arXiv:2603.14981v1 [math.CA] 16 Mar 2026

超几何恒等式的算术约束*

Katsunori Iwasaki† 和 Mina Kusakabe‡

摘要

特殊函数的标准文献中包含许多涉及伽马函数乘积与商的超几何恒等式，但这类恒等式的出现仍是一种偶发现象。这是因为它们的存在受到严格算术条件的约束。我们将聚焦于某个数据区域，在其中该问题的本质能够清晰地显现，以展示这类约束。

1 引言

设 ${}_2F_1(\alpha,\beta;\ \gamma;\ z)$ 为高斯超几何函数，$\Gamma(w)$ 为欧拉伽马函数。给定一个六元数据组 $\lambda=(p,q,r;\ a,b;\ x)\in\mathbb{R}^6$，其中 $0<x<1$，定义 $f(w;\ \lambda):={}_2F_1(pw+a,qw+b;\ rw;\ x)$。作为我们在 [6, 7], 中先前研究的延续，我们关注以下问题。

问题 I 求出或刻画能导出伽马乘积公式（简称 GPF）的那些数据 λ

$$f(w;\lambda)=C\cdot d^w\cdot\frac{\Gamma(w+u_1)\cdots\Gamma(w+u_m)}{\Gamma(w+v_1)\cdots\Gamma(w+v_n)},\qquad w\in\mathbb{C},\tag{1}$$

使得某些常数 C、$d\in\mathbb{C}^\times$ 和 u_1、…、u_m、v_1、…、$v_n\in\mathbb{C}$成立，其中 w 是一个自由复参数。

特殊函数的标准文献，例如 [1, 2, 4, 5, 8], ，包含许多形如 (1) 的恒等式，但在所有连续变化的数据 $\lambda=(p,\ q,\ r;\ a,\ b;\ x)$ 中，这类恒等式仍然十分罕见。本文旨在探讨 GPF 为何如此罕见，并指出问题 I 的解 λ 必须满足某些算术约束，通常（但不总是）类似于这样的条件：$p,\ q,\ r$ 必须是整数，$a,\ b$ 必须是有理数，而 x 必须是某种特殊形式的代数数。

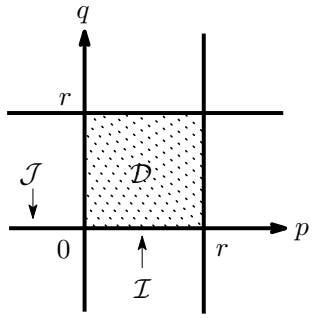


图 1.1：固定 $r>0$ 时（p,q）平面的划分。

广义乘积公式的出现方式很大程度上取决于向量 $\boldsymbol{p}=(p,\ q,\ r)\in\mathbb{R}^3$ 的方向，我们将其称为 λ 的主部。这是关于大参数 w 的一种斯托克斯现象。在 [6, 7], 中固定 $r>0$ 时，$(p,\ q)$ 平面被划分为九个区域及其边界，如图 1.1 所示。我们在 [6, 7] 中主要关注中心正方形 $\mathcal{D}$，即图 1.1 中的阴影区域。本文则将

*MSC2020：33C05。关键词：超几何函数；伽马乘积公式；算术约束；对偶性；互反性；邻接关系。本研究获 JSPS KAKENHI 资助（项目编号：JP22K03365）。

†北海道大学荣休教授，日本札幌 060-0810。电子邮箱：iwasaki@math.sci.hokudai.ac.jp

‡本研究进行期间逝世。

注意力转向其边界。尽管边界比开正方形更窄，也更特殊，但正因如此，问题 I 的算术性质在边界上显现得更加鲜明。

给定 $k \in \mathbb{N} := \mathbb{Z}_{\geq 1}$，$\lambda = (p,\ q,\ r;\ a,\ b;\ x)$ 的 k-倍数定义为 $k\lambda := (kp,\ kq,\ kr; a,\ b; x)$。由 $f(w;\ \lambda)$ 的定义显然可知，$f(w;\ k\lambda) = f(kw;\ \lambda)$。该恒等式与高斯乘法公式

$$\Gamma(kw) = (2\pi)^{(1-k)/2} \cdot k^{kw-1/2} \cdot \prod_{j=0}^{k-1} \Gamma\big(w + \tfrac{j}{k}\big), \qquad k \in \mathbb{N} \tag{2}$$

意味着，问题 I 的一个解的任何倍数仍然是一个解；详见 [7, §1] 。如果一个解不是任何其他解的倍数，则称其为本原解。若 $f(w;\ \lambda)$ 在 $\mathbb{C}_w$中至多有有限多个极点，我们称 λ 为初等的。于是，我们便可以讨论问题 I 的初等解或非初等解。

超几何函数 ${}_2F_1(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ z)$ 具有两个基本对称性

$${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;z) = {}_2F_1(\beta,\alpha;\gamma;z), \qquad {}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;z) = (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}\,{}_2F_1(\gamma-\alpha,\gamma-\beta;\gamma;z). \tag{3}$$

前一个恒等式由 ${}_2F_1(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ z)$ 的定义显然可得，而后一个称为欧拉变换。它们诱导了数据 λ 的变换，将一个解变为另一个解，

$$\lambda = (p,q,r;a,b;x) \mapsto (q,p,r;b,a;x), \qquad \lambda = (p,q,r;a,b;x) \mapsto (r-p,r-q,r;-a,-b;x). \tag{4}$$

中心正方形 $\mathcal{D}$ 的边界由四条边组成，但通过组合对称性 (4)，可以将任意一条边变换到图 1.1 中的南边 $\mathcal{I}$。对应于南边的完整参数区域为

$$\mathcal{I} := \{\lambda = (p,q,r;a,b;x) \in \mathbb{R}^6 \mid 0 < p < r,\ q = 0,\ 0 < x < 1\},$$

它用同一个符号 $\mathcal{I}$表示。本文主要研究该区域中的问题 I。作为我们先前结果 [6, 定理 2.4] 的一部分，我们已经知道以下约束。

定理 1.1 设 $\lambda = (p,\ 0,\ r;\ a,\ b;\ x) \in \mathcal{I}$。

(1) λ 是问题 *I* 的初等解，当且仅当 b 为零或负整数；此时，$f(w;\ \lambda)$是 w的有理函数。(2) 若 λ 是问题 *I* 的非初等解，则

$$p,\, r \in \mathbb{Z}; \qquad p \equiv r \bmod 2; \qquad b = 1/2. \tag{5}$$

特别地，任何非初等解都是一个本原解的倍数。

本文旨在通过确立第 2 节中陈述的主要结果，大幅加强定理 1.1。我们通过仔细考察超几何函数的邻接关系，并运用 [7, 定义 1.2 和 1.3], 中引入的对偶性和互反性概念来实现这一目标；这些定义所描述的是数据 $\lambda \mapsto \lambda' = (p',\ q',\ r';\ a',\ b';\ x')$ 和 $\lambda \mapsto \check{}\lambda = (\check{}p,\ \check{}q,\ \check{}r;\ \check{a},\ \check{}b;\ \check{}x)$ 的变换，其定义如下

$$p' := p, \quad q' := q, \quad r' := r; \quad a' := 1 - \frac{2p}{r} - a, \quad b' := 1 - \frac{2q}{r} - b; \quad x' := x, \tag{6a}$$

$$\begin{gathered} \check{p} := -p, \qquad \check{q} := -q, \qquad \check{r} := r - p - q; \qquad \check{x} := 1 - x; \\ \check{a} := \frac{(r-q)(1-a) - pb}{r-p-q}, \qquad \check{b} := \frac{(r-p)(1-b) - qa}{r-p-q}. \end{gathered} \tag{6b}$$

请注意，对偶性在 $\mathcal{I}$ 上定义了一个对合，而互反性则提供了一个从 $\mathcal{I}$ 到

$$\mathcal{J} := \{\lambda = (p,q,r;a,b;x) \in \mathbb{R}^6 \mid p < 0,\ q = 0,\ 0 < r,\ 0 < x < 1\},$$

这对应于图 1.1 中的半直线 $\mathcal{J}$。另请注意，对于 $\lambda \in \mathcal{I}$，如果 $b = 1/2$，那么 $b' = \check{}b = 1/2$。

2 主要结果

我们陈述本文的主要结果，并给出几个示例来说明这些结果。

定理 2.1 令 $\lambda=(p,0,r;a,1/2;\,x)\in\mathcal{I}$ 为问题 I 的任意一个非初等解。

(1) 解 λ 的对偶 $\lambda'=(p,0,r;a',1/2;x)\in\mathcal{I}$ 也是问题 I 的一个非初等解。(2) 比值 $s:=r/p$ 是一个整数，且 $s\geq 2$ 和 $p(s-1)\equiv 0$ 模 2。存在 $j,\,j'\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 使得

$$a=j/s,\qquad a'=j'/s,\qquad j+j'=s-2. \tag{7}$$

特别地，a和 a' 是有理数。

(3) 自变量 x 是代数方程在区间 $(0,1)$ 内的唯一根

$$\varphi_s(z):=(s-1)^{s-1}z^s-s^s(1-z)^{s-1}=0. \tag{8}$$

特别地，x 是一个代数数。

显然，方程 (8) 有一个唯一根 $x\in(0,\,1)$，因为 $\varphi_s(0)=-s^s<0<\varphi_s(1)=(s-1)^{s-1}$ 且$\varphi_s'(z)=s(s-1)\{(s-1)^{s-2}z^{s-1}+s^{s-1}(1-z)^{s-2}\}>0$ 对于 $z\in(0,\,1)$ 成立。定理 2.1 表明，一旦给定比值$s=r/p$，三元组 $(a,\;a',\;x)$ 至多有 $s-1$ 种可能性。该定理并未声称 (7) 中关于 $(a,\;a')$ 的任意表达式都会导出一个解；其中一些或全部候选式可能无法给出解。

T定理 2.2 设 $\lambda=(p,0,r;\;\;a,1/2;\;\;x)\in\mathcal{I}$ 是问题的任意一个非初等解 $I.$

(1) 存在将下述右端因式分解为两个分量的方法

$$\prod_{i=1}^{r}(w+v_i)\prod_{i=1}^{r}(w+v_i^*)=\prod_{i=0}^{p-1}\Big(w+\tfrac{i+a}{p}\Big)\prod_{j=0}^{r-p-1}\Big(w+\tfrac{j-a}{r-p}\Big)\prod_{j=0}^{r-1}\Big(w+\tfrac{j-1/2}{r}\Big) \tag{9}$$

使得解 λ 及其对偶 $\lambda'\in\mathcal{I}$ 都具有如下形式的 *GPF*:

$$f(w;\lambda)=C\cdot\frac{\prod_{i=0}^{r-1}\Gamma(w+\frac{i}{r})}{\prod_{i=1}^{r}\Gamma(w+v_i)}, \tag{10a}$$

$$f(w;\lambda')=C'\cdot\frac{\prod_{i=0}^{r-1}\Gamma(w+\frac{i}{r})}{\prod_{i=1}^{r}\Gamma(w+v_i')},\qquad v_i':=1-\frac{2}{r}-v_i^*, \tag{10b}$$

其中 C *an* d C' 均为非零常数。此外，$v_1,\ldots,v_r$ 与 $v_1',\ldots,v_r'$ 的和相同

$$v_1+\cdots+v_r=v_1'+\cdots+v_r'=(r-1)/2. \tag{11}$$

(2) 存在一个整除关系

$$\prod_{i=0}^{p-1}\big(w+\tfrac{i+a}{p}\big)\;\Big|\;\prod_{i=1}^{r}(w+v_i), \tag{12}$$

该关系允许我们对 $v_1,\ldots,v_r$ 进行排列，使得 $\prod_{i=0}^{p-1}\big(w+\underline{\tfrac{i+a}{p}}\big)=\prod_{i=r-p+1}^{r}(w+v_i)$。按照这一约定˘，解 λ 的倒数 $\lambda\in\mathcal{J}$ 也是问题 I 的一个解，其 *GPF* 为

$$f(w;\check{\lambda})=\check{C}\cdot\frac{\prod_{i=0}^{r-p-1}\Gamma\big(w+\frac{i}{r-p}\big)}{\prod_{i=1}^{r-p}\Gamma(w+\check{v}_i)},\qquad \check{v}_i:=v_i-\frac{1/2-a}{r-p}, \tag{13}$$

