arXiv:2603.14980v1 [cond-mat.other] 16 Mar 2026

测量杂质诱导的库仑结晶偏移

Mingyao Xu, Aaron A. Smith, Leonid Prokhorov、Vera Guarrera 和 Giovanni Barontini*
School of Physics and Astronomy, University of Birmingham, Edgbaston, Birmingham, B15 2TT, United Kingdom(日期：2026年3月17日)

我们报告了一项实验室测量，研究杂质如何改变强相互作用离子系统中的库仑结晶。为此，我们使用掺入受控数量 Xe^{12+} 高电荷态离子的激光冷却 Ca^{+} 晶体。我们发现，低杂质浓度下结晶阈值不变；但杂质含量足够高时，会出现明显的交叉转变，此后偏移量近似线性增长。补充测量表明，这种整体效应源于杂质周围晶体的局部钉扎。我们进一步展示了测得的偏移可能如何影响白矮星和中子星结晶的标准模型。我们的研究为将杂质效应纳入多组分库仑物质模型提供了一条实验途径，这与恒星结晶和强耦合等离子体密切相关。

库仑结晶是强耦合离子物质的一种一级相变：当离子间势能与热能之比（通常用库仑参数表示）Γ超过某个临界值时，库仑液体便会冻结（经典单组分等离子体中的该值约为 175） [1]。这一相变是简并恒星遗迹微观物理的核心。在白矮星中，结晶及其伴随的相分离会改变核心的热含量和能量释放，进而影响用于宇宙年代学的冷却历史 [2, 3]。在中子星中，结晶是固态外壳形成并保持机械完整性的基础，也会显著影响输运和弹性，从而影响观测到的计时和辐射现象[4]。

盖亚任务近期揭示了本地白矮星冷却序列中的显著特征，这些特征与核心结晶开始时冷却延迟的情况相符；后续分析还指出，浮力晶体和蒸馏等由组分驱动的其他效应，可能进一步改变预测的冷却演化 [5–8]。在这些建模研究中，通常通过采用有效的临界库仑耦合 Γ_c来模拟结晶。随后，杂质往往被单独处理，主要考虑其通过杂质参数 $Q_{imp} = \langle Z^2\rangle - \langle Z\rangle^2$ （其中Z 为离子电荷）对输运的影响；该参数量化了混合物中离子电荷分布的方差 [5–8]。杂质对于中子星外壳的形成和演化也至关重要：分子动力学研究预测，冻结时会发生强烈的化学分离，且凝固过程对组分表现出显著的敏感性 [9]。因此，量化杂质如何改变 Γ_c ，是一个亟待解决的微观物理问题；这对于解读盖亚时代的结晶特征，以及评估白矮星和中子星建模中的系统误差都十分重要。然而，库仑结晶中的杂质效应在理论上仍颇具挑战，因为相边界由一个具有长程相互作用的强耦合多组分分量多体系统决定，其中关联、无序和组分在真正的非微扰状态下相互竞争 [4, 10–13]。

尽管密度、温度和长度尺度相差悬殊，冷阱离子库仑晶体与致密恒星库仑物质仍受相同的基本物理规律支配。二者都是由带电粒子构成、具有长程库仑相互作用的系统，其结构性质主要由相互作用能与热运动之间的竞争决定，并以 Γ 表示。因而，冷阱离子晶体为与白矮星内部和中子星壳层相关的强耦合库仑等离子体状态提供了一种实现方式，同时又处于可控的桌面实验环境中。射频阱中的激光冷却离子可形成库仑晶体，其 Γ 可调且组分明确，并可通过荧光成像直接量化其空间有序性。混合物种晶体也常通过协同冷却制备 [12, 14–23]。近期进展已将这一能力拓展至高电荷态离子 [24–26], ，从而能够可控地引入高-Z 掺杂离子，以近似模拟杂质在致密恒星库仑等离子体中的作用。因此，耦合强度可调、掺杂可控以及可直接进行结构诊断等优势相结合，使囚禁离子晶体成为定量测量杂质如何改变库仑结晶的有力平台，也能为等离子体和恒星模型提供可纳入其中的微观物理输入。

在这篇快报中，我们报告了杂质诱导的库仑结晶偏移的实验室测量。我们使用掺入数量可控的 Xe^{12+} 高电荷态离子的激光冷却 Ca^{+} 库仑晶体，确定了 Γ_c 如何随杂质含量变化。我们发现，在 Q_{imp}较小时，结晶阈值基本不变；但当$Q_{imp} \simeq O(1)$ 时，会出现明显的交叉转变；超过这一点后， Γ_c 随 Q_{imp}近似线性下降。通过结合大规模系综中的测量与互补研究

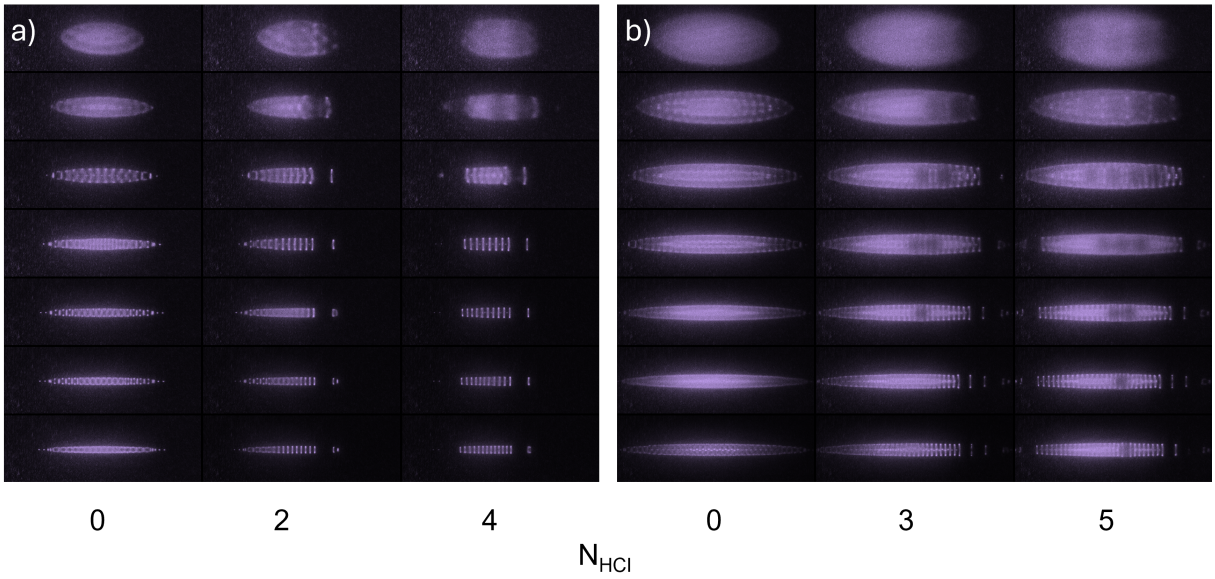

图 1. a） $50 \pm 5\,\mathrm{Ca}^{+}$ 离子样品在液体到晶体的交叉转变过程中的荧光图像。可观测到的空洞由 Xe^{12+} 离子造成，它们充当掺杂离子。Xe 高电荷态离子的数量从左向右增加（第一列为未掺杂参照）。第一行的囚禁频率为（ω_x，ω_y，ω_z）$= 2\pi \times$（192，262，164）kHz。随着径向约束增强（从上到下），对应于库仑参数 Γ 增大，我们观察到结晶逐渐开始。最后一行的径向频率为（ω_x，ω_y）$= 2\pi \times$（888，897）kHz。每张图像的尺寸为 $\simeq 330 \times 110\ \mu$m，曝光时间为 300 ms。b）与 a）相同，但使用的是 $191 \pm 23\,\mathrm{Ca}^{+}$ 离子。

