arXiv:2603.14922v1 [cs.DM] 16 Mar 2026

紧密度与决策

Chavdar Dangalchev
dangalchev@hotmail.com 保加利亚科学院
数学与信息学研究所，保加利亚索非亚。

摘要

本文研究这样一类网络：在给定的时间周期内，可能有一条边断开。我们应该新建哪条边，才能使所得网络的紧密度满足某些最优准则?

我们研究不同的优化准则和不同的图——环、路径、棒棒糖图，以及由一条边连接的两个完全图。

关键词：博弈论、决策、图的接近度。
2020年数学学科分类：90B50，90C35。

1 引言

复杂网络分析有两个主要组成部分——增长和脆弱性。图最重要的中心性度量之一是紧密度。Dangalchev 在一项关于网络脆弱性的研究中 [1]提出了一种最敏感的特征之一——剩余紧密度。它衡量删除一个顶点或一条边后图的紧密度。 [1], 中采用的简单无向图紧密度定义为：

$$C(G) = \sum_i \sum_{j \neq i} 2^{-d(i,j)}. \tag{1}$$

在上述公式中， $d(i,j)$是顶点 i 和j之间的标准距离。上述定义的优点在于，它可用于非连通图，而且便于为图运算构造公式。

设 i 和 j 是图 G 中的一对连通顶点，图 $G_{i,\ j}$ 是从 G中移除边（i，j）后构造的图。设 $d_{i,\ j}(r,\ s)$表示图 $G_{i,\ j}$中顶点 r 和 s 之间的距离。根据公式（1），我们可以计算图 $G_{i,\ j}$的紧密度：

$$C(G_{i,j}) = \sum_r \sum_{s \neq r} 2^{-d_{i,j}(r,s)}.$$

边剩余紧密度 R 是衡量图 G 脆弱性的指标，其定义见 [1]：

$$R(G) = \min_{i,j}\{C(G_{i,j})\}.$$

设 p 和 q 是图 G中一对不连通的顶点，而图 $G_{p,\ q}$是通过连接 p 和 q 构造的图。附加紧密度是衡量图 G 增长潜力的指标，其定义见 Dangalchev[2]：

$$A(G) = \max_{p,q}\{C(G_{p,q})\}.$$

附加紧密度和剩余紧密度从两个不同方向描述图的行为——构建图和摧毁图。

设想这样一种情况：我们维护网络（例如铁路系统、供水系统、电力系统等）的资源有限。我们应该把精力放在哪里：通过构建新边来扩展网络，还是防止现有线路发生故障？这取决于网络结构，以及构建新边和防止故障的成本。通过比较剩余紧密度和附加紧密度（例如，将附加紧密度和剩余紧密度除以紧密度进行归一化 [3]），可以得到一个简单的答案。

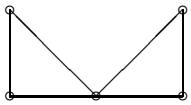


图 1：图 G_1

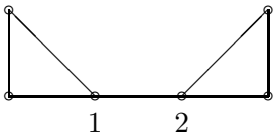


图2：图 G_2

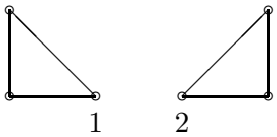


图3：图 G_3

让我们比较图1、图2和图3中的图。图 G_1、 G_2和 G_3 的紧密度（C）、剩余紧密度（R）和附加紧密度（A）分别为:

$$C(G_1) = 8.0, \qquad R(G_1) = 7.0, \qquad A(G_1) = 8.5,$$

$$C(G_2) = 10.0, \qquad R(G_2) = 6.0, \qquad A(G_2) = 11.25,$$

$$C(G_2) = 6.0, \qquad R(G_2) = 5.5, \qquad A(G_2) = 10.0.$$

我们可以计算归一化剩余紧密度： $NR(G) = R(G)/C(G)$，以及归一化附加紧密度： $NA(G) = A(G)/C(G)$。通过计算归一化剩余紧密度，我们可以得到一个衡量图脆弱性的指标。可以看出，图 G_1 和图 G_3 具有很强的鲁棒性（$NR(G_1) = 87.5\%$ 和 $NR(G_3) = 91.67\%$），而图 G_2的脆弱性太高（$NR(G_2) = 60.0\%$）。我们应该投入更多精力保护图 G_2中的边 (1,2)。

归一化附加紧密度显示了网络的增长潜力。图 G_1 和图 G_2 的增长潜力很小（$NA(G_1) = 106.25\%$ 和 $NR(G_2) = 112.5\%$），而图 G_3的增长潜力很大（$NR(G_3)$ =166.67%）。如果我们可以在图 G_3中添加一条边，那么这条边应连接图3中的两个部分（例如，边 (1, 2)）。

关于紧密度、剩余紧密度和附加紧密度的其他一些结果，参见（[6] - [24]）。

我们考虑这样一种情形：图中的一条边随机断开，而我们可以再建（添加）一条边。我们运用决策理论，找出应添加哪条边才能最大程度地提高紧密度。本文针对一些特定的图类进行研究：环、棒棒糖图，以及由一条单边连接的完全图。

2 决策理论——准则

假设我们要维护一个网络，并且可以选择保护边或新建边。看起来，我们是在与自然进行一场（非合作、非零和且同时进行的）博弈——一些现有的边（线路、管道）可能会断开，而我们可以新建边。如果在某个周期内，我们新建一条边，同时有一条边断开，那么所得网络的紧密度似乎可以用收益表来表示（见下文表 1）。处理这个问题的一种方法是应用博弈论（例如参见 [4]）或决策理论（参见 [5]）。

一个简单的收益表示例给出了路径图 P_4，其顶点为 $\{1, 2, 3, 4\}$，紧密度为 $C（P_4） = 4.25$。下表列出了删除一条现有边（(1, 2)、(2, 3) 或 (3, 4)）并添加一条可能的边（(1, 3)、(1, 4) 或 (2, 4)）后得到的接近中心性：

