由多个钟跃迁几何平均定义的 SI 秒的实现

Fang Fang[1,2*], Chaowei Wang[3], Yani Zuo[1,2], Shaoyang Dai[1,2]

[1]中国计量科学研究院时间与频率计量处，中国北京 100029[2]国家市场监督管理总局时间频率与引力基准重点实验室，中国北京 100029[3]中国科学技术大学工程科学学院精密机械与精密仪器系，中国安徽合肥 230022

电子邮箱：fangf@nim.ac.cn

收稿 xxxxxx 录用发表
xxxxxx 出版 xxxxxx

摘要

当前国际单位制秒的定义基于微波波段的铯-133基态超精细跃迁，最精确的实现所达到的相对频率不确定度约为（1-2）×10⁻16。相比之下，先进光学钟目前展示出的估计不确定度低了两到三个数量级，由此引发了关于国际单位制秒重新定义的讨论。人们已提出几种新定义方案，其中一种方案引入了一个常数N，其定义为多个时钟跃迁频率的加权几何平均值。本文研究了在并非所有定义跃迁均可用，且多个光学钟以不同性能水平运行、运行时间彼此不重叠的情况下，如何实际实现N。我们考察了两种互补的实现与重建途径：一种基于几何平均组合，另一种基于算术平均组合。我们推导出一致的不确定度表达式，其中既纳入测量不确定度，也在必要时纳入推荐频率或频率比的不确定度。通过解析三跃迁案例研究，我们确定了各途径能得到较低总不确定度的参数区间，并给出了两者发生交叉的明确条件。我们还探讨了氢脉泽作为飞轮参考时死时间的主导影响，并提出一种基于系数矩阵与协方差矩阵的分时段加权组合，以考虑重叠运行及不同测量时间间隔之间的相关性。我们的研究结果为降低多钟实现中的总不确定度提供了实用指导，并有助于推动国际单位制秒重新定义的持续工作。

关键词：光学钟、国际单位制秒、频率标准、加权几何平均值、时间尺度校准

1. 引言

时间和频率测量是众多应用的基础，包括全球导航

© xxxx IOP 出版社有限公司

卫星系统 [1,2],电信 [3,4], 大地测量学[5,6], 和基础物理研究 [7-12]。借助超窄跃迁，光学原子钟的稳定度和准确度如今已超过铯喷泉钟两个数量级以上 [13-18]。这一显著进展引发了基于光学跃迁重新定义国际单位制秒的可能性的讨论 [19-21]。目前，11种光学跃迁 [22-32]被时间与频率咨询委员会（CCTF）认可为秒的次级表示（SRS），其推荐值会定期更新。在这些候选跃迁中，5种物种经评估的 B 类不确定度低于 2×10^{-18}[15-17,33,34], ，且5台光学钟已达到 10^{-19}水平的不确定度 [15,17,34-36]。值得注意的是，已有4种不同物种为国际原子时（TAI）的校准作出了贡献；国际原子时由国际计量局（BIPM）计算。

尽管取得了这些进展，在验证时钟准确度、提高运行时间以及降低不确定度以校准 TAI，从而确保其准确度并符合国际单位制秒方面，仍然面临挑战 [21,37]。

经过 CCTF 的一系列讨论，新定义的制定聚焦于两个方案。第一个方案延续当前的单跃迁方案，将选定的一种光学跃迁定义为固定数值常数。复现这一新定义与当前情况类似，且相对直接；其他跃迁仍将作为次级频率标准，用于 TAI 校准。第二个方案最初由 Lodewyck [38,39], 提出，通过将一组原子钟跃迁频率的加权几何平均值固定为常数N 来定义国际单位制秒。该常数N 的数值及权重由国际计量委员会公布，可以是固定值，也可以根据最新的频率比测量结果更新。在方案2下，如果只测量一种钟跃迁，则可以通过其推荐频率及相应的不确定度实现常数N ，这与 SRS 的情况类似。当有多台光学钟可用时，要以最小不确定度实现该定义并非易事，因为并非所有定义跃迁都能在同一个实验室中测量，时钟性能可能不同，测量结果可能存在部分相关性，而且时钟运行往往不同步，并存在大量死时间。尽管关于光学钟的研究已十分广泛，但在这些实际约束下如何实现方案2中的常数N ，相关讨论仍然有限。一个关键问题是，可能存在多种实现和重构策略。一种策略遵循定义的乘法结构，利用测得频率构造基于几何平均值的实现（对于未直接测量的跃迁，则辅以推荐频率或频率比）。另一种策略则构造一种类似算术平均值的加权组合，将各个时钟估计值组合起来。这些方法得出的总不确定度不一定相同，其相对性能取决于测量不确定度与推荐值不确定度之间的平衡，也取决于时钟之间的性能差异和相关性结构。

本文研究了在各种运行场景下使用复合频率方法（方案2）实现国际单位制秒，并特别关注如何最大限度地降低总不确定度。文中给出了几何平均实现和算术平均实现的一致不确定度表达式，并通过解析性的三跃迁案例研究，确定各方法具有优势的参数区间，并给出明确的交叉条件。此外，对于以氢脉泽为参考、异步运行的多钟测量活动，文中引入了一种分时段加权组合方法，并利用系数矩阵与协方差矩阵来考虑重叠运行、相关性以及死区时间引起的不确定度传播。第2节根据这样的钟系对实现情景进行分类：其中，新定义中的所有跃迁均直接测量。第3节讨论仅直接测量新定义中部分跃迁的情形，并概述重现该定义所需的推荐频率及其相关不确定度。第4节探讨多个时钟在不同起始时间和运行时长下运行的实际案例。第5节总结全文，并展望国际单位制秒未来重新定义的可能性。