在小型、离子分辨的晶体中，我们将结晶边界的这种整体重整化与局部结构变化联系起来。最后，我们展示了如何将测得的 $\Gamma_c(Q_{imp})$应用于具有代表性的白矮星和中子星结晶模型，从而使预测的结晶起始点及其他结构特征产生显著偏移。因此，我们的研究为等离子体物理学和恒星应用提供了有益的参考。

我们的实验系统详情见[26]。简而言之，Xe^{q+} 束团在紧凑型电子束离子阱中产生，经电荷态筛选（$q = 12$ 用于本工作）、减速后，通过静电光学系统输运至低温（4 K）科学腔室。腔室内设有分段式线性保罗阱。在同一阱中，我们利用多普勒冷却制备 Ca^{+} 库仑晶体。随后，将 Ca^{+} 荧光成像到电子倍增CCD相机上，放大 $30\times$ 倍。入射的 Xe^{12+} 离子通过与预先形成的 Ca^{+} 晶体反复相互作用，直至结晶，从而得到协同冷却。每个嵌入式高电荷态离子在 Ca^{+} 荧光中呈现为局部暗空洞。在本研究中，我们可确定性地制备混合物种库仑晶体，其中含有预设数量的 Ca^{+}离子，以及选定数量（1–6 个）的嵌入式 Xe^{12+} 离子。要有效俘获并协同冷却高电荷态离子，需要预先形成较大的 Ca^{+} 晶体。因此，我们先装载一个含有数百个 Ca^{+} 离子的晶体，然后反复注入 Xe^{12+}，直至达到所需数量。随后，为了将 Ca^{+} 离子数减少至目标值，我们先通过减小径向约束使晶体完全熔化，然后将冷却光蓝失谐并降低其强度。这样，Ca^{+} 离子便会逐渐逸出。通过监测总荧光的减弱，我们能够以单离子分辨率确定剩余 Ca^{+} 离子数。完成这一制备步骤后，再将激光参数调回最佳工作点。

为研究液-晶转变，制备完成后，我们增大保罗阱的径向约束。这会提高离子密度，进而增大库仑耦合参数 $\Gamma = e^2/(4\pi\varepsilon_0 a k_B T)$，其中 a 是由局部 Ca^{+} 密度决定的维格纳-塞茨半径，T 是温度，e 是元电荷，ε_0 是真空介电常数，k_B 是玻尔兹曼常数。在本研究中，我们以单组分库仑参数 Γ作为核心指标，并通过 Ca^{+} 液固转变[27]的位移量来量化掺杂效应。随着约束逐渐增强，系综从强关联的库仑液体演变为有序晶体。我们研究了含有 20 至 350 个离子的 Ca^{+} 样本。对于固定数量的 Ca^{+} 离子，我们通过改变注入的 Xe^{12+} 离子数量，逐步跨越相变。对于每组参数，我们采集 5 张荧光图像（曝光时间为 300 ms）。图 1 展示了我们对一个含 50 个离子的 Ca^{+} 样本（最多注入 4 个 Xe^{12+} 离子），以及一个含 191 个离子的样本（最多注入 5 个高电荷态离子）所采用方案的示例。

传统上，强耦合离子物质中结晶度开始出现的特征由林德曼参

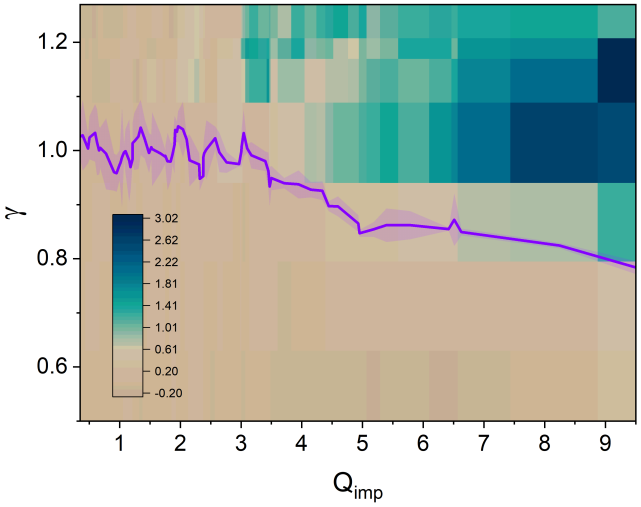

图2。紫色曲线表示测得的归一化临界库仑参数 $\gamma = \Gamma_c(Q_{imp})/\Gamma_c(0)$，它是杂质参数 Q_{imp}的函数。阴影区域对应标准差 [27]。底层等高线图的颜色刻度表示归一化的 Tenengrad偏差 $\delta = \Delta\langle\mathcal{T}\rangle/\langle\mathcal{T}(0)\rangle$。

数 $\mathcal{L} = \sqrt{\langle u^2\rangle}/a$ 表征，其中 $\langle u^2\rangle$ 是相对于平衡位置的均方位移。熔化通常与约为 0.1 的 $\mathcal{L}$ 相关。然而，对于大型三维晶体，由于无法分辨单个离子，且大多数离子位于焦平面之外，因此无法直接从荧光图像中获取 $\mathcal{L}$ 。因此，提取 $\mathcal{L}$ 只能通过间接方式进行，并且依赖于模型，需要对密度剖面、图像模糊与空间涨落之间的映射以及相关系统误差作出假设。在此，我们采用基于图像的度量指标 Tenengrad（平方梯度）清晰度，来量化晶体有序性的出现。简而言之，对于每张图像，我们计算 Sobel 导数，并构建 Tenengrad 能量图 $\mathcal{T}(x,\ y)$。随后，我们对样品上的 $\mathcal{T}$ 求平均，以计算图像的清晰度，从而为每一帧得到一个 Tenengrad 值，详情见 [27] 。我们在 [27] 中展示，在简单的成像模型下，$\langle\mathcal{T}\rangle$ 是 $\mathcal{L}$ 的递减函数，因此可作为结晶度的定量指标。

由于我们的系统具有高度非均匀性，因此液相与晶相之间并不存在明显的相变，而是平滑交叉转变。因此，我们根据未掺杂的 Ca^+ 数据，将低约束响应（以图1中的示例为例，即第一行）与典型的高约束响应（图1中的最后几行）的中点定义为参考结晶度阈值。对于每个掺杂剂浓度，我们构造离散曲线 $\langle\mathcal{T}\rangle(\Gamma)$，并通过相邻点之间的线性插值，提取使 $\langle\mathcal{T}\rangle(\Gamma)$ 达到该阈值时的 Γ值，记为 Γ_c。更多细节见 [27]。图2报告了测得的 $\gamma = \Gamma_c(Q_{imp})/\Gamma_c(0)$ 对杂质参数 Q_{imp} 的依赖关系。我们观察到，直到 Q_{imp} 达到约为 1 的量级之前，掺杂离子都不会影响相变。当 $Q_{imp} \simeq 2.1$ 时，γ 出现一个拐点，并开始随 Q_{imp} [27] 线性下降。归一化的 Tenengrad 偏差 $\delta = \Delta\langle\mathcal{T}\rangle/\langle\mathcal{T}(0)\rangle$ 也证实了这一行为，其中 $\Delta\langle\mathcal{T}\rangle \equiv \langle\mathcal{T}(Q_{imp})\rangle - \langle\mathcal{T}(0)\rangle$。根据定义，$\delta$直接量化了在相同条件下推断出的结晶度与纯 Ca^+ 样品的结晶度之间的差异。图2中的色标显示，当 Q_{imp} 大于 1 时，对于较大的 γ 值，δ 开始明显偏离零。随后，随着 Q_{imp} 增大，它系统性地增加。同时，随着 Q_{imp} 增大，δ 在越来越小的 γ 值处偏离零，这证实了前文讨论的行为。

