1 \text{ and } \delta_{i+1} = 0\}.$$

对于 $0 \leq i \leq e$，也定义数

$$Z_i(m) := \sum_{j=0}^{i} (1 - \delta_j)\, 2^j.$$

换言之，$Z_i(m)$ 是所有满足以下条件的 2^j 之和：$j \leq i$，且 m 的二进制展开中第 j 位为 0；如果 m 的二进制展开中从第 i 位开始出现至少两个连续的 1，则 $i \in S(m)$。

为了描述 零因子杯长$_k(SP^n(N_g))$，对于 $k \geq 3$，我们需要采用 $m = 2n$ 上文中的结果。我们的描述将运用 Davis 关于偶数维实射影空间的 k-阶零因子杯长的结果，见 [Dav18]。在回顾该结果之前，我们先定义如下内容。

1.3. **定义**。对于有限维 CW 复形 X 和 $k \geq 2$，定义k阶零因子间隙 X，记作 $\mathsf{gap}_k(X)$，如下：

$$\mathsf{gap}_k(X) := k \cdot \dim(X) - \mathsf{zcl}_k(X).$$

特别地,

$$\mathsf{gap}_k(SP^n(N_g)) + \mathsf{zcl}_k(SP^n(N_g)) = 2nk. \tag{1.I}$$

量 零因子杯长$_k(P^{2n})$ 和 间隙$_k(P^{2n})$ 已经完全得到了理解。事实上，文献 [Dav18]中证明了

$$\mathsf{gap}_k(P^{2n}) = \max_{i\in S(2n)} \left\{0, 2^{i+1} - 1 - kZ_i(2n)\right\}. \tag{1.II}$$

对于 $k \geq 3$，零因子杯长 $\mathsf{zcl}_k(SP^n(N_g))$ 的描述，以及由此得到的间隙 $\mathsf{gap}_k(SP^n(N_g))$ 的描述，将分为几个部分进行。 $k \geq 3$ 为奇数的情形较为简单。当 $k \geq 4$ 为偶数时，我们根据 g 与比值 $\frac{\text{间隙}_k(P^{2n})}{k}$ 和 $\frac{\text{间隙}_k(P^{2n})}{k-2}$ 的大小关系，给出零因子杯长 $\mathsf{zcl}_k(SP^n(N_g))$ 的三个公式。具体陈述如下。

1.4. **定理**。设 $k \geq 3$ 、 n 和 $g \geq 1$ 为整数。
(A) 若 $k \geq 3$ 为奇数，或者 $k \geq 4$ 为偶数且 $g \leq \left\lfloor \frac{\text{间隙}_k(P^{2n})}{k} \right\rfloor + 1$，则有

$$\mathsf{zcl}_k(SP^n(N_g)) = 2nk - \max_{i\in S(2n)} \left\{0, 2^{i+1} - 1 - kZ_i(2n) - (k-1)(g-1)\right\}.$$

(B) 若 $k \geq 4$ 为偶数，且 $\left\lfloor \frac{\text{间隙}_k(P^{2n})}{k} \right\rfloor + 2 \leq g \leq \left\lfloor \frac{)\text{间隙}_k\ P^{2n}}{k-2} \right\rfloor + 1^{()}$，则有

$$\mathsf{zcl}_k(SP^n(N_g)) = 2nk + \left(\frac{k}{2} - 1\right)(g-1) - \frac{\mathsf{gap}_k(P^{2n}) + 1}{2}.$$

(C) 若 $k \geq 4$ 为偶数，且 $g \geq \left\lfloor \frac{\text{间隙}_k\ P^{2n}}{k-2} \right\rfloor + 2^{()}$，则有

$$\mathsf{zcl}_k(SP^n(N_g)) = 2nk.$$

鉴于（1.I），定理 1.4 等价于以下定理，该定理将在第 8.B 小节和第 9节中证明。

1.5. **定理**。设 $k \geq 3$ 和 n、 $g \geq 1$ 为整数。
(a) 若 $k \geq 3$ 为奇数，或若 $k \geq 4$ 为偶数且 $g \leq \left\lfloor \frac{\text{间隙}_k(P^{2n})}{k} \right\rfloor + 1^{)}$，则有

$$\mathsf{gap}_k(SP^n(N_g)) = \max_{i\in S(2n)} \left\{0, 2^{i+1} - 1 - kZ_i(2n) - (k-1)(g-1)\right\}.$$

(b) 若 $k \geq 4$ 为偶数且 $\left\lfloor \frac{\text{间隙}_k(P^{2n}}{k} \right\rfloor + 2 \leq g \leq \left\lfloor \frac{)\text{间隙}_k\ P^{2n}}{k-2} \right\rfloor + 1^{()}$，则有

$$\mathsf{gap}_k(SP^n(N_g)) = \frac{\mathsf{gap}_k(P^{2n}) + 1}{2} - \left(\frac{k}{2} - 1\right)(g-1).$$

(c) 若 $k \geq 4$ 为偶数且 $g \geq \left\lfloor \frac{\text{间隙}_k\ P^{2n}}{k-2} \right\rfloor + 2^{()}$，则有

$$\mathsf{gap}_k(SP^n(N_g)) = 0.$$

注意，当且仅当 b 项为空时，$\left\lfloor \text{间隙}_k(P^{2n})\, k \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\text{间隙}_k^{\,k}}{k-2} \right\rfloor (P^{2n})$，此时，a 项和 c 项互为补项。

由于 零因子杯长$_k(SP^n(N_g))$ 是下界，因此也是 k 阶 $SP^n(N_g)$ 的序列拓扑复杂度与 k 阶对角映射 $SP^n(N_g) \to (SP^n(N_g))^k$ 的同伦余纤维的 Lusternik–Schnirelmann 范畴这两者的下界，我们关于前一个不变量的结果对后两个不变量有如下推论（证明见第 4 节）。

1.6. **推论**。设 $k \geq 2$、n 和 $g \geq 1$ 为整数。

(i) If $k \geq 3$ *is odd and* $g \geq \left\lceil \frac{\mathsf{gap}_k(P^{2n})}{k-1} \right\rceil + 1$, *or if* $k \geq 4$ *is even and* $g \geq \left\lfloor \frac{\mathsf{gap}_k(P^{2n})}{k-2} \right\rfloor + 2$, *or if* $n = 2^e$ *for some* $e \geq 0$ *and* $k \geq 3$, *then we have that*

$$\mathsf{TC}_k(SP^n(N_g)) = 2nk = \mathsf{cat}(C_{\Delta_k SP^n(N_g)}).$$

(ii) 若对于某个 $e \geq 1$ 有 $2^e \leq n < 2^{e+1}$，则有

$$2^{e+2} - 1 \leq \mathsf{cat}(C_{\Delta_2 SP^n(N_g)}) \leq \mathsf{TC}_2(SP^n(N_g)) \leq 4n - 1.$$

特别地，如果 $n = 2^e$，则最后三个不等式都是等式。

我们注意到，在 $g = 1$ 的情形下（即当 $SP^n(N_1) \cong P^{2n}$ 时），我们的结果还原了关于 P^{2n} 的零因子杯长的结果，参见 [Dav18]（另见 [CAG+18] 中关于 $k = 2$ 的结果）。类似地，在 $n = 1$ 的情形下（即当 $SP^1(N_g) = N_g$ 时），我们的结果还原了 $k \geq 3$ 在 [GGGL16 第 5], 节中的计算，以及一个广为人知的事实：$\mathsf{zcl}_2(N_g) = 3$（例如参见 [Dra16，定理 3.4 的证明。4]）。

由 [CAC+26 命题 2.1 (2)] 可知，对于基本群为阿贝尔群的空间 X，$\mathsf{TC}_k(X)$ 取其可能的最大值 $k \cdot \dim(X)$，当且仅当 $\mathsf{cat}(C_{\Delta_k X})$ 也取该值。由于对于 $n \geq 2$，$\pi_1(SP^n(N_g))$ 是阿贝尔群，推论 1.6 给出了一个显式的新无限例族，其中对每个 $k \geq 2$，等式 $\mathsf{TC}_k(X) = \mathsf{cat}(C_{\Delta_k X}) = k \cdot \dim(X)$ 均成立（事实上，在这些情形下，先前提出猜想的等式 $\mathsf{TC}_2(X) = \mathsf{cat}(C_{\Delta_2 X}) = \mathsf{TC}^M(X)$ 对 [的幺半拓扑复杂度也成立，参见 10], IS10], 注 4.2）。对于少数几类空间（例如球面、道路连通的 H-空间、单连通闭辛流形和实射影空间），等式 $\mathsf{TC}_2(X) = \mathsf{cat}(C_{\Delta_2 X})$ 成立，这一点已由 [GCV13], 证明；而由 [Dra16、Dra17、CV17] 可得，对于 $g \geq 2$，$\mathsf{cat}(C_{\Delta_2 N_g}) = 3 < 4 = \mathsf{TC}_2(N_g)$。鉴于后一不等式，对于 $g \geq 2$，推论 1.6 (ii) 中的条件 $e \geq 1$ 不可省略。

记号与约定。除非另有说明，本文讨论系数取自 $\mathbb{Z}_2$ 的（上）同调。类似地，零因子杯长只考虑系数取自 $\mathbb{Z}_2$ 的情形。张量积始终在整数环上取，并记作 $\otimes$。书写杯积时省略记号 $\smile$，即用 $\alpha\beta$ 表示杯积 $\alpha \smile \beta$。我们使用映射 一词同时指连续函数和代数同态。除非另有说明，所有空间均假设为连通的。

2. Preliminaries and related work

2.A. 闭非定向曲面的对称积。令 N_g 表示亏格为 $g \geq 1$ 的闭非定向曲面， Σ_n 表示作用于 $n \geq 1$ 个符号上的对称群。置换 $\sigma \in \Sigma_n$ 对笛卡尔积 $(N_g)^n$ 的各个因子进行置换。此作用的轨道空间是 N_g 的 n 阶对称积，记作 $SP^n(N_g)$。众所周知，$SP^n(N_g)$ 是一个闭光滑非定向 $2n$ 维流形。例如， $SP^1(N_g) = N_g$，且 $SP^n(N_1) \cong P^{2n}$，参见 [KS06]。

对于 $n > 1 \leq g$， $\pi_1(SP^n(N_g)) \cong H_1(N_g; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{g-1} \oplus \mathbb{Z}_2$ 是一个标准事实，例如见 [KT13]。特别地， $SP^n(N_g)$ 不是可覆叠空间。然而，正如 [Jau25] 所示，$SP^n(N_g)$ 在 Gromov 的意义下总是本质的（因为其 Lusternik–Schnirlemann 范畴数为 $2n$），且其万能覆叠空间是 $(n-1)$-连通的。出于基本群的原因，根据 Cartan–Hadamard 定理， $SP^n(N_g)$ 不支持具有非正截面曲率的黎曼度量；而对于 $g \geq 2n+1$，根据关于第一 Betti 数的 Bochner 定理，它也不支持具有非负 Ricci 曲率的黎曼度量。 $SP^n(N_g)$ 的上同调环由 [KS06] 给出；我们将在第 5.A 小节回顾这一描述。有关这些流形的综述，参见 [BGZ02]。

2.B. 零因子杯长与序列拓扑复杂度。设 X 是一个 CW 复形， $k \geq 2$ 是一个整数，令 $\Delta_{k,X}\colon X \to X^k$ 表示对角映射。在系数取自环 R 的上同调中，该映射诱导出代数同态 $\Delta^*_{k,X}\colon H^*(X^k; R) \to H^*(X; R)$。上同调类 $\alpha \in \mathrm{Ker}(\Delta^*_{k,X})$ 称为 X 的第 kR 阶零因子，而这类零因子的最长非零杯积的长度称为 X 的第 k R 阶零因子杯长，记作 $\mathrm{zcl}_{k,R}(X)$。我们将记号 $\mathrm{zcl}_k(X) := \mathrm{zcl}_{k,\mathbb{Z}_2}(X)$ 保留给其他用途。关于本文及后续所用的术语和结果，请参阅 [Far03, Far06, Rud10, BGRT14]。

k 阶序列拓扑复杂度 of X，记作 $\mathsf{TC}_k(X)$，定义为满足 $X^k = \bigcup_{i=1}^{n+1} U_i$ 的最小非负整数 n ，其中每个 $U_i \subset X^k$ 均为开集，并且存在映射 $s_i\colon U_i \to X^{[0,1]}$ 满足

$$s_i(x_1, \ldots, x_k)\left(\frac{j-1}{k-1}\right) = x_j$$

对于每个 $j \in \{1, \ldots, k\}$ 和 $(x_1, \ldots, x_k) \in U_i$。为便于后文引用，我们将 s_i称为上的运动规划器。

与 $\mathsf{TC}_k(X)$ 密切相关且早得多的一个同伦不变量是的 *Lusternik–Schnirelmann* 范畴（简称 LS范畴），记作 $\mathrm{cat}(X)$，定义为满足 $X = \bigcup_{j=1}^{m+1} V_j$的最小非负整数 m，其中每个 V_j 都是开集，且在 X中零伦。

下面这个众所周知的结果将这些不变量联系起来。

2.1. **定理**。 对于 *CW* 复形 X、环 R和整数 $k \geq 2$，有$\max\{$零因子杯长$_{k,\,R}(X)$,范畴数$(X^{k-1})\} \leq \mathsf{TC}_k(X) \leq$ 范畴数(X^k)。

文献 [Jau25] 已证明，对于 $m, n, g \geq 1$， $\mathrm{cat}((SP^n(N_g)^m) = 2mn$。因此可得，$2n(k-1) \leq \mathsf{TC}_k(SP^n(N_g)) \leq 2nk$。由于 $SP^n(N_1) \cong P^{2n}$，整数 $\mathsf{TC}_k(SP^n(N_1))$ 等于在 $\mathbb{R}^{2n+1}$ 中通过 k 个位置旋转一条位于 $\mathbb{R}^{2n+1}$ 中、沿原点处旋转关节固定的直线所需的最少运动规划规则数减一。对于 $k = 2$，这个整数是 P^{2n} 的浸入维数（参见 [FTY03]）；对于 $k \geq 3$，这个整数在某些情况下为 $2nk$