2. 使用完整跃迁系综实现国际单位制秒

所提出的方案2定义了一个常数 N ，该常数基于一个跃迁系综，如 [38],中所述，是一组时钟跃迁频率的加权几何平均值，由以下方程表示:

$$N=\prod_{i=1}^{n}\nu_i^{w_i},\quad \sum_{i=1}^{n}w_i=1. \tag{1}$$

其中，ν_i 表示纳入新定义的推荐跃迁频率，w_i 表示各跃迁的归一化权重。需要指出的是，N和w_i 均为不确定度为零的定义常数，而ν_i 则表示一个具有相应不确定度的单个跃迁频率。权重可以按照某些规则 [40,41] 确定，也可以通过协商一致确定。

2.1 用算术平均实现定义

由单个时钟复现常数 N 的一种直接方法见式 2。

$$\tilde{N}(i) = \tilde{\nu}_i \cdot \frac{N}{N_i} \tag{2}$$

此处$_iN$ 表示第i个钟跃迁$_i\nu$ 的推荐频率及其相对推荐不确定度$_{ii}u$ ，而$_i\tilde{\nu}$ 表示跃迁$_i\nu$ 在校正所有相关物理效应引起的偏差后的测量频率，其相对不确定度为$_{ii}u$ 。因此，复现N i 的相对不确定度˜同时包括测量频率$_i\tilde{\nu}$ 的相对不确定度$_{ii}u$ （包含 A 类和 B 类贡献），以及与推荐$_iN$ 相关的不确定度$_{ii}u$，如式 3 所示。

$$u_{tot}^2(i) = u_i^2 + u_{ii}^2 \tag{3}$$

如图 1 所示，每个单独的时钟数据都可用于测量计时钟的频率，这与使用次级频率标准类似。计时钟相对于光学钟的相对偏差$_0$ $_0$ ( )/ $_{ref}f$ f– 可由式 4 得出。

$$\frac{f_{ref} - f_0}{f_0} = \frac{\tilde{N}(i) - N}{N} = \frac{\tilde{\nu}_i - N_i}{N_i} \tag{4}$$

这一偏差可用于调整本地时间尺度 UTC(k)，或校准 TAI。

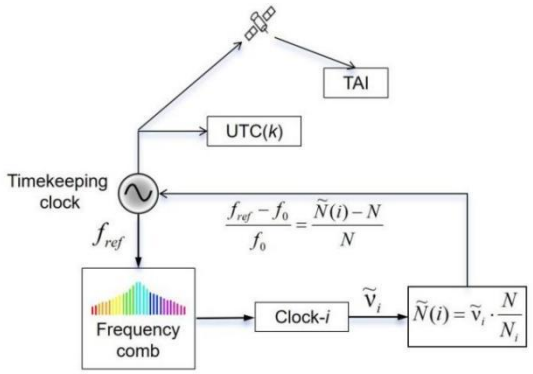


图 1. 示意图展示了如何利用单次光学跃迁测量复现定义常数 N。相对于光学钟频率测量计时钟的相对偏差$_0$ $_0$ ( )/ $_{ref}f$ f–。

测量所有跃迁后，即可根据公式 5 得到加权算术˜平均值$_{am}N$ ，并用于评估计时钟的偏差。

$$\tilde{N}_{am} = \sum_i \left(\frac{u_{am}^2}{u_{tot}^2(i)}\right)\tilde{N}(i) \tag{5}$$

其中，$_{am}u$ 为加权算术平均值的总相对不确定度，表示为:

$$u_{am}^2 = \frac{\sum_i \left(\tilde{N}(i)/u_{tot}(i)\right)^2}{\left[\sum_i \tilde{N}(i)/u_{tot}^2(i)\right]^2} \tag{6}$$

˜当不同钟复现得到的 ( )N i 近乎相等时，可用公式 7 近似公式 6，而不会影响结果的准确性。

$$u_{am}^2 = \frac{1}{\sum_i 1/u_{tot}^2(i)} \tag{7}$$

2.2 利用几何平均值实现该定义

如公式 8 所示，复现定义常数 N 的另一种方法是采用几何平均值。

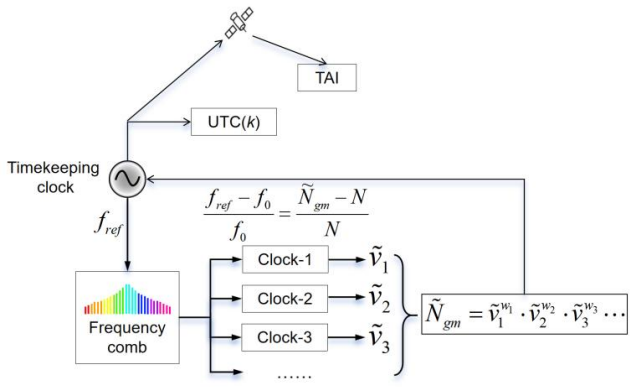
$$\tilde{N}_{gm} = \prod_{i=1}^{n} \tilde{\nu}_i^{w_i} = \left(\prod_{i=1}^{n} k_i^{w_i}\right) \cdot f_{ref} \tag{8}$$

每个测量频率 $_i\tilde{\nu}$ 均由光学频率梳测得，该频率梳以输出频率为 $_{ref}f$ 的计时钟为参考，例如氢脉泽钟；二者的比值记为 $_ik$ 。根据公式 9，可得计时钟相对于定义常数 N 的相对频率偏差。

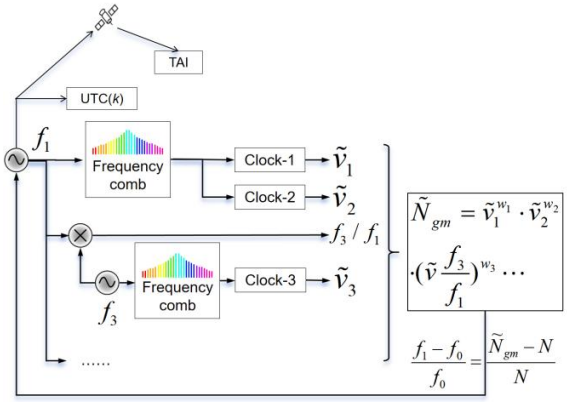
$$\frac{\tilde{N}_{gm} - N}{N} = \frac{\prod_i \tilde{\nu}_i^{w_i} - \prod_i N_i^{w_i}}{\prod_i N_i^{w_i}} = \frac{f_{ref} - f_0}{f_0} \tag{9}$$