通过分析 $\mathcal{T}(x,\ y)$的空间分布，我们观察到，沿样品主轴方向，嵌入式高电荷态离子对 Ca^+晶体产生扰动的空间范围在 Γ_c以下时为 50 ± 5 μ米，在 Γ_c [27]以上时则增至 $60 \pm 5\mu$米。为了进一步了解杂质的局部效应，我们制备了更小的晶体（最多含20个 Ca^+ 离子），其中单个离子可以被可靠地分辨，从而能够估算林德曼参数 [27]。在此情况下，全局非均匀性降低，因此无需依赖基于图像的方法即可量化掺杂离子周围的局部结构变化。同样在此情况下，我们通过改变径向约束来控制向结晶的交叉转变。对于这些小样品，这相当于由大晶体中周围离子所产生的有效压力。为方便起见，我们用归一化径向“压力” $\Pi = (\omega_r/\omega_r^1)^2$, 来表征约束，其中 ω_r^1 是未掺杂样品处于液相时的径向世俗频率。结果见图3，显示 $\mathcal{L}$ 强烈依赖于杂质含量。大致标示从液相到晶体的相变的 $\mathcal{L} = 0.1$曲线，随着 Q_{imp}增大而向显著较低的 Π 移动。换言之，在径向压力固定时，存在掺杂离子会使离子更加局域，表明高电荷态离子具有显著的局部钉扎效应，会改变局部熔化判据，这与 [28]中的观察结果类似。综合来看，我们的数据表明，掺杂离子主要通过稳定其周围的有序区域发挥局部作用。在大晶体中，当这些局部钉扎区域扩展至主体晶体中不可忽略的比例时，Γ_c 的整体偏移便会显现，这与 $Q_{imp} > 1$的起始条件一致。

为粗略估计我们测得的偏移可能如何影响白矮星中的结晶，我们用现象学折膝函数[27], 拟合 $\gamma(Q_{imp})$，然后将其作为修正项纳入简并电子背景中强耦合离子等离子体的冻结条件。在密度固定时，$\Gamma \propto 1/T$ 意味着局部熔化温度发生 $T_m(Q_{imp})/T_m(0) = 1/\gamma(Q_{imp})$ 的偏移。对于具有绝缘包层的简并核，利用标准的Mestel标度关系，我们得到光度按 [27], ($\Gamma \propto 1/T$) $T_m(0)$ $Q_{imp}(/T_m) = 1/\gamma$ 缩放，而

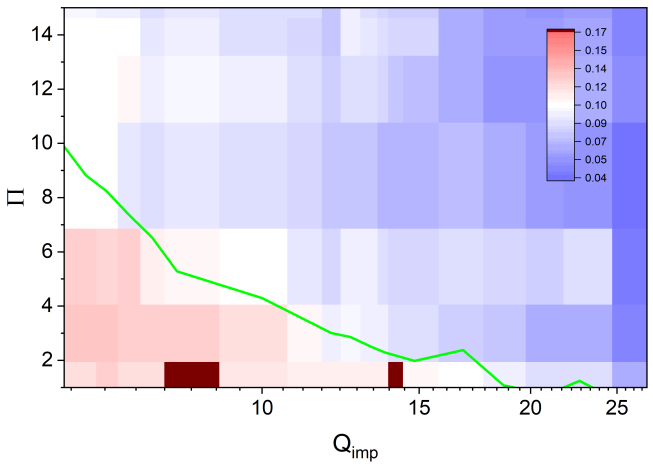

图 3。林德曼参数 $\mathcal{L}$ 随归一化径向压力 Π 和杂质参数 Q_{imp} 的变化关系。绿线对应于条件 $\mathcal{L} = 0.1$，该条件近似确定了液相与晶相之间的边界。

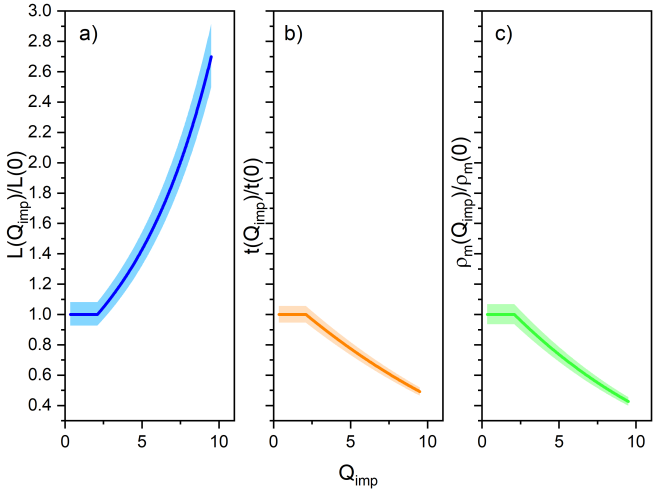

图 4。评估本文测得的杂质诱导结晶偏移对恒星模型的潜在影响。a）白矮星开始结晶时光度的相对偏移。b）相应的结晶年龄偏移。（c）固定温度下中子星外壳中结晶密度的偏移。阴影区域对应于 γ [27] 的平均不确定度。

相应的结晶时间偏移则按 $t_{\rm crys}(Q_{imp})/t_{\rm crys}(0) = \gamma(Q_{imp})^{5/2}$ [27] 缩放。因此，杂质引起的 γ 变化会被放大为推断光度和结晶年龄的显著偏移，如图4a和4b所示。相反，在中子星外壳建模中，温度固定时，结晶密度按 $\rho_m(Q_{imp})/\rho_m(0) = \gamma(Q_{imp})^3$ [4, 32]，发生偏移，同样会导致显著变化，如图4c所示。这对应于固–液边界的位移，因此也会改变弹性（剪切）和固态输运性质适用的深度范围。请注意，这些标度关系适用于弱屏蔽的库仑极限；对于有限屏蔽，需要用尤卡瓦熔化曲线替代单组分等离子体判据，然后应用相同的修正 [33]。

总之，我们利用掺有 Xe^{12+} 离子的 Ca^+ 库仑晶体，测量了杂质引起的液固转变重整化。我们开发了一种简单的方法，可对大型库仑晶体的荧光图像进行定量分析。数据表明，低掺杂剂浓度下，归一化阈值 $\gamma(Q_{imp})$基本保持不变；当杂质参数达到约 1 时，则出现明显的交叉转变。之后，阈值随杂质含量近似线性下降。通过离子分辨测量，我们证明，全局位移源于局部钉扎机制，其影响范围达数十微米。我们还表明，由于这种快速标度关系，本研究测得的位移可能会导致若干恒星可观测量出现较大修正。例如，这或许能为解读盖亚任务近期观测到的结晶特征提供一些线索；其冷却序列表现出与核心结晶开始时冷却延迟相符的特征，且还存在额外的成分效应$^+$ –$^{12+}$ 。

在恒星演化计算中进行详细实现，需要超越本文所采用的简化假设（例如纳入屏蔽、多组分相行为和输运），但我们的测量可为相边界本身对杂质的敏感性提供具体的微观物理输入。更广泛地说，杂质控制的结晶是强耦合等离子体物理学中的一个普遍问题。我们的实验装置和方法为强耦合尤卡瓦/库仑系统中的杂质物理提供了可控基准，可用于检验和校准掺杂离子诱导的缺陷形成、钉扎和无序模型；这些模型是复杂等离子体研究的核心。展望未来，一条有趣的研究路径是施加受控电场，量化杂质输运，并测量杂质在交叉转变过程中的漂移和扩散。另一个有前景的方向是研究由主体晶体的集体模介导的杂质间相互作用，从而自然地与极化子型物理 [34]相联系。

致谢 我们感谢 Xen Sergi 提供的技术支持。我们感谢伯明翰大学原子量子系统小组成员进行的富有成效的讨论。本工作得到科学技术设施委员会和工程与自然科学研究委员会的资助，项目编号为 ST/Y00454X/1、ST/W006138/1 和 ST/T00603X/1。