删除 - 添加	(1,3)	(1,4)	(2,4)
(1,2)	4.5	4.25	3
(2,3)	4.25	4.25	4.25
(3,4)	3	4.25	4.5

表 1：路径 P_4的收益表。

表 1 中间的点（4.25）是一个鞍点和纳什均衡点——我们应该建立边（1, 4），以确保紧密度为 4.25。大多数收益表都没有鞍点。我们需要寻找另一种方法来确定最佳行动。

设有一个图 G。对于给定的周期，假设 G 中的一条边（i, j）断开，我们可以另建一条边（p, q）。评估应选择哪条边（p, q）的最佳策略有不同的准则。在下面所有准则中，我们都试图最大化删除边（i, j）并

添加边（p,q）后得到的图 $_j$ 的紧密度。从图 G 中删除边（i,j）后，我们得到图$G_{i,\ j}$，其紧密度为 $C(G_{i,\ j})$。向图 $G_{i,\ j}$ 添加边（p,q）后，我们得到图$G^{p,\ i}_{\ \ \ \

6. 萨维奇准则:

我们创建一张遗憾值表格（收益 $C(G^{p,\ i\ ^{q},\ j})$ 与最大可能值 $\max_{i,\ j}\{C(G^{p,\ i\ ^{q},\ j})\}$ 之间相差多少），并尝试将遗憾值降至最低。

$$Reg = P(p,q) = -\max_{p,q}\{\max_{i,j}\{C(G^{p,q}_{i,j})\} - C(G^{p,q}_{i,j})\}.$$

3 附加紧密度与决策

为什么需要使用决策方法? 我们能否使用（构建）提供附加紧密度的边? 附加紧密度是我们能够添加到图中的最大紧密度。答案是，提供附加紧密度的边并不总是（按照上述所有准则）最佳决策。

让我们考虑具有顶点 $\{1,2,3,4,5,6\}$ 的环图 C_6 （见 [3]）。紧密度 C（C_6） $= 9.75$。剩余紧密度为 R（C_6） $= 8.0625$，通过删除任意一条边获得。附加紧密度为 A（C_6） $= 10.75$，例如通过添加边（1, 3）获得。通过添加连接对顶点的边，例如边（1, 4），我们得到紧密度 10.5。

添加连接对顶点的边（例如（1,4））可得到最大接近中心性（乐观准则） $Mx = 9.75$、最小接近中心性（悲观准则） $Mn = 9.375$、系数为 0.5 的赫维茨准则为 $Mx + Mn$ =19.125、所有紧密度的平均值 avg（C（C'_6）） $= 9.5$，以及萨维奇准则——最大后悔值 $reg = 0.375$。

添加非对顶点（例如 (1, 3)）会得到最大接近中心性$Mx = 10$、最小接近中心性 $Mn = 9$, $Mx + Mn = 19$、所有紧密度的平均值 $avg(C) = 9.45833$，以及最大后悔值 $reg = 1$。

我们可以看出，连接非对顶点（例如边 (1, 3)，它提供了附加紧密度）只有在乐观策略下才是最佳选择。连接对顶点（例如边 (1, 4)）在悲观策略、等可能性、赫维茨准则（对于 $\alpha = 0.5$）以及最小遗憾值下是最佳选择。这就是考虑决策方法的原因。

4 已有结果

具有 n 个顶点的路径图 P_n 的紧密度，由 [1] 证明如下:

$$C(P_n) = 2n - 4 + 2^{2-n}. \tag{2}$$

具有 n 个顶点的环图 C_n 的紧密度，由 [1] 和 [6] 证明如下:

$$C(C_n) = \begin{cases} 4k(1 - 3.2^{-k-1}), & when \quad n = 2k, \\ 2(2k+1)(1 - 2^{-k}), & when \quad n = 2k+1. \end{cases} \tag{3}$$

定义 (1) 的一个优点是，它便于为图运算建立公式。例如，如果我们将图

与图 G_2 的顶点 q 相连，那么连通图 $G_1 + G_2$ 的紧密度为 ([1]):

$$C(G_1 + G_2) = C(G_1) + C(G_2) + (1 + C(p))(1 + C(q)). \tag{4}$$

5 两个完全图的决策

设两个完全图（K_k 和 K_m）分别有 k 和 m 个顶点（k, $m \geq 3$），用一条边连接它们，构成图 $G = K_k + K_m$。这是对表 1 中示例 $P_4 = K_2 + K_2$ 的推广。我们将根据第 3 节中的所有准则，找出应当添加的最佳边。首先，我们证明:

引理 1。图 $K_k + K_m$ 的紧密度为:

$$C(G) = C(K_k + K_m) = \frac{2k^2 + 2m^2 + km - k - m + 1}{4}.$$

证明。利用公式 (4)，我们可以计算得出:

$$\begin{aligned} C(K_k + K_m) &= \frac{k(k-1)}{2} + \frac{m(m-1)}{2} + \left(1 + \frac{k-1}{2}\right)\left(1 + \frac{m-1}{2}\right) \\ &= \frac{k^2 - k + m^2 - m}{2} + \frac{km + k + m + 1}{4} \\ &= \frac{2k^2 + 2m^2 + km - k - m + 1}{4}. \end{aligned}$$

至此，证明完毕。 □

设图 $K_k + K_m$ 的顶点为：完全图 K_k中的 1、2、...、k，以及完全图 K_m中的 $k+1$、$k+2$、...、$k+m$。设连接 K_k和 K_m 的边为 (1, $k+m$)。

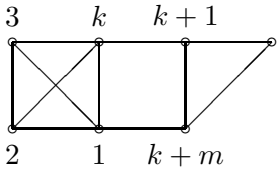


图 4：图 G_4

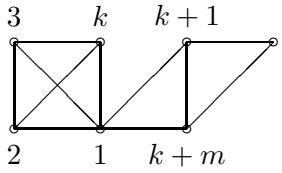


图 5：图 G_5

在图 4 和图 5 中，我们可以看到两个完全图 K_4 和 K_3，它们通过一条边 (1, $k+m$)（本例中为边 (1, 7)）相连。任何新边都会再次连接K_k 和 K_m。有两种情况：新连接的两个顶点都不同于顶点 1 和 $k+m$（见图 4，图 G_4 ——新增的边为