这里，$_0f$ 是计时钟的标称频率。当一些光学钟以输出频率为$_jf$ 的不同计时钟为参考，并测量˜相应的拍频时，可使用公式 10 得到复现的$_{gm}N$。

$$\tilde{N}_{gm} = \prod_{i=1}^{n} \tilde{\nu}_i^{w_i} \cdot \left(\frac{f_i}{f_1}\right)^{w_i} \tag{10}$$



(a)



(b)

图 2。 使用光学跃迁测量复现常数 N。(a) 当所有光学钟均以同一计时钟为参考时，N 的实现。(b) 当不同光学钟分别以不同计时钟为参考时，N 的实现。

公式 8 中的几何平均值仅取决于测得频率，不涉及推荐频率。因此，总不确定度仅由测得跃迁频率的不确定度决定。在最简单的情况下，假设所有时钟均以同一计时钟为参考，且所有测量互不相关，则总不确定度为 [42-44]:

$$u_{gm}^2 = \sum_i w_i^2 u_i^2 \tag{11}$$

使用不同的参考钟时，总相对不确定度还包括参考钟-i 与钟-1之间测量频率比的相对不确定度，记为u_{1i}，如式（12）所示。

$$u_{gm}^2 = \sum_i w_i^2 (u_i^2 + u_{i,1}^2) \tag{12}$$

死时间引入的不确定度更为复杂，将在第 4 节中讨论。对于所有跃迁的归一化加权平均值，使总不确定度最小的权重为

$$w_i = \frac{1/u_{ii}^2}{\sum_k 1/u_{ii}^2} \tag{13}$$

因此，固有不确定度最低的时钟在实现中占主导地位。一种权重选择方案提出，权重应与推荐的钟跃迁不确定度的平方成反比，如式（14）所示。

$$w_i \propto 1/u_{ii}^2 \tag{14}$$

在一个特定情形下，如果所有钟跃迁测量的比值 $/_i$ $_{ii}u$ u 均相同，式 11 可简化为

$$u_{gm}^2 = \sum_i w_i^2 u_i^2 = \sum_i \left(\frac{1/u_i^2}{\sum_j 1/u_j^2} \right)^2 u_i^2 = \frac{1}{\sum_i 1/u_i^2} \tag{15}$$

然而在实际中，即使是位于不同实验室的独立时钟，测量结果也往往存在部分相关性 [43,44]。例如，用于测量温度的温度计可能使用同一标准进行校准，从而导致黑体辐射引起的频移存在相关不确定度。在这种情况下，式 15 中的总不确定度必须替换为式 16:

$$u_{gm}^2 = \sum_i w_i^2 u_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} w_i w_j u_i u_j r_{i,j} \tag{16}$$

其中，$_{ij}r$ 为相关系数，用于量化两次频率测量之间的相关程度，取值范围为 [−1, +1]。假设某个物理量 x（例如温度 T 、磁场 B 等）对时钟频率 $_i\nu$ 和 $_j\nu$ 产生相关贡献，则相关系数 $_{ij}r$ 可表示为式 17:

$$r_{i,j} = \frac{\mathrm{cov}\left(\tilde{\nu}_i, \tilde{\nu}_j\right)}{\sigma_i \sigma_j} \tag{17}$$

其中，$_i\sigma$ 和 $_j\sigma$分别为 $_i\tilde{\nu}$ 和$_j\tilde{\nu}$ 的绝对不确定度。假设不同时钟的测量噪声互不相关，则测得频率 $_i\tilde{\nu}$ 和 $_j\tilde{\nu}$ 的协方差 $\mathrm{cov}\left(\tilde{}_i \ \tilde{}\right)$,$\nu$ ν在一阶近似下可表示为

$$\mathrm{cov}\left(\tilde{\nu}_i, \tilde{\nu}_j\right) = \sum_{l=1}^{L} \frac{\partial F_i}{\partial x_l} \frac{\partial F_j}{\partial x_l} u^2(x_l) \tag{18}$$

这里，$(\ )_{ux}$ 为参数 $_lx$ 的不确定度。不失一般性，测量频率 $_i\tilde{\nu}$ 可视为经直接观测并校正所有物理效应 [42,47,48],所引起频移后的值，并可写为

$$\tilde{\nu}_i = \tilde{\nu}_i^{\mathrm{meas}} - F_i\left(x_1, x_2, \cdots\right) \tag{19}$$

其中x_i是会引入频率偏差$_iF$ 的物理量，例如温度、激光强度或原子密度。

2.3 案例研究：三个跃迁的实现

为说明总不确定度对这些参数的依赖关系，考虑最简单的情形：当 N 为三个光学跃迁的几何平均值时，其推荐值具有相同的相对不确定度 $_{11}u$ ，因而具有相等的权重。所复现的几何

平均值及其不确定度如式（20）所示，其中所有测量均具有相同的相对不确定度 u，

$$\tilde{N}_{gm} = \tilde{\nu}_1^{1/3} \cdot \tilde{\nu}_2^{1/3} \cdot \tilde{\nu}_3^{1/3}$$
$$u_{gm}^2 = \frac{u^2}{3} \tag{20}$$

算术平均值及其相对不确定度可表示为

$$\tilde{N}_{am} = \frac{N}{3} \sum_i \frac{\tilde{\nu}_i}{N_i}$$
$$u_{am}^2 = \frac{u^2 + u_{11}^2}{3} \tag{21}$$