* g.barontini@bham.ac.uk

[1] J. P. Hansen，致密电离物质的统计力学。I. 单组分等离子体的平衡性质和熔化转变，Physical Review A 8，3096（1973）。[2] L. Segretain 和 G. Chabrier，致密恒星物质中二元离子混合物的结晶，Astronomy and Astrophysics 271，L13（1993）。[3] C. J. Horowitz、A. S. Schneider 和 D. K. Berry，白矮星中碳氧混合物的结晶，Physical Review Letters 104，231101（2010）。[4] N. Chamel 和 P. Haensel，中子星壳层物理学，Living Reviews in Relativity 11，10（2008）。[5] P.-E. Tremblay、G. Fontaine、N. P. Gentile Fusillo、B. H. Dunlap、B. T. G¨ansicke、M. A. Hollands、J. J. Hermes、T. R. Marsh、E. Cukanovaite 和 T. Cunningham，演化中的白矮星冷却序列中的核心结晶和堆积，Nature 565，202（2019）。[6] S. Cheng、J. D. Cummings 和 B. Menard，大质量白矮星的冷却异常，Astrophysical Journal 886，100（2019）。[7] S. Blouin、J. Daligault 和 D. Saumon，作为超大质量白矮星冷却异常解决方案的 22ne 相分离，Astrophysical Journal Letters 911，L5（2021）。[8] A. Bedard、S. Blouin 和 S. Cheng，浮力晶体阻止白矮星冷却，Nature 627，286（2024）。[9] C. J. Horowitz、D. K. Berry 和 E. F. Brown，吸积中子星外壳中的相分离，Physical Review E 75，066101（2007）。[10] S. Ic himaru，强耦合等离子体：高密度经典等离子体和简并电子液体，Reviews of Modern Physics 54，1017（1982）。[11] D. H. E. Dubin 和 T. M. O'Neil，囚禁非中性等离子体、液体和晶体（热平衡态），Reviews of Modern Physics 71，87（1999）。[12] M. Drewsen，离子库仑晶体，Physica B: Condensed Matter 460，105（2015）。[13] A. A. Kozhberov，固态二元离子混合物的静电能，Physical Review E 110，045206（2024）。[14] X. Tong、A. H. Winney 和 S. Willitsch，通过阈值光电离产生的处于选定转动和振动状态的分子离子的协同冷却，Phys. Rev. Lett. 105，143001（2010）。[15] C.-w. Chou、C. Kurz、D. B. Hume、P. N. Plessow、D. R. Leibrandt 和 D. Leibfried，单个分子离子纯量子态的制备与相干操控，Nature 545，203（2017）。[16] O. Krohn、K. Catani、S. P. Sundar、J. Greenberg、G. da Silva 和 H. Lewandowski，乙腈与囚禁的平动冷却的乙炔阳离子的反应，The Journal of Physical Chemistry A 127，5120（2023）。[17] L. Blackburn 和 M. Keller，电囚禁场对将分子态选择性装载至射频离子阱的影响，Scientific Reports 10，18449（2020）。[18] L. Blackburn、A. Shepherd 和 M. Keller，离子阱中射频囚禁场的快速切换，New Journal of Physics 27，045001（2025）。[19] N. B. Khanyile、G. Shu 和 K. R. Brown，通过单分子共振光观测振动泛频解离，《自然-通讯》6, 7825 (2015)。[20] R. Rugango、J. E. Goeders、T. H. Dixon、J. M. Gray、N. Khanyile、G. Shu、R. J. Clark 和 K. R. Brown，通过协同冷却将分子离子运动冷却至基态，New Journal of Physics 17, 035009 (2015)。[21] K. Okada、M. Ichikawa、M. Wada 和 H. A. Schuessler，混合离子库仑晶体的准平衡表征，《物理评论应用》4, 054009 (2015)。[22] L. Petralia、A. Tsikritea、J. Loreau、T. Softley 和 B. Heazlewood，氨电荷交换反应中观测到的强反动力学同位素效应，《自然-通讯》11, 173 (2020)。[23] M. Guggemos、D. Heinrich、O. Herrera-Sancho、R. Blatt 和 C. Roos，通过冷离子对热囚禁离子进行协同冷却与探测，New Journal of Physics 17, 103001 (2015)。[24] L. Schm¨oger、O. O. Versolato、M. Schwarz、M. Kohnen、A. Windberger、B. Piest、S. Feuchtenbeiner、J. Pedregosa-Gutierrez、T. Leopold、P. Micke、A. K. Hansen、T. M. Baumann、M. Drewsen、J. Ullrich、P. O. Schmidt 和 J. R. C. L´opez-Urrutia，高电荷态离子的库仑结晶，《科学》347, 1233 (2015)。[25] S.-L. Chen、Z.-q. Zhou、G.-s. Zhang、J. Xiao、Y. Huang、K.-L. Gao 和 H. Guan，线性保罗阱中高电荷态ni^{12+} 离子的库仑结晶，《物理评论A》112, 063115 (2025)。[26] L. Prokhorov、A. A. Smith、M. Xu、K. Georgiou、V. Guarrera、L. P. K. Sajith、E. A. Dijck、C. Warnecke、M. Wehrheim、A. Wilzewski、L. Blackburn、M. Keller、V. Boyer、T. Pfeifer、U. Schwanke、C. Issever、S. Worm、P. O. Schmidt、J. R. C. Lopez-Urrutia 和 G. Baron- tini，激光冷却ca + 2025 2512 12266 基质[ ]中氩高电荷离子的库仑结晶（），arXiv: . physics.atom-ph 。[27] 详见补充材料，其中包括 [35– 40]。[28] L.-A. R¨uffert、E. A. Dijck、L. Timm、J. R. Crespo L´opez- Urrutia 和 T. E. Mehlst¨aubler，协同冷却的高电荷态离子诱导的混合物种库仑晶体中的畴形成与结构稳定性，《物理评论A》110, 063110 (2024)。[29] L. Mestel，白矮星理论：I. 白矮星的能源，《皇家天文学会月刊》112, 583 (1952)。[30] S. L. Shapiro 和 S. A. Teukolsky，*Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars: The Physics of Compact Objects* 1983（Wiley，纽约，）。[31] M. Bhattacharya、B. Mukhopadhyay 和 S. Muker- jee，强磁化白矮星的光度与冷却：强磁场对光度的抑制，《皇家天文学会月刊》477, 2705 (2018)。[32] P. Haensel、A. Y. Potekhin 和 D. G. Yakovlev，*NeutronStars 1: Equation of State and Structure*，天体物理与空间科学图书馆，第326卷（Springer，2007）。[33] S. Hamaguchi、R. T. Farouki 和 D. H. E. Dubin，Yukawa体系的三相点，Physical Review E 56, 4671 (1997)。[34]V. M. Stojanovi´c、T. Shi、C. Bruder 和 J. I. Cirac，利用囚禁离子对小极化子形成进行量子模拟，Physical Review Letters 109, 250501 (2012)。

[35] U. Fr¨ohlich、B. Roth 和 S. Schiller，线性射频陷阱中的椭球形库仑晶体，Physics of Plas- mas **12**，073506 (2005)。[36] K. Okada、M. Wada、T. Takayanagi、S. Ohtani 和 H. A. Schuessler，线性保罗阱中离子库仑晶体的表征，Physical Review A **81**，013420 (2010)。[37] L. G. D'yachkov，柱对称抛物势阱中库仑团簇的简单解析模型，High Temperature**53**，613 (2015)。[38] J. F. Schlag、A. C. Sanderson、C. P. Neuman 和 F. C. Wimberly，*Implementation of Automatic Focusing Algorithms for a Computer Vision System with Camera Control* 83 14，技术报告 CMU-RI-TR- -（机器人研究所、卡内基梅隆大学，1983）。[39] S. Pertuz、D. Puig 和 M. A. Garcia，聚焦成形中的聚焦度量算子分析，Pattern Recog- nition **46**，1415 (2013)。[40] S. A. Khrapak、N. P. Kryuchkov、S. O. Yurchenko 和 H. M. Thomas，强耦合条件下Yukawa体系的实用热力学，TheJournal of Chemical Physics **142**，194903 (2015)。