情形（取决于 k 和 n的组合性质），而在其他情形下尚未确定，参见 [Dav18]。

2.C. 对角映射的同伦余纤维的LS范畴。设 X 为 CW 复形，$k \geq 2$ 为整数，令 $C_{\Delta_k X}$ 表示对角映射 Δ_k、X 的余纤维：$X \to X^k$。事实上，$C_{\Delta_k X} = X^k \cup_{\Delta_k}$、$_X$ CX 是 Δ_k、X 的映射锥。由于 X 在余纤维化 Δ_k、X 下的像 $\Delta_k X$ 在 X^k 中是闭的，我们有 $C_{\Delta_k X} \simeq X^k/\Delta_k X$，见 [Hat02]。因此，由于 $(X^k$、$\Delta_k X)$ 是良好CW对（按 [Hat02] 的定义），可知

$$H^s(C_{\Delta_k X}; R) \cong H^s(X^k, \Delta_k X; R)$$

对于任意 $s \geq 1$ 和环 R。

关于 $C_{\Delta_k X}$ 的以下 LS范畴 事实，是对 $k = 2$ 这一众所周知情形的直接推广。证明很简短，为完整起见，我们将其记录如下。

2.2.**定理**。对于有限维 *CW* 复形 X、环 R 和整数 $k \geq 2$，有 零因子杯长$_{k,R}(X) \leq$范畴数$(C_{\Delta_k X}) \leq \min\{\mathsf{TC}_k(X) + 1, k \cdot$维数$(X)\}$。

证明。首先，我们证明 $\mathsf{cat}(C_{\Delta_k X}) \leq \mathsf{TC}_k(X) + 1$。若 $\mathsf{TC}_k(X) = m$，则可写作 $X^k = \bigcup_{i=1}^{m+1} U_i$，其中每个 $U_i \subset X^k$ 都是开集，并且存在一个运动规划器s_i: $U_i \to X^{[0,1]}$。由此可知，对于每个 i，包含映射 $U_i \hookrightarrow X^k$ 同伦于一个取值于 $\Delta_k X$ 的映射。事实上，对于任意固定的 i，利用映射ϕ_r：$[0,1] \to [0,1]$ 定义如下

$$\phi_r(t) := \frac{t(k-r) + r - 1}{k-1}$$

对于 $1 \leq r \leq k$，我们可以将所需的变形 H_i: $U_i \times I \to X^k$ of U_i 定义为

$$H_i(x_1, \ldots, x_k, t) := (s_i(x_1, \ldots, x_k)(\phi_1(t)), \ldots, s_i(x_1, \ldots, x_k)(\phi_k(t))) .$$

对 [Far06 引理 18.3] 中证明的直接推广，便可得到 $\mathsf{cat}(C_{\Delta_k X}) \leq \mathsf{TC}_k(X) + 1$。另一个上界 $\mathsf{cat}(C_{\Delta_k X}) \leq k \cdot \mathsf{dim}(X)$ 成立，因为 $C_{\Delta_k X} \simeq X^k/\Delta_k X$ 且 $\mathsf{dim}(X^k/\Delta_k X) \leq k \cdot \mathsf{dim}(X)$。对于下界，设 $\mathsf{zcl}_{k,R}(X) = n$，则对于 $1 \leq i \leq n$，存在上同调类 $\alpha_i \in H^{s_i}(X^k; R)$，满足 $\alpha_1 \cdots \alpha_n \neq 0$ 且 $\Delta^*_{k,X}(\alpha_i) = 0$。对于每个 i，偶对 $(X^k, \Delta_k X)$ 的长正合列给出

$$\cdots \to H^{s_i}(X^k, \Delta_k X; R) \xrightarrow{j} H^{s_i}(X^k; R) \xrightarrow{\Delta^*_{k,X}} H^{s_i}(X; R) \to \cdots ,$$

由此我们推得存在 $\beta_i \in H^{s_i}(X^k,\ \Delta_k X;\ R) \cong H^{s_i}(C_{\Delta_k X};\ R)$，使得 $j(\beta_i) = \alpha_i$。由杯积的自然性可知，$\beta_1 \cdots \beta_n \neq 0$ 属于 $H^*(C_{\Delta_k X};\ R)$。由于任意 CW 复形的 R-杯长都是其 LS范畴的下界（例如，参见 [CLOT03，命题 1.5]），因此 $\mathsf{zcl}_{k,\ R}(X) = n \leq \mathsf{cat}(C_{\Delta_k X})$。□

2.D. 根据对 $SP^n(M_g)$ 和 P^{2n} 的计算进行比较。与闭非定向曲面的对称积类似，亏格为 $g \geq 0$ 的闭定向曲面 M_g 的 n 次对称积记作 $SP^n(M_g)$。这是一个闭光滑可定向 $2n$ 维流形，在拓扑学和几何学中已得到充分研究——例如，参见 [Mac62、BGZ02、KS06、DCDJ]。$SP^n(M_g)$ 和 $SP^n(N_g)$ 之间存在若干根本差异；我们将结合定理 1.1 和 1.4 以及 [Jau25、DCDJ] 的结果，着重介绍其中一些具有拓扑复杂度（TC）特色的差异。

(1) 与 $\mathrm{zcl}_k(SP^n(N_g))$ 相比，$\mathrm{zcl}_{k,\mathbb{Q}}(SP^n(M_g))$ 的计算要简单得多。前者的估计基于 Macdonald 对环 $H^*(SP^n(M_g);\mathbb{Q})$ 的描述（见 [Mac62]），其结果仅取决于 g 与 n 的比较。另一方面，计算 $\mathrm{zcl}_k(SP^n(N_g))$ 时，需要使用 Kallel–Salvatore 对环 $H^*(SP^n(N_g);\mathbb{Z}_2)$ 的描述（见第 5 节），以及 Davis 对 $g = 1$ in [Dav18] 中情形的分析；其结果很大程度上取决于 n 的二进制展开、k 的大小和奇偶性，以及 g 与两个比值的比较——这两个比值在包含 (1.II) 的段落中给出，涉及不变量 $\mathrm{gap}_k(P^{2n})$。

(2) 对每个 k, n 和 g，$\mathrm{TC}_k(SP^n(M_g))$ 的值都是已知的，而在许多情况下，$\mathrm{TC}_k(SP^n(N_g))$ 的值尚不清楚。事实上，前者总是等于 $\mathrm{zcl}_{k,\mathbb{Q}}(SP^n(M_g))$，而据我们（作者）所知，只有当该数取最大可能值时，才有等式 $\mathrm{zcl}_k(SP^n(N_g)) = \mathrm{TC}_k(SP^n(N_g))$（见推论 1.6）。这些评论也适用于不变量 $\mathrm{cat}(C_{\Delta_k X})$，其中 $X \in \{SP^n(M_g)\ SP^n(N_g)\}$。因此，计算 $SP^n(M_g)$ 的 TC 生成函数（见 [FO19, FKS20]）比计算 $SP^n(N_g)$ 的 TC 生成函数更简单。前一种情况下，TC 生成有理函数有明确的描述，其分子中的整系数多项式为二次多项式。相比之下，$SP^n(N_g)$ 的 TC 生成有理函数的分子通常是三次多项式；一般而言，我们只能给出其次数的界，见下文定理 4.3。

如前所述，闭非定向曲面的对称积是偶数维实射影空间的推广。对零因子杯长 $_k(P^{2n})$ 的描述比 [Dav18] 中的描述更简单。事实上，我们的结果表明，对于非平凡的亏格（即 $g \neq 1$），零因子杯长 $_k(SP^n(N_g)$ 的值既取决于 g 的大小，也取决于 k 的奇偶性——具体示例见例 3.1，另请参见引理 9.1陈述后的评论。

总而言之，研究 $SP^n(N_g)$ 的某些同伦不变量（例如零因子杯长和序列拓扑复杂度），比研究 $SP^n(M_g)$ 和 P^{2n} 的相应不变量更加复杂。

3. Consequences and observations

本节将探讨主要结果对零因子杯长的推论。我们先看一个简单的例子。

3.1. **例**。设 $n = 51$，使得 $2n = 102 = 2^6 + 2^5 + 2^2 + 2^1$。由 [Dav18] 可知，间隙 $_k(P^{102})$ 等于 $127 - 25k$ 当 $2 \leq k \leq 5$，$7 - k$ 当 $5 \leq k \leq 7$，

否则为 0。由于 2， $6 \in S(102)$， $Z_2(102) = 1$，且 $Z_6(102) = 25$，由定理 1.1 和 1.5 可得 $SP^{51}(N_g)$ 的以下计算结果：

$$\mathsf{gap}_k(SP^{51}(N_g)) = \begin{cases} 78-g & \text{if } k=2, g \le 39; \\ 39 & \text{if } k=2, g \ge 39; \\ 54-2g & \text{if } k=3, g \le 26; \\ 30-3g & \text{if } k=4, g \le 7; \\ 15-g & \text{if } k=4, 8 \le g \le 14; \\ 2 & \text{if } k=5, g=1; \\ 1 & \text{if } k=6, g=1; \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

从这个例子可以清楚看出，在大多数情况下，$\mathsf{gap}_k(SP^n(N_g))$ 的计算比 $\mathsf{gap}_k(P^{2n})$ 的计算复杂得多。

以下结论直接由定理1.1得出。

3.2. **推论**。 设 $2^e \le n < 2^{e+1}$，其中 $e \ge 0$。那么

$$\lim_{g\to\infty} \mathsf{zcl}_2(SP^n(N_g)) = 2^{e+1} + 2n - 1.$$

根据推论 1.6，当 $\mathsf{TC}_2(SP^n(N_g))$ 时，这个极限达到其可能的最大值 $n = 2^e \ge 2$；但在其他情况下，它小于 $4n-1$。与此情形截然相反，当 $k \ge 3$ 时，我们有以下结论。

3.3. **推论**。 固定 $n \ge 1$。那么对于 $k \ge 3$，有

$$\lim_{g\to\infty} \mathsf{zcl}_k(SP^n(N_g)) = 2nk \quad and \quad \lim_{g\to\infty} \mathsf{TC}_k(SP^n(N_g)) = 2nk.$$

证明。左侧极限的断言对每个 $k \ge 3$ 都可直接由定理（A）和（C）得出。1.4。为说明右侧的极限，只需注意到，对于每个 零因子杯长$_k$（SP^n（N_g）） $\le \mathsf{TC}_k$（SP^n（N_g）） $\le 2nk$ 以及 k。 g。□

我们将在推论 6.3 中证明，对于固定的 n 和 k，$\mathsf{zcl}_k(SP^n(N_g)) \le \mathsf{zcl}_k(SP^n(N_{g+1}))$。定理 1.1 和 1.4 帮助我们在所有情况下，利用 $\mathsf{zcl}_k(SP^n(N_g))$ 得到 $\mathsf{zcl}_k(SP^n(N_{g+1}))$ 的一个上界。具体而言，当亏格 g 增加 1 时，精确控制第 k 个零因子杯长（或者等价地，第 k 个零因子间隙的线性衰减）如何线性增长。

3.4. **命题**。 设 $g \ge 1$ 和 $2^e \le n < 2^{e+1}$，其中某个 $e \ge 0$。

(1) 如果 $k = 2$，那么我们有 $zcl_2(SP^n(N_{g+1})) - zcl_2(SP^n(N_g)) \le 1$，其中等式成立当且仅当 $g \le 2n - 2^{e+1}$。*(2)* 如果 $k \ge 3$ 是奇数，那么 $zcl_k(SP^n(N_{g+1})) - zcl_k(SP^n(N_g)) \le k-1$；当 $zcl_k(SP^n(N_{g+1})) \ne 2nk$ 时，这构成一个等式；若 $g \ge \left\lceil \text{间隙}_{k-1}^{k} P^{2n} \right\rceil + 1$*()*，则其值为 *0*。*(3)* 如果 $k \ge 4$ 是偶数且 $g \le \left\lfloor \text{间隙}_k(P^{2n}) \right\rfloor$)，那么我们有等式 $zcl_k(SP^n(N_{g+1})) - zcl_k(SP^n(N_g)) = k-1$。

(4) 如果 $k \geq 4$ 是偶数且 $g = \left\lfloor \frac{\text{间隙}_k(P^{2n}}{k} \right\rfloor + 1)$，那么我们有等式

$$\mathsf{zcl}_k(SP^n(N_{g+1})) - \mathsf{zcl}_k(SP^n(N_g)) = \begin{cases} \frac{k+r-3}{2} & if\ k \leq 2g+r; \\ g+r-1 & if\ k \geq 2g+r+1, \end{cases}$$

其中 r 是将 间隙$_k(P^{2n})$ 除以 k 后得到的余数。

(5) 若 $k \geq 4$ 为偶数且 $\left\lfloor \frac{\text{间隙}_k(P^{2n}}{k} \right\rfloor + 2 \leq g \leq \left\lfloor \frac{)\text{间隙}_k\ P^{2n}}{k-2} \right\rfloor ()$，则有等式 零因子杯长$_k(SP^n(N_{g+1}))$ $-$零因子杯长$_k(SP^n(N_g))$ $= \frac{k}{2} - 1$。

(6) 若 $k \geq 4$ 为偶数且 $g \geq \left\lfloor \frac{\text{间隙}_k\ P^{2n}}{k-2} \right\rfloor + 1^{()}$，则有等式零因子杯长$_k($ $SP^n(N_{g+1}))$ $-$零因子杯长$_k(SP^n(N_g))$ $=$间隙$_k(SP^n(N_g))$，当且仅当 $g = \left\lfloor \text{间隙}_k\ P^{2n} \right\rfloor + 1^{()}$ 且 间隙$_k(P^{2n}) \geq 0$ 时，该值为正。