与式 20 相比，由算术平均值获得的总不确定度包含推荐不确定度u_{11}，因此更差。更一般地，不同时钟的测量不确定度可能以不同程度偏离推荐不确定度u_{11}。在一种特殊情况下，两个光学钟具有相同的测量不确定度u，而第三个光学钟的测量不确定度为ku。几何平均值与式 20 中相同，而算术平均值由式 22 给出：

$$\tilde{N}_{am} = \frac{1}{\frac{2}{u^2+u_{11}^2} + \frac{1}{k^2u^2+u_{11}^2}} \left(\tilde{\nu}_1 \cdot \frac{N}{N_1} + \tilde{\nu}_2 \cdot \frac{N}{N_2} \right) + \frac{1}{\frac{2}{u^2+u_{11}^2} + \frac{1}{k^2u^2+u_{11}^2}} \tilde{\nu}_3 \cdot \frac{N}{N_3} \tag{22}$$

同样，假设所有测量均不相关，则几何平均法和算术平均法所得的总不确定度可由式 23 得出：

$$u_{gm}^2 = \frac{2}{9}u^2 + \frac{1}{9}(ku)^2 = \frac{2+k^2}{9}u^2$$
$$u_{am}^2 = \frac{1}{2/(u^2+u_{11}^2) + 1/(k^2u^2+u_{11}^2)} \tag{23}$$

图 3 展示了不同条件下，采用算术平均值和几何平均值实现常数N时不确定度的比较。结果表明，当测量不确定度u处于一定范围内，且测得的不确定度相对较低，或比值k处于特定区间（接近 1）时，几何平均值的总不确定度u_{gm}小于算术平均值的不确定度u_{am}。随着k增大，几何平均值的总不确定度显著增加；在某些情况下，u_{gm}会超过u_{am}。交点取决于k与u/u_{11}的比值，如图 3 所示。

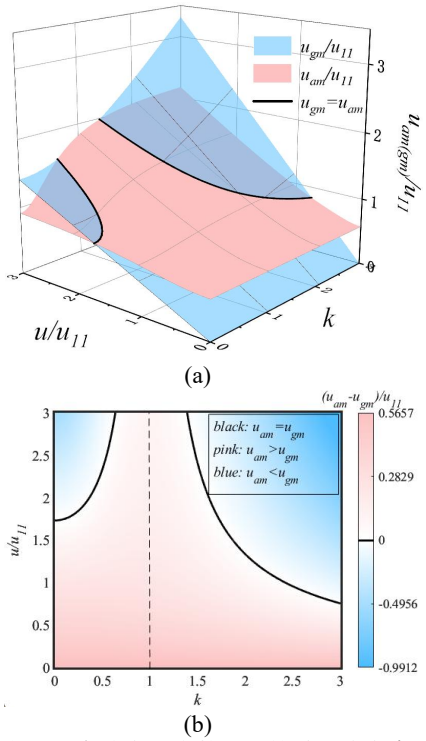


图 3. 采用两种不同方法实现常数 N时的总不确定度。(a) 蓝色平面表示使用三个光学钟的几何平均值实现N时的总不确定度，而粉色平面表示使用算术平均值时的总不确定度。黑色交线表示两种方法所得不确定度相等的条件。这里，两个时钟具有相同的不确定度u，第三个时钟的不确定度为ku。假设三种跃迁的推荐不确定度u_{11}相同。(b) (a) 中两个曲面交线的投影，显示了几何平均法与算术平均法所得不确定度的差异。

接下来考虑一种更一般的情形，其中N是三种光学跃迁的几何平均值。其中两种跃迁具有相同的推荐不确定度不确定度u_{11}和相同的权重m，而第三种跃迁则不同，如公式24所示。

$$N = \nu_1^m \cdot \nu_2^m \cdot \nu_3^{1-2m} \tag{24}$$

同样，当测得的跃迁 N $\tilde{\nu}_1$ 和 $\tilde{\nu}_2$ 具有相同的不确定度 u，而 $\tilde{\nu}_3$ 的不确定度为ku时，通过几何平均法和算术平均法得到的复现值可由式 25 表示：

$$\tilde{N}_{gm} = \tilde{v}_1^m \cdot \tilde{v}_2^m \cdot \tilde{v}_3^{1-2m}$$

$$\tilde{N}_{am} = \frac{\dfrac{1}{u^2+u_{11}^2}}{\dfrac{2}{u^2+u_{11}^2}+\dfrac{1}{k^2u^2+\dfrac{m}{1-2m}u_{11}^2}}\left(\tilde{v}_1\cdot\frac{N}{N_1}+\tilde{v}_2\cdot\frac{N}{N_2}\right) + \frac{\dfrac{1}{k^2u^2+\dfrac{m}{1-2m}u_{11}^2}}{\dfrac{2}{u^2+u_{11}^2}+\dfrac{1}{k^2u^2+\dfrac{m}{1-2m}u_{11}^2}}\tilde{v}_3\cdot\frac{N}{N_3} \quad (25)$$

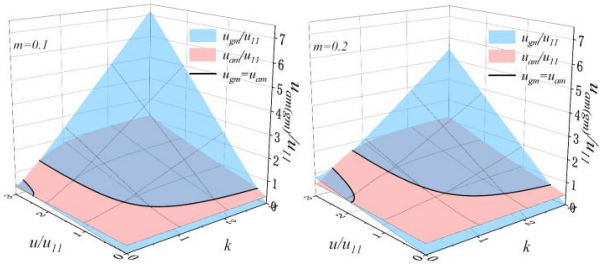
同样，假设测量结果彼此不相关，则可相应地得到使用这两种方法复现常数 N 时的总不确定度。在第三台钟的推荐不确定度与前两台钟的推荐不确定度之比等于其权重之比的情况下：