˘其中 C 是一个非零常数。

一般模板 (1) 中的伸缩常数 d 在广义乘积公式 (10) 和 (13) 中均为 1。这些公式中的分数可能是可约的，也就是说，它们的分子和分母可能有公因子。

定理 2.3 给定问题 I 的任意一个非初等解 $\lambda=(p,\,0,\,r;\,a,\,1/2;\,x)\in\mathcal{I}$，令 次数 x 表示 x 作为代数数的次数。如果比值 $s:=r/p$ 为 2，那么次数 $x=2$；而如果 $s\geq 3$，那么

$$\deg x>\delta(s):=\frac{(\log p_s)(s-1)}{1+\log(s-1)},$$

其中 p_s 是整数 $s-1$的最小素因子。特别地，一旦给出$\deg x$ 的上界， $s=r/p$的比值就只剩有限种可能。

例 2.4 有两个非初等解 $\lambda\in\mathcal{I}$，使得 x 是一个有理数,

$$\lambda=(1,\,0,\,3;\,0,\,1/2;\,3/4),\qquad f(w;\lambda)=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\Gamma(w+1/3)\,\Gamma(w+2/3)}{\Gamma(w+1/2)\,\Gamma(w+1/2)},\tag{14a}$$

$$\lambda=(1,\,0,\,3;\,1/3,\,1/2;\,3/4),\qquad f(w;\lambda)=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\Gamma(w)\,\Gamma(w+2/3)}{\Gamma(w+1/6)\,\Gamma(w+1/2)},\tag{14b}$$

它们分别是 Ebisu [4]中的公式 (1,3,3-1,iii) 和 (1,3,3-1,xx)。这两个解互为对偶，其中公式 (7) 中的 $p=1$、$s=r/p=3$、 $j=0$ 和 $j'=1$。显然，它们是本原的，因为 $p=1$。

例 2.5 存在一个非初等解 $\lambda\in\mathcal{I}$，使得 x 是一个二次无理数,

$$\lambda=(2,\,0,\,4;\,0,\,1/2;\,2\sqrt{2}-2),\qquad f(w;\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}\cdot\frac{\Gamma\left(w+1/4\right)\Gamma(w+3/4)}{\Gamma(w+3/8)\Gamma(w+5/8)},\tag{15}$$

它是 [4]中的公式 (2,4,4-2,ii)。该解是自对偶的，公式 (7) 中有 $s=r/p=2$、 $j=j'=0$。反过来，对于任意满足 $r/p=2$的解，公式 (7) 强制 $j=j'=0$ 和 $p\equiv 0$ 模 2，因此它必为解 (15)的倍数。由此，解 (15)是本原的，而且不存在主部为 $\boldsymbol{p}=(1,\ 0,\ 2)$的解。

例 2.6 解 (14a) 和 (14b) 的倒数分别为

$$\lambda=(-1,\,0,\,2;\,5/4,\,1/2;\,1/4),\qquad f(w;\lambda)=\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\Gamma(w)\,\Gamma(w+1/2)}{\Gamma(w+1/4)\,\Gamma(w+1/4)},\tag{16a}$$

$$\lambda=(-1,\,0,\,2;\,3/4,\,1/2;\,1/4),\qquad f(w;\lambda)=\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\Gamma(w)\,\Gamma(w+1/2)}{\Gamma(w+1/12)\,\Gamma(w+5/12)},\tag{16b}$$

其公式为 Ebisu [4] 中的 (1,3,3-1,xvi) 和 (1,3,3-1,xi)。解 (15) 的倒数为

$$\lambda=(-2,\,0,\,2;\,3/2,\,1/2;\,3-2\sqrt{2}),\qquad f(w;\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2(2-\sqrt{2})}}\cdot\frac{\Gamma(w)\,\Gamma\left(w+1/2\right)}{\Gamma\left(w+1/8\right)\Gamma\left(w+3/8\right)},\tag{17}$$

[4] 中的公式 (2,4,4-2,vi)。解 (16a) 和 (16b) 互为对偶，而 (17) 是自对偶的。

定理 2.1 和 2.3 得出了关于例 2.4 和 2.5 的以下结果。

T定理 2.7 考虑问题的非初等解 $\lambda=(p,\,0,\,r;\quad a,\,1/2;\quad x)\in\mathcal{I}$ *I.*

(1) 解 (14a) 和 (14b) 是仅有的满足 x 为有理数的本原解 *r.*

(2) 解 (15) 是仅有的满足 x 为二次无理数的本原解。

本文的安排如下。§3 中，问题 I 被归结为另一个问题——问题 II；后者与超几何函数的邻接关系密切相关。因此，§3 讨论邻接关系的若干问题：§3.1 讨论连续矩阵，§3.2 讨论其首项渐近行为，§3.3 讨论截断超几何乘积，§3.4 讨论终止超几何和。§4 利用对偶性和互反性的概念证明定理 2.1 和 2.2：首先在 §4.1 考察对偶性，接着在 §4.2 结合连接公式讨论互反性，最后在 §4.3 更深入地重新考察对偶性。§4.4 又引入一个想法，使定理 2.1 中的条件成为 $\lambda\in\mathcal{I}$ 是非初等解的充要条件；参见定理 4.9。§5 研究自变量 x满足的代数方程 (8)。定理 2.3 在 §5.3 末尾得到证明。定理 2.7 可由定理 2.1 和 2.3 推出。

3 连续关系

若 λ 是具有 GPF (1) 的问题 I 的一个解，则递推公式 $\Gamma(w+1) = w\Gamma(w)$ 给出

$$\frac{f(w+1;\lambda)}{f(w;\lambda)} = d \cdot \frac{(w+u_1)\cdots(w+u_m)}{(w+v_1)\cdots(w+v_n)}, \tag{18}$$

这是一个关于 w的有理函数。这一观察引出了下面的问题。

问题 II 求出或刻画那些数据 λ，使得 $f(w+1;\,\lambda)/f(w;\,\lambda)$ 是关于 w 的有理函数。

若数据组 $\lambda = (p, q, r;\ a, b;\ x)$ 的主部 $\boldsymbol{p} = (p, q, r)$ 是一个整数向量，则称该数据组为整的。利用连续关系，可以通过一种通用方法求得问题 II 的整解；参见 [3, 6]。为简化记号，我们将 ${}_2F_1(\boldsymbol{a};\ z) := {}_2F_1(\alpha, \beta;\ \gamma;\ z)$ 记作 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3) = (\alpha, \beta, \gamma)$，并将 $\mathbf{1} := (1, 1, 1)$ 记作。给定一个整数向量 $\boldsymbol{p} = (p, q, r) \in \mathbb{Z}^3$，反复应用高斯的十五个连续关系，可得到有理函数 $r(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{p};\ z)$ 和 $q(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p};\ z)$，它们关于 $(\boldsymbol{a};\ z)$ 且依赖于 $\boldsymbol{p}$，使得

$${}_2F_1(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{p}; z) = r(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p};z)\,{}_2F_1(\boldsymbol{a}; z) + q(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p};z)\,{}_2F_1(\boldsymbol{a}+\mathbf{1}; z). \tag{19}$$

~给定一组整数据 $\lambda = (p, q, r;\ a, b;\ x)$，令 $f(w;\ \lambda) := {}_2F_1(pw+a+1, qw+b+1;\ rw+1;\ x)$。将 $\boldsymbol{a} = (pw+a, qw+b, rw)$ 和 $z = x$ 代入三项关系 (19)，得到

$$f(w+1;\lambda) = R(w;\lambda)\, f(w;\lambda) + Q(w;\lambda)\, \widetilde{f}(w;\lambda), \tag{20}$$

其中 $R(w;\ \lambda)$ 和 $Q(w;\lambda)$ 是依赖于 λ的 w的有理函数。若 $Q(w;\ \lambda)$ 恰好恒等于零，则三项关系 (20) 化简为二项关系 $f(w+1;\ \lambda)/f(w;\ \lambda) = R(w;\ \lambda)$，从而得到问题 II 的一个整解 λ。以这种方式得到的解称为源自邻接关系。

现在我们将　　注意力转向区域 $\mathcal{I}$。以下结果是 [6, 定理 5.4]的一部分。

定理 3.1 若 $\lambda \in \mathcal{I}$是问题 *II* 的一个解，且比值 $f(w+1;\,\lambda)/f(w;\,\lambda)$ 可表示为(18)的形式，则 λ 是问题 *I* 的一个解，其 *GPF* 为(1)。此外，在公式(18) 中，必须有 $m = n$，并且

$$u_1 + \cdots + u_m = v_1 + \cdots + v_m. \tag{21}$$

这是对函数 $f(w;\ \lambda)$ 在 w趋于无穷时进行渐近分析的结果。由定理 3.1 可知，在区域 $\mathcal{I}$内，问题 I 和问题 II 等价，因此我们可以不说明某个解属于哪个问题，直接称其为该区域内的解。根据定理 1.1，$\mathcal{I}$ 中的任一非初等解都是积分解。结合这些事实，[6, 中的以下结果也已为人所知：定理 2.4]。

定理 3.2 $\mathcal{I}$ 中的每个非初等解都来自连续关系。因此，数据组$\lambda = (p, 0, r;\ a, 1/2;\ x) \in \mathcal{I}$是一个解，当且仅当 λ是积分的，且 $Q(w;\lambda)$ 恒等于零。

自然可以预期，非初等解存在的约束源自连续关系的性质。因此，我们先深入考察连续关系。

3.1 连续矩阵

采用连续关系的矩阵形式更为合适。令 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}) := {}^t({}_2F_1(\boldsymbol{a};\ z)\ \ {}_2F_1(\boldsymbol{a}+\mathbf{1};\ z))$。那么，三项关系 (19) 以及将 $\boldsymbol{p}$ 替换为 $\boldsymbol{p}+\mathbf{1}$ 后得到的关系构成矩阵方程

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{p}) = A(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})\,\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}), \qquad A(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p}) := \begin{pmatrix} r(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p};z) & q(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p};z) \\ r(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p}+\mathbf{1};z) & q(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p}+\mathbf{1};z) \end{pmatrix}. \tag{22}$$

对于 $i = 1$、2、3，我们令 $A_i(\boldsymbol{a}) := A(\boldsymbol{a};\boldsymbol{e}_i)$，其中 $\boldsymbol{e}_1 = (1、0;0)$、$\boldsymbol{e}_2 = (0,\ 1、0)$ 和 $\boldsymbol{e}_3 = (0、0;1)$。这些矩阵满足相容条件 $A_i(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{e}_j)\,A_j(\boldsymbol{a}) = A_j(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{e}_i)\,A_i(\boldsymbol{a})$。给定一个整数向量 $\boldsymbol{p} \in \mathbb{Z}^3_{\geq 0}$，若我们取一列指标 $i = (i_1、\ldots\ldots、i_k) \in \{1,2,3\}^k$，使得 $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{e}_{i_1} + \cdots + \boldsymbol{e}_{i_k}$，则有

$$A(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p}) = A_{i_k}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{e}_{i_1}+\cdots+\boldsymbol{e}_{i_{k-1}})\cdots A_{i_3}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{e}_{i_1}+\boldsymbol{e}_{i_2})\,A_{i_2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{e}_{i_1})\,A_{i_1}(\boldsymbol{a}). \tag{23}$$

由于相容条件，右侧的矩阵乘积与 $i=(i_1、\ldots\ldots、i_k)$ 的选择无关。本文取 $\boldsymbol{p}=(p、0、r)$ 和 $i=(i_1、\ldots\ldots、i_k)\in\{1,3\}^k$。我们使用显式公式

$$A_1(\boldsymbol{a})=\begin{pmatrix}1 & \frac{\beta z}{\gamma}\\ -\frac{\gamma}{(\alpha+1)(z-1)} & \frac{\gamma-\alpha-1-\beta z}{(\alpha+1)(z-1)}\end{pmatrix},\qquad \det A_1(\boldsymbol{a})=\frac{\gamma-\alpha-1}{(\alpha+1)(z-1)},\tag{24a}$$

$$A_3(\boldsymbol{a})=\begin{pmatrix}\frac{\gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)} & -\frac{\alpha\beta(z-1)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}\\ \frac{\gamma(\gamma+1)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)z} & \frac{\gamma(\gamma+1)(z-1)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)z}\end{pmatrix},\qquad \det A_3(\boldsymbol{a})=\frac{\gamma(\gamma+1)(z-1)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)z}.\tag{24b}$$

矩阵 $A_{13}(\boldsymbol{a}):=A(\boldsymbol{a};\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_3)=A_1(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{e}_3)A_3(\boldsymbol{a})$ 也经常出现。对于这个矩阵，我们有

$$A_{13}(\boldsymbol{a})=\frac{1}{\gamma-\beta}\begin{pmatrix}\gamma & \beta(z-1)\\ -\frac{\gamma(\gamma+1)}{(\alpha+1)z} & \frac{(\gamma+1)(\gamma-\beta z)}{(\alpha+1)z}\end{pmatrix},\qquad \det A_{13}(\boldsymbol{a})=\frac{\gamma(\gamma+1)}{(\alpha+1)(\gamma-\beta)z}.\tag{25}$$

令 $(\alpha)_k$ de 记波赫哈默符号：$(\alpha)_0=1$ 和 $(\alpha)_k:=\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)$，其中 $k\in\mathbb{N}$.