补充材料

离子数和杂质参数

对于较大的晶体，由于无法在荧光图像中分辨单个离子，我们根据在特定囚禁设置下记录的未掺杂参考晶体，估算 Ca^+宿主离子数 N_{Ca} 。在线性保罗阱适用的冷流体描述中，晶体被视为均匀密度椭球。平衡密度由阱赝势决定，并可用久期频率表示为 [11, 35, 36]

$$n = \frac{\varepsilon_0 m_{Ca}}{e^2}\left(\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2\right). \tag{1}$$

相应的离子数体相估算随后由椭球体积得出，

$$N_{Ca} = n\frac{4\pi}{3}R_x R_y R_z. \tag{2}$$

这里， R_z 由测得的轴向范围得出，而图像中只能直接看到一个径向半轴。因此，我们考虑将测得的径向尺寸分别对应于横向阱轴的两种可能情况，并利用频率比 ω_x/ω_y 推算不可见的半轴。由此得到两个原子数估算值， N_1 和 N_2，并据此定义

$$N_{Ca} = \frac{N_1 + N_2}{2}, \qquad \delta N_{Ca} = \frac{|N_1 - N_2|}{2}. \tag{3}$$

对于较小的晶体，连续体体相估算必须进行有限尺寸效应修正。我们采用了 [37], 中提出的修正方法；根据该方法，与较大的 N 均匀极限相比，线性团簇尺寸会缩小一个因子

$$f(N) = 1 - 0.9\left(\frac{4}{3\pi N}\right)^{1/3}. \tag{4}$$

因此，我们由隐式关系确定 N_{Ca}

$$V_{meas} = \frac{N_{Ca}}{n} f(N_{Ca})^3, \tag{5}$$

w这里， V_{meas} =(4π/3)$R_x R_y R_z$ 是根据测得的半轴重建的体积 .

通过对仅含少量 Ca^+ 离子的晶体独立测量囚禁频率：调制保罗阱射频驱动的幅度，直至激发某种轴向或径向运动。Xe^{12+} 离子 N_{Xe} 的数量则通过直接计数荧光图像中的空洞来估算。

我们通过以下方式量化杂质含量

$$Q_{imp} \equiv \langle Z^2\rangle - \langle Z\rangle^2, \tag{6}$$

其中，平均值是对离子电荷分布取的。在我们的实验中，宿主是 Ca^+ ，其 $Z_{Ca} = 1$；掺杂离子是 Xe^{12+} ，其 $Z_{Xe} = 12$。对于含有 N_{Ca} 个宿主离子和 N_{Xe} 个掺杂离子的双组分系统，

$$\langle Z\rangle = \frac{N_{Ca}Z_{Ca} + N_{Xe}Z_{Xe}}{N_{Ca} + N_{Xe}}, \qquad \langle Z^2\rangle = \frac{N_{Ca}Z_{Ca}^2 + N_{Xe}Z_{Xe}^2}{N_{Ca} + N_{Xe}}. \tag{7}$$

定义 $r \equiv N_{Xe}/N_{Ca}$，我们得到：

$$Q_{imp} = \frac{121\, r}{(1+r)^2}. \tag{8}$$

库仑耦合参数的评估

我们用库仑耦合参数表征 Ca^+ 宿主

$$\Gamma \equiv \frac{Z_{Ca}^2 e^2}{4\pi\varepsilon_0\, a\, k_B T}, \tag{9}$$

其中 T 是 Ca^+ 的温度， $a = [3/(4\pi n)]^{1/3}$ 是 Ca^+ 宿主组分的维格纳-塞茨半径。在我们的实验中，冷却激光红失谐 $\simeq 25$ MHz，使温度达到 $T \simeq 0.7$ mK。改变约束原则上会改变残余的射频驱动加热（例如通过微运动），从而使 T产生系统误差偏移；在大型三维晶体中，这种偏移很难量化。不过请注意，这类可能与温度有关的偏移在比值 $\gamma = \Gamma_c(Q_{imp})/\Gamma_c(0)$ 中会大幅减弱，而该比值是我们主要的观测量。

我们利用未掺杂 Ca^+ 参考样品测得的久期频率来评估 n（以及 a），并使用同一个 a，在固定约束下为所有杂质条件定义 Ca^+ 耦合参数 Γ。这样一来，Γ 始终以宿主晶体为参照，即在不存在掺杂离子的情况下会占据同一陷阱的晶体。随后，Xe^{12+}杂质在实验上表现为临界值 Γ_c 相对于这一固定参照尺度的偏移。这意味着，混合晶体并未根据新的有效密度重新参数化；相反，杂质效应是通过结晶阈值相对于未掺杂宿主参照的位移来量化的。实验分辨率范围内，测得的晶体半径不随植入掺杂离子数目呈现系统误差依赖，而且杂质诱导的扰动具有空间局域性，这两点均支持了该近似的有效性。

在实验中，我们通过增加径向约束来驱动液体到晶体的交叉转变。我们采用了七种不同的约束条件，分别对应于库仑参数值 Γ_i，其计算方法如上文所述。

Γ与混合物种约定之间的关系

值得注意的是，对于如何在混合物种等离子体中定义单一库仑耦合参数，并不存在唯一或普遍采用的约定。因此，在本研究中，我们使用单组分 Ca^+ Γ 作为控制参数，因为它直接与实验上可测的观测量相关。事实上，在我们的实验中，无法直接成像 Xe^{12+}离子。尽管如此，我们所选的 Γ 仍可与标准的混合物种约定建立联系。例如，在二元库仑混合物中，通常会引入电子球半径

$$a_e = \left(\frac{3}{4\pi n_e}\right)^{1/3}, \tag{10}$$

其中 n_e 为电子密度，并定义物种分辨耦合参数

$$\Gamma_j^{(mix)} = \frac{Z_j^{5/3} e^2}{4\pi\varepsilon_0 a_e k_B T}. \tag{11}$$

对于当前的 Ca^+-Xe^{12+} 系统，假设如上文所述，少量掺杂离子的存在不会改变平均 Ca^+ 宿主密度，则有

$$n_e = n_{Ca} + 12\, n_{Xe} = n_{Ca}(1 + 12r). \tag{12}$$

由此可得

$$\Gamma_{Ca}^{(mix)} = (1 + 12r)^{1/3}\Gamma, \tag{13}$$

因此

$$\Gamma_{Xe}^{(mix)} = 12^{5/3}\Gamma_{Ca}^{(mix)}. \tag{14}$$

同样，通过引入组成平均混合物参数，

$$\Gamma_{mix} = \langle Z^{5/3}\rangle \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a_e k_B T}, \tag{15}$$

可得

$$\Gamma_{mix} = \frac{1 + 12^{5/3} r}{1 + r}\,(1 + 12r)^{1/3}\,\Gamma. \tag{16}$$

Tenengrad 结晶度指标

对于较大的 Ca^+ 晶体，无法分辨单个离子，因此无法根据荧光图像可靠地提取林德曼参数。因此，我们使用一种基于图像的清晰度指标——Tenengrad（梯度平方）度量，来量化晶体有序性的出现，参见例如 [38, 39] 。其核心思想是，结晶会使荧光图像中的空间特征更加清晰（空间频率成分更高），而液相在相同像素尺度下看起来则更加平滑。

从荧光图像 $I(x,y)$ 出发，我们计算 Sobel 导数 g_x 和 g_y，即通过使用标准 3×3 Sobel 核对 I 进行卷积而得到的强度梯度离散估计值

$$S_x=\begin{pmatrix}-1&0&1\\-2&0&2\\-1&0&1\end{pmatrix},\qquad S_y=\begin{pmatrix}-1&-2&-1\\0&0&0\\1&2&1\end{pmatrix}, \tag{17}$$