证明。由于零因子杯长$_k(SP^n(N_{g+1}))$–零因子杯长$_k(SP^n(N_g))$ $=$间隙$_k(SP^n(N_g))$–间隙$_k$ $(SP^n(N_{g+1}))$，为方便起见，我们将对后一个量证明此命题。显然，（1）和（5）中的断言分别由定理 1.1 和 1.5 (b) 立即得出。对于其他情况，我们按如下方式进行。

(2) 若间隙$_k(SP^n(N_g))$ $= 0$，则我们便完成了，因为根据推论 6.3，间隙$_k(SP^n(N_{g+1}))$ $= 0$。注意，由（1.II）和定理 1.5（a），间隙$_k(SP^n(N_g))$ $=$max$\{0,$间隙$_k(P^{2n})$ $-(k-1)(g-1)\}$。因此，

$$g \geq \left\lceil \frac{\mathsf{gap}_k(P^{2n})}{k-1} \right\rceil + 1 \implies (g-1)(k-1) \geq \mathsf{gap}_k(P^{2n}) \implies \mathsf{gap}_k(SP^n(N_g)) = 0.$$

因此，正如上文所述，在这种情况下差值为 0。接下来，假设$0 <$间隙$_k(SP^n(N_g))$ $\leq$间隙$_k(P^{2n})$。根据定理 1.5 (a)，我们有

$$\begin{aligned} 0 < \mathsf{gap}_k(SP^n(N_g)) &= \max\left\{0, \mathsf{gap}_k(P^{2n}) - (k-1)(g-1)\right\} \\ &= \mathsf{gap}_k(P^{2n}) - (k-1)(g-1). \end{aligned}$$

如果 zcl$_k(SP^n(N_{g+1}))$ $\neq 2nk$，那么 $0 <$gap$_k(SP^n(N_{g+1}))$，因此，类比上述论证，可得 gap$_k(SP^n(N_{g+1}))$ $=$gap$_k(P^{2n})$ $-(k-1)g$。因此，在这种情况下，等式 $k-1$ 成立。否则，若 gap$_k(SP^n(N_{g+1}))$ $= 0$，则 gap$_k(P^{2n})$ $\leq (k-1)g$，由此可得 gap$_k(SP^n(N_g))$ $\leq k-1$。所以，$k-1$ 确实是一般的上界。

(3) 关于 g 的假设给出间隙$_k(P^{2n})$ $> (k-1)g$。因此，类比（2）的证明，可得 $0 <$ 间隙$_k(P^{2n})$ $-(k-1)g =$间隙$_k(SP^n(N_{g+1}))$，然后同理可得所述等式。

(4) 我们可以写成 间隙$_k(P^{2n})$ $= (g-1)k + r$，其中 $0 \leq r < k$。根据定理 1.5 (a)，间隙$_k(SP^n(N_g))$ 等于

$$\max\left\{0, \mathsf{gap}_k(P^{2n}) - (k-1)(g-1)\right\} = \max\left\{0, g+r-1\right\} = g+r-1$$

由于 $g+r-1\geq 0$。不难检验， $g\leq \left\lfloor \frac{\text{间隙}_k\ P^{2n}}{k-2} \right\rfloor ()$ 当且仅当 $k\leq 2g+r$。因此，如果 $k\leq 2g+r$，那么定理 1.5 (b) 给出

$$\mathsf{gap}_k(SP^n(N_{g+1}))=\frac{(g-1)k+r+1}{2}-\left(\frac{k}{2}-1\right)g=\frac{2g+r+1-k}{2},$$

这意味着差为

$$g+r-1-\frac{2g+r+1-k}{2}=\frac{k+r-3}{2}\leq k-2.$$

否则，若 $k\geq 2g+r-1$，则 间隙$_k(SP^n(N_{g+1}))=0$ 根据定理 1.5 (c)，因此差就是 $g+r-1$，它不超过 $g+k-2$。

(6) 这里，根据定理 1.5 (c)，我们有间隙$_k(SP^n(N_{g+1}))=0$。因此，所述等式根据定义成立。注意，当 $g\geq \left\lfloor \frac{\text{间隙}_k\ P^{2n}}{k-2} \right\rfloor +2^{()}$ 时，间隙$_k(SP^n(N_g))=0$，因此在此范围内差为 0。然而，若 $g=\left\lfloor \frac{\text{间隙}_k\ P^{2n}}{k-2} \right\rfloor +1^{()}$，这意味着 $g\leq \text{间隙}_{k-2}^{k}+1_{(P^{2n})}$，则我们断言

$$\mathsf{gap}_k(SP^n(N_g))=0\iff \mathsf{gap}_k(P^{2n})=0.$$

反向蕴含显然。为证明正向蕴含，假设 gap$_k(SP^n(N_g))=0$。如果 $\left\lfloor \text{间隙}_k(\frac{P^{2n}}{k} \right\rfloor +2\leq g)$，那么就会得到矛盾

$$1+\frac{\mathsf{gap}_k(P^{2n})+1}{k-2}=g>\frac{\mathsf{gap}_k(P^{2n})}{k-2}+1,$$

其中，第一个等式来自定理 1.5 (b)。因此，必有 $g\leq \left\lfloor \frac{\text{间隙}_k(P^{2n}}{k} \right\rfloor +1^{)}$。在此范围内，定理 1.5 (a) 给出

$$0=\mathsf{gap}_k(SP^n(N_g))=\max_{i\in S(2n)}\left\{0,2^{i+1}-1-kZ_i(2n)-(k-1)(g-1)\right\}.$$

如果 gap$_k(P^{2n})>0$，那么 $g>1$ （鉴于上面的等式），因此 g 的上界意味着 gap$_k(P^{2n})>(k-1)(g-1)$。如 (2) 的证明中所述，接着可得 $0<\mathsf{gap}_k(P^{2n})-(k-1)(g-1)=\mathsf{gap}_k(SP^n(N_g))$，这与假设矛盾。因此，gap$_k(P^{2n})=0$ 必然成立。于是，在这种情况下，差值，即 gap$_k(SP^n(N_g))$，为正当且仅当 gap$_k(P^{2n})>0$。

□

4. Topological complexity and the rationality conjecture

我们首先证明推论1.6，并将在本节随后讨论其推论。

推论的证明 *1.6*。我们首先考察情形（i）。关于 $k\geq 4$为偶数的断言可由定理 1.4 (C) 显然得出。若 $k\geq 3$为奇数且 $g\geq \left\lceil \frac{\text{间隙}_k\ P^{2n}}{k-1} \right\rceil +1^{()}$，则 间隙$_k(SP^n(N_g))=0$ 成立，这是因为定理 1.5 (a) 蕴含等式

$$\mathsf{gap}_k(SP^n(N_g))=\max\left\{0,\mathsf{gap}_k(P^{2n})-(k-1)(g-1)\right\}.$$

鉴于此，$\mathsf{zcl}_k(SP^n(N_g)) = \mathsf{cat}(C_{\Delta_k SP^n(N_g)}) = \mathsf{TC}_k(SP^n(N_g)) = 2nk$ 可由定理 2.1 和定理 2.2 得出。若 $n = 2^e$ 和 $k \geq 3$ 任意，则根据 [Dav18]，$\mathsf{gap}_k(P^{2n}) = 0$。因此，由定理 1.4 的 (A) 和 (C) 部分可得

$$2nk \geq \mathsf{TC}_k(SP^n(N_g)) \geq \mathsf{zcl}_k(SP^n(N_g)) = 2nk \quad \text{and}$$
$$2nk \geq \mathsf{cat}(C_{\Delta_k SP^n(N_g)}) \geq \mathsf{zcl}_k(SP^n(N_g)) = 2nk \quad \text{for all} \quad k \geq 3.$$

接下来，我们考察情形（ii）。回忆一下，$\pi_1(SP^n(N_g)) \cong H_1(N_g; \mathbb{Z})$ 是阿贝尔的，因为 $n \geq 2$；并且 $SP^n(N_g)$ 是道路连通的闭非定向 $2n$ 维流形。因此，[CV21，定理 1.2] 表明，$\mathsf{TC}_2(SP^n(N_g))$ 不取最大值，即不超过 $4n-1$。由定理 1.1 和定理 2.1，我们得到

$$\dim(SP^n(N_g)) = 2n < 2^{e+2} - 1 \leq \mathsf{zcl}_2(SP^n(N_g)) \leq \mathsf{TC}_2(SP^n(N_g)). \tag{4.I}$$

因此，根据定理 2.2 和 [GCV13，定理 10（2）]，，分别有 $\mathsf{zcl}_2(SP^n(N_g)) \leq \mathsf{cat}(C_{\Delta_2 SP^n(N_g)}) \leq \mathsf{TC}_2(SP^n(N_g))$。最后，若 $n = 2^e$，则有 $\mathsf{TC}_2(SP^n(N_g)) \leq 4n-1 \leq \mathsf{zcl}_2(SP^n(N_g))$，因此所有不等式均为等式。□

4.1. **注**。上文使用的 [CV21] 中的结果表明，$\mathsf{TC}_2(M) < 2\dim(M)$，当 M 是维数大于 1 且基本群为阿贝尔群的连通闭非定向流形时成立 $\pi_1(M$。根据推论 $\mathsf{TC}_k(M)$ 对任意 $k \geq 3$均不满足这一结果，见推论 1.6。

4.2. 注。正如 (4.I) 中所见，对于 $n, g \geq 1$，有 $\dim(SP^n(N_g)) < \mathsf{TC}_2(SP^n(N_g))$，因此 [Dra14, 定理 2.5] 给出 $\mathsf{TC}_2(SP^n(N_g)) = \mathsf{TC}^M(SP^n(N_g))$。这里，$\mathsf{TC}^M(X)$ 表示 X 的幺半拓扑复杂度，该概念由 [IS10], 引入。对于 CW 复形 X，它的值等于 $\mathsf{TC}_2(X)$ 或 $\mathsf{TC}_2(X) + 1$，并且猜想它总是等于 $\mathsf{TC}_2(X)$，参见 [IS10]。据我们所知，关于 TC^M 的另一条猜想（见 [Dra14, 第 4]节），即 $\mathsf{TC}^M(X) =$范畴数($C_{\Delta_2 X}$)，目前也仍未解决。我们的结果给出了以下等式

$$\mathsf{cat}(C_{\Delta_2 SP^{2^e}(N_g)}) = \mathsf{TC}_2(SP^{2^e}(N_g)) = \mathsf{TC}^M(SP^{2^e}(N_g)) = 2^{e+2} - 1$$

当 e，$g \geq 1$时。因此，Iwase–Sakai 和 Dranishnikov 的猜想对于闭非可定向曲面的无穷多个（非平凡）对称积均得到验证。对于亏格为 ≥ 1 的 [DCDJ定理 68]（另见 [Jau25]）所讨论的所有闭可定向曲面的对称积，同样的结论也成立。

现在，我们来验证 *Farber* 和 *Oprea* 的有理性猜想 [FO19] 关于TC生成函数的猜想，该函数为 $SP^n(N_g)$ 在 n，$g \geq 1$。

4.3. **定理**。设 n、$g \geq 1$ 为整数。那么，$SP^n(N_g)$ 的TC生成函数，即形式幂级数

$$f_{SP^n(N_g)}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{TC}_{k+1}(SP^n(N_g))\, t^k,$$

表示如下形式的有理函数

$$\frac{P_{SP^n(N_g)}(t)}{(1-t)^2},$$

其中 $P_{SP^n(N_g)}(t)$ 是一个整系数多项式，其在 $t=1$ 处的取值为 范畴数$(SP^n(N_g))$。此外，$P_{SP^n(N_g)}(t)$ 的次数不超过

$$\left\lfloor \frac{\mathsf{gap}_2(P^{2n})}{g-1} \right\rfloor + 3$$

当 $g \geq 2$ 时。事实上，如果满足以下任一条件，则 $P_{SP^n(N_g)}(t)$ 的次数不超过3 ：

(1) $g \geq \left\lfloor \frac{\mathsf{gap}_2(P^{2n})}{2} \right\rfloor + 2$ *and* $n \geq 1$ *is arbitrary;*

(2) $n = 2^e$ *for some* $e \geq 0$ *and* $g \geq 1$ *is arbitrary.*

在给出证明之前，我们先作几点说明。回顾 [CAG+18] ，若对于某个 $e \geq 0$，有 $2^e \leq n < 2^{e+1}$，则 $\mathsf{gap}_2(P^{2n}) = 4n - 2^{e+2} + 1 > 0$。因此，第 (1) 部分中的条件是 $g \geq 2n - 2^{e+1} + 2$。注意，利用 [Dav18，命题 1.4]，可以直接验证关于 $g=1$ 的有理性猜想。事实上，当 $k \geq 2^{\ell+1} - 1$ 时，有 $\mathsf{TC}_k(P^{2n}) = \mathsf{zcl}_k(P^{2n}) = 2nk$，其中 ℓ 是 n 的二进制展开中最长的连续 1 串的长度。由于 $\mathsf{cl}(P^{2n}) = \mathsf{cat}(P^{2n})$ 是众所周知的（例如参见 [CLOT03]），可以应用 [FKS20，定理 1] 完成验证。对于 $g \geq 2$，同样的论证也成立（参见注6.6）；不过，我们将通过给出关于 $P_{SP^n(N_g)}(t)$ 次数的一个相对更好的上界，明确验证关于 $g \geq 2$ 的有理性猜想。

定理 *4.3* 的证明。 取 $n \geq 1$ 和 $g \geq 2$。注意到

$$k \geq \left\lfloor \frac{\mathsf{gap}_2(P^{2n})}{g-1} \right\rfloor + 3 \iff k > \frac{\mathsf{gap}_2(P^{2n})}{g-1} + 2 \iff g \geq \left\lfloor \frac{\mathsf{gap}_2(P^{2n})}{k-2} \right\rfloor + 2.$$