引理3. 3 对于任意 $\boldsymbol{p}=(p,0,r)\in\mathbb{Z}^3$，若 $1\le p\le r$，则矩阵 $A(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})$ 可表示为

$$A(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})=\frac{1}{(\gamma-\alpha)_{r-p}(\gamma-\beta)_r}\begin{pmatrix}\frac{(\gamma)_r\cdot\phi_{11}^{(r-1)}}{(\alpha+1)_{p-1}} & \frac{(\gamma+1)_{r-1}\cdot\phi_{12}^{(r-1)}}{(\alpha+1)_{p-1}}\\ \frac{(\gamma)_{r+1}\cdot\phi_{21}^{(r-1)}}{(\alpha+1)_p} & \frac{(\gamma+1)_r\cdot\phi_{22}^{(r)}}{(\alpha+1)_p}\end{pmatrix},\tag{26}$$

其中 $\phi_{ij}^{(k)}=\phi_{ij}^{(k)}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})$ 是关于 $\boldsymbol{a}=(\alpha、\beta、\gamma)$ 的多项式，其关于（α、γ）的次数至多为 k，而不关于 $\boldsymbol{a}$。此外 r,

$$\det A(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})=\frac{z^{-r}(z-1)^{r-p}(\gamma)_r(\gamma+1)_r}{(\alpha+1)_p(\gamma-\alpha)_{r-p}(\gamma-\beta)_r}.\tag{27}$$

证明。除公式 (27) 外，我们用关于 r的归纳法证明该断言。首先，对于 $r=1$，有 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_3$，因此 $A(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})=A_{13}(\boldsymbol{a})$。比较 (25) 和 (26)，可得 $\phi_{11}^{(0)}=1$、$\phi_{12}^{(0)}=\beta(z-1)$、$\phi_{21}^{(0)}=-1/z$ 和$\phi_{22}^{(1)}=(\gamma-\beta z)/z$。因此，该断言对 $r=1$ 成立。接下来，我们证明在经过 $r\mapsto r+1$后该断言仍然成立。设 $\boldsymbol{p}\mapsto\bar{\boldsymbol{p}}$ 为 $\boldsymbol{p}$中相应的变化。那么有两种情况:

$$\text{(i)}\quad \boldsymbol{p}=(p,0,r)\text{ and }\bar{\boldsymbol{p}}=(p,0,r+1)\text{ with }p\le r;\qquad \text{(ii)}\quad \boldsymbol{p}=(r,0,r)\text{ and }\bar{\boldsymbol{p}}=(r+1,0,r+1).$$

在情况 (i) 中，有 $A(\boldsymbol{a};\bar{\boldsymbol{p}})=A_3(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{p})A(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})$。利用公式 (26) 和 (24b)，可得递推关系:

$$\phi_{11}^{(r)}=(\gamma-\alpha-\beta+r-p)\,\phi_{11}^{(r-1)}-\beta(z-1)\,\phi_{21}^{(r-1)},\qquad \phi_{12}^{(r)}=(\gamma-\alpha-\beta+r-p)\,\phi_{12}^{(r-1)}-\beta(z-1)\,\phi_{22}^{(r)},$$
$$\phi_{21}^{(r)}=z^{-1}\{(\alpha+p)\,\phi_{11}^{(r-1)}+(\gamma+r)(z-1)\,\phi_{21}^{(r-1)}\},\quad \phi_{22}^{(r+1)}=z^{-1}\{(\alpha+p)\,\phi_{12}^{(r-1)}+(\gamma+r)(z-1)\,\phi_{22}^{(r)}\}.$$

在情形 (ii) 中，我们有 $A(\boldsymbol{a};\bar{\boldsymbol{p}})=A_{13}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{p})A(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})$。利用公式 (26) 和 (25)，我们得到递推关系 s:

$$\phi_{11}^{(r)}=(\alpha+r)\,\phi_{11}^{(r-1)}+\beta(z-1)\,\phi_{21}^{(r-1)},\qquad \phi_{12}^{(r)}=(\alpha+r)\,\phi_{12}^{(r-1)}+\beta(z-1)\,\phi_{22}^{(r)},$$
$$\phi_{21}^{(r)}=-(\alpha+r)\,\phi_{11}^{(r-1)}+(\gamma+r-\beta z)\,\phi_{21}^{(r-1)},\qquad \phi_{22}^{(r+1)}=-(\alpha+r)\,\phi_{12}^{(r-1)}+(\gamma+r-\beta z)\,\phi_{22}^{(r)}.$$

无论哪种情形，递推关系都表明，在作出变换 $r\mapsto r+1$ 后，关于次数的断言仍然成立，因此归纳法完成。最后，我们取.....的行列式

$$A(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})=A_1(\boldsymbol{a}+(p-1)\boldsymbol{e}_1+r\boldsymbol{e}_3)\cdots A_1(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{e}_1+r\boldsymbol{e}_3)\,A_1(\boldsymbol{a}+r\boldsymbol{e}_3)$$
$$\cdot A_3(\boldsymbol{a}+(r-1)\boldsymbol{e}_3)\cdots A_3(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{e}_3)\,A_3(\boldsymbol{a})$$

并利用（24）中的行列式公式推导公式（27）。 □

给定整数据 $\lambda=(p,\ q,\ r;\ a,\ b;\ x)$，将 $\boldsymbol{a}=(pw+a,\ qw+b;\ rw)$ 和 $z=x$ 代入方程（22），得到

$$\boldsymbol{f}(w+1;\lambda)=A(w;\lambda)\boldsymbol{f}(w;\lambda),\qquad \boldsymbol{f}(w;\lambda):={}^t(f(w;\lambda),\ \widetilde{f}(w;\lambda)),$$

其中 $A(w;\lambda)$ 是一个依赖于 λ 的矩阵，其元素是关于 w 的有理函数。于是，三项关系 (20) 的系数可表示为

$$R(w;\lambda)=A(w;\lambda)_{11},\qquad Q(w;\lambda)=A(w;\lambda)_{12}. \tag{28}$$

其中 $A(w;\lambda)_{ij}$ 表示矩阵 $A(w;\lambda)$ 的 (i,j) 项。引理 3.3 有如下推论。

推论 3.4 对于任意一组整数据 $\lambda=(p,0,r;a,1/2;x)\in\mathcal{I}$，我们有

$$A(w;\lambda)=\frac{1}{((r-p)w-a)_{r-p}(rw-1/2)_r}\begin{pmatrix}\dfrac{(rw)_r\cdot\phi_{11}^{(r-1)}(w;\lambda)}{(pw+a+1)_{p-1}} & \dfrac{(rw+1)_{r-1}\cdot\phi_{12}^{(r-1)}(w;\lambda)}{(pw+a+1)_{p-1}}\\ \dfrac{(rw)_{r+1}\cdot\phi_{21}^{(r-1)}(w;\lambda)}{(pw+a+1)_p} & \dfrac{(rw+1)_r\cdot\phi_{22}^{(r)}(w;\lambda)}{(pw+a+1)_p}\end{pmatrix}, \tag{29}$$

其中 $\phi_{ij}^{(k)}(w;\lambda)$ 是关于 w 的一个次数至多为 k 的多项式，且依赖于 λ。此外，我们有 e

$$\det A(w;\lambda)=\frac{x^{-r}(x-1)^{r-p}(rw)_r(rw+1)_r}{(pw+a+1)_p((r-p)w-a)_{r-p}(rw-1/2)_r}. \tag{30}$$

证明。我们只需将 $\boldsymbol{a}=(pw+a,1/2,rw)$ 和 $z=x$ 代入公式 (26) 和 (27) 中。 □

引理 3.5 一组整数据 $\lambda=(p,0,r;a,1/2;x)\in\mathcal{I}$ 是非初等解，当且仅当多项式 $\phi_{12}^{(r-1)}(w;\lambda)$ 在 w 中恒等于零；此时 $\deg\phi_{11}^{(r-1)}(w;\lambda)=r-1$，$\deg\phi_{22}^{(r)}(w;\lambda)=r$ 并且

$$\phi_{11}^{(r-1)}(w;\lambda)\cdot\phi_{22}^{(r)}(w;\lambda)=C_1\prod_{i=1}^{p-1}\Big(w+\tfrac{i+a}{p}\Big)\prod_{j=0}^{r-p-1}\Big(w+\tfrac{j-a}{r-p}\Big)\prod_{j=0}^{r-1}\Big(w+\tfrac{j-1/2}{r}\Big), \tag{31}$$

其中 $C_1:=(r/x)^r(x-1)^{r-p}p^{p-1}(r-p)^{r-p}$。此外，在这种情况下，我们有

$$R(w;\lambda)=(r/x)^r(x-1)^{r-p}\cdot\frac{\prod_{i=0}^{r-1}\left(w+\frac{i}{r}\right)}{\phi_{22}^{(r)}(w;\lambda)}. \tag{32}$$

证明。根据定理 3.2，λ 是一个解，当且仅当 $A(w;\lambda)_{12}=Q(w;\lambda)\equiv 0$，也就是说，$\phi_{12}^{(r-1)}(w;\lambda)\equiv 0$；在这种情况下，矩阵 $A(w;\lambda)$ 是下三角矩阵。因此，对方程（29）取行列式可得

$$\det A(w;\lambda)=\frac{1}{\{((r-p)w-a)_{r-p}(rw-1/2)_r\}^2}\cdot\frac{(rw)_r\cdot\phi_{11}^{(r-1)}(w;\lambda)}{(pw+a+1)_{p-1}}\cdot\frac{(rw+1)_r\cdot\phi_{22}^{(r)}(w;\lambda)}{(pw+a+1)_p}.$$

将此表达式与公式 (30) 比较，可得

$$\phi_{11}^{(r-1)}(w;\lambda)\cdot\phi_{22}^{(r)}(w;\lambda)=x^{-r}(x-1)^{r-p}\cdot(pw+a+1)_{p-1}((r-p)w-a)_{r-p}(rw-1/2)_r, \tag{31$'$}$$

这等价于公式 (31)。由推论 3.4 可得 $\deg\phi_{11}^{(r-1)}(w;\lambda)\le r-1$ 以及 $\deg\phi_{22}^{(r)}(w;\lambda)\le r$，而公式 (31) 蕴含 $\deg\{\phi_{11}^{(r-1)}(w;\lambda)\cdot\phi_{22}^{(r)}(w;\lambda)\}=2r-1=(r-1)+r$。因此必有 $\deg\phi_{11}^{(r-1)}(w;\lambda)=r-1$ 以及 $\deg\phi_{22}^{(r)}(w;\lambda)=r$。最后，由公式 (28)、(29) 和 (31′) 可得

$$R(w;\lambda)=\frac{(rw)_r\cdot\phi_{11}^{(r-1)}(w;\lambda)}{((r-p)w-a)_{r-p}\cdot(rw-1/2)_r\cdot(pw+a+1)_{p-1}}=x^{-r}(x-1)^{r-p}\frac{(rw)_r}{\phi_{22}^{(r)}(w;\lambda)},$$

这等价于公式 (32)。引理 3.5 得证。 □

引理 3.5 将会　　作为非初等解的 GPF 的来源，在命题 3.8 中很重要，其中 $\mathcal{I}$　　.