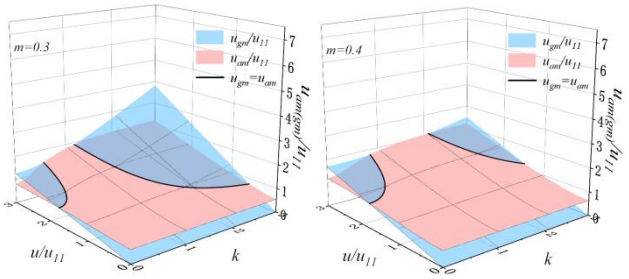
$$\frac{m}{1-2m} = \left(\frac{u_{33}}{u_{11}}\right)^2 \quad (26)$$

$$u_{gm}^2 = 2m^2u^2 + (1-2m)^2(ku)^2$$

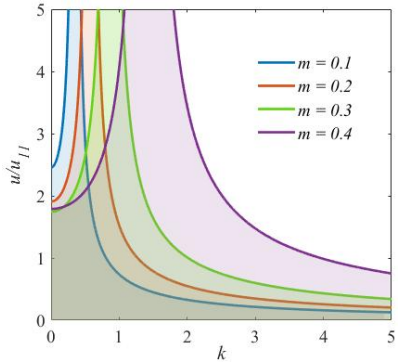
$$u_{am}^2 = \frac{1}{\dfrac{2}{u^2+u_{11}^2}+\dfrac{1}{k^2u^2+\dfrac{m}{1-2m}u_{11}^2}} \quad (27)$$

图 4 表明，与图 3 类似，当测量不确定度u 相对较低，或者第三台钟的不确定度与另外两台钟的不确定度之比处于某一特定区间内时（当k 接近/(1−2)m m时），几何平均值得到的总不确定度小于算术平均值得到的总不确定度。随着第三台钟的性能下降（即k 增大），几何平均值的不确定度先缓慢增大，随后迅速上升；而算术平均值的不确定度起初迅速增大，之后增长较缓。交线表示两种方法对应的不确定度相等的位置，这与图 3 所示结果一致。此外，m 越大，几何平均值具有优势的范围越宽。





(a)



(b)

图 4。 采用两种不同方法实现常数N 的总不确定度。(a) 蓝色平面表示比值$_{11}/_{gm}u\ u$，粉色平面表示比值$_{11}/_{am}u\ u$。黑色交线表示两种方法的不确定度相等的条件。此处，两台钟具有相同的测得的不确定度u，第三台钟的不确定度为ku。前两台钟的权重相同，记为m，而第三台钟的权重为$1-2m$。(b) 随着m 值的变化，两种不确定度的优势区域的变化，其中几何平均值的不确定度低于算术平均法。由两条同色曲线围成的区域表示几何平均值给出较低不确定度的区域。ss

3. 使用部分跃迁实现国际单位制秒

3.1 实现定义的不同方法

在单个实验室中测量定义中包含的所有跃迁并不可行。尽管如此，仍可基于测量数据和推荐频率，使用几何平均法或算术平均法重建复合常数 N。根据公式 5，可以从测得的 $_i\tilde{v}$ 直接得到算术平均值 $_{am}N$。这里唯一的区别是，并非所有跃迁都包含在内。总不确定度也可以相应地使用公式 7计算。

为了通过几何平均值获得 N，对于未直接测量的跃迁，必须使用推荐值 N_j。为确保计算所得的相对偏差

$\tilde{}_{gm}N$ 与参考计时钟信号的相对偏差成正比，从而适用于校准时间尺度，应使用频率比 $_1/_jN\ N$ ，而不是绝对频率。在已测量的跃迁中，选择测得不确定度最小的跃迁 1。

$\tilde{}$然后，使用公式 28 计算$_{几何平均值}N$：

$$\tilde{N}_{gm} = \tilde{v}_1^{w_1+\sum_j w_j} \cdot \prod_{i\neq 1,j} \tilde{v}_i^{w_1} \cdot \prod_j \left(\frac{N_j}{N_1}\right)^{w_j} \tag{28}$$

其中，$_1\tilde{v}$ 是测得的不确定度最低的跃迁，$_i\tilde{v}$ 表示其他测得的跃迁频率，$_jN$ 是未测量跃迁的推荐频率，而$_1N$ 是跃迁 1的推荐频率。

相对于定义常数N的相对偏差可表示为公式 29：

$$\frac{\tilde{N}_{gm}-N}{N} = \frac{\tilde{v}_1^{w_1+\sum_j w_j}}{N_1^{w_1+\sum_j w_j}} \cdot \prod_{i\neq 1,j} \frac{\tilde{v}_i^{w_i}}{N_i^{w_i}} - 1 = \frac{f_{\text{ref}}-f_0}{f_0} \tag{29}$$

$\tilde{}_{几何平均值}N$ 的不确定度为

$$u_{gm}{}^2 = (w_1+\sum_j w_j)^2 u_1^2 + \sum_{i\neq j,1} w_i^2 u_i^2 + \sum_j w_j^2 u_{j1}^2 \tag{30}$$

此处，$_1ju$ 表示频率比 $_1/_jN\ N$ 的推荐不确定度。当仅测量一个跃迁时，公式 28 可化简为

$$\tilde{N}_{gm} = \tilde{v}_1 \cdot \prod_{j\neq 1} \left(\frac{N_j}{N_1}\right)^{w_j} = \tilde{v}_1 \cdot \frac{N}{N_1} \tag{31}$$

这与公式 2 相同，通过 N 与推荐的$_iN$ 之比重现了N。如果某些测量之间存在相关性，如公式 16 所示，则总不确定度变为

$$\begin{aligned} u_{gm}^2 &= (w_1+\sum_j w_j)^2 u_1^2 + \sum_{i\neq j,1} w_i^2 u_i^2 \\ &+ 2\sum_{i=1}\sum_{k=i+1} w_i w_k u_i u_k r_{i,k} + \sum_j w_j^2 u_{j1}^2 \end{aligned} \tag{32}$$