$(k, k+1)$)，或者其中一个顶点相同（见图 5，图 G_5——新增的边为 $(1, k+1)$）。

被删除的边可以是连接两个完全图的原有边、包含顶点 1 或 $k+m$ 的边，也可以是其他边。共有 5 种情形：

情形A：我们添加一条新边 $(k, k+1)$。如果删除的边是 $(1, k+m)$，新生成的图 G' 与图 G 相同：$C(G') = C(G)$。如果添加边 $(1, k+1)$，且删除的边是 $(1, k+m)$，情况也相同。

情形B：我们添加边 $(k, k+1)$（见图 4，图 G_4）。假设被删除的边不包含顶点 1、k、$k+1$ 和 $k+m$（例如，边 (2, 3)）。这样的边有 $(k-2)(k-3)/2 + (m-2)(m-3)/2$ 条。图 G' 的紧密度与图 G的紧密度不同。我们将计算这一差值：

- 顶点 2 和 3 之间的距离从 1 变为 2。在图 G' 中，计算该紧密度时会计入两次：对应距离 $d(2,3)$ 和 $d(3,2)$。
- 顶点 k 和 $k+1$ 之间的距离从 3 变为 1。
- 顶点 k 与图 K_m中（$m-2$）个顶点之间的距离（不包括顶点 $k+1$ 和 $k+m$）从 3 变为 2。
- 顶点 $k+1$ 与图 K_k中（$k-2$）个顶点之间的距离（不包括顶点 1 和 k）从 3 变为 2。

其他距离均未改变。图 G'（添加边（$k, k+1$）并删除边（2, 3）后）的紧密度为：

$$\begin{aligned} C(G') &= C(G) + 2\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) + 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right) \\ &\quad + 2(m-2)\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) + 2(k-2)\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) \\ &= C(G) - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{m-2}{4} + \frac{k-2}{4} \\ &= C(G) + \frac{k+m-3}{4}. \end{aligned}$$

如果 $k=3$ 或 $m=3$，情形B是不可能的，下面将对此进行讨论。

情形C：让我们添加边（k，$k+1$）（见图 4）。设被删除的边包含顶点 1、k、$k+1$ 或 $k+m$ 中的一个（例如，边（1，2））。这样的边有 $2k+2m-8$ 条。我们可以计算图 G' 与 G之间的差异：

- 顶点 1 和 2 之间的距离从 1 变为 2。- 顶点 k 和 $k+1$ 之间的距离从 3 变为 1。- 顶点 2 和 $k+m$ 之间的距离从 2 变为 3。

- 顶点 k 与图 K_m 中的（不包括顶点 $k+1$ 和 $k+m$）顶点之间的距离从 3 变为 2。
- 图 K_k 中顶点 $k+1$ 与（$k-2$）个顶点之间的距离（不包括顶点 1 和 k）从 3 变为 2。

其他距离均未改变。图 G' 的紧密度（添加边（k, $k+1$）并删除边（1, 2）后）为:

$$C(G') = C(G) + 2\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) + 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right) + 2\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\right) + 2(m-2)\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) + 2(k-2)\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right)$$

$$\begin{aligned} C(G') &= C(G) - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{1}{4} + \frac{m-2}{4} + \frac{k-2}{4} \\ &= C(G) + \frac{k+m-4}{4}. \end{aligned}$$

情况 D: 添加边 $(k, k+1)$（见图 4）。设被删除的边为 $(1, k)$。有 2 条这样的边（$(1, k)$ 和 $(k+1, k+m)$）。我们可以计算图 G' 和 G 之间的差异:

- 顶点 1 和 k 之间的距离从 1 变为 2。
- 顶点 k 和 $k+1$ 之间的距离从 3 变为 1。
- 顶点 k 和 $k+m$ 之间的距离未发生变化（距离为 2）。

- 顶点 k 与图 K_m 中的（$m-2$）个顶点（不包括顶点 $k+1$ 和 $k+m$）之间的距离从 3 变为 2。
- 顶点 $k+1$ 与图 K_k 中的（$k-2$）个顶点（不包括顶点 1 和 k）之间的距离从 3 变为 2。

其他距离均未改变。图 G' （添加边 $(k, k+1)$ 并删除边 $(1, k)$ 后）的紧密度为:

$$\begin{aligned} C(G') &= C(G) + 2\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) + 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right) \\ &\quad + 2(m-2)\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) + 2(k-2)\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) \\ &= C(G) - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{m-2}{4} + \frac{k-2}{4} \\ &= C(G) + \frac{k+m-3}{4}. \end{aligned}$$

情况 ABCD: 总结添加边 $(k, k+1)$ 时的计算结果（情况 A、B、C 和 D）: 最小接近中心性为 $Mn = C(G)$, 最大接近中心性为 $Mx = C(G) + (k+m-3) * 0.25$, 最小和最大接近中心性为 $Mn + Mx = 2C(G) + (k+m-3) * 0.25$, 最大后悔值为 $Reg = (k+m-3) * 0.25$, 平均接近中心性为:

$$
\begin{aligned}
Av &= (((k-2)(k-3)+(m-2)(m-3)+4)\frac{k+m-3}{8} \\
&\quad + (2k+2m-8)\frac{k+m-4}{4}) \\
&\quad / \left(k(k-1)/2 + m(m-1)/2 + 1\right) + C(G) \\
&= C(G) + \frac{(k^2-5k+m^2-5m+16)(k+m-3)}{4(k^2-k+m^2-m+2)} \\
&\quad + \frac{(k+m-4)(k+m-4)}{k^2-k+m^2-m+2} \\
&= C(G) + \frac{(k^2-k+m^2-m+2)(k+m-3)}{4(k^2-k+m^2-m+2)} \\
&\quad + \frac{(-4k-4m+14)(k+m-3)}{4(k^2-k+m^2-m+2)} + \frac{(k+m-4)(k+m-4)}{k^2-k+m^2-m+2} \\
&= C(G) + \frac{(k+m-3)}{4} + \frac{k^2+m^2+2km-8k-8m+16}{k^2-k+m^2-m+2} \\
&\quad + \frac{-2k^2-2m^2-4km+13k+13m-21}{2(k^2-k+m^2-m+2)} \\
&= C(G) + \frac{(k+m-3)}{4} + \frac{11-3k-3m}{2(k^2-k+m^2-m+2)}.
\end{aligned}
$$