3.2 连续矩阵的首项渐近

连续矩阵 $A(w;\lambda)$ 在 $w\to\infty$ 时的首项渐近行为包含一些有用信息。

引理 3.6 对于任意一段整数据 $\lambda=(p,0,r;a,1/2;x)\in\mathcal{I}$，矩阵 $A(w;\lambda)$ 可以展开为

$$A(w;\lambda)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ * & \frac{r^r(x-1)^{r-p}}{p^p(r-p)^{r-p}x^r}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}* & C_2\cdot Y(x;\boldsymbol{p})\\ * & *\end{pmatrix}w^{-1}+O\left(w^{-2}\right)\quad as\quad w\to\infty, \tag{33}$$

其中 $C_2:=p^{1-p}(r-p)^{p-r}(2r)^{-1}x^{1-r}(1-x)(r-px)^{-1}$ 以及 $Y(z;\boldsymbol{p})$ 是由 z 定义的多项式

$$Y(z;\boldsymbol{p}):=p^p(r-p)^{r-p}z^r-r^r(1-z)^{r-p}, \tag{34}$$

它只依赖于数据 λ的主部 $\boldsymbol{p}=(p,0,r)$。

证明。由带有格路径 $\boldsymbol{p}=(p,0,r)=(r-p)\boldsymbol{e}_3+p(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_3)$的公式（23）可得

$$A(w;\lambda)=\prod_{i=0}^{r-p-1}A_3(pw+a+p,\,1/2,\,rw+p+i)\prod_{j=0}^{p-1}A_{13}(pw+a+j,\,1/2,\,rw+j)\quad\text{at}\quad z=x,$$

其中矩阵乘积 乘积随指标增加而从右向左延伸。由公式（24b）和（25）可得 e

$$A_3(pw+a+p,\,1/2,\,rw+p+i)=A_3(0)+A_3^{(i)}(1)\,w^{-1}+O\left(w^{-2}\right),$$
$$A_{13}(pw+a+j,\,1/2,\,rw+j)=A_{13}(0)+A_{13}^{(j)}(1)\,w^{-1}+O\left(w^{-2}\right),$$

其中 $A_3(0)$ 和 $A_{13}(0)$ 是如下形式的下三角矩阵

$$A_3(0)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ * & \frac{r(x-1)}{(r-p)x}\end{pmatrix},\qquad A_{13}(0)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ * & \frac{r}{px}\end{pmatrix},$$

它们与 i 和 j 无关，而 $A_3^{(i)}(1)$ 和 $A_{13}^{(j)}(1)$ 是如下形式的矩阵

$$A_3^{(i)}(1)=\begin{pmatrix}* & -\frac{p(x-1)}{2(r-p)r}\\ * & *\end{pmatrix},\qquad A_{13}^{(j)}(1)=\begin{pmatrix}* & \frac{x-1}{2r}\\ * & *\end{pmatrix},$$

它们可能分别依赖于 i 和 j。因此，展开式（33）中的首项是下三角矩阵

$$A_3(0)^{r-p}\cdot A_{13}(0)^p=\begin{pmatrix}1 & 0\\ * & \frac{r^r(x-1)^{r-p}}{p^p(r-p)^{r-p}x^r}\end{pmatrix},$$

而第二主项的系数是矩阵和

$$\sum_{i=0}^{r-p-1}A_3(0)^i\cdot A_3^{(i)}(1)\cdot A_3(0)^{r-p-1-i}\cdot A_{13}(0)^p+\sum_{j=0}^{p-1}A_3(0)^{r-p}\cdot A_{13}(0)^j\cdot A_{13}^{(j)}(1)\cdot A_{13}(0)^{p-1-j},$$

其 (1，2) 项计算为

$$\sum_{i=0}^{r-p-1}1^i\cdot\left\{-\tfrac{p(x-1)}{2(r-p)r}\right\}\cdot\left\{\tfrac{r(x-1)}{(r-p)x}\right\}^{r-p-1-i}\cdot\left(\tfrac{r}{px}\right)^p+\sum_{j=0}^{p-1}1^{r-p}\cdot1^j\cdot\left(\tfrac{x-1}{2r}\right)\cdot\left(\tfrac{r}{px}\right)^{p-1-j}$$
$$=\frac{(1-x)\{p^p(r-p)^{r-p}x^r-r^r(x-1)^{r-p}\}}{2r\cdot p^{p-1}(r-p)^{r-p}x^{r-1}(r-px)}=C_2\cdot Y(x;\boldsymbol{p}).$$

因此，展开公式 (33) 得证。 □

由引理 3.6 可得 关于 x 的代数方程，这是定理 2.1 中方程 (8) 的一个预备结果。

推论 3.7 如果 $\lambda = (p,0,r;\ a,1/2;\ x) \in \mathcal{I}$是一个非初等解，那么 x 是代数方程 $Y(z;\boldsymbol{p}) = 0$在区间 $(0,1)$ 内的唯一根，其中 $Y(z;\boldsymbol{p})$ 由公式 (34)定义。

证明。由引理 3.5，矩阵 $A(w;\lambda)$ 是下三角矩阵，因此引理 3.6 中的公式 (33) 强制得出 $Y(x;\boldsymbol{p}) = 0$，于是 x 是方程 $Y(z;\boldsymbol{p}) = 0$的一个根。由于 $Y(0;\boldsymbol{p}) = -r^r < 0 < Y(1;\boldsymbol{p}) = p^p(r-p)^{r-p}$并且

$$Y'(z;\boldsymbol{p}) = r(r-p)\{p^p(r-p)^{r-p-1}z^{r-1} + r^{r-1}(1-z)^{r-p-1}\} > 0 \quad \text{for} \quad 0 < z < 1,$$

方程 $Y(z;\boldsymbol{p}) = 0$ 在区间 $(0,\ 1)$ 内有唯一根 x。 □

现在我们可以确定 $\mathcal{I}$ 中每个非初等解所必须具有的 GPF 一般形式。为陈述这一形式，我们将给定正整数 k 时的集合 $\{0,1,\dots,k-1\}$ 记为 $[k]$。

命题 3.8 对于任意非初等解 $\lambda = (p,\ 0,\ r;\ \ a,1/2;\ \ x) \in \mathcal{I}$，存在子集 $I_p \subset [p]\setminus\{0\}$、$J_p \subset [r-p]$ 和 $J_q \subset [r]$，其基数总和为 $|I_p| + |J_p| + |J_q| = r$，使得 λ 可表示为如下形式的 *GPF*

$$f(w;\lambda) = C \cdot \frac{\prod_{i=0}^{r-1} \Gamma(w + \frac{i}{r})}{\prod_{i=1}^{r} \Gamma(w + v_i)}, \tag{10a}$$

其中 C 是一个非零常数，而 $v_1,\dots,v_r$ 由方程确定

$$\prod_{i=1}^{r}(w+v_i) = \prod_{i\in I_p}\Big(w+\tfrac{i+a}{p}\Big)\prod_{j\in J_p}\Big(w+\tfrac{j-a}{r-p}\Big)\prod_{j\in J_q}\Big(w+\tfrac{j-1/2}{r}\Big). \tag{35}$$

此外，数 $v_1,\dots,v_r$ 的和为 $v_1+\cdots+v_r = (r-1)/2$。

证明。由引理 3.5 可知 $\deg \phi_{22}^{(r)}(w;\lambda) = r$，因此可写为 $\phi_{22}^{(r)}(w;\lambda) = c_1(w+v_1)\cdots(w+v_r)$，其中 c_1 是一个非零常数，$v_1,\dots,v_r$ 是一些数。由方程 (31)，存在子集 $I_p \subset [p]\setminus\{0\}$, $J_p \subset [r-p]$ 和 $J_q \subset [r]$，满足 $|I_p| + |J_p| + |J_q| = r$，使得方程 (35) 成立。根据公式 (32)，我们有

$$\frac{f(w+1;\lambda)}{f(w;\lambda)} = R(w;\lambda) = d\cdot\frac{\prod_{i=0}^{r-1}\left(w+\frac{i}{r}\right)}{\prod_{i=1}^{r}(w+v_i)},$$

对于某个常数 d。由于在公式 (33) 中，当 $w\to\infty$ 时，$R(w;\lambda) = A(w;\lambda)_{11} \to 1$，因此我们有 $d = 1$。于是，GPF (10a) 可由定理 3.1 得出，而求和式 $v_1+\cdots+v_r = (r-1)/2$ 来自公式 (21)。□

命题 3. 8 确立了 GPF (10a) 以及定理 2.2 中求和公式 (11) 的前半部分 .

3.3 截断超几何乘积

鉴于有理函数 $Q(w;\lambda)$ 和 $R(w;\lambda)$ 发挥着重要作用，因此有必要为它们寻找有效公式。这相当于为多项式 $\phi_{12}^{(r-1)}(w;\lambda)$ 和 $\phi_{22}^{(r)}(w;\lambda)$ 寻找这样的公式，因为前者与后者通过关系式 (28)、(29) 和 (32) 相联系。本小节旨在用两个超几何级数乘积的截断来表示这些多项式；见引理 3.10。

给定幂级数 $\phi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_k\, z^j$，其在次数 k 处的截断是多项式 $\langle\phi(z)\rangle_k := \sum_{j=0}^{k} c_k\, z^j$。下文中的截断始终针对变量 z 进行。首先，我们回顾 [6, 引理 10.1] 中的以下引理，该引理最初由 Ebisu [3,命题 3.4、定理 3.7、注 3.11]提出。

引理 3.9 对于任意整数向量 $\boldsymbol{p} = (p,\ q,\ r) \in \mathbb{Z}^3$，若满足 $0 \le q \le p \le r-1$，则有

$$q(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p};z) = z^{1-r}(z-1)\cdot C(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p})\cdot\langle {}_2F_1(\boldsymbol{a}^*;z)\cdot {}_2F_1(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{a}^*-\boldsymbol{p}^*;z)\rangle_{r-q-1}, \tag{36a}$$

$$q(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p}+\boldsymbol{1};z) = z^{-r}(z-1)\cdot C(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p}+\boldsymbol{1})\cdot\langle {}_2F_1(\boldsymbol{a}^*;z)\cdot {}_2F_1(\boldsymbol{1}-\boldsymbol{a}^*-\boldsymbol{p}^*;z)\rangle_{r-q-1}, \tag{36b}$$

其中 $\boldsymbol{a} := (\alpha、\ \beta、\ \gamma)$，$\boldsymbol{a}^* := (\gamma-\alpha、\ \gamma-\beta、\ \gamma)$，$\boldsymbol{p}^* := (r-p、\ r-q、\ r)$，$\boldsymbol{v} := (1,\ \ 1、2)$，$\boldsymbol{1} := (1、1、\ 1)$ 以及

$$C(\boldsymbol{a};\boldsymbol{p}) := (-1)^{r-p-q}\cdot\frac{(\gamma)_{r-1}(\gamma+1)_{r-1}}{(\alpha+1)_{p-1}(\beta+1)_{q-1}(\gamma-\alpha)_{r-p}(\gamma-\beta)_{r-q}}, \qquad (\alpha+1)_{-1} := \alpha^{-1}.$$

给定一组整数据 $\lambda=(p,\ 0、\ r;\ a、\ 1/2;\ x)\in\mathcal{I}$，我们考虑截断超几何乘积：

$$\Phi(w;\lambda):=(rw)_{r-1}\cdot\langle {}_2F_1(\boldsymbol{\alpha}^*(w);z)\cdot {}_2F_1(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{\alpha}^*(w+1);z)\rangle_{r-1}\big|_{z=x}, \tag{37a}$$

$$P(w;\lambda):=(rw)_{r}\cdot\langle {}_2F_1(\boldsymbol{\alpha}^*(w);z)\cdot {}_2F_1(\mathbf{1}-\boldsymbol{\alpha}^*(w+1);z)\rangle_{r-1}\big|_{z=x}, \tag{37b}$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}^*(w):=((r-p)w-a,\ \ rw-1/2;\ rw)$。于是我们有如下引理。

引理 3.10 对于任意整数据 $\lambda=(p,0,r;\ \ a,1/2;\ \ x)\in\mathcal{I}$，有

$$\phi_{12}^{(r-1)}(w;\lambda)=(-1)^{r-p}\cdot 2^{-1}\cdot x^{1-r}\cdot(x-1)\cdot\Phi(w;\lambda), \tag{38a}$$

$$\phi_{22}^{(r)}(w;\lambda)=(-1)^{r-p-1}x^{-r}(x-1)\cdot P(w;\lambda). \tag{38b}$$

证明。将 $\boldsymbol{p}=(p,\ \ 0,\ \ r)$、$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{\alpha}(w)$、$\boldsymbol{a}^*=\boldsymbol{\alpha}^*(w)$ 和 $z=x$ 代入公式 (36a)，得到

$$\begin{aligned}A(w;\lambda)_{12}&=q(\boldsymbol{\alpha}(w);\boldsymbol{p};x)\\&=x^{1-r}\cdot(x-1)\cdot C(\boldsymbol{\alpha}(w);\boldsymbol{p})\langle {}_2F_1(\boldsymbol{\alpha}^*(w);z)\cdot {}_2F_1(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{\alpha}^*(w)-\boldsymbol{p}^*;z)\rangle_{r-1}\big|_{z=x}\\&=x^{1-r}\cdot(x-1)\cdot C(\boldsymbol{\alpha}(w);\boldsymbol{p})\langle {}_2F_1(\boldsymbol{\alpha}^*(w);z)\cdot {}_2F_1(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{\alpha}^*(w+1);z)\rangle_{r-1}\big|_{z=x}\\&=x^{1-r}(x-1)\cdot C(\boldsymbol{\alpha}(w);\boldsymbol{p})\cdot\Phi(w;\lambda)/(rw)_{r-1},\end{aligned}$$