Dav18Dav18，定理1。6] 推出 间隙$_2(P^{2n}) \geq$ 间隙$_k(P^{2n})$，对 $k \geq 3$。鉴于此以及上述蕴含关系，我们得到

$$k \geq \left\lfloor \frac{\mathsf{gap}_2(P^{2n})}{g-1} \right\rfloor + 3 \implies g \geq \left\lfloor \frac{\mathsf{gap}_k(P^{2n})}{k-2} \right\rfloor + 2 \geq \left\lceil \frac{\mathsf{gap}_k(P^{2n})}{k-1} \right\rceil + 1.$$

因此，我们应用推论 1.6 (i) 得出 $\mathsf{TC}_k(SP^n(N_g)) = 2nk$ 对 $k \geq \left\lfloor \frac{\text{间隙}_2\ P^{2n}}{g-1} \right\rfloor + 3^{()}$。为简便起见，令 $\mathscr{D} := \left\lfloor \frac{\text{间隙}_2\ P^{2n}}{g-1} \right\rfloor + 3^{()}$。于是我们可以写成

$$f_{SP^n(N_g)}(t) = \sum_{k=1}^{\mathscr{D}-2} \mathsf{TC}_{k+1}(SP^n(N_g))\ t^k \ + \ 2n \sum_{k=\mathscr{D}-1}^{\infty} (k+1)t^k.$$

当然，$\sum_{k=\mathscr{D}-1}^{\infty}(k+1)t^k = \frac{d}{dt}\left(\sum_{k=\mathscr{D}-1}^{\infty} t^{k+1}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{t^{\mathscr{D}}}{1-t}\right)$。因此，

$$f_{SP^n(N_g)}(t) = \sum_{k=1}^{\mathscr{D}-2} \mathsf{TC}_{k+1}(SP^n(N_g))\ t^k \ + \ 2n\ \frac{\mathscr{D}t^{\mathscr{D}-1} - (\mathscr{D}-1)t^{\mathscr{D}}}{(1-t)^2}$$

$$= \frac{1}{(1-t)^2}\left(2n\left(\mathscr{D}t^{\mathscr{D}-1} - (\mathscr{D}-1)t^{\mathscr{D}}\right) \ + \ (1-t)^2 \sum_{k=1}^{\mathscr{D}-2} \mathsf{TC}_{k+1}(SP^n(N_g))\ t^k\right).$$

由于 范畴数$(SP^n(N_g)) = 2n$ 根据 [Jau25 定理 B], ，我们看到上述括号中的整系数多项式确实满足所声称的性质。这就以 $\mathscr{D}$ 作为$P_{SP^n(N_g)}(t)$次数的上界，验证了最一般情形下的有理性猜想。

对于情形 (1)，若 $k \geq 3$ 为奇数，则

$$g \geq \left\lfloor \frac{\mathsf{gap}_2(P^{2n})}{2} \right\rfloor + 2 \geq \left\lfloor \frac{\mathsf{gap}_2(P^{2n})}{k-1} \right\rfloor + 2 \geq \left\lfloor \frac{\mathsf{gap}_k(P^{2n})}{k-1} \right\rfloor + 2 \geq \left\lceil \frac{\mathsf{gap}_k(P^{2n})}{k-1} \right\rceil + 1.$$

类似地，若 $k \geq 4$ 为偶数，则关于 g 的条件意味着

$$g \geq \left\lfloor \frac{\mathsf{gap}_2(P^{2n})}{2} \right\rfloor + 2 \geq \left\lfloor \frac{\mathsf{gap}_2(P^{2n})}{k-2} \right\rfloor + 2 \geq \left\lfloor \frac{\mathsf{gap}_k(P^{2n})}{k-2} \right\rfloor + 2.$$

因此，推论 1.6 (i) 给出 $\mathsf{TC}_k(SP^n(N_g)) = 2nk$ 对所有 $k \geq 3$。在情形 (2) 中，由推论 $\mathsf{TC}_k($ $SP^n(N_g)) = 2nk$ 对所有 $k \geq 3$ ，同样可得 1.6 (i)。因此，无论哪种情况，我们都有如下表达式

$$\begin{aligned} f_{SP^n(N_g)}(t) &= \mathsf{TC}_2(SP^n(N_g))\ t \ + \ 2n\ \frac{d}{dt}\left(\sum_{k=2}^{\infty} t^{k+1}\right) \\ &= \frac{1}{(1-t)^2}\left(\mathsf{cat}\left(SP^n(N_g)\right)\left(3t^2-2t^3\right) \ + \ \mathsf{TC}_2(SP^n(N_g))\ t\,(1-t)^2\right). \end{aligned}$$

证明至此完成。 □

有理性猜想对于闭流形仍未解决，目前仅在少数空间类（以及更少的不可定向流形类）中得到验证；最近的例子是闭可定向曲面的对称积，参见 [Jau25]（另见 [FO19，第 8] 节，以及 [HL22] ，其中介绍了其他一些已知类别）。定理 4.3 将这类（不可定向）流形的范围进一步扩大，其中许多流形的 TC 生成函数可以显式计算。

4.4. 注。 固定某个 $n \geq 1$。由定理 4.3 的证明可知，对于 $g \geq \left\lfloor \frac{\text{间隙}_2(P^{2n}}{2} \right\rfloor + 2)$ 以及 $r \geq k \geq 3$,

$$\mathsf{TC}_r(SP^n(N_g)) - \mathsf{TC}_k(SP^n(N_g)) = (r-k)\,\mathsf{cat}(SP^n(N_g)) = 2n(r-k).$$

特别地，序列 $\{$拓扑复杂度$_k(SP^n(N_g))\}_{k\geq 3}$ 是一个公差为 $2n =$ 范畴数$(SP^n(N_g))$ 的等差数列，其中 g 充分大。当然，由推论 范畴数$(C_{\Delta_k SP^n(N_g)})$ 在此范围内也有相同结论。1.6 (i)。

我们以对 Ganea 猜想在 LS范畴 [CLOT03] 方面的类似命题作一观察，来结束本节，该猜想针对序列拓扑复杂度。

4.5. **推论。** 对于满足推论 (n, g, k) 假设的三元组 *1.6* (i)，有

$$\mathsf{TC}_k(SP^n(N_g) \times S^m) = \mathsf{TC}_k(SP^n(N_g)) + \mathsf{TC}_k(S^m)$$

对所有奇数 $m \geq 1$ 都成立。特别地，关于奇数维球面的 TC_k-*Ganea* 猜想对 $SP^n(N_g)$ 成立。

证明。对于这类三元组，我们有 $\mathsf{zcl}_k(SP^n(N_g)) = \mathsf{TC}_k(SP^n(N_g))$。根据 [Rud10] ，我们还知道 $\mathsf{zcl}_k(S^m) = \mathsf{TC}_k(S^m) = k-1$。 [BGRT14] 的结果表明，由于 m 是奇数，$\mathsf{zcl}_k(SP^n(N_g)) + \mathsf{zcl}_k$ $(S^m) \leq \mathsf{zcl}_k(SP^n(N_g) \times S^m)$；并且 $\mathsf{TC}_k(SP^n(N_g) \times S^m) \leq \mathsf{TC}_k(SP^n(N_g)) + \mathsf{TC}_k(S^m)$。证明至此完成。□

5. Cohomological aspects

5.A. $SP^n(N_g)$**的上同调**。关于 $\mathbb{Z}_2$-上同调环 $SP^n(N_g)$的描述归功于 Kallel 和 Salvatore [KS06]。下面回顾相关细节。

闭非定向曲面 N_g（对于 $g \geq 1$）具有一个 CW 结构，由一个 0胞腔、 g 1 个胞腔以及一个由词 $a_1^2 a_2^2 \cdots a_g^2$ 附着的 2胞腔组成，其中 a_i 是 $H_1(P_i^2)$ 中的生成元（对于 $1 \leq i \leq g$）。这里， P_i^2 是射影平面的一个副本，我们使用连通和表示 $N_g = \#_{i=1}^g P_i^2$。元素 a_i 构成了 $H_1(N_g)$ 的一组基。对于由基点嵌入 $N_g \hookrightarrow SP^n(N_g)$ 诱导的映射，我们对它们在 $H_1(SP^n(N_g))$ 中的像使用相同的记号。令 $b \in H_2(N_g)$ 表示 $\mathbb{Z}_2$ 基本类及其在 $H_2(SP^n(N_g))$ 中的像。我们分别用 x_i 和 y 表示 a_i 和 b 的 Hom 对偶。在 $H^*(N_g)$ 中，对于 $i \neq j$，有 $x_i^2 = y$ 和 $x_i x_j = 0$。

5.1. **定理** ([KS06，第 4]节)。对于 n， $g \geq 1$，上同调环 $H^*(SP^n(N_g))$由以下次数为 1 的上同调类 $x_1, \ldots, x_g$ 以及次数为 2 的上同调类 y生成，且仅满足以下关系：

(1) $x_i^2 = y$ *for each* $1 \leq i \leq g$, *and*

(2) $x_{i_1} \cdots x_{i_r} y^s = 0$ *whenever* $r + s > n$ *for distinct indices* $i_1, \ldots, i_r$.

记由上述两组关系生成的理想为 $I_{n,\ g}$ 会更方便。于是，定理表明 $H^*(SP^n(N_g)) \cong \mathbb{Z}_2[x_1, x_2, \ldots, x_g, y] / I_{n,\ g}$。

5.2. **注**。由 [KS06，引理 19] 可知，单项式 $x_{i_1} \cdots x_{i_r} y^s$ 在$H^*(SP^n(N_g))$ 中，当指标 $i_1, \ldots, i_r$ 互不相同时，当且仅当 $r + s > n$时，该单项式为零。

事实上，以下描述可由 [KS06，定理 6]推导得出。

5.3. **定理**。对于 $n, g \geq 1$，向量空间 $H^*(SP^n(N_g))$ 的一个加法基（对本文而言的标准基）由以下单项式构成

$$y^t \prod_{i=1}^{g} x_i^{\varepsilon_i} = x_1^{2t+\varepsilon_1} \prod_{i=2}^{g} x_i^{\varepsilon_i}$$

满足 $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$， $t \geq 0$，以及 $t + \sum_{i=1}^g \varepsilon_i \leq n$，其中不失一般性地记 $y = x_1^2$（参见定理5.1）。

取 $g = 1$ （分别取 $n = 1$），定理5.3 可得回 $H^*(P^{2n})$ 的上同调环，其中 $n \geq 1$ （分别为 $H^*(N_g)$ 对应于 $g \geq 1$）。

5.4. **注**。对于 $g' \geq g$，考虑环同态

$$\iota \colon H^*(SP^n(N_g)) \to H^*(SP^n(N_{g'}))$$

由 $\iota(y) = y$ 和 $\iota(x_i) = x_i$ 给出，其中 $1 \leq i \leq g$。由于 ι 将其定义域的加法基映射到其陪域的加法基的一个子集，因此它是单态射。我们将需要由 ι 的 k 重张量积给出的环单态射 $H^*(SP^n(N_g))^{\otimes k} \to H^*(SP^n(N_{g'}))^{\otimes k}$。

5.B. $SP^n(N_g)$的容量函数与乘积的上同调。对于给定的整数 $k \geq 2$，我们取环$H^*((SP^n(N_g))^k) \cong H^*(SP^n(N_g))^{\otimes k}$中的张量积加法基，该基由定理 5.3 中的基得到。对于$1 \leq r \leq k$，令 $\mathrm{proj}_r\colon (SP^n(N_g))^k \to SP^n(N_g)$为到第 r 个笛卡尔因子的投影。对于 $1 \leq i \leq g$，令

$$x_{r,i} := \mathrm{proj}_r^*(x_i) = 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes x_i \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 \in H^*(SP^n(N_g))^{\otimes k}, \tag{5.I}$$

其中 x_i 仅出现在第 r个位置。

5.5. **定义**。 定理 *5.3* 中基元素 $x_1^a x_2^{\varepsilon_2} \cdots x_g^{\varepsilon_g} \in H^*(SP^n(N_g))$ 的容量定义为

$$c\left(x_1^a \prod_{i=2}^{g} x_i^{\varepsilon_i}\right) = n - \left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor + \sum_{i=2}^{g} \varepsilon_i\right) \geq 0.$$

我们还令 $c(0) = -\infty$。类似地，张量积基元素的容量 $b_1 \otimes \cdots \otimes b_k \in H^*(SP^n(N_g))^{\otimes k}$ 定义为

$$c\left(b_1 \otimes \cdots \otimes b_k\right) = \sum_{r=1}^{k} c(b_r),$$

其中 $b_r := \mathrm{proj}_r^*(x^{a_{r,1}}_{,1} x^{\varepsilon_{r,2}}_{,2} \cdots x^{\varepsilon_{r,g}}_{,g}) = x^{a_{r,1}}_{,1} x^{\varepsilon_{r,2}}_{,2} \cdots x^{\varepsilon_{r,g}}_{,g} \in H^*(SP^n(N_g))^{\otimes k}$ 对于$1 \leq r \leq k$。

5.6. **注**。 对于 $a \geq 0$ 和 $\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_g \in \{0, 1\}$，注 5.2 和定理 5.3 表明，单项式 $\mu := x_1^a x_2^{\varepsilon_2} \cdots x_g^{\varepsilon_g} \in H^*(SP^n(N_g))$ 根据 $c(\mu) \geq 0$ 或 $c(\mu) = -\infty$，要么是基元素，要么是平凡的。特别地，对于每个$j \in \{1, \ldots, g\}$，

$$x_1^a x_2^{\varepsilon_2} \cdots x_j^{\varepsilon_j} \cdot x_{j+1}^{\varepsilon_{j+1}} \cdots x_g^{\varepsilon_g} = 0 \iff c(x_1^a x_2^{\varepsilon_2} \cdots x_j^{\varepsilon_j}) < \varepsilon_{j+1} + \cdots + \varepsilon_g.$$