情况 E：我们添加边 $(1, k+1)$（见图 5，图 G_5），且被删除的边不包含顶点 1（例如边 (2, 3)）。对于图 K_k 的 $(k-1)(k-2)/2$ 条边以及图 K_m 的所有 $m(m-1)/2$ 条边，情况相同。区别在于：

- 顶点 2 和 3 之间的距离从 1 变为 2。- 顶点 1 和 $k+1$ 之间的距离从 2 变为 1。
- 顶点 $k+1$ 与图 K_k 中 $(k-1)$ 个顶点（不包括顶点 1）之间的距离从 3 变为 2。

其他距离均未改变。图 G'（添加边 $(1, k+1)$ 并删除边 (2, 3) 后）的紧密度为：

$$
\begin{aligned}
C(G') &= C(G) + 2\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right) + 2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) + 2(k-1)\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right) \\
&= C(G) + \frac{k-1}{4}.
\end{aligned}
$$

情况 F：添加边 $(1, k+1)$（见图 5），并删除边 (1, 2)。这样的边共有 $k-1$ 条。紧密度之差为：

- 顶点 1 和 2 之间的距离从 1 改为 2。- 顶点 1 和 $k+1$ 之间的距离从 2 改为 1。- 顶点 2 和 $k+m$ 之间的距离从 2 改为 3。

- 顶点 2 与图 K_m中的顶点（$m-2$）（不包括顶点 $k+1$ 和 $k+m$）之间的距离从 3 改为 4。

- 图 K_k中顶点 $k+1$ 与（$k-2$个）顶点之间的距离（不包括顶点 1 和 2 ）从 3 变为 2。顶点 $k+1$ 与顶点 2 之间的距离不变，仍为 3。

其他距离均未改变。图 G' （添加边 $(1, k+1)$ 并删除边 (1, 2)）的紧密度为：

$$\begin{aligned} C(G') &= C(G) + 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + 2\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) + 2\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\right) \\ &\quad + 2(m-2)\left(\frac{1}{16} - \frac{1}{8}\right) + 2(k-2)\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) \\ &= C(G) - \frac{1}{4} - \frac{m-2}{8} + \frac{k-2}{4} \\ &= C(G) + \frac{2k-m-4}{8}. \end{aligned}$$

比较情形 E 和 F：

$$C(G) + \frac{2k-m-4}{8} = C(G) + \frac{k}{4} - \frac{m+4}{8} < C(G) + \frac{k-1}{4}.$$

情形 AEF：总结计算结果（情形 A、E 和 F），添加边 $(1, k+1)$ 时，最大接近中心性为：

$$Mx = C(G) + 0.25 \cdot \max\{k-1, m-1\},$$

最小接近中心性为：

$$Mn = C(G) + 0.125 \cdot \min\{0, (2k-m-4), (2m-k-4)\},$$

最大后悔值（$Reg = Mx - Mn$），当 $k \geq m$ 为：

$$\begin{aligned} Reg &= 0.25(k-1) - 0.125 \cdot \min\{0, 2m-k-4\} \\ &= 0.125(2k-2) + 0.125 \cdot \max\{0, k+4-2m\} \\ &= 0.125 \cdot \max\{2k-2, 3k+2-2m\} \end{aligned}$$

当 $k \geq m$ 和 $k+4 > 2m$ 时：

$$Reg = 0.125(3k+2-2m),$$

当 $k \geq m$ 和 $2m \geq k+4$时：

$$Reg = 0.25(k-1).$$

平均接近中心性为:

$$\begin{aligned} Av = &\left(((k-1)(k-2)/2 + m(m-1)/2)\frac{k-1}{4} + (k-1)\frac{2k-m-4}{8}\right) \\ &/\left(k(k-1)/2 + m(m-1)/2 + 1\right) + C(G) \\ &= C(G) + \frac{(k^2-3k+2+m^2-m+2k-m-4)(k-1)}{4(k^2-k+m^2-m+2)} \\ &= C(G) + \frac{k-1}{4} - \frac{(m+4)(k-1)}{4(k^2-k+m^2-m+2)}. \end{aligned}$$

综上所述，我们可以证明:

定理 1. 两个连接完全图（$K_k + K_m$）的最大值的最大值为:

$$Mx(K_k + K_m) = C(K_k + K_m) + (k + m - 3) * 0.25.$$

通过连接图 K_k 和图 K_m 中的两个顶点可得到最大值，这两个顶点不包含已经用于连接 K_k 和 K_m 的顶点。

证明. 情形 A、B、C、D 以及情形 A、E、F 的最大值的最大值为:

$$\begin{aligned} Mx &= C(G) + 0.25 \cdot \max\{(k+m-3), \max\{k-1, m-1\}\} \\ &= C(G) + 0.25 \cdot \max\{(k+m-3), k-1, m-1\} \\ &= C(G) + 0.25(k+m-3), \end{aligned}$$

由此完成证明。 □

定理2. 两个连接完全图（$K_k + K_m$）的最小值的最大值为:

$$Mn(K_k + K_m) = C(K_k + K_m).$$

通过连接图K_k 和图 K_m中的两个顶点（这两个顶点不包括已经连接 K_k 和 K_m的顶点），可得到最小值的最大值。

证明。在情形 A、B、C、D 中，最小接近中心性为 $Mn = C(G)$；在情形 A、E、F 中，最小接近中心性为:

$$Mn = C(G) + 0.125 \cdot \min\{0, (2k-m-4), (2m-k-4)\} \leq C(G),$$

至此证明完成。 □

利用定理 1 和定理 2 的结果，可得:

推论1. 两个连接完全图（$K_k + K_m$）的最大值与最小值之和为:

$$Mx(K_k + K_m) + Mn(K_k + K_m) = 2C(K_k + K_m) + (k + m - 3) * 0.25.$$

这是通过连接图 K_k 和 K_m 中的两个顶点得到的，这两个顶点不包括已经连接 K_k 和 K_m 的顶点。

定理 3. 两个连接完全图（$K_k + K_m$）的最小最大后悔值为：

$$Reg(K_k+K_m) = \begin{cases} \frac{k-1}{4}, & when \quad 2k \geq 2m \geq k+4, \\ \frac{3k+2-2m}{8}, & when \quad k \geq m \quad and \quad k+8 \leq 4m \leq 2k+8, \\ \frac{k+m-3}{4}, & when \quad k \geq m \quad and \quad k+8 > 4m. \end{cases}$$

在最后一种情况下，通过连接图 K_k 和 K_m 中的两个顶点可获得最小值；这些顶点不包括已经连接 K_k 和 K_m 的顶点。

证明。我们可以比较 A、B、C、D 这几种情况与 A、E、F 这种情况。当 $k \geq m$ 和 $2m \geq k+4$ 时：

$$\frac{k-1}{4} < \frac{k+m-3}{4}$$

最大后悔值的最小值为 $Reg = 0.25（k-1）$。当 $k = 5$ 和 $m = 5$、$k = 7$ 和 $m = 6$ 等情况时，结论也成立。

当 $k \geq m$ 和 $k+4 \geq 2m$ 时：

$$\frac{3k+2-2m}{8} < \frac{k+m-3}{4}$$

$$\frac{k+8-4m}{8} < 0.$$

当以下情况成立时，我们有 $Reg = 0.125（3k+2-2m）$：

$$2k+8 \geq 4m > k+8$$

或 $k = 3$ 和 $m = 3$；$k = 5$ 和 $m = 4$；$k = 7$ 和 $m = 4$；$k = 6$ 和 $m = 5$。

在所有其他情况下（$k \geq m$和 $k+8 > 4m$），我们有：$Reg = 0.25（k+m-3）$。当 $k = 5$ 和 $m = 3$；$k = 9$ 和 $m = 4$ 等情况时，这一点成立；此时连接图 K_k 和 K_m中的两个顶点，而这两个图不包含已经连接 K_k 和 K_m的顶点。证明至此完成。□

定理 4. 两个连接完全图（K_k+K_m）的平均值最大值为：

$$Av(K_k + K_m) = C(G) + \frac{(k+m-3)}{4} + \frac{11-3k-3m}{2(k^2-k+m^2-m+2)}.$$

平均值是通过连接图 K_k 和 K_m 中的两个顶点得到的，这两个顶点尚未连接 K_k 和 K_m。

证明。我们可以通过计算差值 Δ，比较 A、B、C、D 和 A、E、F 两种情况下的平均接近中心性：

$$\begin{aligned}\Delta &= C(G) + \frac{(k+m-3)}{4} + \frac{11-3k-3m}{2(k^2-k+m^2-m+2)} \\ &\quad - C(G) - \frac{k-1}{4} + \frac{(m+4)(k-1)}{4(k^2-k+m^2-m+2)}. \\ &= \frac{(m-2)}{4} + \frac{22-6k-6m+km+4k-m-4}{4(k^2-k+m^2-m+2)} \\ &= \frac{(m-2)}{4} + \frac{18-2k-7m+km}{4(k^2-k+m^2-m+2)}. \\ &= \frac{(m-2)}{4} + \frac{(k-7)(m-2)+4}{4(k^2-k+m^2-m+2)}.\end{aligned}$$

如果 $k \geq 7$，那么 $\Delta > 0$。在所有其他情况下，我们可以通过考虑以下内容来证明：

$$\Delta_4 = 4\Delta(k^2-k+m^2-m+2)$$

$$\begin{aligned}\Delta_4 &= (m-2)(k^2-k+m^2-m+2) + (k-7)(m-2)+4 \\ &= (m-2)(k^2-5) + (m-2)(m^2-m)+4 > 0.\end{aligned}$$

至此，证明完毕。 □

总而言之，我们已经证明，最大值的最大值、最大值的最小值、Hurwitz判据、平均值的最大值（等可能性判据），以及最大后悔值的最小值在 3 种情况下的 1 种（见定理 3），都是通过连接图 K_k 和图 K_m 中的两个顶点得到的，这两个顶点不包括已经连接 K_k 和 K_m 的顶点。在 3 种情况下的 2 种中，当 $k \geq m$ 时，最大后悔值的最小值是通过将图 K_k 中已连接的顶点连接到图 K_m 中一个未连接的顶点得到的。

6 棒棒糖图的决策

另一个简单的计算是求棒棒糖图的最大值的最大值。设棒棒糖图 $L_{n,m}$ 由完全图 K_n 与路径 P_m连接而成。对于乐观策略，最大值出现在删除完全图 K_n中一条未与路径 P_m相连的边时。此时紧密度会减少 $1/2$：

$$P(p,q) = \max_{i,j}\{C(L_{i,j})\} = C(L_{p,q}) - \frac{1}{2}.$$

$$\max_{p,q} P(p,q) = \max_{p,q} C(L_{p,q}) - \frac{1}{2} = A(L) - \frac{1}{2}.$$

最优策略是添加边 (p,q)，这会使棒棒糖图 $L_{n,m}$ 的附加紧密度增加 $A(L_{n,m})$（见 [21]）。棒棒糖图的其他准则不那么容易计算。

同样，我们可以直接证明上一节中的定理 1。仿照情形B，我们可以证明附加紧密度为：

$$A(K_k + K_m) = C(K_k + K_m) + \frac{k+m-3}{4} + \frac{1}{2} = C(K_k + K_m) + \frac{k+m-1}{4}.$$

7 圈的紧密度公式

并非所有图都像上述例子那样容易确定最优边。我们将通过计算环图的极大极小值给出一个例子。首先，我们需要进行一些预备计算。

将环 C_m 中的两个顶点与 m 个顶点 $V = \{1, 2, ..., m\}$ 相连，并删除一条边。我们得到图 G：一个环 C_n，以及两条尾部（路径），分别有 p 个和 q 个顶点；每条尾部都与环 C_n 上的两个相邻顶点相连（$m = n + p + q$）。