其中，第三个等式中用到了 $\boldsymbol{\alpha}^*(w)+\boldsymbol{p}^*=\boldsymbol{\alpha}^*(w+1)$。另一方面，公式 (29) 意味着

$$A(w;\lambda)_{12}=\frac{(rw+1)_{r-1}\cdot\phi_{12}^{(r-1)}(w;\lambda)}{(pw+a+1)_{p-1}((r-p)w-a)_{r-p}(rw-b)_r}.$$

比较 $A(w;\lambda)_{12}$, 的这两个表达式，我们得到公式 (38a)。S

同样，s 将 $\boldsymbol{p}=(p,0,r)$、$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{\alpha}(w)$、$\boldsymbol{a}^*=\boldsymbol{\alpha}^*(w)$ 和 $z=x$ 代入公式 (36b)，我们得到 e

$$\begin{aligned}A(w;\lambda)_{22}&=q(\boldsymbol{\alpha}(w);\boldsymbol{p}+\mathbf{1};x)\\&=x^{-r}\cdot(x-1)\cdot C(\boldsymbol{\alpha}(w);\boldsymbol{p}+\mathbf{1})\cdot\langle {}_2F_1(\boldsymbol{\alpha}^*(w);z)\cdot {}_2F_1(\mathbf{1}-\boldsymbol{\alpha}^*(w)-\boldsymbol{p}^*;z)\rangle_{r-1}\big|_{z=x}\\&=x^{-r}\cdot(x-1)\cdot C(\boldsymbol{\alpha}(w);\boldsymbol{p}+\mathbf{1})\cdot\langle {}_2F_1(\boldsymbol{\alpha}^*(w);z)\cdot {}_2F_1(\mathbf{1}-\boldsymbol{\alpha}^*(w+1);z\rangle_{r-1}\big|_{z=x}\\&=x^{-r}(x-1)\cdot C(\boldsymbol{\alpha}(w);\boldsymbol{p}+\mathbf{1})\cdot P(w;\lambda)/(rw)_r.\end{aligned}$$

另一方面，公式 (29) 意味着

$$A(w;\lambda)_{22}=\frac{(rw+1)_{r}\cdot\phi_{22}^{(r)}(w;\lambda)}{((r-p)w-a)_{r-p}(rw-1/2)_r(pw+a+1)_p}.$$

比较 $A(w;\lambda)_{22}$, 的这两个表达式，我们得到公式 (38b)。 □

就截断超几何乘积而言,定理 3.2 和命题 3.8 可总结如下 s.

命题 *3.11* 一组整数据 $\lambda=(p,0,r;a,1/2;\ x)\in\mathcal{I}$ 是一个解，当且仅当多项式$\Phi(w;\ \lambda)$ 恒等于零；此时我们有 $P(w;\ \lambda)=c(w+v_1)\cdots(w+v_r)$，其中 c 是一个非零常数，而 v_1、 .. 、 v_r 是命题 *3.8* 中 *GPF* $(10a)$ 里出现的数。

证明。注意，根据引理 3.5， λ 是解当且仅当 $\phi_{12}^{(r-1)}(w;\ \lambda)\equiv 0$；根据公式 (38a)，这又当且仅当 $\Phi(w;\lambda)\equiv 0$。在这种情况下，公式 (38b)意味着 $P(w;\ \lambda)$是$(w+v_1)\cdots(w+v_r)$的非零倍数，因为如命题 3.8 的证明中所述，$\phi_{22}^{(r)}(w;\lambda)$也是如此。□

3.4 终止超几何和

如果在以下点处求值式（37）中的截断超几何乘积 $\Phi(w;\ \lambda)$ 和 $P(w;\ \lambda)$

$$\xi_j:=-\frac{j-a}{r-p},\quad j\in[r-p];\qquad \eta_j:=-\frac{j-1/2}{r},\quad j\in[r], \tag{39}$$

那么其中的两个超几何级数就会化为有限和，因此无需进行截断。正如在 [6, §11] 中针对另一组数据 λ 所观察到的那样，（重新归一化的）超几何多项式

$$\mathcal{F}_k(\beta;\gamma;z) := \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} (\beta)_j (\gamma+j)_{k-j}\, z^j, \qquad k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \tag{40}$$

在这种情况下会出现。注意，除非 γ 为零或负整数，否则 $\mathcal{F}_k(\beta;\ \gamma;\ z) = (\gamma)_k \cdot {}_2F_1(-k,\ \beta;\ \gamma;\ z)$。

引理 3.12 设 $\lambda = (p, 0, r; a, 1/2; x) \in \mathcal{I}$ 为一组整数据，且 $j \in [r-p]$。若 $r\xi_j \notin \mathbb{Z}$，则

$$\Phi(\xi_j;\lambda) = (-1)^{r-p-1-j} \cdot (r\xi_j + j)_p \cdot \mathcal{F}_j(r\xi_j - 1/2; r\xi_j; x) \cdot \mathcal{F}_{r-p-1-j}(b_j - 1/2; b_j; x), \tag{41a}$$

$$P(\xi_j;\lambda) = (-1)^{r-p-1-j} \cdot (r\xi_j + j)_{p+1} \cdot \mathcal{F}(r\xi_j - 1/2; r\xi_j; x) \cdot \mathcal{F}_{r-p-1-j}(b_j - 1/2; b_j - 1; x), \tag{41b}$$

其中 ξ_j 由公式 (39) 定义，而 $b_j :\ = 2 - r(\xi_j + 1)$。

证明。将 $w = \xi_j$ 代入定义 (37)，并注意到

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha}^*(\xi_j) &= (-j,\ r\xi_j - 1/2,\ r\xi_j),\\
\boldsymbol{v} - \boldsymbol{\alpha}^*(\xi_j + 1) &= (-(r-p-1-j),\ 3/2 - r(\xi_j+1),\ 2 - r(\xi_j+1)),\\
\mathbf{1} - \boldsymbol{\alpha}(\xi_j + 1) &= (-(r-p-1-j),\ 3/2 - r(\xi_j+1),\ 1 - r(\xi_j+1)),\\
(r\xi_j)_{r-1} &= (-1)^{r-p-1-j} \cdot (r\xi_j + j)_p \cdot (r\xi_j)_j \cdot (2 - r(\xi_j+1))_{r-p-1-j},\\
(r\xi_j)_r &= (-1)^{r-p-1-j} \cdot (r\xi_j + j)_{p+1} \cdot (r\xi_j)_j \cdot (1 - r(\xi_j+1))_{r-p-1-j},
\end{aligned}$$

其中 $r\xi_j \notin \mathbb{Z}$ 且 $b_j = 2 - r(\xi_j + 1) \notin \mathbb{Z}$，由定义 (40) 得到公式 (41)。 □

引理 3.13 对于任意一组整数据 $\lambda = (p, 0, r; a, 1/2; x) \in \mathcal{I}$ 以及任意 $j \in [r]$，有

$$\Phi(\eta_j;\lambda) = (-1)^{r-1-j} \cdot \mathcal{F}_j(c_j;\ 1/2 - j;\ x) \cdot \mathcal{F}_{r-1-j}(d_j;\ 3/2 + j - r;\ x), \tag{42a}$$

$$2\,P(\eta_j;\lambda) = (-1)^{r-1-j} \cdot \mathcal{F}_j(c_j;\ 1/2 - j;\ x) \cdot \mathcal{F}_{r-1-j}(d_j;\ 1/2 + j - r;\ x), \tag{42b}$$

wh其中 η_j 在公式 (39) 中定义，$c_j :\ = (r-p)\eta_j - a$ 以及 $d_j :\ = 1 - (r-p)(\eta_j + 1)\ + a$.

证明。将 $w = \eta_j$ 代入定义 (37)，并注意到

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha}^*(\eta_j) &= (c_j,\ -j,\ r\eta_j),\\
\boldsymbol{v} - \boldsymbol{\alpha}^*(\eta_j + 1) &= (d_j,\ -(r-1-j),\ 2 - r(\eta_j+1)),\\
\mathbf{1} - \boldsymbol{\alpha}^*(\eta_j + 1) &= (d_j,\ -(r-1-j),\ 1 - r(\eta_i+1)),\\
(r\eta_j)_{r-1} &= (-1)^{r-1-j} \cdot (r\eta_j)_j \cdot (2 - r(\eta_j+1))_{r-1-j},\\
(r\eta_j)_r &= (-1)^{r-1-j} \cdot (r\eta_j + j) \cdot (r\eta_j)_j \cdot (1 - r(\eta_j+1))_{r-1-j},
\end{aligned}$$

令 $r\eta_j + j = 1/2$、$r\eta_j = 1/2 - j \notin \mathbb{Z}$、$2 - r(\eta_j + 1) = 3/2 + j - r \notin \mathbb{Z}$ 和 $1 - r(\eta_j + 1) = 1/2 + j - r \notin \mathbb{Z}$，由定义 (40) 得到公式 (42)。□

关于上述提到的求值，我们回顾 [6, 引理 11.2] 中的以下引理。

引理 3.14 固定 $k \in \mathbb{N}$、β、$\gamma \in \mathbb{C}$，并令 z 为一个不定元。

(1) $\mathcal{F}_k(\beta;\gamma;\ z)$ 当且仅当 β、$\gamma \in \mathbb{Z}$ 和 $0 \leq -\beta \leq -\gamma \leq k-1$ 时，在 $\mathbb{C}[z]$ 中恒等于零。
(2) 若 $\mathcal{F}_k(\beta;\ \gamma;\ x) = \mathcal{F}_k(\beta;\gamma - 1;\ x) = 0$，则 $\mathcal{F}_k(\beta;\gamma;\ z)$ 在 $\mathbb{C}[z]$ 中恒等于零。*(3)* 若 $\mathcal{F}_k(\beta;\ \gamma;\ x) = \mathcal{F}_{k-1}(\beta+1;\ \gamma+1;\ x) = 0$，则 $\mathcal{F}_k(\beta;\gamma;\ z)$ 在 $\mathbb{C}[z]$ 中恒等于零。

引理 3.14 的断言（1）给出了多项式 $u(z) := \mathcal{F}_k(\beta;\gamma;\ z)$ 所有系数均为零的条件；该多项式是超几何微分方程的一个解。(2) 和 (3) 中的假设等价于常点 x 处的初始条件 $u(x) = u'(x) = 0$，这迫使 $u(z) \equiv 0$。

下面这个看似技术性的命题，将在证明引理 4.4（这是建立定理 2.1 和 2.2 的某些部分所需的关键引理之一）时发挥重要作用。

命题 3.15 在命题 3.8 中，若 $ra/(r-p) \notin \mathbb{Z}$，则 $0 \notin J_p$；而 $0 \notin J_q$ 始终成立。

证明。根据命题 3.11，我们有 $\Phi(w;\lambda) \equiv 0$。由于 $r\xi_0 = ra/(r-p) \notin \mathbb{Z}$，将 $j=0$ 代入方程（41）可得

$$\Phi(\xi_0;\lambda) = (-1)^{r-p-1}\cdot(r\xi_0)_p \cdot \mathcal{F}_{r-p-1}(b_0-1/2; b_0; x) = 0,$$
$$P(\xi_0;\lambda) = (-1)^{r-p-1}\cdot(r\xi_0)_{p+1} \cdot \mathcal{F}_{r-p-1}(b_0-1/2; b_0-1; x),$$

其中 $(r\xi_0)_p \neq 0$ 且 $(r\xi_0)_{p+1} \neq 0$。此外，若 $0 \in J_p$，则命题 3.11 蕴含 $P(\xi_0;\lambda) = 0$，从而 $\mathcal{F}_{r-p-1}(b_0-1/2;\, b_0;\, x) = \mathcal{F}_{r-p-1}(b_0-1/2; b_0-1;\, x) = 0$。根据引理 3.14 的断言（2），我们有$\mathcal{F}_{r-p-1}(b_0-1/2;\, b_0;\, z) \equiv 0$。然而，根据同一引理的断言（1），我们有 $\mathcal{F}_{r-p-1}(b_0-1/2;\, b_0; z) \not\equiv 0$，因为 $b_0 = 2-r-ra/(r-a) \notin \mathbb{Z}$。这一矛盾表明，若 $ra/(r-p) \notin \mathbb{Z}$，则 $0 \notin J_p$。