使得 $g_x=S_x*I$ 和 $g_y=\quad S_y*I$，其中 $*$ 表示离散卷积。随后，我们构建 Tenengrad 能量图

$$\mathcal{T}(x,y)=g_x(x,y)^2+g_y(x,y)^2. \tag{18}$$

对于每一帧，我们通过在样品区域内对 $\mathcal{T}(x,y)$ 求平均，计算标量 Tenengrad 值，

$$\langle\mathcal{T}\rangle=\langle\mathcal{T}(x,y)\rangle_{sample}, \tag{19}$$

其中，样品区域的选取排除了背景像素。具体而言，为了将分析限制在发出荧光的 Ca^+ 云团内，我们应用强度掩膜。对于每一帧，我们先计算图像的平滑版本，再使用大津法确定全局阈值；高于阈值的像素构成样品区域。随后，我们通过在掩膜区域内对 $\mathcal{T}(x,y)$ 求平均来计算 $\langle\mathcal{T}\rangle$ 。我们验证了，在合理改变掩膜处理方法（阈值选择和平滑强度）的情况下，$\langle\mathcal{T}\rangle$ 和提取出的 Γ_c 在波动范围内不受影响。按定义，$\langle\mathcal{T}\rangle$提供了图像清晰度的标量度量，该值随 Ca^+ 荧光空间有序程度的提高而增大，因此我们将其用作样品结晶度的度量。对于每种实验条件，我们采集五张荧光帧，并计算 $\langle\mathcal{T}\rangle$的均值和标准差。

需要注意的是，$\mathcal{T}(x,\ y)$并不是衡量结晶度的绝对指标。由于它是图像梯度的二次函数，$\langle\mathcal{T}\rangle$ 不仅对空间有序性敏感，也受整体荧光强度影响：如果图像强度整体按因子 A缩放，则预期 $g_x,\ g_y\propto A$ 因此 $\langle\mathcal{T}\rangle\propto A^2$。因此，即使结构有序度相近，较亮的云团（即原子更多的云团）也会系统性地呈现更大的 $\langle\mathcal{T}\rangle$ 。如下文所述，在提取 Γ_c时必须考虑这一点。

Tenengrad 清晰度与林德曼参数之间的关系

如前所述，由于大型三维晶体中相当大一部分离子位于焦平面之外，由此产生的景深模糊使得从荧光图像中绝对提取林德曼参数高度依赖模型。相比之下，Tenengrad 清晰度是一个定义明确且可重复的标量，可通过清晰荧光特征的显现来反映整体有序程度。本节将在一个最简成像模型中说明，Tenengrad 清晰度与林德曼参数呈单调关系。

我们将荧光图像建模为多个相同的单离子点扩散函数（PSF）之和，每个函数都以离子的瞬时位置为中心。我们假设，在相机曝光期间，每个离子都围绕其平衡位置发生高斯涨落，面内均方根位移为 u_{rms}。将光学点扩散函数和运动模糊均近似为高斯函数后，时间平均图像等效于静态晶格图像与一个高斯核的卷积，该高斯核的有效宽度为

$$\sigma_{eff}^2=\sigma_0^2+u_{rms}^2, \tag{20}$$

其中 σ_0 是（面内）光学点扩散函数的宽度。令 $u_{rms}=\mathcal{L}\,a$ ，可得

$$\sigma_{eff}^2=\sigma_0^2+\mathcal{L}^2a^2. \tag{21}$$

In 在连续极限下，Tenengrad标量就是图像的梯度平方能量 ，

$$\langle\mathcal{T}\rangle\ \propto\ \int d^2r\,|\nabla I(\mathbf{r})|^2. \tag{22}$$

我们的 $\langle \mathcal{T} \rangle$ 仅与此积分成正比，因为它是对梯度平方泛函进行离散化后采用 Sobel 核实现的。因此，它与该积分仅相差一个总体系数，该系数由像素尺寸、核归一化以及成像增益/曝光决定。利用帕塞瓦尔恒等式，可将其在傅里叶空间中写为

$$\langle \mathcal{T} \rangle \;\propto\; \int d^2k\, k^2\, |I(\mathbf{k})|^2. \tag{23}$$

高斯模糊会使图像频谱乘以

$$I(\mathbf{k}) \to I(\mathbf{k})\, \exp\!\left(-\frac{\sigma_{eff}^2 k^2}{2}\right), \tag{24}$$

这会抑制高-k 分量，因此随着 σ_{eff} 增大，$\langle \mathcal{T} \rangle$ 会降低。

采用单尺度近似，假设对 $\langle \mathcal{T} \rangle$ 有贡献的主导空间结构可由典型波数 $k_0 = O(1/a)$ 表征，则高斯模糊会将相应的傅里叶分量抑制为 $\exp(-\sigma_{eff}^2 k_0^2)$。由此可得

$$k_0 = \frac{\alpha}{a} \quad (\alpha = O(1)) \quad \Rightarrow \quad \langle \mathcal{T} \rangle \propto \exp\!\left[-\alpha^2 \left(\frac{\sigma_0}{a}\right)^2\right] \exp\!\left(-\alpha^2 \mathcal{L}^2\right) \equiv \langle \mathcal{T} \rangle_0 \, \exp\!\left(-\alpha^2 \mathcal{L}^2\right). \tag{25}$$

对于 $\mathcal{L} \ll 1$,

$$\frac{\langle \mathcal{T} \rangle}{\langle \mathcal{T} \rangle_0} = 1 - \alpha^2 \mathcal{L}^2 + \frac{\alpha^4}{2} \mathcal{L}^4 + O(\mathcal{L}^6). \tag{26}$$

该式随 $\mathcal{L}^2$ 严格递减。因此，离子离域程度增加（$\mathcal{L}$ 较大）会降低图像清晰度并使 $\langle \mathcal{T} \rangle$ 减小，从而为使用 Tenengrad 衡量结晶度提供了数学依据。请注意，k_0 和 σ_0 都取决于成像装置。

提取 Γ_c

在我们的非均匀样品中，液固转变表现为平滑交叉，而非明显的不连续变化。因此，我们使用阈值交叉法，根据测得的 Tenengrad 清晰度曲线$\langle \mathcal{T} \rangle(\Gamma)$提取一个有效的交叉点 Γ_c。

如上所述，$\langle \mathcal{T} \rangle$的绝对值不仅取决于结构有序度，还取决于整体荧光强度，因此也取决于样品中的 Ca^+ 离子数（例如参见图 S1）。因此，我们不会为所有数据集设定一个统一阈值。相反，对于每种 Ca^+ 宿主尺寸（固定 N_{Ca}）和每个 N_{Xe}，我们重建离散曲线 $\langle \mathcal{T} \rangle(\Gamma_i)$。对于每个数据集，我们根据未掺杂参考样品（不含 Xe^{12+}）设定一个单一结晶度阈值，并将同一阈值应用于所有采用相同宿主尺寸制备的掺杂样品。具体而言，将 Γ_i 处未掺杂样品的平均锐度记为 $\langle \mathcal{T} \rangle_0(\Gamma_i)$，我们取

$$\langle \mathcal{T} \rangle_{low} \equiv \langle \mathcal{T} \rangle_0(\Gamma_1), \qquad \langle \mathcal{T} \rangle_{high} \equiv median\{\langle \mathcal{T} \rangle_0(\Gamma_5), \langle \mathcal{T} \rangle_0(\Gamma_6), \langle \mathcal{T} \rangle_0(\Gamma_7)\}, \tag{27}$$

并将阈值定义为中点

$$\langle \mathcal{T} \rangle_{thr} \equiv \frac{\langle \mathcal{T} \rangle_{low} + \langle \mathcal{T} \rangle_{high}}{2}. \tag{28}$$

对于平滑交叉转变，这种阈值定义是一种操作性选择，而非正式定义的热力学判据。因此，它会影响赋予 Γ_c 的绝对值，换言之，不可避免地会引入偏差。然而，对于给定的宿主尺寸，所有杂质条件都采用相同的阈值；因此，阈值的选择会以相同方式改变掺杂和未掺杂数据的 Γ_c，并在归一化比值 $\gamma(Q_{imp}) = \Gamma_c(Q_{imp})/\Gamma_c(0)$ 中抵消；本文正文报告的正是这一量。