引理 2。图 G 的紧密度为：

$$C(G) = C(C_n)\left(1 + \frac{4 - 2^{1-p} - 2^{1-q}}{n}\right) + 2p + 2q - 3 + 2^{-p} + 2^{-q} + 2^{-p-q}. \tag{5}$$

证明。我们先将环 C_n 与路径 P_p 相连。在环 C_n 中，与路径 P_p 相连的顶点 p' 的紧密度为 C（C_n）/（n）。路径 P_p 中端点 p" 的紧密度为：

$$C(p") = 2^{-1} + 2^{-2} + ... + 2^{1-p} = 1 - 2^{1-p}.$$

利用公式（2）和（4），我们得到：

$$\begin{aligned} C(C_n + P_p) &= C(C_n) + C(P_p) + \left(1 + \frac{C(C_n)}{n}\right)\left(1 + 1 - 2^{1-p}\right) \\ &= C(C_n)\left(1 + \frac{2 - 2^{1-p}}{n}\right) + 2p - 2 + 2^{1-p}. \end{aligned}$$

现在我们将图 $C_n + P_p$ 连接到路径 P_q。顶点 q' 是顶点 p' 的邻点，它在图 $C_n + P_p$ 中的紧密度（相对于环上的顶点以及路径 P_p 上的 p 个顶点）为：

$$C(q') = \frac{C(C_n)}{n} + 2^{-2} + 2^{-2} + ... + 2^{-p-1} = \frac{C(C_n)}{n} + 2^{-1} - 2^{-p-1}.$$

路径 P_q 中的端点 q"的紧密度与 p"的紧密度相似。再次使用公式 (2) 和 (4), 我们得到:

$$\begin{aligned} C(G) &= C(C_n + P_p) + C(P_q) \\ &\quad + \left(1 + \frac{C(C_n)}{n} + 2^{-1} - 2^{-p-1}\right)\left(1 + 1 - 2^{1-q}\right). \\ &= C(C_n)\left(1 + \frac{2 - 2^{1-p}}{n}\right) + 2p - 2 + 2^{1-p} + 2q - 4 + 2^{2-q} \\ &\quad + C(C_n)\frac{2 - 2^{1-q}}{n} + 3 - 2^{-p} - 3 \cdot 2^{-q} + 2^{-p-q} \\ &= C(C_n)\left(1 + \frac{4 - 2^{1-p} - 2^{1-q}}{n}\right) + 2p + 2q - 3 + 2^{-p} + 2^{-q} + 2^{-p-q}, \end{aligned}$$

由此完成证明。 □

8 圈的最小值

公式 (5) 可表示为 p 和 q 的函数:

$$C(G) = C_0 + C_1(2^{-p} + 2^{-q}) + 2p + 2q + 2^{-p-q}.$$

如果固定 n, 在上面的方程中, C_0 是一个常数, 取决于 n , 而 C_1 是一个常数:

$$C_1 = 1 - \frac{2C(C_n)}{n} < 0.$$

令 C_1 小于零, 并记常数为 $C_2 = m - n = p + q$。要找到 $C(G)$ 的最小值, 我们必须求解:

$$\max\{2^{-p} + 2^{-q}\}, \quad where \quad p + q = C_2,$$

或者我们必须求出其最大值

$$F(p) = \{2^{-p} + 2^{p-C_2}\}.$$

对 p 求导后, 我们得到:

$$F'(p) = -2^{-p-1}lg2 + 2^{p-C_2-1}lg2 = 2^{-p-1}lg2(2^{2p-C_2} - 1).$$

函数 F 从 $p = 0$ 递减至 $p = C_2/2$, 然后递增。当 $p = 0$ （或 $q = 0$）时, 函数取得最小值。由公式 (5) 和 $q = 0$ 可得:

$$\min(C(G)) = C(C_n)\left(1 + \frac{2 - 2^{1-p}}{n}\right) + 2p + 0 - 3 + 2^{-p} + 1 + 2^{-p}.$$

$$\min(C(G)) = C(C_n)\left(1 + \frac{2 - 2^{1-p}}{n}\right) + 2p - 2 + 2^{1-p}. \tag{6}$$

设 $n = 2k$。那么由公式 (3)，对于顶点数为偶数的环，可得：

$$\begin{aligned}\min(C_e) &= 4k(1 - 3 \cdot 2^{-k-1})\left(1 + \frac{2 - 2^{1-p}}{2k}\right) + 2p - 2 + 2^{1-p} \\ &= 4k - 6k2^{-k} + (2 - 3 \cdot 2^{-k})(2 - 2^{1-p}) + 2p - 2 + 2^{1-p} \\ &= 4k - 6k2^{-k} + 4 - 2^{2-p} - 6 \cdot 2^{-k} + 3 \cdot 2^{1-k-p} + 2p - 2 + 2^{1-p} \\ &= 4k + 2p + 2 - 6(k+1)2^{-k} - 2^{1-p} + 3 \cdot 2^{1-k-p}.\end{aligned}$$

$$\min(C_e) = 4k + 2p + 2 - 6(k+1)2^{-k} - 2^{1-p} + 3 \cdot 2^{1-k-p}. \tag{7}$$

对 k 求导，我们得到：

$$\begin{aligned}\min(C_e)' &= 4 - 6 \cdot 2^{-k} + 6(k+1)2^{-k-1}lg2 - 3 \cdot 2^{-k-p}lg2 \\ &= 4 + 3 \cdot 2^{-k}((k+1)lg2 - 2 - 2^{-p}lg2) > 0.\end{aligned}$$

要取得最大值，我们需要一个更大的环（增大 k）。删除较大环上的一条边即可得到最小值。被删除的边可以位于新增边的任一侧，因此要取得最大值，两个环的长度需要（几乎）相同。