类似地，将 $j=0$ 代入方程（42）可得

$$\Phi(\eta_0;\lambda) = (-1)^{r-1}\cdot \mathcal{F}_{r-1}(d_0;\, 3/2-r;\, x) = 0,$$
$$2\,P(\eta_0;\lambda) = (-1)^{r-1}\cdot \mathcal{F}_{r-1}(d_0;\, 1/2-r;\, x).$$

若 $0 \in J_q$，则命题 3.11 推出 $P(\eta_0;\, \lambda) = 0$，因此 $\mathcal{F}_{r-1}(d_0;\, 3/2-r;\, x) = \mathcal{F}_{r-1}(d_0;\, 1/2-r;\, x) = 0$。根据引理 3.14 的断言（2），我们有 $\mathcal{F}_{r-1}(d_0; 3/2-r; z) \equiv 0$。然而，根据同一引理的断言（1），我们有 $\mathcal{F}_{r-1}(d_0;\, 3/2-r; z) \not\equiv 0$，因为 $3/2-r$ 不是整数。这个矛盾表明 $0 \notin J_q$。□

4 对偶性与互反性

除了 ${}_2F_1$ （$\boldsymbol{a};\, z$）带有参数 $\boldsymbol{a} = (\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ 的高斯超几何方程有解 s

$${}_2G_1(\boldsymbol{a}; z) := z^{1-\gamma}(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}\,{}_2F_1(1-\alpha, 1-\beta; 2-\gamma; z),$$
$${}_2H_1(\boldsymbol{a}; z) := z^{1-\gamma}(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}\,{}_2F_1(1-\alpha, 1-\beta; \gamma-\alpha-\beta+1; 1-z).$$

给定 $\lambda = (p, q, r;\, a, b;\, x)$，按照从 ${}_2F_1(\boldsymbol{a};\, z)$ 推导出 $f(w;\, \lambda)$ 的相同方式，通过将 $\boldsymbol{a} = (pw+a, qw+b, rw)$ 和 $z = x$ 分别代入 ${}_2G_1(\boldsymbol{a};\, z)$ 和 ${}_2H_1(\boldsymbol{a};\, z)$，定义另外两个函数$g(w;\, \lambda)$ 和 $h(w;\, \lambda)$。简单计算可得，$g(w;\lambda)$ 和 $h(w;\lambda)$ 可以表示为

$$g(w;\lambda) = x^{1-rw}(1-x)^{(r-p-q)w-a-b}\, f(w'+1;\lambda'), \qquad w' := 2/r-1-w, \tag{43a}$$
$$h(w;\lambda) = x^{1-rw}(1-x)^{(r-p-q)w-a-b}\, f(w+c;\check{\lambda}), \qquad c := \frac{1-a-b}{r-p-q}, \tag{43b}$$

其中，λ' 和 $\check{}\lambda$ 分别是由公式 (6a) 和 (6b) 定义的 λ 的对偶和互反。

问题 I 和问题 II 不仅适用于 $f(w;\, \lambda)$，也适用于 $g(w;\, \lambda)$ 和 $h(w;\, \lambda)$。考虑那些由邻接关系得到的问题 II 的整数解。若 λ 是相对于 $f(w;\, \lambda)$ 的此类解，那么λ 相对于 $g(w;\lambda)$ 和 $h(w;\, \lambda)$ 也是同类解；参见引理 [7, 引理3.1]。这一事实与关系式 (43) 为问题 II 带来了两种对称性；如果问题 II 的解能够提升为问题 I 的解，那么这些对称性也会传递到问题 I。这正是区域 $\mathcal{I}$ 中出现的情形；参见定理 3.1 和 3.2。

4.1 对偶性

本小节旨在说明，对偶性 $\lambda \mapsto \lambda'$ 将 $\mathcal{I}$ 中的每个非初等解变换为 $\mathcal{I}$ 中的另一个解，并确定对偶 GPF 的一般形式。结果陈述于命题 4.1。

公式 (4 3a) 以及将 w 替换为 $w+1$、从而将 w' 替换为 $w'-1$ 后得到的公式，给出 d

$$\frac{g(w+1;\lambda)}{g(w;\lambda)} = \frac{(1-x)^{r-p-q}}{x^r}\cdot\frac{f(w';\lambda')}{f(w'+1;\lambda')}. \tag{44}$$

若 λ 是一个整数解 由连续关系得到的问题 II，接着由 [7, 引理3.1] 可得

$$\frac{g(w+1;\lambda)}{g(w;\lambda)} = \Psi_g(w;\lambda)\,\frac{f(w+1;\lambda)}{f(w;\lambda)}, \tag{45}$$

其中， $\Psi_g(w;\lambda)$的显式公式见 [7, 公式（44）]。当 λ 属于 $\mathcal{I}$时，将 $q=0$ 和$b=1/2$ 代入该公式，并考虑到（5）中的模 2 同余关系 $r-p\equiv 0$，可得

$$\begin{aligned}\Psi_g(w;\lambda) &:= (-1)^{r-p}\frac{(pw+a)_p((r-p)w-a)_{r-p}(rw-1/2)_r}{(rw-1)_r(rw)_r}\\ &= \frac{p^p(r-p)^{r-p}}{r^r}\cdot\frac{\prod_{i=0}^{p-1}(w+\frac{i+a}{p})\prod_{j=0}^{r-p-1}(w+\frac{j-a}{r-p})\prod_{j=0}^{r-1}(w+\frac{j-1/2}{r})}{\prod_{i=0}^{r-1}(w+\frac{i-1}{r})\prod_{i=0}^{r-1}(w+\frac{i}{r})}.\end{aligned}\tag{46}$$

将公式 (44) 与 (45) 结合，并将 w 替换为 w'，可得

$$\frac{f(w+1;\lambda')}{f(w;\lambda')} = \frac{(1-x)^{r-p}}{x^r\,\Phi_g(w';\lambda)}\cdot\frac{f(w';\lambda)}{f(w'+1;\lambda)},\qquad w' := \frac{2}{r}-1-w.\tag{47}$$

下面的命题给出了对偶 GPF (10b) 以及定理 2.2 中求和公式 (11) 的对偶部分，从而完成了定理 2.2.(1) 和 2.1.(1) 的证明。

命题 4.1 设 $\lambda=(p,0,r;a,1/2;x)\in\mathcal{I}$是一个具有 *GPF* (10a)的非初等解。命题 3.8 中的方程使我们能够引入与 (35) $v_1,\dots,v_r$互补的数 $v_1^*,\dots,v_r^*$，定义如下：

$$\prod_{i=1}^{r}(w+v_i)\prod_{i=1}^{r}(w+v_i^*) = \prod_{i=0}^{p-1}\Big(w+\tfrac{i+a}{p}\Big)\prod_{j=0}^{r-p-1}\Big(w+\tfrac{j-a}{r-p}\Big)\prod_{j=0}^{r-1}\Big(w+\tfrac{j-1/2}{r}\Big).\tag{9}$$

那么，解 λ 的对偶 $\lambda'\in\mathcal{I}$ 也是一个非初等解，其 *GPF* 为

$$f(w;\lambda') = C'\,\frac{\prod_{i=0}^{r-1}\Gamma(w+\frac{i}{r})}{\prod_{i=1}^{r}\Gamma(w+v_i')},\qquad v_i' := 1-\frac{2}{r}-v_i^*,\tag{10b}$$

且具有求和性质 $v_1'+\cdot+v_r'=(r-1)/2$。此外， $g(w;\lambda)$ 具有乘积表示

$$g(w;\lambda) = D\cdot\delta^w\cdot\frac{\prod_{i=1}^{r}\sin\pi(w+v_i^*)}{\prod_{i=0}^{r-1}\sin\pi(w+\frac{i-1}{r})}\cdot\frac{\prod_{i=1}^{r}\Gamma(w+v_i^*)}{\prod_{i=0}^{r-1}\Gamma(w+\frac{i-1}{r})},\tag{48}$$

其中 $D:=C'\cdot x(1-x)^{-a-1/2}$ 且 $\delta:=x^{-r}(1-x)^{r-p}=p^p\,(r-p)^{r-p}\,r^{-r}$。

证明。将 GPF (10a) 和公式 (46) 代入方程 (47)，并利用 $\Gamma(w+1)=w\Gamma(w)$，得到

$$\begin{aligned}\frac{f(w+1;\lambda')}{f(w;\lambda')} &= \frac{r^r(1-x)^{r-p}}{p^p(r-p)^{r-p}\,x^r}\cdot\frac{\prod_{i=0}^{r-1}(w'+\frac{i-1}{r})\prod_{i=0}^{r-1}(w'+\frac{i}{r})}{\prod_{i=0}^{p-1}(w'+\frac{i+a}{p})\prod_{j=0}^{r-p-1}(w'+\frac{j-a}{r-p})\prod_{j=0}^{r-1}(w'+\frac{j-1/2}{r})}\cdot\frac{\prod_{i=1}^{r}(w'+v_i)}{\prod_{i=0}^{r-1}(w'+\frac{i}{r})}\\ &= 1\cdot\frac{\prod_{i=0}^{r-1}(w'+\frac{i-1}{r})\prod_{i=0}^{r}(w'+\frac{i}{r})}{\prod_{i=1}^{r}(w'+v_i)\prod_{i=0}^{r-p-1}(w'+v_i^*)}\cdot\frac{\prod_{i=1}^{r}(w'+v_i)}{\prod_{i=0}^{r-1}(w'+\frac{i}{r})}\\ &= \frac{\prod_{i=0}^{r-1}(w'+\frac{i-1}{r})}{\prod_{i=1}^{r}(w'+v_i^*)} = \frac{\prod_{i=0}^{r-1}\big(-w-\frac{r-1-i}{r}\big)}{\prod_{i=1}^{r}(-w-v_i')} = \frac{\prod_{i=0}^{r-1}(w+\frac{i}{r})}{\prod_{i=1}^{r}(w+v_i')},\end{aligned}$$

其中，第二个等式用到了 $Y(x;\boldsymbol{p})=0$ (推论 3.7) 和方程 (9)，而第四个等式用到了 $w'=2/r-1-w$ 和 $v_i^*=1-2/r-v_i'$。根据定理 3.1，比值表示可提升为 GPF (10b)。求和 $v_1'+\cdots+v_r'=(r-1)/2$ 是命题 3.8 中证明的 $v_1+\cdots+v_r=(r-1)/2$ 的对偶形式。将 GPF (10b) 连同 $q=0$ 和 $b=1/2$代入公式 (43a)，得到

$$\begin{aligned}g(w;\lambda) &= x(1-x)^{-a-1/2}\cdot\big\{x^{-r}(1-x)^{r-p}\big\}^w\cdot f\big(\tfrac{2}{r}-w;\lambda'\big)\\ &= x(1-x)^{-a-1/2}\cdot\delta^w\cdot C'\cdot\frac{\prod_{i=0}^{r-1}\Gamma\big(\frac{2}{r}-w+\frac{i}{r}\big)}{\prod_{i=1}^{r}\Gamma(\frac{2}{r}-w+v_i')} = D\cdot\delta^w\cdot\frac{\prod_{i=0}^{r-1}\Gamma\big(1-(w+\frac{i-1}{r})\big)}{\prod_{i=1}^{r}\Gamma(1-(w+v_i^*))}\\ &= D\cdot\delta^w\cdot\frac{\prod_{i=1}^{r}\sin\pi(w+v_i^*)}{\prod_{i=0}^{r-1}\sin\pi(w+\frac{i-1}{r})}\cdot\frac{\prod_{i=1}^{r}\Gamma(w+v_i^*)}{\prod_{i=0}^{r-1}\Gamma(w+\frac{i-1}{r})},\end{aligned}$$

其中，最后一个等式由公式 $\Gamma(w)\,\Gamma(1-w)=\pi/\sin\pi w$ 得出。最后， $\delta:=x^{-r}(1-x)^{r-p}=p^p\,(r-p)^{r-p}\,r^{-r}$ 同样是由推论 3.7 中的 $Y(x;\boldsymbol{p})=0$ 得出。这就证明了公式 (48)。□