换言之， $c(x_1^a x_2^{\varepsilon_2} \cdots x_j^{\varepsilon_j})$ 是 $\{x_{j+1}, \ldots, x_g\}$ 中与 $x_1^a x_2^{\varepsilon_2} \cdots x_j^{\varepsilon_j}$ 相乘后非零的不同元素的最大数量。

以下结果是对前述事实作逐笛卡尔因子推广，显然成立，并且对本文最后一节中的计算至关重要。

5.7. **引理**。 设 $g' > g$并选取一个基元素 $b_1 \otimes \cdots \otimes b_k \in H^*(SP^n(N_g))^{\otimes k}$，如定义 *5.5* 中所述。根据注 $H^*(SP^n(N_g))^{\otimes k} \hookrightarrow H^*(SP^n(N_{g'}))^{\otimes k}$中的环映射*5.4*，有

$$c\left(b_1 \otimes \cdots \otimes b_k \cdot \prod_{t=1}^{j} x_{e_t,i_t}\right) \leq c\left(b_1 \otimes \cdots \otimes b_k\right) - j$$

对于任意满足条件 $i_t \neq i_s$（当 $t \neq s$ 时）和 $e_t = e_s$ 的整数 $e_t \in \{1, \ldots, k\}$ 和 $i_t \in \{g+1, \ldots, g'\}$。特别地，$b_1 \otimes \cdots \otimes b_k \cdot \prod_{t=1}^{j} x_{e_t,\, i_t}$ 在 $c(b_1 \otimes \cdots \otimes b_k) < j$ 时为零。

本节最后介绍容量函数的几个附加性质，这些性质将在本文后续部分发挥作用。

5.8. **命题**。 设 $p_r \in \{0, \dots, 2n\}$ 对于 $1 \le r \le k$。若 $\sum_{r=1}^{k} p_r \le A$，则

$$c\left(x_{1,1}^{2n-p_1} \otimes \cdots \otimes x_{k,1}^{2n-p_k}\right) \le \left\lfloor \frac{A}{2} \right\rfloor .$$

证明。 根据定义， $c(x_{r\,1}^{2n-p_r},) = n - \underline{\left\lfloor \frac{2n-p_r+1}{2} \right\rfloor} = \underline{\left\lfloor \frac{p_r}{2} \right\rfloor}$。 因此，

$$c\left(x_{1,1}^{2n-p_1} \otimes \cdots \otimes x_{k,1}^{2n-p_k}\right) = \sum_{r=1}^{k} \left\lfloor \frac{p_r}{2} \right\rfloor \le \left\lfloor \frac{\sum_{r=1}^{k} p_r}{2} \right\rfloor \le \left\lfloor \frac{A}{2} \right\rfloor .$$

□

5.9. **命题**。 设 $b_1 \otimes \cdots \otimes b_k \in H^*(SP^n(N_g))^{\otimes k} \hookrightarrow H^*(SP^n(N_{g+1}))^{\otimes k}$ 为一个基元素。那么，对于乘积展开中的任意基元素 α

$$p = b_1 \otimes \cdots \otimes b_k \cdot \prod_{r=2}^{k} \left(x_{1,g+1} + x_{r,g+1}\right)^{\varepsilon_r} ,$$

我们有不等式

$$c(\alpha) \le c\left(b_1 \otimes \cdots \otimes b_k\right) - \left\lfloor \frac{1 + \sum_{r=2}^{k} \varepsilon_r}{2} \right\rfloor .$$

特别地， 当 $c(b_1 \otimes \cdots \otimes b_k) < \left\lfloor \frac{1+\sum_{r=2}^{k} \varepsilon_r}{2} \right\rfloor$时， 乘积 p 为零。

证明。 为方便起见，记 $\sum_{r=2}^{k} \varepsilon_r = 2q + \varepsilon$， 其中 $\varepsilon \in \{0, 1\}$。根据引理 5.7， p的展开中容量最大的项是 $b_1 \otimes \cdots \otimes b_k \cdot x_1^{2q+\varepsilon}{}_{,g+1}$，这与 $(b_1\ x_1^{2q}{}_{,1}\ x_{1,g+1}^{\varepsilon})$ $\otimes b_2 \otimes \cdots \otimes b_k$相同。其容量满足

$$\begin{aligned} c\left((b_1\ x_{1,1}^{2q}\ x_{1,g+1}^{\varepsilon}) \otimes b_2 \otimes \cdots \otimes b_k\right) &\le c\left(b_1 \otimes \cdots \otimes b_k\right) - (q + \varepsilon) \\ &= c\left(b_1 \otimes \cdots \otimes b_k\right) - \left\lfloor \frac{1 + 2q + \varepsilon}{2} \right\rfloor . \end{aligned}$$

□

6. k-TH ZERO-DIVISORS

设 n， $g \ge 1$和 $k \ge 2$为整数。设 $\Delta_{k,\ n,\ g}$: $SP^n(N_g) \to (SP^n(N_g))^{\,k}$为对角映射。现在我们研究 k 重迭代杯积乘法的核，即同态的核

$$\Delta_{k,n,g}^{*} \colon H^*(SP^n(N_g))^{\otimes k} \cong H^*((SP^n(N_g))^k) \to H^*(SP^n(N_g))$$

它由$\Delta_{k,\ n,\ g}$ 在 $\mathbb{Z}_2$-上同调中诱导。子环 $\operatorname{Ker}(\Delta_{k,\ n,\ g}^{*})$ 是 $SP^n(N_g)$ 的 k 阶零因子理想。例如，按照（5.1）中的记号，形如 $x_{r,\ i} + x_{s,\ i}$ 的元素是 k 阶零因子。

以下结果中的 $g = 1$ 情形已在 [CAG+18] 中证明。

6.1. **命题**。 对于 $k \ge 2$ 和 n、 $g \ge 1$， k 阶零因子 $x_{1,i} + x_{r,i}$，其中 $2 \le r \le k$ 和 $1 \le i \le g$，生成理想 核$(\Delta_{k,n,g}^{*})$， 该理想由 k 阶零因子构成。

为证明作准备，我们先定义理想

$$J_{k,n,g} := \langle x_{1,i} + x_{r,i} \mid 2 \le r \le k \text{ and } 1 \le i \le g \rangle$$

由命题 $SP^n(N_g)$ 中提到的特定零因子生成6.1。显然，$J_{k,n,g}$ 是 $\mathrm{Ker}(\Delta^*_{k,n,g})$ 的一个子理想。此外，对于 $t \ge 0$和$\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_g \in \{0,1\}$，我们定义

$$m\,(t, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_g) := x_1^t\ x_2^{\varepsilon_2}\ \cdots\ x_g^{\varepsilon_g} \in H^*(SP^n(N_g)),$$

对于 $1 \le r \le k$,

$$m_r(t, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_g) := \mathrm{proj}_r^*(m\,(t, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_g)) = x_{r,1}^t\ x_{r,2}^{\varepsilon_2}\ \cdots\ x_{r,g}^{\varepsilon_g} \in H^*(SP^n(N_g))^{\otimes k},$$

其中 proj_r 与式（5.1）中相同。

命题 *6.1* 的证明。 考虑交换图

$$\begin{array}{ccccc} H^*(SP^n(N_g)) & \xrightarrow{\mathrm{proj}_1^*} & H^*(SP^k(N_g))^{\otimes k} & \xrightarrow{\Delta^*_{k,n,g}} & H^*(SP^n(N_g)) \\ & \searrow^{i} & \downarrow q & \nearrow_{j} & \\ & & H^*(SP^k(N_g))^{\otimes k}/J_{k,n,g}, & & \end{array}$$

其中 q 是典范投影，而 j 由商空间上的 $\Delta^*_{k,n,g}$ 确定，因为 $J_{k,n,g} \subset \mathrm{Ker}(\Delta^*_{k,n,g})$。上方的复合映射是同构，因为 $\mathrm{proj}_1 \circ \Delta_{k,n,g}$ 在 $SP^n(N_g)$ 上是恒等映射。我们证明 $i = q \circ \mathrm{proj}_1^*$ 是同构，这就保证了 j 也具有相应的性质，从而得到所需的等式 $J_{k,n,g} = \mathrm{Ker}(\Delta^*_{k,n,g})$。

注意，由于 $j \circ i$ 是单态射， i 也是单态射。另一方面，对 $1 \le r \le k$ 和 $1 \le i \le g$ 有效的同余式 $x_{r,\,i} \equiv x_{1,\,i}$ 模 $(J_{k,\,n,\,g})$ 表明

$$\prod_{r=1}^{k} m_r\,(t_r, \varepsilon_{r,2}, \dots, \varepsilon_{r,g}) \equiv m_1\left(\sum_{r=1}^{k} t_r, \sum_{r=1}^{k} \varepsilon_{r,2}, \dots, \sum_{r=1}^{k} \varepsilon_{r,g}\right) \mod (J_{k,n,g})\,.$$

左侧的元素是 q 的定义域的一个典型生成元，而该元素在右侧经 q 映射后的像属于 $\mathrm{Im}(i)$。由此可得， i 是满态射。□

由于 零因子杯长$_k(SP^n(N_g))$ 是 $\mathrm{Ker}(\Delta^*_{k,\,n,\,g})$ 中非平凡杯积的最长长度，命题 6.1 给出了 零因子杯长 $_k(SP^n(N_g))$ 的如下刻画。6.2. **推论**。 对于 $k \ge 2$ 和 n, $g \ge 1$，有

$$\mathrm{zcl}_k(SP^n(N_g)) = \max\left\{ \sum_{\substack{2 \le r \le k \\ 1 \le i \le g}} a_{r,i} \;\middle|\; 0 \ne \prod_{\substack{2 \le r \le k \\ 1 \le i \le g}} (x_{1,i} + x_{r,i})^{a_{r,i}} \in H^*(SP^n(N_g))^{\otimes k} \right\}.$$

固定 n 后，我们现在比较 $\mathrm{zcl}_k(SP^n(N_g))$ 的值随 k 和 g 变化的情况。

6.3. **推论**。 对于 $k \ge 2$ 和 $n, g \ge 1$，我们有

$$\cdots \ge \mathrm{zcl}_k(SP^n(N_{g+1})) \ge \mathrm{zcl}_k(SP^n(N_g)) \ge \cdots \ge \mathrm{zcl}_k(P^{2n}).$$

证明。 鉴于命题 6.1，这可由环包含这一事实得出

$$H^*(SP^n(N_g))^{\otimes k} \hookrightarrow H^*(SP^n(N_{g'}))^{\otimes k}$$

注 5.4 中为 $g' \geq g$ 构造的映射 $x_{1,i} + x_{r,i} \in H^*(SP^n(N_g))^{\otimes k}$ 将其映入 $H^*(SP^n(N_{g'}))^{\otimes k}$中对应的第 k 个零因子。□

6.4. 推论。 </style>对于 $k \geq 2$ 和 $n, g \geq 1$，我们有

$$\cdots \geq \mathsf{zcl}_{k+1}(SP^n(N_g)) \geq \mathsf{zcl}_k(SP^n(N_g)) \geq \cdots \geq \mathsf{zcl}_2(SP^n(N_g)).$$

证明。对于 $k_1 \leq k_2$，考虑投影 $\pi\colon (SP^n(N_g))^{k_2} \to (SP^n(N_g))^{k_1}$，它遗忘了 $(SP^n(N_g))^{k_2}$ 的最后 $k_2 - k_1$ 个笛卡尔因子。该投影诱导出一个单态射 $\pi^*\colon H^*(SP^n(N_g))^{\otimes k_1} \to H^*(SP^n(N_g))^{\otimes k_2}$，满足 $\pi^*(x_{r,i}) = x_{r,i}$，其中 $1 \leq r \leq k_1$ 和 $1 \leq i \leq g$。因此，根据命题 6.1，不等式 $\mathsf{zcl}_{k_2}(SP^n(N_g)) \geq \mathsf{zcl}_{k_1}(SP^n(N_g))$ 成立。□

6.5. 例。推论 6.3 表明，对于任意$g \geq 1$，只要 $\mathsf{zcl}_k(P^{2n}) = 2nk$，就有 $\mathsf{TC}_k(SP^n(N_g)) = \mathsf{zcl}_k(SP^n(N_g)) = 2nk$。另一方面，正如 [Dav18 中的命题 1.4],所证明的，对于 $k \geq 2^{\ell+1} - 1$，后一个等式成立，其中 ℓ 是 n的二进制展开中连续 1 的最长串的长度。注意，$\mathsf{TC}_k(SP^n(N_g))$ 可以在 $\mathsf{zcl}_k(P^{2n})$ 尚未达到其最大值的情况下，达到可能的最大值 $2nk$； 参见推论 1.6。

6.6. **注。** 推论 6.3中的非递减序列有上界 $2nk$，因此最终为常数。另一方面，推论 6.4 中的序列无界，并且最终呈严格线性增长。事实上，例 6.5 表明，在推论 k 的序列中，所有足够大的 k 都达到可能的最大值（即等于 $2nk$）。

下面的结果将寻找满足推论 $a_{r,i}$) 且实现 零因子杯长$_k(SP^n(N_g))$ 的指数元组的任务化简为.....$a_{r,i}$) 满足推论 零因子杯长$_k(SP^n(N_g))$ 的搜索任务化简为推论 6.2。

6.7. **命题。** 对于 $k \geq 2$ 和 $n, g \geq 1$，推论 *6.2* 中的最大和由满足以下三个性质的指数元组 $(a_{r,i})$ 取得：