设 $n = 2k + 1$。那么根据公式 (6) 和 (3)，对于顶点数为奇数的环，我们得到：

$$\begin{aligned}\min(C_o) &= 2(2k+1)(1 - 2^{-k})\left(1 + \frac{2 - 2^{1-p}}{2k+1}\right) + 2p - 2 + 2^{1-p} \\ &= 4k + 2 - (2k+1)2^{1-k} + (2 - 2^{1-k})(2 - 2^{1-p}) + 2p - 2 + 2^{1-p} \\ &= 4k + 4 - (2k+3)2^{1-k} - 2^{2-p} + 2^{2-k-p} + 2p + 2^{1-p} \\ &= 4k + 2p + 4 - (2k+3)2^{1-k} - 2^{1-p} + 2^{2-k-p}.\end{aligned}$$

$$\min(C_o) = 4k + 2p + 4 - (2k+3)2^{1-k} - 2^{1-p} + 2^{2-k-p}. \tag{8}$$

对 k 求导，我们得到：

$$\begin{aligned}\min(C_o)' &= 4 - 2^{2-k} + (2k+3)2^{-k}lg2 - 2^{1-k-p}lg2 \\ &= 4 + 2^{-k}((2k+3)lg2 - 4 - 2^{1-p}lg2) > 0.\end{aligned}$$

要取得最大值，我们同样需要一个更大的环（增大 k），并且两个环的长度需要（几乎）相同。

现在我们可以证明：

定理 5. 环图的最小接近中心性最大值为：

$$Mn(C_m) = \begin{cases} 8q + 2 - (2q+3)2^{1-q} - 2^{2-2q} + 2^{3-3q}, & if \quad m = 4q, \\ 8q + 6 - 3(q+2)2^{-q} - 2^{1-2q} + 3 \cdot 2^{-3q}, & if \quad m = 4q + 2, \\ 8q + 4 - (2q+3)2^{1-q} - 2^{1-2q} + 2^{2-3q}, & if \quad m = 4q + 1, \\ 8q + 8 - 3(q+2)2^{-q} - 2^{-2q} + 3 \cdot 2^{-1-3q}, & if \quad m = 4q + 3. \end{cases}$$

证明。设 $m = 4q$。若连接对顶点（例如，$(1, 2q+1)$），就会得到一个含有 $2q+1$ 个顶点的环，以及一个含有 $2q-1$ 个顶点的尾部（删除边 $(1, 4q)$）。我们可以使用公式 (8)，其中 $k = q$ 和 $p = 2q-1$：

$$\begin{aligned} C(C_o) &= 4q + 2(2q-1) + 4 - (2q+3)2^{1-q} - 2^{1-2q+1} + 2^{2-q-2q+1} \\ &= 8q + 2 - (2q+3)2^{1-q} - 2^{2-2q} + 2^{3-3q}. \end{aligned}$$

如果我们连接的不是对顶点（例如 $(1, 2q)$），就会得到一个含有 $2q$ 个顶点的环和一个含有 $2q$ 个顶点的尾部。对于顶点数为偶数的环，我们可以使用公式 (7)，其中 $k = q$ 和 $p = 2q$：

$$\begin{aligned} C(C_e) &= 4q + 4q + 2 - 6(q+1)2^{-q} - 2^{1-2q} + 3 \cdot 2^{1-q-2q} \\ &= 8q + 2 - 6(q+1)2^{-q} - 2^{1-2q} + 3 \cdot 2^{1-3q}. \end{aligned}$$

比较顶点数为偶数和奇数时的接近中心性，我们得到：

$$\begin{aligned} C_o - C_e &= 8q + 2 - (2q+3)2^{1-q} - 2^{2-2q} + 2^{3-3q} \\ &\quad - 8q - 2 + 6(q+1)2^{-q} + 2^{1-2q} - 3 \cdot 2^{1-3q} \\ &= 2q2^{-q} - 2^{1-2q} + 2^{1-3q} = (q - 2^{-q})2^{1-q} + 2^{1-3q} > 0. \end{aligned}$$

这意味着，当原图有 $4q$ 个顶点时，通过连接对顶点 $(1, 2q+1)$ 可得到最小值的最大值——此时环的顶点数为奇数。

设 $m = 4q+2$。如果我们连接对顶点（例如 $(1, 2q+2)$），就会得到一个含有 $2q+2$ 个顶点的环和一个含有 $2q$ 个顶点的尾部（边 $(1, 4q+2)$ 被删除）。我们可以使用公式 (7)，其中 $k = q+1$ 和 $p = 2q$：

$$\begin{aligned} C(C_e) &= 4(q+1) + 4q + 2 - 6(q+1+1)2^{-q-1} - 2^{1-2q} + 3 \cdot 2^{1-q-1-2q} \\ &= 8q + 6 - 3(q+2)2^{-q} - 2^{1-2q} + 3 \cdot 2^{-3q}. \end{aligned}$$

如果我们连接的不是对顶点（例如 $(1, 2q+1)$），就会得到一个包含 $2q+1$ 个顶点的环，以及一个包含 $2q+1$ 个顶点的尾部。对于包含奇数个顶点且 $k = q$ 和 $p = 2q+1$ 的环，我们可以使用公式 (8)：

$$\begin{aligned} C(C_o) &= 4q + 2(2q+1) + 4 - (2q+3)2^{1-q} - 2^{1-2q-1} + 2^{2-q-2q-1} \\ &= 8q + 6 - (2q+3)2^{1-q} - 2^{-2q} + 2^{1-3q}. \end{aligned}$$

比较顶点数为偶数和奇数时的接近中心性，我们得到：

$$\begin{aligned} C_e - C_o &= 8q + 6 - 3(q+2)2^{-q} - 2^{1-2q} + 3 \cdot 2^{-3q} \\ &\quad - 8q - 6 + (2q+3)2^{1-q} + 2^{-2q} - 2^{1-3q} \\ &= q2^{-q} - 2^{-2q} + 2^{-3q} = (q - 2^{-q})2^{-2q} + 2^{-3q} > 0. \end{aligned}$$