3.2 案例研究：三个跃迁的实现

作为一个具体示例，再次考虑将N 定义为三个光学跃迁的几何平均值，且每个跃迁具有相同的推荐不确定度。假设测量了其中两个跃迁，第三个跃迁采用其推荐频率。通过几何平均实现N，可得

$$\tilde{N}_{gm} = \tilde{v}_1^{2/3} \cdot \tilde{v}_2^{1/3} \left(\frac{N_3}{N_1}\right)^{1/3} \tag{33}$$

而总不确定度变为

$$u_{\text{gm}}^2 = (\frac{2}{3})^2 u_1^2 + (\frac{1}{3})^2 u_2^2 + (\frac{1}{3})^2 u_{31}^2 \tag{34}$$

通过加权算术平均值得到 N 的实现结果为

$$\begin{aligned} \tilde{N}_{am} &= \frac{\frac{1}{u_2^2+u_{22}^2}}{\frac{1}{u_1^2+u_{11}^2}+\frac{1}{u_2^2+u_{22}^2}} \tilde{v}_1 \cdot \frac{N}{N_1} \\ &+ \frac{\frac{1}{u_1^2+u_{11}^2}}{\frac{1}{u_1^2+u_{11}^2}+\frac{1}{u_2^2+u_{22}^2}} \tilde{v}_2 \cdot \frac{N}{N_2} \end{aligned} \tag{35}$$

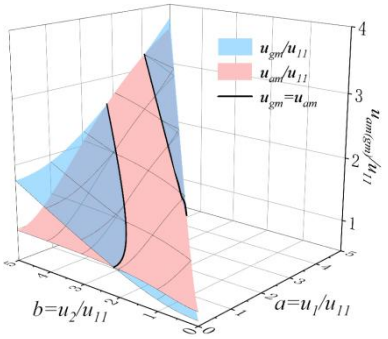
相应的不确定度为

$$u_{am}^2 = \frac{1}{\frac{1}{u_1^2+u_{11}^2}+\frac{1}{u_2^2+u_{22}^2}} = \frac{1}{\frac{1}{u_1^2+\frac{1}{3}u_{31}^2}+\frac{1}{u_2^2+\frac{1}{3}u_{31}^2}} \tag{36}$$

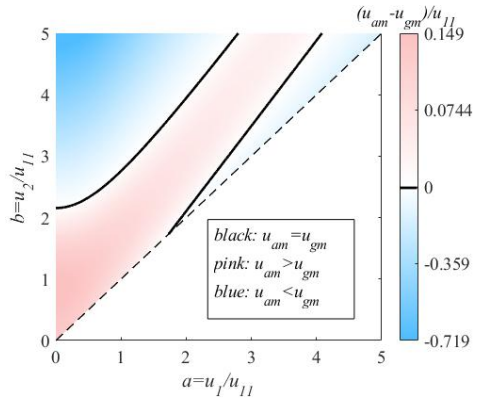
此处，$_{11} = _{22} = \sqrt{\frac{2}{3}}\ _{31}u\ u\ u$按照参考文献[38]中的方法计算。

图 5 展示了两种不同方法所得总不确定度的比较。x 轴和 y 轴分别表示测得的不确定度与推荐不确定度之比（即$_1\ _{11}/a\ u\ u=$ 和$_2\ _{11}/b\ u\ u=$，其中$a\ b\leq$），而 z 轴表示总实现不确定度与推荐不确定度$_{11}u$ 之比。蓝色平面表示$_{11}/_{gm}u\ u$ 之比，而粉色平面表示$_{11}/_{am}u\ u$ 之比。

结果表明，当一个跃迁的测得不确定度显著较大时，算术平均法通常能得到较低的总不确定度；而当时钟的不确定度小于推荐不确定度的两倍（即$_{11}\ _1/\ 2u\ u\ <$ 和$_2\ _{11}/\ 2u\ u\ <$）时，几何平均法几乎总能得到较低的总不确定度$\sqrt{2}u_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}u_{11} < u_2 < \sqrt{2}u_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}u_{11}$. when the measurement



(a)



(b)

图 5. 采用两种不同方法实现 N 的总不确定度比较。(a) 横轴表示归一化测量不确定度 $_{1\ 11}/a\ u\ u=$ 和 $_{2\ 11}/b\ u\ u=$ 。蓝色平面表示比值 $_{11}/_{gm}u\ u$ ，粉色平面表示比值 $_{11}/_{am}u\ u$ 。两个平面的交线标示了两种方法所得不确定度相等的条件。(b) (a) 中交线的投影。

4. 多个时钟的非同步运行中的总不确定度

使用氢脉泽作为参考信号时，光学钟运行期间的死时间会显著增加测量不确定度[49,50]。例如，当运行率为 80%（对应 20% 的死时间）时，死区时间导致的不确定度 $_{lab}u$约达到 3.6×10^{-16}，远大于最先进光学钟固有的 A 类和 B 类不确定度 [49]。