(1) $a_{2,1} \geq a_{3,1} \geq \cdots \geq a_{k,1}$***; (2)*** $1 \geq a_{2,2} \geq a_{2,3} \geq \cdots \geq a_{2,g} \geq 0$***; (3)*** $a_{r,i} \in \{0, 1\}$ 对所有 $2 \leq r \leq k$ 和 $2 \leq i \leq g$ 均成立。

证明。 假设 $\mathsf{zcl}_k(SP^n(N_g)) = \sum a_{r,i}$，如推论 6.2 中所述。设 $a_{r,i} = 2\alpha_{r,i} + \varepsilon_{r,i}$，其中 $\varepsilon_{r,i} \in \{0, 1\}$，且 $\alpha_{r,i} \geq 0$，对 $2 \leq r \leq k$ 和 $2 \leq i \leq g$ 成立。关系式 $x_{r,i}^2 = x_{r,1}^2$给出

$$\begin{aligned}(x_{1,i} + x_{r,i})^{a_{r,i}} &= (x_{1,i} + x_{r,i})^{2\alpha_{r,i}} (x_{1,i} + x_{r,i})^{\varepsilon_{r,i}} \\ &= (x_{1,1} + x_{r,1})^{2\alpha_{r,i}} (x_{1,i} + x_{r,i})^{\varepsilon_{r,i}}.\end{aligned}$$

与元组 $(a_{r,i})$ 对应的非零乘积于是变为

$$\begin{aligned}\prod_{\substack{2\le r\le k\\1\le i\le g}}(x_{1,i}+x_{r,i})^{a_{r,i}} &= \prod_{r=2}^{k}(x_{1,1}+x_{r,1})^{a_{r,1}}\prod_{\substack{2\le r\le k\\2\le i\le g}}(x_{1,1}+x_{r,1})^{2\alpha_{r,i}}\prod_{\substack{2\le r\le k\\2\le i\le g}}(x_{1,i}+x_{r,i})^{\varepsilon_{r,i}}\\ &= \prod_{r=2}^{k}(x_{1,1}+x_{r,1})^{a_{r,1}+2\sum_{i=2}^{g}\alpha_{r,i}}\prod_{\substack{2\le r\le k\\2\le i\le g}}(x_{1,i}+x_{r,i})^{\varepsilon_{r,i}}\\ &=: \prod_{\substack{2\le r\le k\\1\le i\le g}}(x_{1,i}+x_{r,i})^{b_{r,i}}.\end{aligned}$$

新的指数集合（$b_{r,i}$）满足性质（3），并且仍然实现 $\mathsf{zcl}_k(SP^n(N_g))$，因为 $\sum a_{r,i}=\sum b_{r,i}$ 是按构造得到的。接下来，置换 $\sigma\in\Sigma_k$ 在（$SP^n(N_g)$）^{k} 上产生一个自同构，该自同构置换笛卡尔因子。如果 σ 固定 1，那么相应的自同构 σ^* 在 $H^*(SP^n(N_g))^{\otimes k}$ 上满足

$$0\neq\prod_{\substack{2\le r\le k\\1\le i\le g}}(x_{1,i}+x_{r,i})^{b_{r,i}}\overset{\sigma^*}{\longmapsto}\prod_{\substack{2\le r\le k\\1\le i\le g}}\left(x_{1,i}+x_{\sigma(r),i}\right)^{b_{r,i}}=\prod_{\substack{2\le r\le k\\1\le i\le g}}(x_{1,i}+x_{r,i})^{b_{\sigma^{-1}(r),i}}.$$

因此，指数元组（$c_{r,i}:=b_{\sigma^{-1}(r)\ i}$）实现了 zcl_k（SP^n（N_g））并且对适当选取的 $\sigma\in\Sigma_k$，满足性质（1）和（3）。

最后，任意置换 $\rho\in\Sigma_g$ 通过置换上同调类 x_i 在 $\mathbb{Z}_2[x_1,\dots,x_g,y]$ 上诱导一个自同构 ρ^*。该自同构下降为一个自同构，在 $H^*(SP^n(N_g))\cong\mathbb{Z}_2[x_1,\dots,x_g,y]/I_{n,g}$ 上仍记作 ρ^*，其中 $I_{n,g}$ 是定理 5.1 中描述的关系理想。选取 ρ 使得 $c_{2,\rho^{-1}(2)}\ge\cdots\ge c_{2,\rho^{-1}(g)}$ 并且 $\rho(1)=1$，我们得到

$$\prod_{\substack{2\le r\le k\\1\le i\le g}}(x_{1,i}+x_{r,i})^{c_{r,i}}\overset{(\rho^*)^{\otimes k}}{\longmapsto}\prod_{\substack{2\le r\le k\\1\le i\le g}}\left(x_{1,\rho(i)}+x_{r,\rho(i)}\right)^{c_{r,i}}=\prod_{\substack{2\le r\le k\\1\le i\le g}}(x_{1,i}+x_{r,i})^{c_{r,\rho^{-1}(i)}}.$$

因此，指数元组（$d_{r,i}:=c_{r,\rho^{-1}(i)}$）达到零因子杯长 $_k$（SP^n（N_g））^{k}，并满足性质（1）、（2）和（3）。□

7. The case of $k=2$

本节中，我们证明定理1.1。回顾 $2^e\le n<2^{e+1}$ 对于某个 $e\ge 0$。为方便起见，记作 $n=2^e+d$，其中 $0\le d<2^e$。我们将证明分为两种情形。

情形（***1***）：$g\le 2d+1$。根据命题6.7，可能非零的零因子乘积的最大值为

$$(x_{1,1}+x_{2,1})^{2^{e+2}-1}\prod_{i=2}^{g}(x_{1,i}+x_{2,i}). \tag{7.I}$$

我们证明（7.I）确实非零，由此得到所需结论。请注意，尽管所有二项式系数 $\binom{2^{e+2}-1}{j}$ 在 $0\le j\le 2^{e+2}-1$ 时都是奇数（根据卢卡斯定理），

定理5.1 和5.3 意味着将（7.I）展开为基元素之和时，其中包含单项式

$$\left(x_{1,1}^{2^{e+2}-1-2n}\otimes x_{2,1}^{2n}\right)\cdot\prod_{i=2}^{g}x_{1,i}=\left(x_{1,1}^{2^{e+1}-2d-1}\prod_{i=2}^{g}x_{1,i}\right)\otimes x_{2,1}^{2n}\ ,$$

根据定理 5.3 以及当前假设$g\leq 2d+1$，这确实是一个基元素□

情形 ***(2)***： $g>2d+1$。我们已经证明杯积不为零

$$(x_{1,1}+x_{2,1})^{2^{e+2}-1}\prod_{i=2}^{2d+1}(x_{1,i}+x_{2,i})\,,$$

因此 零因子杯长$_2(SP^n(N_g))\ \geq 2^{e+2}+2d-1$。根据命题 6.7 (2) 以及以下事实，这里的等式成立：

$$(x_{1,1}+x_{2,1})^{2^{e+2}-1-\ell}\prod_{i=2}^{2d+\ell+2}(x_{1,i}+x_{2,i})$$

对于所有 $0\leq\ell\leq\min\{2^{e+2}-1,g-2d-2\}$，其值均为零。事实上，此类乘积展开中的一个潜在基的求和项将具有如下形式

$$x_{1,1}^{a}\otimes x_{2,1}^{b}\ \cdot\prod_{i\in C}x_{1,i}\otimes\prod_{j\in D}x_{2,j}=\left(x_{1,1}^{a}\prod_{i\in C}x_{1,i}\right)\otimes\left(x_{2,1}^{b}\prod_{j\in D}x_{2,j}\right),$$

其中 $a+b=2^{e+2}-1-\ell$和 $C\cup D=\{2,\ldots,2d+\ell+2\}$满足 $C\cap D=\varnothing$。但是

$$\max\left\{\left\lfloor\frac{a+1}{2}\right\rfloor+|C|,\left\lfloor\frac{b+1}{2}\right\rfloor+|D|\right\}\leq n,$$

因此

$$\left\lfloor\frac{a+1}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{b+1}{2}\right\rfloor+2d+\ell+1\leq 2^{e+1}+2d,\tag{7.II}$$

这是不可能的。这是因为，如果 ℓ 是偶数，那么 a 和 b 的奇偶性将相反，因此

$$\left\lfloor\frac{a+1}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{b+1}{2}\right\rfloor+\ell+1=\left\lfloor\frac{a+b+2}{2}\right\rfloor+\ell+1=2^{e+1}+\frac{\ell}{2}+1,$$

这与（7.II）矛盾。同样，如果 ℓ 是奇数，那么 a 和 b 的奇偶性将相同，因此

$$\left\lfloor\frac{a+1}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{b+1}{2}\right\rfloor+\ell+1\geq\left\lfloor\frac{a+b+2}{2}\right\rfloor-1+\ell+1=2^{e+1}+\frac{\ell+1}{2},$$

这再次与（7.II）矛盾。 □

7.1. **注：** 在 $SP^n(N_g$ 中构造非平凡杯积的长长度时，零因子的选取很重要。关于 $H^*(SP^n(N_g))^{\otimes 2}$， [Jau25 第 6.C 节] 解释了这一点： $\prod_{i=1}^{j}(x_{1,\ i}+x_{2,\ i})^2=0$ 当 $j\leq\min\{g,n\}$ 时。

8. The case of odd $k \geq 3$

本节首先提出一种研究定理 1.5 的方法，随后给出其（a）部分在 $k \geq 3$ 为奇数时的证明。

8.A. **一般准备**。本小节中的讨论适用于所有 $k \geq 3$（而不仅仅适用于奇数 k），并且第 9 节也会用到。

在 $H^*(P^{2n})^{\otimes k} \cong H^*(SP^n(N_1))^{\otimes k}$中，令 $\mathcal{L}_{n,k}$表示由所有满足以下条件的非负整数 $\ell \leq 2n$ 构成的集合：存在如下非零杯积，其展开式中含有指定的基元素（见（8.I）。

$$\prod_{r=2}^{k} (x_{1,1} + x_{r,1})^{a_{r,1}} = x_{1,1}^{\ell} \otimes x_{2,1}^{2n} \otimes \cdots \otimes x_{k,1}^{2n} + \cdots . \tag{8.I}$$

注意，（8.I）展开式中的其他基元素（如果有）具有以下形式

$$x_{1,1}^{t_1} \otimes \cdots \otimes x_{k,1}^{t_k} \text{ with } t_r < 2n \text{ for some } r \in \{2, \ldots, k\}. \tag{8.II}$$

（8.I）中所示的这类基元素在 [Dav18], 中起着关键作用，文中证明了 $\mathsf{zcl}_k(P^{2n}) = a_{2,1} + a_{3,1} + \cdots + a_{k,1} = 2n(k-1) + \ell$ 以及

$$2n - \ell = \mathsf{gap}_k(P^{2n}) = \max_{i \in S(2n)} \{0, 2^{i+1} - 1 - kZ_i(2n)\}, \tag{8.III}$$

所给出的 $\ell =$ 最大值$\mathcal{L}_{n,\,k}$；参见（1.II）以及定义 1.2。

在 Davis 的工作基础上，我们现在考虑扩展的 乘积

$$\prod_{\substack{2 \leq r \leq k \\ 1 \leq i \leq g}} (x_{1,i} + x_{r,i})^{a_{r,i}} = \left(x_{1,1}^{\ell} \otimes x_{2,1}^{2n} \otimes \cdots \otimes x_{k,1}^{2n} + \cdots\right) \prod_{\substack{2 \leq r \leq k \\ 2 \leq i \leq g}} (x_{1,i} + x_{r,i})^{a_{r,i}} \tag{8.IV}$$

对于每个 $\ell \in \mathcal{L}_{n,\,k}$ 都有相应的乘积（8.I），它确定了指数 $a_{r,\,1}$；而对于每组附加指数 $a_{r,\,i} \in \{0,1\}$ 满足 $2 \leq r \leq k$ 和 $2 \leq i \leq g$。这一次，我们聚焦于单项式

$$\left(x_{1,1}^{\ell} \prod_{i=2}^{g} x_{1,i}^{\sum_{r=2}^{k} a_{r,i}}\right) \otimes x_{2,1}^{2n} \otimes \cdots \otimes x_{k,1}^{2n}, \tag{8.V}$$

由于（8.II），该单项式在（8.IV）左侧的展开式中，仅由（8.IV）右侧乘积中各因子的首项相乘而产生。特别地，假设（8.V）是非平凡的，我们得到

$$\sum_{\substack{2 \leq r \leq k \\ 1 \leq i \leq g}} a_{r,i} \leq \mathsf{zcl}_k(SP^n(N_g)) \quad \text{and} \quad \mathsf{gap}_k(SP^n(N_g)) \leq 2nk - \sum_{\substack{2 \leq r \leq k \\ 1 \leq i \leq g}} a_{r,i}. \tag{8.VI}$$

此外，正如（8.III）中所讨论的，最后两个不等式可特化为

$$\begin{aligned} \mathsf{zcl}_k(P^{2n}) + \sum_{\substack{2 \leq r \leq k \\ 2 \leq i \leq g}} a_{r,i} &\leq \mathsf{zcl}_k(SP^n(N_g)); \\ \mathsf{gap}_k(SP^n(N_g)) &\leq \mathsf{gap}_k(P^{2n}) - \sum_{\substack{2 \leq r \leq k \\ 2 \leq i \leq g}} a_{r,i}, \end{aligned} \tag{8.VII}$$

给定 $\ell = \max\mathcal{L}_{n,k}$。最后两个估计的优点是，其中出现的量 $\mathrm{zcl}_k(P^{2n})$ 和 $\mathrm{gap}_k(P^{2n})$ 已得到充分理解（见（8.III））。通过证明对附加指数$a_{r,i}$ $(i \geq 2)$作某种适当选择可使（8.VII）中的等式成立，我们便能在若干情形下确定目标量 $\mathrm{zcl}_k(SP^n(N_g))$ 和 $\mathrm{gap}_k(SP^n(N_g))$。下面的命题 8.1 给出了这类情形中最简单的一种。在少数无法通过这一策略解决的情形中，我们将利用（8.VI）中的更一般框架，求得 $\mathrm{zcl}_k(SP^n(N_g))$ 和 $\mathrm{gap}_k(SP^n(N_g))$ 的精确值。