对于给定的杂质含量（N_{Xe}固定，因此 Q_{imp}也固定），我们随后将 Γ_c 确定为 $\langle \mathcal{T} \rangle_{thr}$的交点。如果交点位于满足以下条件的相邻点（$\Gamma_i$，$\langle \mathcal{T} \rangle_i$）和（$\Gamma_{i+1}$，$\langle \mathcal{T} \rangle_{i+1}$）之间

$$\langle \mathcal{T} \rangle_i < \langle \mathcal{T} \rangle_{thr} \leq \langle \mathcal{T} \rangle_{i+1}, \tag{29}$$

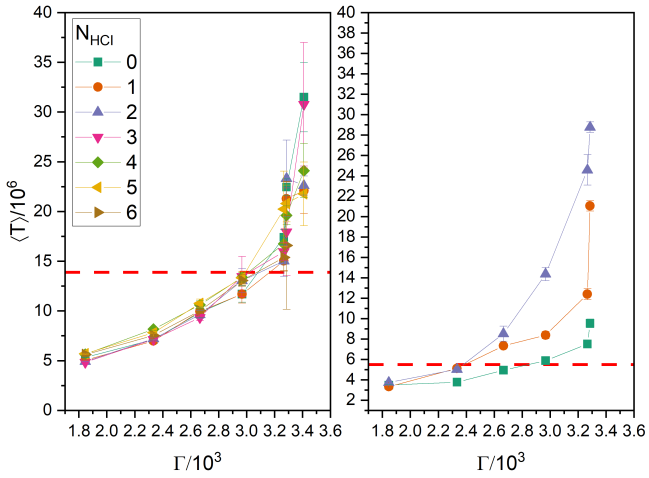

图 S1. 含有数量可变的 Xe^{12+} 杂质离子的 Ca^{+} 离子样品的平均 Tenengrad $\langle \mathcal{T} \rangle$： 250 ± 30 个（左）和 21 ± 2 个（右）。水平虚线表示阈值 $\langle \mathcal{T} \rangle_{thr}$，其计算方法如正文所述。

我们通过线性插值定义 Γ_c ，

$$\Gamma_c = \Gamma_i + (\Gamma_{i+1} - \Gamma_i) \frac{\langle \mathcal{T} \rangle_{thr} - \langle \mathcal{T} \rangle_i}{\langle \mathcal{T} \rangle_{i+1} - \langle \mathcal{T} \rangle_i}. \tag{30}$$

如果在扫描范围内未观察到交叉，则在该杂质条件下，相应的数据集不用于 Γ_c 提取。示例见图 S1。

我们通过将测得的 $\langle \mathcal{T} \rangle$ 噪声经蒙特卡洛传播传递到完整的阈值分析中，来估计 Γ_c 的不确定性。对于每个数据集和约束点 Γ_i，我们将测得的平均锐度建模为$\langle \mathcal{T} \rangle_i^{(\alpha)} = \langle \mathcal{T} \rangle_i + (\sigma_{\mathcal{T},\, i}/\sqrt{n_i})\ t_{\nu_i}$，其中 $\nu_i = n_i - 1$，其中$\sigma_{\mathcal{T},\, i}$和 n_i分别为组内标准差和贡献帧数。以相同方式，从未掺杂参照中一致地重新抽取数据集特定的结晶度阈值。对于每次蒙特卡洛实现，我们使用相同的交叉判据，并在相邻的 Γ_i 点之间进行线性插值，重新计算 Γ_c 。最后，在固定的 Q_{imp} 下，通过对数据集进行自助重采样来汇总各数据集，并将所得 Γ_c 分布的标准差作为不确定性。结果见图 S2。

根据空间 Tenengrad 图确定影响长度

为了估算嵌入的 Xe^{12+} 离子对 Ca^{+} 宿主造成扰动的空间范围，我们分析上文定义的 Tenengrad 能量图 $\mathcal{T}(x,\ y)$ 的空间分布。分析沿晶体的主方向（轴向）进行，该方向记为 x。

对于每个荧光帧，我们将图像划分为互不重叠的方形宏像元，并计算每个宏像元内 $\mathcal{T}(x,\ y)$ 的平均值，以此构建宏像元 Tenengrad 图。我们使用宏像元来抑制像素尺度噪声，同时保留掺杂剂诱导的扰动尺度上的空间结构。如果宏像元选得过小，$\Delta\mathcal{T}(x,\ y)$ 会被噪声主导；如果选得过大，局部扰动则会被平均掉，导致提取出的范围偏小。因此，我们折中采用边长为 32 像素的方形宏像元，并验证了在该值附近较宽范围的宏像元尺寸下，提取出的影响长度均保持稳定。

对于给定的数据集和囚禁设置，我们将五帧得到的宏观胞元图取平均，得到该设置下的一张图 $\mathcal{T}(x,\ y)$。随后，我们通过减去在相同条件下采集的相应未掺杂参照，得到一张基线扣除图，

$$\Delta\mathcal{T}(x, y) \equiv \mathcal{T}(x, y; N_{Xe}) - \mathcal{T}(x, y; N_{Xe} = 0). \tag{31}$$

T为获得一维剖面，我们沿横向对 $\Delta\mathcal{T}(x,\ y)$ 求平均 ，

$$\Delta\overline{\mathcal{T}}(x) \equiv \langle \Delta\mathcal{T}(x, y) \rangle_y. \tag{32}$$

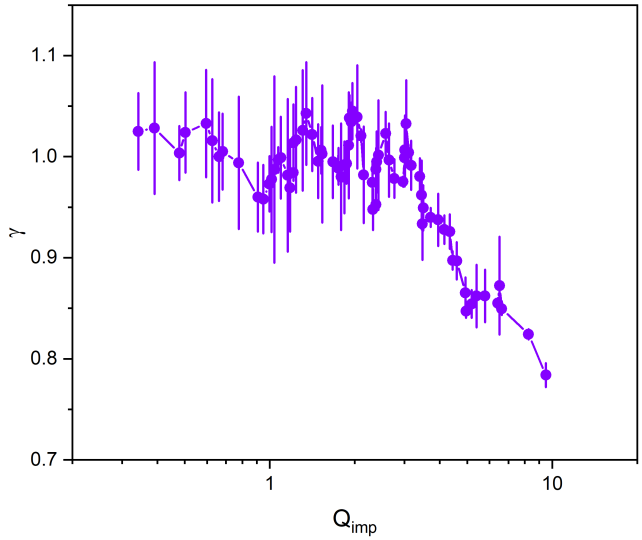

图 S2. 归一化临界库仑参数 γ 随杂质参数 Q_{imp}变化的关系。数据点与正文图2所示相同，但横轴采用对数刻度。误差棒按照文中说明的方法计算。

我们将扰动中心定义为 $\Delta\mathcal{T}(x)$ 的最大值所在位置，

$$x_0 \equiv arg\,max_x\,\Delta\overline{\mathcal{T}}(x), \tag{33}$$

并根据剖面的远场尾部估计噪声底。具体而言，我们取采样 x范围的首尾各 20%，并排除 x_0 周围的一个窗口（占采样范围的 20%），以避免受到杂质信号的污染。利用剩余的尾部数值，我们通过稳健的中位数绝对偏差估计量估算噪声尺度，并定义阈值

$$\Delta\overline{\mathcal{T}}_{thr} \equiv 3\,\sigma_{\Delta\overline{\mathcal{T}}}. \tag{34}$$

随后，我们确定 $\Delta\mathcal{T}(x)$连续低于 $\Delta\mathcal{T}_{th}$的位置 r 连续两个采样点 ，从而得到 ξ

正如预期，提取出的影响长度在不同数据集之间存在显著差异，反映了掺杂剂含量和晶体整体尺寸的变化：具体样品不同，受扰区域相对于晶体长度可能微不足道，也可能延伸至晶体长度的很大一部分。因此，为了获得简洁且可比较的指标，我们按约束（即相同的 Γ）对测量结果分组，并计算平均影响长度。这揭示了两个可重复的区间：在液态一侧，系综平均影响长度约为 $50\ \mu$m；而在晶态一侧则增至约 $60\ \mu$m，如图 S3 所示。尽管这种平均仅能作为参考，但它与杂质在结晶前后产生不同响应的观点一致，并为通过 Tenengrad 阈值法得到的交叉转变判定提供了内部交叉验证。