图 6 展示了对于分数频率稳定度为 2.0×10^{-16} 的氢脉泽，不同死区时间比例所引入的额外不确定度。

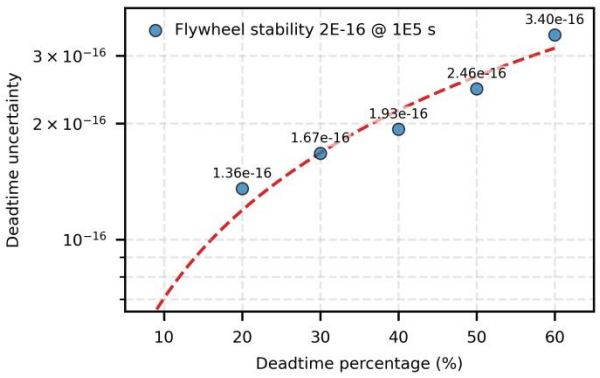


图 6. 对于分数频率稳定度为 2.0×10^{-16} 的氢脉泽，不同死区时间比例引入的附加不确定度。

因此，如果仅使用整个测量活动期间的平均值，测量活动时长为 T 时，每台光学钟的总不确定度 $_iu$ 可能会很大。为了在多台光学钟异步运行时降低这一影响，我们将测量活动划分为多个测量区间，并进行加权组合，

$$\tilde{N}_{Tam}=\sum_i \frac{t_i}{T}\tilde{N}(t_i) \tag{37}$$

测量时间间隔的分配如图 7 所示，其中展示了测量活动期间四台运行时间各异的光学钟的示例，测量活动持续时间为 T。

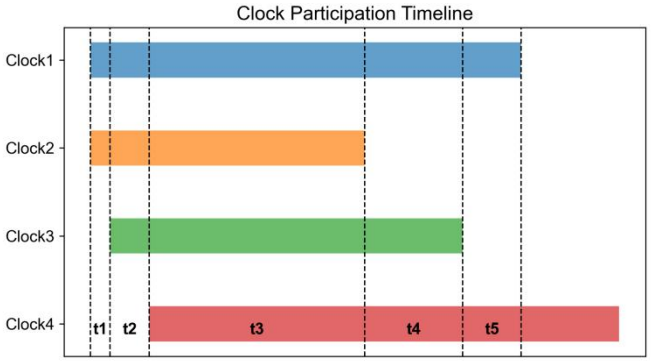


图 7. 测量活动期间，四台光学钟在不同时段运行的示例；测量活动的总时长为T。

对于每个时间间隔$_it$ ，按照上述方法确定测量频率及其不确定度。然后，与公式 7 类似，当不同时段内由不同光学钟实现的N 彼此大致相同时，合并后最终结果的总不确定度可由公式 38 得出，

$$u_T^2=C^TUC \tag{38}$$

其中C 是定义加权线性组合 $\left(\ ^1,\ ^2,\cdots,\ \right)_T\ _nt\ t\ t\ T\ T\ T$的系数矩阵，而$U$ 是协方差矩阵。矩阵U 是一个$n\ n\times$ 矩阵，其元素为：

$$u(i,i)=\sum_{p\neq q}^{n}[\alpha_{i,p}\alpha_{i,q}\frac{1}{\tilde{v}_{i,p}\tilde{v}_{i,q}}\sum_{l=1}^{L}\frac{\partial F_p}{\partial x_l}\frac{\partial F_q}{\partial x_l}u^2(x_l)]+\sum_{p=1}^{n}\alpha_{i,p}^2u_{i,p}^2$$

$$u(i,j)=\sum_{p=1}^{n}[\alpha_{i,p}\alpha_{j,p}\frac{1}{\tilde{v}_{i,p}\tilde{v}_{j,p}}\sum_{l=1}^{L}\frac{\partial F_p}{\partial x_l}\frac{\partial F_q}{\partial x_l}u^2(x_l)]+\sum_{p=1}^{n}\beta_{i,p}\beta_{j,p}u_{pp}^2 \tag{39}$$

这里，$_{,i\ p}\tilde{v}$ 是时钟p 在第i 个周期内的测量值，$_pF$ 是时钟p的频移修正，$_{,ip}u$ 是

时钟p 在第i个周期内测量值的相对不确定度，而$_{pp}u$ 是时钟p推荐值的相对不确定度。如果同一时钟同时参与区间i 和j，相应的不确定度完全相关。系数$_{i,p}\alpha$ 和$_{i,p}\beta$ 的确定方法如下：

$$\alpha_{i,p}=\begin{cases} w_{p_i}+W_i^{\mathrm{miss}}, & p=p_i \\ 0, & p\in A_i \\ w_p, & p\in S_i. \end{cases} \tag{40}$$

$$\beta_{i,p}=\begin{cases} -W_i^{\mathrm{miss}}, & p=p_i \\ w_p, & p\in A_i \\ 0, & p\in S_i. \end{cases} \tag{41}$$

其中，$_ip$ 表示第 i 个周期内相对测量不确定度最小的时钟索引，$_iA$ 是该周期内所有非运行时钟的索引集合，S 表示同一周期内运行时钟的索引集合（不包括时钟$_ip$ ），而$_{\mathrm{miss}}{}_iW$ 是第 i 个周期内所有非运行时钟的总权重。

采用这一框架可最大限度地减小氢脉泽引起的死时间的影响，与独立处理每个时钟相比，还能显著降低组合测量的有效不确定度。

5. 结论

本文重点探讨使用方案2实现国际单位制秒，并着重评估各种运行场景下的不确定度。本文推导了采用几何平均法和算术平均法实现常数N 时的不确定度，并分析了相关光学跃迁的测量不确定度、推荐频率不确定度以及频率比不确定度所造成的影响。本文考虑了所有钟跃迁均可用和仅部分跃迁可用等不同场景，也考虑了测量之间的相关性。研究了三种跃迁在不同场景下的特殊情况，以说明在哪种场景下几何平均值更为合适。

为降低死区时间导致的不确定度，我们引入了一种时间加权平均方法，利用系数矩阵与协方差矩阵来处理时钟的重叠运行及其相互间的相关性。这些结果凸显了采用方案2式加权组合来复现国际单位制秒的实际优势。所提出的框架为组合异步运行的光学钟和分段测量活动的频率测量提供了一种系统方法，并通过系数矩阵/协方差矩阵形式明确纳入氢脉泽飞轮死区时间导致的不确定度及相关性影响。该框架适用于任意数量的时钟和测量时段，因此与SI秒实现流程以及UTC(k)运行和TAI校准等评估/调控任务直接相关。