4.2 互反性和连接公式

借助对偶性和一个超几何函数的连接公式，我们将证明，互反性$\lambda \mapsto \lambda'$ 会将 $\mathcal{I}$ 中的每个非初等解变换为 $\mathcal{J}$ 中的一个解（针对问题 I）；参见命题 4.5。将 ${}_2H_1(\boldsymbol{a};z)$ 表示为 ${}_2F_1(\boldsymbol{a};z)$ 和 ${}_2G_1(\boldsymbol{a};z)$ 的连接公式，导出了一个表达式

$$h(w;\lambda) = C_f(w)\, f(w;\lambda) + C_g(w)\, g(w;\lambda), \tag{49}$$

如 [7, 所示 式 (64)], 中，在 $\lambda = (p, 0, r;\ a, 1/2;\ x) \in \mathcal{I}$的情况下，系数由下式给出

$$C_f(w) = \frac{\Gamma((r-p)w + 1/2 - a)\Gamma(1-rw)}{\Gamma(1-a-pw)\,\Gamma(1/2)}, \qquad C_g(w) = \frac{\Gamma((r-p)w + 1/2 - a)\Gamma(rw-1)}{\Gamma((r-p)w-a)\,\Gamma(rw-1/2)}.$$

引理 4.2 若 $\lambda = (p,0,r;\ a,1/2;\ x) \in \mathcal{I}$是一个具有 *GPF* (1)的非初等解，则

$$h(w;\lambda) = \Gamma((r-p)w + 1/2 - a)\cdot (p^p/r^r)^w \cdot \chi(w) \cdot \frac{\prod_{i=0}^{p-1}\Gamma(w+\frac{i+a}{p})}{\prod_{i=1}^{r}\Gamma(w+v_i)}, \tag{50a}$$

$$\chi(w) := C_3 \cdot \frac{\sin\pi(pw+a)}{\sin(\pi r w)} + C_4 \cdot \frac{\prod_{i=1}^{r}\sin\pi(w+v_i^*)}{\prod_{i=0}^{r-1}\sin\pi(w+\frac{i-1}{r})}, \tag{50b}$$

其中 $C_3 := 2^{1/2}\cdot(2\pi)^{(r-p-1)/2}\cdot C\cdot p^{a-1/2}\cdot r^{1/2}$ 以及 $C_4 := (2\pi)^{(r-p-1)/2}\cdot D\cdot (r-p)^{a+1/2}\cdot r^{-1/2}$ 中，C和D是公式 $(10\mathrm{a})$ 和 (48)中的常数。

证明。反射公式 $\Gamma(w)\Gamma(1-w) = \pi/(\sin\pi w)$ 以及高斯乘法公式 (2) 使我们可以改写

$$\begin{aligned} C_f(w) &= \Gamma((r-p)w+1/2-a)\cdot\frac{\sin\pi(pw+a)}{\sin(\pi rw)}\cdot\frac{\Gamma(pw+a)}{\Gamma(rw)\,\Gamma(1/2)} \\ &= \Gamma((r-p)w+1/2-a)\cdot(p^p/r^r)^w\cdot C_3'\cdot\frac{\sin\pi(pw+a)}{\sin(\pi rw)}\cdot\frac{\prod_{i=0}^{p-1}\Gamma(w+\frac{i+a}{p})}{\prod_{i=0}^{r-1}\Gamma(w+\frac{i}{r})}, \end{aligned}$$

其中 $C_3' := 2^{1/2}\cdot(2\pi)^{(r-p-1)/2}\cdot p^{a-1/2}\cdot r^{1/2}$。将其乘以 GPF (10a)，得到

$$C_f(w)\, f(w;\lambda) = \Gamma((r-p)w+1/2-a)\cdot(p^p/r^r)^w\cdot C_3\cdot\frac{\sin\pi(pw+a)}{\sin(\pi rw)}\cdot\frac{\prod_{i=0}^{p-1}\Gamma(w+\frac{i+a}{p})}{\prod_{i=0}^{r-1}\Gamma(w+v_i)}. \tag{51}$$

另一方面，由高斯乘法公式 (2) 和方程 (9) 可得

$$\begin{aligned} C_g(w) &= \Gamma((r-p)w+1/2-a)\cdot C_4'\cdot(r-p)^{-(r-p)w}\cdot\frac{\prod_{i=0}^{r-1}\Gamma(w+\frac{i-1}{r})}{\prod_{j=0}^{r-p-1}\Gamma(w+\frac{j-a}{r-p})\prod_{j=0}^{r-1}\Gamma(w+\frac{j-1/2}{r})} \\ &= \Gamma((r-p)w+1/2-a)\cdot C_4'\cdot(r-p)^{-(r-p)w}\cdot\frac{\prod_{i=0}^{p-1}\Gamma(w+\frac{i+a}{p})\prod_{i=0}^{r-1}\Gamma(w+\frac{i-1}{r})}{\prod_{j=1}^{r}\Gamma(w+v_i)\prod_{i=1}^{r}\Gamma(w+v_i^*)}, \end{aligned}$$

其中 $C_4' := (2\pi)^{(r-p-1)/2}\cdot(r-p)^{a+1/2}\cdot r^{-1/2}$。将其乘以公式 (48)，得到

$$C_g(w)\, g(w;\lambda) = \Gamma((r-p)w+1/2-a)\cdot(p^p/r^r)^w\cdot C_4\cdot\frac{\prod_{i=1}^{r}\sin\pi(w+v_i^*)}{\prod_{i=0}^{r-1}\sin\pi(w+\frac{i-1}{r})}\cdot\frac{\prod_{i=0}^{r-1}\Gamma(w+\frac{i+a}{p})}{\prod_{i=1}^{r}\Gamma(w+v_i)}, \tag{52}$$

这里也用到了 $\delta\cdot(r-p)^{-(r-p)} = p^p/r^r$。将 (51) 和 (52) 代入 (49)，即可得到 (50)。 □

引理 4.3 式 (χ) 中的 w（见公式（50b））必须是一个常数，记作 C_5，这样方程（50a）就变为

$$\frac{h(w;\lambda)}{\Gamma((r-p)w+1/2-a)} = C_5\cdot(p^p/r^r)^w\cdot\frac{\prod_{i=0}^{p-1}\Gamma(w+\frac{i+a}{p})}{\prod_{i=1}^{r}\Gamma(w+v_i)}. \tag{53}$$

~ ~证明。令 $h(w;\lambda)$ 表示方程（53）的左侧。注意， $h(w;\lambda)$ 是一个整函数，因为 $h(w;\lambda)$ 的极点被 $\Gamma((r-p)w+1/2-a)$ 的极点消去了。公式（50a）给出

$$\chi(w)=(p^p/r^r)^{-w}\cdot\tilde{h}(w;\lambda)\cdot\frac{\prod_{i=1}^{r}\Gamma(w+v_i)}{\prod_{i=0}^{p-1}\Gamma(w+\frac{i+a}{p})},$$

这表明 $\chi(w)$ 在 $\mathrm{Re}\ w>-\min\{v_i\mid i=1,\dots,r\}$ 中全纯，而（50b）意味着 $\chi(w)$ 是周期为 1 的周期函数。因此， $\chi(w)$ 是周期为 1 的整周期函数。特别是， $\chi(w)$ 在条带 $|\mathrm{Im}\ w|\le 1$ 上有界。在条带之外，将估计式 $e^{|\mathrm{Im}\,w|}/4\le|\sin\ w|\le e^{|\mathrm{Im}\,w|}$ 应用于公式（50b），我们发现 $\chi(w)$ 在 $|\mathrm{Im}\,w|\ge 1$ 中也有界。因此， $\chi(w)$ 是有界整函数，故刘维尔定理迫使其为常数 C_5，从而得到方程（53）。□

以下引理将在本小节及下一小节中发挥关键作用。

引理 4.4 令 $\lambda=(p,0,r;a,1/2;x)\in\mathcal{I}$ 为任意一个非初等解。

(1) 存在一个非负整数 j，使得以下情况之一成立

$$(\mathrm{I})\quad a=\frac{pj}{r}\qquad or\qquad(\mathrm{II})\quad a=\frac{p(j+1/2)}{r}. \tag{54}$$

(2) 数 $a,v_1,\dots,v_r$ 属于 $\mathbb{Q}\cap[0,1)$，并且存在一个整除关系

$$\prod_{i\in\bar{I}_p}\Big(w+\tfrac{i+a}{p}\Big)\ \Big|\ \prod_{j\in J_p}\Big(w+\tfrac{j-a}{r-p}\Big)\prod_{j\in J_q}\Big(w+\tfrac{j-1/2}{r}\Big),\qquad \bar{I}_p:=[p]\setminus I_p. \tag{55}$$

证明。断言（1）。对于实数多重集 $S=\{s_1,\dots,s_m\}$ 和 $T=\{t_1,\dots,t_n\}$，若$m\le n$ 且 $s_i-t_i\in\mathbb{Z}_{\ge 0}$，则记作 $S\succ T$，其中 $i=1,\dots,m$ 是将 $t_1,\dots,t_n$重新排列后的结果。回顾 [7, 引理 5.5]，可知

$$\text{if }\frac{\Gamma(w+s_1)\cdots\Gamma(w+s_m)}{\Gamma(w+t_1)\cdots\Gamma(w+t_n)}\text{ is an entire function, then }S\succ T.$$

~利用命题 3.8 中的公式（35），并令 $I_p:=[p]\setminus I_p$，我们可以将方程（53）改写为

$$\frac{h(w;\lambda)}{\Gamma((r-p)w+1/2-a)}=C_5\cdot(p^p/r^r)^w\cdot\frac{\prod_{i\in\bar{I}_p}\Gamma(w+\frac{i+a}{p})}{\prod_{j\in J_p}\Gamma(w+\frac{j-a}{r-p})\prod_{j\in J_q}\Gamma(w+\frac{j-1/2}{r})}.$$

由于左端 是该方程的整函数，上文提到的一般事实意味着

$$\left\{\frac{i+a}{p}\right\}_{i\in\bar{I}_p}\succ\left\{\frac{j-a}{r-p}\right\}_{j\in J_p}\bigcup\left\{\frac{j-1/2}{r}\right\}_{j\in J_q}, \tag{56}$$

其中，右端的并集是多重集意义下的并集。回顾命题 3.8， $0\notin I_p$ and~，因此 $0\in I_p$。由此，根据 (56) 及 $i=0$，可知下列方程之一成立：

$$(\mathrm{i})\quad\frac{a}{p}=\frac{j-a}{r-p}\ \text{ for some } j\in J_p+(r-p)\,\mathbb{Z}_{\ge 0},\qquad(\mathrm{ii})\quad\frac{a}{p}=\frac{j-1/2}{r}\ \text{ for some } j\in J_q+r\,\mathbb{Z}_{\ge 0}.$$

情形 (i) 直接导出条件 (54) 的情形 (I)。在情形 (ii) 中，命题 3.15 表明 $0\notin J_q$ and，因此$j\ge 1$。将 j 替换为 $j+1$，并取 $j\ge 0$，即可得到条件 (54) 的情形 (II)。

断言（2）。从 (54) 显然可知 $a\in\mathbb{Q}$ and $a\ge 0$。同理，我们有 $a'\ge 0$，因为根据命题 4.1， λ 的对偶 $\lambda'\in\mathcal{I}$ 也是一个非初等解。根据对偶性 (6a) 的定义，我们有$a=1-2p/r-a'\le 1-2p/r$。因此 $a\in\mathbb{Q}\cap[0,1)$，更强地说，$0\le ra/(r-p)\le(r-2p)/(r-p)<1$。所以，只有当 $a=0$时， $ra/(r-p)$ 才可能是整数。相应地，若 $a>0$ and $j\in J_p$，则由命题 3.15 可得 $1\le j\le r-p-1$，进而由 $a\in(0,1)$ 得到 $0<\frac{j-a}{r-p}<1$。若 $a=0$ and $j\in J_p$，则 $0\le j\le r-p-1$，进而得到$0\le\frac{j-a}{r-p}=\frac{j}{r-p}<1$。无论哪种情况，对于任意 $j\in J_p$，都有 $0\le\frac{j-a}{r-p}<1$。对于任意 $j\in J_q$，命题 3.15 还表明 $1\le j\le r-1$，因此 $0<\frac{j-1/2}{r}<1$。回顾命题 3.8 可知， I_p 是 $[p]\setminus\{0\}$的子集。

因此，对于任意 $i \in I_p$，我们有 $1 \le i \le p-1$，进而得到 $0 < \frac{i+a}{p} < 1$。所以，由公式 (35) 可得 v_1，……，$v_r \in \mathbb{Q} \cap [0,\,1)$。由于 (56) 中各集合的所有元素都属于 $[0,\,1)$，关系 (56) 只是多重集的包含关系

$$\left\{\frac{i+a}{p}\right\}_{i\in \bar{I}_p} \subset \left\{\frac{j-a}{r-p}\right\}_{j\in J_p} \bigcup \left\{\frac{j-1/2}{r}\right\}_{j\in J_q},$$

which 等价于整除关系 (55)。这就证明了该引理的所有断言 . □

命题 4.5 对于任意非初等解 $\lambda = (p,\,0,\,r;\,a,\,1/2;\,x) \in \mathcal{I}$，存在一个整除关系 *on*

$$\prod_{i=0}^{p-1} \left(w + \tfrac{i+a}{p}\right) \Big| \prod_{i=1}^{r} (w + v_i), \tag{12}$$