8.1. **命题**。取 $n \geq 1$, $k \geq 3$, 以及 $\ell =$ 最大值$\mathcal{L}_{n,\,k}$。在 (8.VII) 的设定下，假设 (8.V) 中的元素非零，且 $a_{r,\,i} = 1$ 对所有 $2 \leq r \leq k$和 $2 \leq i \leq g$都成立。那么 (8.VII) 中的两个估计都是锐的。特别地，

$$\mathrm{gap}_k(SP^n(N_g)) = \max_{i \in S(2n)} \left\{0, 2^{i+1} - 1 - kZ_i(2n) - (k-1)(g-1)\right\}.$$

证明。证明与第 $k = 2$ 节中 $g \leq 2d+1$ 的情形相仿，见第 7 节。也就是说，在当前假设下，命题6.7 表明，(8.IV) 是由 k 次零因子构成的最大可能非零乘积。该乘积非零这一事实源于假设 (8.V) 非平凡。□

8.B. $k \geq 3$ 为奇数时定理 1.5（a）的证明。在表达式 (1.II) 中，对于间隙$_k(P^{2n})$，每个 $i \in S(2n)$ 对应的 $Z_i(2n)$ 都是奇数。由于 k 为奇数，间隙$_k(P^{2n})$ 是偶数，记为 $2m$。若 $m = 0$，则由推论 6.3 可知间隙$_k(SP^n(N_g)) = 0$，因此结论成立。所以，假设 $m > 0$。取 $\ell := \max\mathcal{L}_{n,k}$，使得 $\ell = 2(n-m)$ 出现在 (8.III) 中。设 $k = 2p+1$ 对某个 $p \geq 1$ 成立，并将 $m = qp + s$ 记为某个 $s \in \{0, \ldots, p-1\}$ 和 $q \geq 0$。

我们将证明分为两种情形。

情形（***1***）：$1 \leq g \leq q+1$。在此情形下，定理5.1 和注5.2 推出

$$x_{1,1}^{\ell} \prod_{i=2}^{g} x_{1,i}^{k-1} = x_{1,1}^{2(n-m)+2p(g-1)} \neq 0,$$

因为$x_{1,\,1}^2 = \mathrm{proj}_1^*(y)$ 且 $n - m + p(g-1) \leq n - m + pq = n - s \leq n$。这表明当8.V时，$a_{r,\,i} = 1$ 对所有 $2 \leq r \leq k$ 以及 $2 \leq i \leq g$。于是命题8.1 给出了间隙$_k(SP^n(N_g))$的所述描述。□

情形（***2***）：$g \geq q+2$。注意，根据定义，$2s < 2p = k-1$。首先，对于 $g = q+2$，我们有

$$x_{1,1}^{\ell} \prod_{i=2}^{q+1} x_{1,i}^{k-1}\, x_{1,q+2}^{2s} = x_{1,1}^{2(n-m)+2(pq+s)} = x_{1,1}^{2n} \neq 0,$$

这便得出了（8.V）非平凡的结论，其中 $a_{r,\,i} = 1$ 对所有相关的数对（r, i）均成立，但 $a_{r,\,g} = 0$ 除外，其中 $2s+2 \leq r \leq k$。利用（8.VII），即可得到最优估计

$$\mathrm{gap}_k(SP^n(N_g)) \leq \mathrm{gap}_k(P^{2n}) - \sum_{\substack{2 \leq r \leq k \\ 2 \leq i \leq g}} a_{r,i} = 2m - (k-1)(g-2) - 2s = 0.$$

对于 $g \geq q+3$，推论 6.3给出 间隙$_k(SP^n(N_g)) \leq$间隙$_k(SP^n(N_{q+2})) = 0$。现在注意到，对每个 $g \geq q+2$，这确实就是所需的结论。这是因为不等式 间隙$_k(P^{2n})$ $= 2m < 2pq + 2p \leq (k-1)(g-1)$ 蕴含

$$2^{i+1} - 1 - kZ_i(2n) - (k-1)(g-1) \leq 2m - (k-1)(g-1) < 0$$

对所有 $i \in S(2n)$，因此 $\max_{i \in S(2n)} \{0, 2^{i+1} - 1 - kZ_i(2n) - (k-1)(g-1)\} = 0$。 □

8.2. **注**。 在上述证明中，命题 8.1 的第二个假设在 $g \geq q+2$ 的情形下不成立，但 (8.VII) 中的估计是尖锐的。因此，命题 8.1 中关于 (8.VII) 中估计尖锐性的条件是充分但非必要的。

9. The case of even $k \geq 4$

本节中，我们完成定理 1.5 其余部分的证明。因此，假设 $k = 2\lambda$ 对某个 $\lambda \geq 2$ 成立。我们不妨也假设 gap$_k(P^{2n}) > 0$，因为否则根据推论 6.3，结论已经成立。在这些条件下，(1.II) 表明 gap$_k(P^{2n})$ 为奇数，记作 gap$_k(P^{2n}) = 2h-1$，其中 $h \geq 1$。我们将根据 h 与乘积 $(g-1)(\lambda-1)$ 和 $(g-1)\lambda$ 的大小关系，分析三种不同情形。事实上，用当前的记号表示，定理 1.5 中的条件可写为

$$g \leq \left\lfloor \frac{\mathsf{gap}_k(P^{2n})}{k} \right\rfloor + 1 \iff (g-1)\lambda < h;$$
$$g \geq \left\lfloor \frac{\mathsf{gap}_k(P^{2n})}{k-2} \right\rfloor + 2 \iff (g-1)(\lambda-1) \geq h.$$

首先，我们证明定理 1.5 (a) 对于 $k \geq 4$ 为偶数时成立。

情形（***1***）：$(g-1)\lambda < h$。取 $a_{r,\,k}$ 和 $a_{r,\,i} := 1$ 对于 $2 \leq r \leq k$ 和$2 \leq i \leq g$，单项式

$$x_{1,1}^{\ell} \prod_{i=2}^{g} x_{1,i}^{\sum_{r=2}^{k} a_{r,i}} = x_{1,1}^{2n-2h+1} \prod_{i=2}^{g} x_{1,i}^{k-1} = x_{1,1}^{2n-2h+2(g-1)(\lambda-1)} \prod_{i=1}^{g} x_{1,i}$$

非零，因为 $n - h + (g-1)(\lambda-1) + g \leq n$。这说明对于所示的$a_{r,\,i}$取值，式（8.V）非平凡，进而命题8.1 给出了 间隙$_k(SP^n(N_g))$ 的所需表达式。□

为讨论另外两种情形，我们先固定

$$\prod_{r=2}^{k} (x_{1,1} + x_{r,1})^{a_{r,1}} = x_{1,1}^{\ell} \otimes x_{2,1}^{2n} \otimes \cdots \otimes x_{k,1}^{2n} + \cdots, \tag{9.I}$$

这是一个给定的非零乘积 (8.I)，与 $\ell := \max \mathcal{L}_{n,k}$ 相关。注意，$\ell = 2n -$ 间隙$_k(P^{2n}) = 2n - 2h + 1$ 是奇数，因此 (9.I) 中的指数 $a_{r_0,1}$ 中必有一个是奇数。令 $a'_{r_0,1} := a_{r_0,1} - 1$，且 $a'_{r,1} := a_{r,1}$，对于 $r \neq r_0$，由卢卡斯定理可得

$$\prod_{r=2}^{k} (x_{1,1} + x_{r,1})^{a'_{r,1}} = x_{1,1}^{\ell-1} \otimes x_{2,1}^{2n} \otimes \cdots \otimes x_{k,1}^{2n} + \cdots \neq 0, \tag{9.II}$$

因此 $\ell-1\in\mathcal{L}_{n,k}$ 也成立。

现在我们可以证明定理 1.5 (c)。

情形（2）： $h\le(g-1)(\lambda-1)$。注意到 $g\ge 2$。记 $h=\alpha(\lambda-1)+\beta$，其中 $\alpha\in\{0,\dots,g-2\}$ 以及 $\beta\in\{0,\dots,\lambda-1\}$。在 $\ell-1=\max\mathcal{L}_{n,k}-1\in\mathcal{L}_{n,k}$ 的语境下，按照第 8.A 小节，将（9.II）中的乘积取为相应的非零表达式（8.I）。此外，对于（r, i）$\in\{2,\dots,k\}\times\{2,\dots,g\}$，取

$$a'_{r,i}:=\begin{cases}1 & \text{if } i\le\alpha+1 \text{ and } r\le k-1, \text{ or } i=\alpha+2 \text{ and } r\le 2\beta+1;\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

Then

$$x_{1,1}^{\ell-1}\prod_{i=2}^{g}x_{1,i}^{\sum_{r=2}^{k}a'_{r,i}}=x_{1,1}^{2n-2h}\left(\prod_{i=2}^{\alpha+1}x_{1,i}^{k-2}\right)x_{1,\alpha+2}^{2\beta}=x_{1,1}^{2n-2h+(k-2)\alpha+2\beta}=x_{1,1}^{2n}\neq 0,$$

这表明，在（8.V）的语境下，（9.II）的类似结论是非平凡的。因此，（8.VI）中的第二个不等式给出了最佳可能估计

$$\begin{aligned}\mathsf{gap}_k(SP^n(N_g))&\le 2nk-\sum_{\substack{2\le r\le k\\1\le i\le g}}a'_{r,i}=2nk-\sum_{r=2}^{k}a'_{r,1}-\sum_{\substack{2\le r\le k\\2\le i\le g}}a'_{r,i}\\&=2nk-(2n(k-1)+\ell-1)-(\alpha(k-2)+2\beta)\\&=2n-(2n-2h)-(\alpha(k-2)+2\beta)=0.\end{aligned}$$

□

最后，我们通过证明等价的定理 1.5(b)，来证明定理1.4(B)。

情形（3）：$(g-1)(\lambda-1)<h\le(g-1)\lambda$。我们的任务是证明等式 $\mathsf{zcl}_k(SP^n(N_g))=2nk-t$，其中 $t:=h-(g-1)(\lambda-1)$。显然 $1\le t\le g-1$，因此 $g\ge 2$。与情形（1）的证明一样，我们在第 8.A 小节的背景下处理 $\ell=\max\mathcal{L}_{n,k}$，并将 (9.I) 中的乘积视为相应的非零表达式 (8.I)。此外，对于 $(r,i)\in\{2,\dots,k\}\times\{2,\dots,g\}$，取

$$a_{r,i}:=\begin{cases}1 & \text{if } i\le t \text{ or } r\le k-1;\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

Then

$$\begin{aligned}x_{1,1}^{\ell}\prod_{i=2}^{g}x_{1,i}^{\sum_{r=2}^{k}a_{r,i}}&=x_{1,1}^{2n-2h+1}\left(\prod_{i=2}^{t}x_{1,i}^{k-1}\right)\left(\prod_{i=t+1}^{g}x_{1,i}^{k-2}\right)\\&=x_{1,1}^{2n-2h}\left(\prod_{i=2}^{g}x_{1,i}^{k-2}\right)\left(\prod_{i=1}^{t}x_{1,i}\right)\\&=x_{1,1}^{2n-2h+(k-2)(g-1)}\prod_{i=1}^{t}x_{1,i}\neq 0\end{aligned}$$

因为 $n-h+(\lambda-1)(g-1)+t=n$。这说明 (8.V) 非平凡，因此 (8.VII) 中的第一个估计给出

$$\begin{aligned}\mathsf{zcl}_k(SP^n(N_g)) &\geq \mathsf{zcl}_k(P^{2n})+\sum_{\substack{2\leq r\leq k\\ 2\leq i\leq g}} a_{r,i}\\ &= 2nk-2h+1+(k-2)(g-1)+t-1=2nk-t.\end{aligned}$$

这个估计是锐利的这一更微妙得多的事实，可由命题 6.7和下文的引理9.1 推出；这表明，在当前情形下，任何由$m\cdot e\in H^*(SP^n(N_g))^{\otimes k}$ 组成的乘积，只要其因子为

$$\begin{aligned} m &= \prod_{r=2}^{k}(x_{1,1}+x_{r,1})^{\alpha_{r,1}}\in H^*(P^{2n})^{\otimes k},\quad \text{with } \alpha_{r,1}\geq 0,\quad \text{and}\\ e &= \prod_{\substack{2\leq r\leq k\\ 2\leq i\leq g}}(x_{1,i}+x_{r,i})^{\delta_{r,i}}\in H^*(SP^n(N_g))^{\otimes k},\quad \text{with } \delta_{r,i}\in\{0,1\},\end{aligned}\tag{9.III}$$

当 $\deg(m\cdot e)>2nk-t$ 时为零。 □

下文最终要用到的引理9.1 的证明，主要用到了定义5.5中引入的容量函数。

9.1. **引理**。设 n、$g\geq 1$、$d\geq 0$、$k=2\lambda\geq 4$ 和 间隙$_k(P^{2n}):=2h-1\geq 1$ 满足 $(g-1)(\lambda-1)<h\leq(g-1)\lambda$。设 $t:=h-(g-1)(\lambda-1)$，并假设

(1) $m\in H^*(P^{2n})^{\otimes k}$ 是齐次的，且 $\deg(m)=$零因子杯长$_k(P^{2n})-d$，并且 [1]

(2) $e\in H^*(SP^n(N_g))^{\otimes k}$ *as in* (9.III) *with* $\deg(e)>\mathsf{gap}_k(P^{2n})+d-t$.