这意味着，当原图有$4q+2$个顶点时，最小值的最大值可通过连接对顶点（1，$2q+2$）获得——此时环的顶点数为偶数。

原图顶点数为奇数的情况也可以用类似的方法考虑。设 $m = 4q+1$。若连接一对相距较近的对顶点（例如 $(1, 2q+1)$），则会得到一个有 $2q+1$ 个顶点的环和一个有 $2q$ 个顶点的尾部（边 $(1, 4q+1)$ 被删除）。我们可以将 $k = q$ 和 $p = 2q$ 代入公式 (8)：

$$\begin{aligned} C(C_o) &= 4q + 4q + 4 - (2q+3)2^{1-q} - 2^{1-2q} + 2^{2-q-2q}. \\ &= 8q + 4 - (2q+3)2^{1-q} - 2^{1-2q} + 2^{2-3q}. \end{aligned}$$

若连接另一对相距较近的对顶点（例如 $(1, 2q+2)$），被删除的边可能是 $(1, 2)$，所得结果相同。这意味着，原图有 $4q+1$ 个顶点时，最小值的最大值可通过连接顶点 $(1, 2q+1)$ 得到——此时环的顶点数为奇数。

设 $m = 4q+3$。若连接一对相距较近的对顶点（例如 $(1, 2q+2)$），则会得到一个有 $2q+2$ 个顶点的环和一个有 $2q+1$ 个顶点的尾部（边 $(1, 4q+3)$ 被删除）。我们可以将 $k = q+1$ 和 $p = 2q+1$ 代入公式 (7)：

$$\begin{aligned} C(C_o) &= 4(q+1) + 2(2q+1) + 2 - 6(q+1+1)2^{-q-1} \\ &\quad - 2^{1-2q-1} + 3 \cdot 2^{1-q-1-2q-1} \\ &= 8q + 8 - 3(q+2)2^{-q} - 2^{-2q} + 3 \cdot 2^{-1-3q}. \end{aligned}$$

如果我们有另一对相邻的对顶点（例如，$(1, 2q+3)$），那么被删除的边可能是 $(1, 2)$，此时图与上方的图对称。这意味着，当原图有$4q+3$个顶点时，最小值的最大值由连接顶点 $(1, 2q+2)$ 得出——该环的顶点数为偶数。

□

要为环的其他准则推导公式，则更为复杂。

9 结论

我们研究了效用网络紧密度的决策理论。若某一周期内有一条边将被灾害摧毁，我们会尝试找出最适合新建的边，从而将损失降至最低。我们将网络的紧密度作为支付函数，并运用决策理论来确定最佳行动。

我们使用不同的图（环、棒棒糖图、2连通完全图）和不同的准则，来确定应新建哪条边。

未来的研究可以着重于计算其他不同图的所有准则，包括环图、棒棒糖图等。

数据可用性

所有数据均已纳入本文。

参考文献

[1]Dangalchev Ch. (2006) 网络中的剩余紧密度。Phisica A. 365:556-564.[2] Dangalchev Ch. (2020) 附加紧密度与网络增长。Fundamenta Informaticae. 176(1):1-15.[3] Dangalchev Ch. (2022) 环图的附加紧密度。IJFCS. 33(08), pp. 1033 - 1052.[4] Fudenberg D., Tirole J. (1991). 博弈论。麻省理工学院出版社。[5] Savage, L. J. (1951). 统计决策理论。美国统计学会会刊[6] Aytac A, Odabas Z.N. (2011) 轮图及相关网络的剩余紧密度。IJFCS. 22(5):1229-1240.[7] Dangalchev Ch. (2011) 剩余紧密度与广义接近度。IJFCS. 22(8):1939-1947.[8] Turaci T, Okten M. (2015) 基于剩余紧密度研究 Mycielski 图的脆弱性，Ars Combinatoria. 118: 419-427.[9] Aytac A, Odabas Z.N. (2017) 网络鲁棒性与剩余紧密度。RAIRO-运筹学. 52(3), 839-847.[10] Turaci T, Aytac V. (2017) 分裂图的剩余紧密度。Ars Combinatoria. 130: 17-27.[11] Dangalchev Ch. (2018) 广义荆棘图的剩余紧密度。Fundamenta Informaticae. 162(1), 2018, p 1-15.[12] Aytac V, Turaci T. (2018) 某些分裂网络中的接近中心性。《摩尔多瓦计算机科学杂志》. 26(3):251-269. [13] Rupnik D, ˇZerovnik J. (2019) 具有极值接近度的网络。Fundamenta Informaticae. 167(3):219-234.

[14] Yigit E., Berberler ZN. (2019) 联操作下图的连接剩余紧密度注记。IJFCS. 30(03):417-424.[15] Dangalchev Ch. (2020) 分裂图的接近度。保加利亚科学院学报. 73(4): 461-466.[16] Golpek , H. T. (2022) 通过紧密度和剩余紧密度参数研究香蕉树的脆弱性。马尔tepe数学杂志, 4(2), 1-5.[17] ZhengL, Zhou B.(2022). 关于图的谱紧密度和剩余谱紧密度。RAIRO-运筹学. 56(4):2651-68.[18] Dangalchev Ch. (2023) 紧密度、附加紧密度和剩余紧密度的算法，计算机视觉研究。2(1), pp. 1-7.[19] Wang, Y., Zhou, B. (2023). 剩余紧密度、匹配数与色数。《计算机杂志》, 66(5), 1156-1166.[20] Li, C., Xu, L., Zhou, B. (2023). 关于具有割点的图的剩余紧密度。组合优化杂志, 45(5), 115.[21] Dangalchev Ch. (2024) 棒棒糖图的紧密中心性，《计算机杂志》, 67(6), 2020–2029.[22] Xu, L., Li, C., Zhou, B. (2024) 具有固定参数的图的连接剩余紧密度。《计算机杂志》, bxae006.[23] Dangalchev Ch. (2024) Harary图的连接剩余紧密度，Fundamenta Informaticae, 191(1), 1-15.[24] Dangalchev Ch. (2024) 某些图运算的接近度，Computing Open, 世界科学出版社, Vol 2,