未来的工作可包括纳入不同参考标准之间的相关性、开发自适应加权方案，以及将该方法扩展至各实验室的光学时钟网络。总体而言，该方法能够支持多时钟实现国际单位制秒和TAI校准，同时在真实运行约束下最大限度地降低死区时间导致的不确定度。

致谢

本研究得到国家重点研发计划（项目编号：2021YFF0603801）和中国计量科学研究院基本科研业务费项目（编号：AKYZD2411）的支持。

参考文献

[1]Lewandowski W 和 Arias E F 2011年 Metrologia 48 S219[2] Valat D 和 Delporte J 2020年 Metrologia 57 025019
[3] 2020 **1693** 012101 Xu G
[4] 2025 《物理学杂志：会议系列》Lingaraj K、Malghan RL、Rao K K 等，《工程研究快报》 **7** 025304 [5] Grotti J、Koller S、Vogt S 等，2018年 自然物理 14(5) 437-441[6]Takamoto M、Ushijima I、Ohmae N 等，2020年 自然光子学 **14 7** 411 415 ( ) - Hees A、Guéna J、Abgrall M 等，
[7] 2016年 《物理评论快报》117(6) 061301[8]Wcislo P、Ablewski P、Beloy K 等，2018年 科学进展 4(12) 4869[9]Ashby N、Parker T E 和 Patla B R，2018年 自然物理 14(2) 822-826[10]Kennedy C J、Oelker E、Robinson J M 等，2020年 《物理评论快报》125(20) 201302[11]Lange R、Huntemann N、Rahm J M 等，2021年 《物理评论快报》 **126 1** 011102 ( ) Filzinger M、
[12] Dörscher S、Lange R 等，2023年 《物理评论快报》 **130 25** 253001 ( ) Ludlow A D、Boyd M M、Ye J 等，
[13] 2015年 现代物理评论 **87 2** 637 701 ( ) - Jallageas A、
[14] Devenoges L、Petersen M 等，2018年 Metrologia 55 366[15] Aeppli A、Kim K、Warfield W 等，2024年 《物理评论快报》 133 023401[16] Tofful A、Baynham C F A、Curtis E A 等，2024年 Metrologia 61 045001[17] Marshall M C、Castillo D A R、Arthur-Dworschack W J 等，
2025 **135** 033201 《物理评论快报》Zheng
[18] 2025 F、Chen W、Liu K 等。Metrologia 62035005[19] Gill P，2011年 英国皇家学会哲学汇刊A辑：数学、物理与工程科学 369(1953) 4109-4130[20] Riehle F，2015年 科学院报告：物理 16(5) 506-515

[21]Dimarcq N、Gertsvolf M、Mileti G 等，2024年 *Metrologia* **61(1** **)** 012001[22] Schneider T, Peik E, and Tamm C 2005 《物理评论快报》94 230801[23]Rosenband T, Hume D B, Schmidt P O, 等. 2008 《科学》, 319(5871) 1808–1812[24] Akatsuka T, Takamoto M, Katori 2010 《物理评论A：原子、分子与光学物理》 **81 2** 023402 ( ) [25] 2013 Hinkley N, Sherman J A, Phillips N B, 等. 《科学》341 1215-1218[26] Barwood G P, Huang G, Klein H A, 等. 2014 《物理评论A》89 050501(R)[27]Huntemann N, Sanner C, Lipphardt B, 等. 2016 《物理评论快报》116 063001[28] Dai S, Li K, Zhai Y, 等. 2017 《中国物理快报》34 013201[29] Brewer S M, Chen J S, Hankin A M, 等. 2019 《物理评论快报》123:033201[30]Ohmae N, Bregolin F, Nemitz N, 等. 2020 《光学快报》, 28(10) 15112–15121[31] Lu B, Sun Z, Yang T, 等. 2022 《中国物理快报》39 080601[32]Huang Y, Zhang B, Zeng M, 等. 2022 《物理评论应用》 **17** 034041 [33] McGrew W F, Zhang X, Fasano R J, 等. 2018 《自然》 564 87-90[34] Lindvall T, Fordell T, Hanhijärvi K J, 等. 2025 《物理评论·应用》 **24** 044082 [35] Jia Z, Li J, Kong D, 等. 2026 Metrologia [36] Zhang B, Ma Z, Huang Y, 等. 2026 《物理评论快报》136(5) 053202[37] BIPM. 关于秒的重新定义的常见问题。2024年10月5日，https://www.bipm.org/en/faq-redefinition-second[38] Lodewyck J 2019 Metrologia 56(5) 055009[39]Lodewyck J 2024 《物理学杂志：会议系列》 2024 **2889 1** 012026 ( ) Yao J, Sherman J A, Fortier T, 等. 2019[40] 《物理评论应用》 **12 4** 044069 ( ) Yao J, Parker T, Ashby N, 等. 2018[41] 《IEEE超声学、铁电学与频率控制汇刊》65(1) 127- 134[42] 国际计量学联合委员会 测量数据评定——测量不确定度表示指南。计量学指南联合委员会 2008 100 1-116[43] 国际计量学联合委员会 测量数据评定——测量不确定度表示指南补充文件2——扩展到任意数量的输出量。计量学指南联合委员会 2011 **102** [44] 2024 Tao M, Ren S, Lao C. 《计量科学与技术》68(6) 40-48 [45] 2015 **52 5** 628 [46] 2025 Margolis H S and Gill P Metrologia ( ) Lindvall T, Pizzocaro M, Godun R M, 等. 《光学》12 843-852[47] Grebing C, Al-Masoudi A, Dörscher S, 等. 2016 《光学》 3(6) 563–569[48] Margolis H S and Gill P 2016 《物理学杂志：会议系列》, IOP 出版社, 723(1) 012060 [49] Hachisu H 和 Ido T 2015年 《日本应用物理学杂志》 **54 11** 112401 () Biedermann G W、Takase [50] K、Wu X 等，2013年 《物理评论快报》**111**170802