于是，乘积 $m\cdot e$ 在 $H^*(SP^n(N_g))^{\otimes k}$ 中为零。

我们已经注意到，关于 h 的假设 $g\geq 2$蕴含了。因此，在 Davis 对 [Dav18] 进行 k阶零因子 P^{2n}的研究中，命题 零因子杯长$_k(SP^n(N_g))$ 的精确计算比$g\geq 2$ 的情形严格地更复杂，这也进一步表明了这一点。$g=1$。

引理 *9.1*的证明。我们可以放心地假设$m=x_1^{2n-p_1,\ 1}\otimes\cdots\otimes x_k^{2n-p_k,\ 1}$，其中 $p_r\geq 0$对于 $1\leq r\leq k$，且 $\deg(e)=$ 间隙$_k(P^{2n})+d-t+1$；根据假设，这与 $d+h+(g-1)(\lambda-1)$一致。于是 $p_1+\cdots+p_k=2h-1+d$，因此命题 5.8给出

$$c(m)\leq\left\lfloor\frac{2h-1+d}{2}\right\rfloor=h+\left\lfloor\frac{d-1}{2}\right\rfloor.$$

.....的消失 $m\cdot e$ 由反复应用命题5.9以及以下事实可得：

$$\sum_{i=2}^{g}\left\lfloor\frac{\delta_i+1}{2}\right\rfloor>h+\left\lfloor\frac{d-1}{2}\right\rfloor,$$

[1]我们注意到，等式 $\deg(m)=$零因子杯长$_k(P^{2n})-d$是有意义的，因为引理 9.1的假设推出 $d<$ 间隙$_k(P^{2n})$，其验证很容易，故省略。

其中 $\delta_i := \sum_{r=2}^{k} \delta_{r,\ i}$。反过来，前述不等式是纯代数关系的一个特例：

$$\min\left\{ \sum_{i=2}^{g} \left\lfloor \frac{\varepsilon_i+1}{2} \right\rfloor \;\middle|\; \begin{array}{c} 0 \le \varepsilon_i \le k-1, \\ \sum_{i=2}^{g} \varepsilon_i = d+h+(g-1)(\lambda-1) \end{array} \right\} > h + \left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor, \tag{9.IV}$$

其有效性将在下文论证。

首先，注意到 $\delta_i \le k-1 = 2\lambda-1$ 对于 $2 \le i \le g$，因此

$$(g-1)(2\lambda-1) \ge \sum_{i=2}^{g} \delta_i = \deg(e) = d+h+(g-1)(\lambda-1),$$

这给出了 $(g-1)(\lambda-1) < h \le d+h \le (g-1)\lambda$ 中的第三个不等式（另外两个由假设得出）。于是我们可以写成 $d+h = (g-1)\lambda - j$，其中某个$j \in \{0,\dots,g-2\}$使得 (9.IV) 中的每个求和 $\sum \varepsilon_i$都等于 $(g-1)(k-1)-j$。由此可知，任意满足以下条件的元组 $\varepsilon := (\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_g)$：其中有 j个坐标等于 $k-2$，其余坐标等于 $k-1$，且该元组在置换意义下唯一，都给出了 (9.IV) 中集合的一个实例，并且还满足

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^{g} \left\lfloor \frac{\varepsilon_i+1}{2} \right\rfloor &= \sum_{i=2}^{j+1} \left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor + \sum_{i=j+2}^{g} \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor \\ &= j(\lambda-1) + (g-j-1)\lambda = \lambda(g-1) - j > h + \left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor, \end{aligned}$$

其中最后一个不等式成立，是因为 $h = (g-1)\lambda - j - d$ 且 $d > \lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$。因此，只要我们证明9.IV）中的不等式

$$\sum_{i=2}^{g} \left\lfloor \frac{\varepsilon'_i+1}{2} \right\rfloor \ge \sum_{i=2}^{g} \left\lfloor \frac{\varepsilon_i+1}{2} \right\rfloor \tag{9.V}$$

对于集合 (9.IV) 中的任意其他元素 $\varepsilon' := (\varepsilon'_2,\dots,\varepsilon'_g)$，结论同样成立。为此，注意到，正如元组 ε 恰好有 $g-j-1$ 个坐标（例如前面的那些坐标）取可能的最大值 $k-1$，元组 ε' 也必定至少有 $g-j-1$ 个坐标（同样例如前面的那些坐标）取可能的最大值 $k-1$。我们可以忽略这前 $g-j-1$ 个坐标，因为它们对 (9.V) 两边没有影响。在其余坐标中，我们也可以忽略 ε' 中取值为 $k-2$ 的坐标，以及 ε 中与之对应的坐标。令 $R \subset \{2,\dots,g\}$ 表示剩余坐标的集合。于是，在 ε 的情形下，这些坐标的取值均为 $k-2$；而在 ε' 的情形下，它们的取值均不等于 $k-2$。令 $R' \subseteq R$（分别为 $R'' \subseteq R$）表示 ε' 的取值严格小于 $k-2$（分别为等于 $k-1$）的坐标集合。由于 $i \in R$ 为奇数，我们得到

$$i \in R' \implies 0 \le \left\lfloor \frac{\varepsilon_i+1}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{\varepsilon'_i+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\varepsilon_i-\varepsilon'_i}{2} \right\rfloor; \tag{9.VI}$$

$$i \in R'' \implies 1 = \left\lfloor \frac{\varepsilon'_i+1}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{\varepsilon_i+1}{2} \right\rfloor, \text{ as well as } \varepsilon'_i - \varepsilon_i = 1. \tag{9.VII}$$

根据 ε' 的定义，我们有 $\sum_{i=2}^{g}\varepsilon_i=\sum_{i=2}^{g}\varepsilon'_i$，由构造可得

$$\sum_{i\in R'}\varepsilon_i+\sum_{i\in R''}\varepsilon_i=\sum_{i\in R'}\varepsilon'_i+\sum_{i\in R''}\varepsilon'_i,$$

使得

$$\sum_{i\in R'}(\varepsilon_i-\varepsilon'_i)=\sum_{i\in R''}(\varepsilon'_i-\varepsilon_i)=|R''|,$$

其中最后一个等式使用了（9.VII）。由此等式、（9.VI）以及（9.VII），我们得到

$$\begin{aligned}\sum_{i=2}^{g}\left(\left\lfloor\frac{\varepsilon'_i+1}{2}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{\varepsilon_i+1}{2}\right\rfloor\right)&=\sum_{i\in R'}\left(\left\lfloor\frac{\varepsilon'_i+1}{2}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{\varepsilon_i+1}{2}\right\rfloor\right)+\sum_{i\in R''}\left(\left\lfloor\frac{\varepsilon'_i+1}{2}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{\varepsilon_i+1}{2}\right\rfloor\right)\\&=\sum_{i\in R'}\left(-\left\lfloor\frac{\varepsilon_i-\varepsilon'_i}{2}\right\rfloor\right)+|R''|\\&=\sum_{i\in R'}\left(-\left\lfloor\frac{\varepsilon_i-\varepsilon'_i}{2}\right\rfloor\right)+\sum_{i\in R'}(\varepsilon_i-\varepsilon'_i)\\&=\sum_{i\in R'}\left((\varepsilon_i-\varepsilon'_i)-\left\lfloor\frac{\varepsilon_i-\varepsilon'_i}{2}\right\rfloor\right)\geq 0.\end{aligned}$$

这验证了（9.V），从而完成证明。 □

References

[BGRT14] I. Basabe、J. Gonz´alez、Y. B. Rudyak、D. Tamaki，《高阶拓扑复杂度及其对称化》。*Algebr. Geom. Topol.* **14** (2014年)，第4期，2103–2124页。[BGZ02] P. Blagojevi´c、V. Gruji´c、R. Zivaljevi´c，《曲面的对称积：拓扑学与物理学的统一主题》。载于 *Proceedings of Summer School in Modern Mathe-matical Physics*，B. Dragovic 编 *et al.*，Sveske Fiz. Nauka, Ser. A, Conf. 3，物理研究所，贝尔格莱德，2002年，第466–491页。[CAC+26] N. Cadavid-Aguilar、D. Cohen、J. Gonz´alez、S. Hughes、L. Vandembroucq，《基本群为阿贝尔群的流形的高阶拓扑复杂度》。*J. Appl.Comput. Topol.* **10** (2026年)，第1期，第4卷，第26页。[CAG+18] N. Cadavid-Aguilar、J. Gonz´alez、D. Guti´errez、A. Guzm´an-S´aenz、A. Lara，《实射影空间中的序贯运动规划算法：一种研究其浸入维数的方法》。*Forum Math.* **30** (2018年)，第2期，397–417页。[CV17] D. C. Cohen、L. Vandembroucq，《克莱因瓶的拓扑复杂度》。

J. Appl. ( )，第–期，–

Comput. Topol. **1** 2017 2, 199 213

页。[CV21] D. C. Cohen、L. Vandembroucq，《基本群为阿贝尔群的流形的拓扑复杂度》。*Forum Math.* **33** (2021年)，第6期，1403–1421页。[CLOT03] O. Cornea、G. Lupton、J. Oprea、D. Tanr´e，《拓扑复杂度》。*Lusternik–Schnirelmann Category*数学综述与专著，103，美国数学会，普罗维登斯，2003年，xviii+330 页。[Dav18] D. M. Davis，《实射影空间高阶拓扑复杂度的一个下界》。*J. Pure Appl. Algebra* **222** (2018年)，第10期，2881–2887页。[DCDJ] L. F. Di Cerbo、A. Dranishnikov、E. Jauhari，《曲率、宏观维数与曲面的对称积》。预印本，arXiv:2503.01779 [math.GT] (2025年)，41页。[Dra14] A. Dranishnikov，《楔和与覆盖映射的拓扑复杂度》。

Proc. Amer. ( )，第–期，–

Math. Soc. **142** 2014 12, 4365 4376

页。[Dra16] A. Dranishnikov，《不可定向曲面的拓扑复杂度及其对角映射的同伦余纤维》。*Proc. Amer. Math. Soc.* **144** (2016年)，第11期，4999–5014页。

[Dra17] A. Dranishnikov, 《不可定向曲面的拓扑复杂度》。 *Topology Appl.* ( ), –。[Far **232** 2017 61 69
03] M. Farber, 《运动规划的拓扑复杂度》。 *Discrete Comput. Geom.* **29** (2003年), 第2期, 211–221页。[Far06] M. Farber, 《机器人运动规划的拓扑学》。载于 *Morse theoretic methods in nonlinear analysis and in symplectic topology* *et al.* , P. Biran
编, 北约科学丛书, II辑: 数学、物理与化学, 217, Springer, 多德雷赫特, 2006年, 第185–230页。[FKS20] M. Farber、D. Kishimoto、D. Stanley, 《生成函数与拓扑复杂度》。 *Topology Appl.* **278** (2020年), 107235, 第5页。[FO19] M. Farber、J. Oprea, 《非球面空间的高阶拓扑复杂度》。 *Topology Appl.* **258** 2019 142 160 ( ), –。[
FTY03] M. Farber、S. Tabachnikov、S. Yuzvinsky, 《拓扑机器人学: 射影空间中的运动规划》。 *Intl. Math. Res. Not.*(2003年), 第34期, 1853–1870页。[GCV13] J. M. Garc´ía-Calcines、L. Vandembroucq, 《拓扑复杂度与对角映射的同伦余纤维》。 *Math. Z.* **274** (2013年), 第1–2期, 145–165页。[GGGL16] J. Gonz´ález、B. Guti´érrez、D. Guti´érrez、A. Lara, 《实旗流形中的运动规划》。 *Homology Homotopy Appl.* **18** (2016年), 第2期, 359–375页。[GGV18] J. Gonz´ález、M. Grant、L. Vandembroucq, 《霍普夫不变量、拓扑复杂度及双胞腔复形对角映射余纤维的LS范畴》。载于*logical complexity and related topics* 702, 2018, , 当代
数学, 美国数学会, 普罗维登斯, 第133–150页。[HL22] S. Hughes、K. Li, 《双曲群的高阶拓扑复杂度》。 *J. Appl. Com-put. Topol.* **6** 2022 3, 323 329 ( ), 第–期, –页。[Hat02] A. Hatcher, 《代数拓扑》。 *Algebraic Topology*剑桥大学出版社, 剑桥, 2002年, xii+544页。[IS10] N. Iwase、M. Sakai, 《拓扑复杂度是一种纤维化L-S范畴》。 *Topology Appl.* ( ), 第1期, **157** 2010 21
10–[Jau25] E. Jauhari, 《对称积的LS范畴与序列拓扑复杂度》。*J. Appl. Comput. Topol.* **9** (2025年), 第4期, 第25卷, 31页。[KS06] S. Kallel、P. Salvatore, 《二维复形的对称积》。载于 *Recent developments in algebraic topology*, A. ´Adem 编 *et al.*, 当代数学, 407, 美国数学会, 普罗维登斯, 2006年, 第147–161页。[KT13] S. Kallel、W. Taamallah, 《置换积与粗对角线的几何学和基本群》。 *Canad. J. Math.* **65** (2013年), 第3期, 575–599页。[Mac62] I. G. Macdonald, 《代数曲线的对称积》。 *Topology* **1** (1962年), 319–343页。[Rud10] Y. B. Rudyak, 《拓扑复杂度的高阶类似物》。 *Topology Appl.* **157** (2010年), 第5期, 916–920页。

Jesús González Departamento de Matemáticas Centro de Investigación y de Estu- , , , , , dios Avanzados del IPN Av. Instituto Politécnico Nacional 2508 San Pedro Zacatenco Ciudad de México, 07000。*Email address*:
jesus.glz-espino@cinvestav.mx and jesus@math.cinvestav.mx

Ekansh Jauhari, Department of Mathematics, University of Florida, 358 LittleHall, Gainesville, FL 32611, USA.*Email address*: ekanshjauhari@ufl.edu