小晶体中的林德曼参数

对于小晶体（最多 ~ 20 Ca^+ 个离子），荧光图像中能够可靠地分辨出各个离子。这使得我们可以对林德曼参数进行离子分辨估计，

$$\mathcal{L} = \frac{\sqrt{\langle u^2\rangle}}{a}, \tag{35}$$

其中 $\langle u^2\rangle$ 是相对于平衡位置的均方位移，a 是特征离子间距。实际中，对于通过成像观测到的有限离子链/晶体，我们从测得的离子位置和光斑尺寸中提取 $\mathcal{L}$ 的稳健逐帧估计量，如下文所述。

每个荧光帧首先经过带通滤波，以抑制缓慢变化的背景并增强类似离子的特征。我们采用高斯差分，

$$G(x,y) = [\mathcal{G}_{\sigma_s} * I\,](x,y) - [\mathcal{G}_{\sigma_l} * I\,](x,y), \tag{36}$$

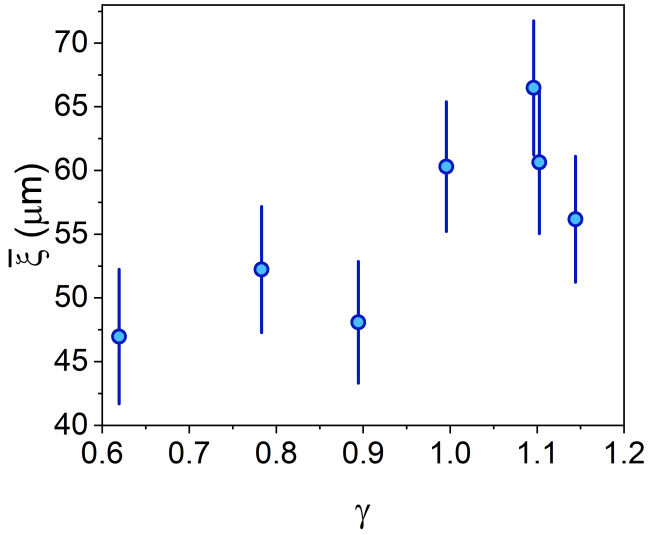

图 S3. 从轴向剖面提取的平均影响长度 $\bar{\xi}$ 随归一化结晶阈值 γ 的变化。每个点表示在给定囚禁设置（固定 Γ）下测得的所有样本的平均值，误差棒表示系综中的相应标准差。

其中， $I(x,y)$ 是原始图像， $\mathcal{G}_\sigma$ 表示宽度为 σ 的高斯核， $*$ 表示离散卷积。随后，我们将 $G(x,y)$ 的局部极大值识别为离子候选点，并设置最小间距（以避免重复计数）和相对于该帧中 G 最大值的相对高度阈值。对于位于 (x_0,y_0) 的每个候选峰，我们通过在局部图块中计算二阶矩来细化质心并估计光斑宽度。具体而言，在半宽度为 w 像素的方形图块内，我们减去局部背景（图块的中位数），将负值截断为零，并计算强度加权质心 $(\bar{x},\bar{y})$ 和方差 (σ_x^2,σ_y^2) 。我们定义一个单一的光斑尺寸参数

$$\sigma \equiv \sqrt{\frac{\sigma_x^2+\sigma_y^2}{2}}. \tag{37}$$

对于产生非物理 σ 值（过小或过大）的峰值，将其舍弃。由此得到的离子中心列表 $\{\mathbf{r}_i\}=\{(\bar{x}_i,\bar{y}_i)\}$ 和光斑尺寸 $\{\sigma_i\}$ 构成逐帧离子分辨数据。根据提取的离子中心，我们计算每个离子的最近邻间距，然后对所有离子取平均，

$$d_{nn} \equiv \left\langle \min_{j\neq i} |\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j| \right\rangle_i . \tag{38}$$

这提供了像平面内特征离子间距的估计值。对于定位长度，我们使用光斑尺寸的中位数，

$$\sigma_{med} \equiv median\{\sigma_i\}. \tag{39}$$

随后，我们将林德曼估计量定义为

$$\mathcal{L} = \frac{\sigma_{med}}{d_{nn}}. \tag{40}$$

该量反映了典型位置展宽（光斑宽度）与离子间距之比；由于使用了中位数和最近邻距离，它能够抵御偶尔漏检或误检峰值的影响。对于每种囚禁设置，我们在可用帧中计算 $\mathcal{L}$ ，并求得均值和标准差。

测得的光斑尺寸 σ_i 包含成像点扩散函数、残余微运动模糊以及投影到图像中的任何面外偏移所带来的影响。对于固定的成像配置，这些影响主要会为 σ_{med} 增加一个近似不随约束变化的底值。由于分析关注的是在相同光学条件下， $\mathcal{L}$ 如何随约束和杂质含量变化，而且 d_{nn} 是从同一组帧中提取的，因此在相对比较中，这些系统误差大多会相互抵消。

恒星模型中的标度关系

以下关系是在经典库仑（单组分等离子体）极限（弱屏蔽）下推导的，旨在给出透明的比例关系，而非进行自洽的恒星演化计算。特别是，我们没有纳入电子屏蔽对相互作用的修正、多组分相图效应（相分离、蒸馏、沉降）或其他能源。正如正文所述，对于有限屏蔽，应以尤卡瓦熔化曲线替代单组分等离子体冻结条件 $\Gamma_m(\kappa)$，然后应用相同的乘法修正因子$\gamma(Q_{imp})$ [33, 40]。

在密度（固定的 a）不变时，有 $\Gamma \propto 1/T$。如果结晶由 $\Gamma = \Gamma_c$ 触发，那么

$$\frac{T_m(Q_{imp})}{T_m(0)} = \frac{1}{\gamma(Q_{imp})}, \tag{41}$$

其中， T_m 是相关深度处的局部熔化（结晶）温度。对于具有绝缘包层的简并核白矮星，梅斯特尔冷却给出了恒星光度 $\mathcal{L}$ 与核心温度T_c之间的标度关系，

$$\mathcal{L} \propto T_c^{7/2}, \tag{42}$$

以及冷却年龄 t 与光度之间的关系，

$$t \propto \mathcal{L}^{-5/7}, \tag{43}$$

参见 [29, 30]。确定 在 $T_c \simeq T_m$ 处结晶开始时，杂质引起的偏移意味着 s

$$\frac{\mathcal{L}(Q_{imp})}{\mathcal{L}(0)} = \left(\frac{T_m(Q_{imp})}{T_m(0)}\right)^{7/2} = \left(\frac{1}{\gamma(Q_{imp})}\right)^{7/2}, \tag{44}$$

相应的结晶年龄偏移量 t_{crys} （即该深度达到 $T_c \simeq T_m$ 时的年龄）按如下规律变化

$$\frac{t_{crys}(Q_{imp})}{t_{crys}(0)} = \left(\frac{\mathcal{L}(Q_{imp})}{\mathcal{L}(0)}\right)^{-5/7} = \gamma(Q_{imp})^{5/2}. \tag{45}$$

这些关系用于正文图4(a,b)。为绘制图4，我们用一个最简拐点模型对正文图2中观察到的交叉转变进行参数化，该模型由一个低-Q_{imp} 平台和随后出现的线性下降构成，

$$\gamma(Q_{imp}) = 1 + s\ \max(0,\, Q_{imp} - c)\,, \tag{46}$$

其中 c 是拐点位置， s 是高-Q_{imp} 区域的斜率。加权最小二乘拟合得到 s =−0.033 ± 0.002 和 $c = 2.1 \pm 0.2$。