由此可以安排 $v_1, \ldots, v_r$，使得 $\prod_{i=0}^{p-1} \left(w + \frac{i+a}{p}\right) = \prod_{i=r-p+1}^{r} (w + v_i)$。于是我们有

$$h(w;\lambda) = C_6 \cdot \delta^w \cdot \frac{\prod_{j=1}^{r-p-1} \Gamma\left(w + c + \frac{j}{r-p}\right)}{\prod_{i=1}^{r-p} \Gamma(w + v_i)}, \qquad c := \frac{1/2 - a}{r-p}, \tag{57}$$

$$f(w;\check{\lambda}) = \check{C} \cdot \frac{\prod_{i=0}^{r-p-1} \Gamma\left(w + \frac{i}{r-p}\right)}{\prod_{i=1}^{r-p} \Gamma(w + \check{v}_i)}, \qquad \check{v}_i := v_i - c. \tag{13}$$

其中 $\delta := p^p (r-p)^{r-p} r^{-r}$，而 C_6 和 $\check{C}$ 均为非零常数。

证明。将关系 (55) 两边乘以 $\prod_{i\in I_p} (w + \frac{i+a}{p})$，并使用方程 (35)，即可得到整除关系 (12)。按照约定 $\prod_{i=0}^{p-1} \left(w + \frac{i+a}{p}\right) = \prod_{i=r-p+1}^{r} (w + v_i)$，公式 (53) 给出

$$h(w;\lambda) = C_5 \cdot (p^p/r^r)^w \cdot \frac{\Gamma((r-p)w + 1/2 - a)}{\prod_{i=1}^{r-p} \Gamma(w + v_i)},$$

对 $\Gamma((r-p)w + 1/2 - a)$ 应用高斯乘法公式（2），即可将其化为公式（57），其中 $C_6 := C_5 \cdot (2\pi)^{(p+1-r)/2} (r-p)^{-a}$。由公式（43b）取 $q = 0$ 和 $b = 1/2$，可得

$$f(w;\check{\lambda}) = x^{r(w-c)-1} (1-x)^{(p-r)(w-c)+a+1/2}\, h(w-c;\lambda).$$

将公式（57）代入此方程，并利用 $x^r (1-x)^{p-r} \cdot \delta = 1$，即可得到公式（13）；后者由推论 3.7 中的 $Y(x,\,\boldsymbol{p}) = 0$ 得出。□

定理 2.2 的证明。对于定理 2.2 的断言（1），GPF（10a）已在命题 3.8 中证明，GPF（10b）已在命题 4.1 中证明。断言（2）中的 GPF（13）已在命题 4.5 中确立。□

4.3 深入探讨对偶性

在引理 4.4 中，与数据组 λ 的条件 (I) 和 (II) 相对应，我们也可以讨论其对偶 λ' 的条件 (I′) 和 (II′)。因此，对于对偶对 $(\lambda,\ \lambda')$，总共有四种可能：(I，I′)、(II，II′)、(II，I′)、(I，II′)；但实质上只有三种，因为交换 λ 和 λ' 的角色，就可以将 (I，II′) 转化为 (II，I′)。将引理 4.4 应用于对偶对 $(\lambda,\ \lambda')$ 时，它会更有用。

引理 4.6 对于任意非初等解 $\lambda = (p,\,0,\,r;\ \ a,\,1/2;\ \ x) \in \mathcal{I}$ 及其对偶 $\lambda' = (p,\,0,\,r;\ \ a',\,1/2;\ \ x) \in \mathcal{I}$，存在非负整数 j 和 j'，使得三元组 $(r/p,\,a,\,a')$ 具有以下三种形式之一，

$$(\mathrm{I},\,\mathrm{I}'), \qquad \frac{r}{p} = j + j' + 2, \qquad a = \frac{j}{j+j'+2}, \qquad a' = \frac{j'}{j+j'+2}, \tag{58a}$$

$$(\mathrm{II},\,\mathrm{II}'), \qquad \frac{r}{p} = j + j' + 3, \qquad a = \frac{2j+1}{2(j+j'+3)}, \qquad a' = \frac{2j'+1}{2(j+j'+3)}, \tag{58b}$$

$$(\mathrm{II},\,\mathrm{I}'), \qquad \frac{r}{p} = j + j' + \frac{5}{2}, \qquad a = \frac{2j+1}{2(j+j')+5}, \qquad a' = \frac{2j'}{2(j+j')+5}, \tag{58c}$$

其中在（58c）的情况下，λ 和 λ' 可以互换。

证明。对偶性（6a）定义的主要部分是方程

$$a + a' = 1 - 2p/r. \tag{59}$$

在情形 (I, I′) 中，引理 4.4 意味着存在非负整数 j 和 j'，使得 $a = pj/r$ 和 $a' = pj'/r$。将它们代入方程 (59)，得到 $r/p = j+j'+2$, $a = j/(j+j'+2)$ 和 $a' = j'/(j+j'+2)$。这就是情形 (58a)。在情形 (II, II′) 中，引理 4.4 意味着存在非负整数 j和 j'，使得 $a = p(j+1/2)/r$和 $a' = p(j'+1/2)/r$。将它们代入方程 (59)，得到 $r/p = j+j'+3$, $a = (2j+1)/(2j+2j'+6)$ 和 $a' = (2j'+1)/(2j+2j'+6)$。这就是情形 (58b)。在情形 (II, I′) 中，引理 4.4 意味着存在非负整数 j和 j'，使得 and $a = p(j+1/2)/r$ 和 $a' = pj'/r$。将它们代入方程 (59)，得到 $r/p = j+j'+5/2$, $a = (2j+1)/(2j+2j'+5)$ 和 $a' = 2j'/(2j+2j'+5)$。这就是情形 (58c)。□

下一步是证明 (58b) 和 (58c) 均不可能出现。为此，我们进行与 §3.4 中类似的计算。根据 (3) 中的欧拉变换，可以将定义 (37a) 和 (37b) 改写为

$$\Phi(w;\lambda) = (rw)_{r-1} \cdot \langle (1-z)^{r-p} \cdot {}_2F_1(\boldsymbol{\alpha}(w); z) \cdot {}_2F_1(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{\alpha}(w+1); z) \rangle_{r-1} \big|_{z=x}, \tag{60a}$$

$$P(w;\lambda) = (rw)_{r} \cdot \langle (1-z)^{r-p-1} \cdot {}_2F_1(\boldsymbol{\alpha}(w); z) \cdot {}_2F_1(\boldsymbol{e}_3 - \boldsymbol{\alpha}(w+1); z) \rangle_{r-1} \big|_{z=x}, \tag{60b}$$

分别为，其中 $\boldsymbol{\alpha}(w) := (pw + a,\ 1/2;\ rw)$, $\boldsymbol{v} := (1,\ 1,\ 2)$ 和 $\boldsymbol{e}_3 := (0,\ 0,\ 1)$。

引理 4.7 给定一组整数据 $\lambda = (p, 0, r;\ a;\ 1/2;\ x) \in \mathcal{I}$，令 $\zeta_i := -(a+i)/p$，其中 $i \in [p]$。如果 $r\zeta_i$不是整数，则有

$$\Phi(\zeta_i;\lambda) = (-1)^{p-1-i}(1-x)^{r-p} \cdot (r\zeta_i + i)_{r-p} \cdot \mathcal{F}_i(1/2; r\zeta_i; x) \cdot \mathcal{F}_{p-1-i}(1/2; 2 - r(\zeta_i+1); x), \tag{61a}$$

$$P(\zeta_i;\lambda) = (-1)^{p-i}(1-x)^{r-p-1} \cdot (r\zeta_i + i)_{r-p} \cdot \mathcal{F}_i(1/2; r\zeta_i; x) \cdot \mathcal{F}_{p-i}(-1/2; 1 - r(\zeta_i+1); x). \tag{61b}$$

证明。将 $w = \zeta_i$ 代入方程 (60)，并注意到

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha}(\zeta_i) &= (-i,\ 1/2,\ r\zeta_i),\\
\boldsymbol{v} - \boldsymbol{\alpha}(\zeta_i+1) &= (-(p-1-i),\ 1/2,\ 2 - r(\zeta_i+1)),\\
\boldsymbol{e}_3 - \boldsymbol{\alpha}(\zeta_i+1) &= (-(p-i),\ -1/2,\ 1 - r(\zeta_i+1)),\\
(r\zeta_i)_{r-1} &= (-1)^{p-1-i} \cdot (r\zeta_i + i)_{r-p} \cdot (r\zeta_i)_i \cdot (2 - r(\zeta_i+1))_{p-1-i},\\
(r\zeta_i)_{r} &= (-1)^{p-i} \cdot (r\zeta_i + i)_{r-p} \cdot (r\zeta_i)_i \cdot (1 - r(\zeta_i+1))_{p-i},
\end{aligned}$$

其中 $r\zeta_i \notin \mathbb{Z}$, $2 - r(\zeta_i+1) \notin \mathbb{Z}$ 和 $1 - r(\zeta_i+1) \notin \mathbb{Z}$，由定义 (40 得到公式 (61)　　). □

引理 4.8 在引理　　*mma* 4.6 既不会出现(58b)，也不会出现(58c)。在(58a) 中，我们有 $p(j+j'+1) \equiv 0$ 模 2　　.

证明。由于 λ 是 $\mathcal{I}$ 中的非初等解，根据命题 3.11，我们有 $\Phi(w;\lambda) \equiv 0$。命题 4.5 中的整除关系（12）告诉我们，对每个 $i \in [p]$，都有 $P(\zeta_i;\lambda) = 0$。在（58b）和（58c）两种情况下，我们有 $r\zeta_0 = -(r/p)\,a = -j - 1/2$，这不是一个整数。因此，可以使用 $i = 0$ 的公式（61），得到

$$\begin{aligned}
\Phi(\zeta_0;\lambda) &= (-1)^{p-1}(1-x)^{r-p} \cdot (r\zeta_0)_{r-p} \cdot \mathcal{F}_{p-1}(1/2; 2 - r(\zeta_0+1); x) = 0,\\
P(\zeta_0;\lambda) &= (-1)^{p}(1-x)^{r-p-1} \cdot (r\zeta_0)_{r-p} \cdot \mathcal{F}_{p}(-1/2; 1 - r(\zeta_0+1); x) = 0.
\end{aligned}$$

由于 $(r\zeta_0)_{r-p}$ 非零，我们有 $\mathcal{F}_{p-1}(1/2; 2 - r(\zeta_0+1);\ x) = \mathcal{F}_p(-1/2;\ 1 - r(\zeta_0+1); x) = 0$。引理 3.14 的断言（3）进而迫使 $\mathcal{F}_p(-1/2; 1 - r(\zeta_0+1);\ z) \equiv 0$。然而，根据同一引理的断言（1），我们有$\mathcal{F}_p(-1/2;\ 1 - r(\zeta_0+1);\ z) \not\equiv 0$, 因为 $-1/2$ 和 $1 - r(\zeta_0+1)$ 不是整数。这个矛盾表明，（58b）和（58c）都不可行。在（58a）情况下，根据公式（5）中的同余关系 $r \equiv p$ 模 2，我们有 $r - p = p(j+j'+2) - p = p(j+j'+1) \equiv 0$ 模 2。□

定理 2的证明。断言（1）已在命题 4.1 中证明。断言（2）由引理 4.6 和 4.8 得出。现在，由于 $s := r/p \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$，推论 3.7 中的方程 $Y(x; \boldsymbol{p} = 0)$ 等价于$\{(s-1)^{s-1}x^s\}^p = \{s^s(1-x)^{s-1}\}^p$。我们可以对其开 p 次方，得到 (8) 中的代数方程 $(s-1)^{s-1}x^s = s^s(1-x)^{s-1}$，因为 $(s-1)^{s-1}x^s$ 和 $s^s(1-x)^{s-1}$ 均为正数。由此证明了断言（3）。□

4.4 充要条件

有了定理 2.1，我们现在可以再加入一个要素，从而得到给定数据组 $\lambda \in \mathcal{I}$ 为非初等解的充要条件。为陈述这一结果，我们设

$$\chi(j,k;s) := -\frac{1}{s}\left\{ j + (s-1)\left(k - \frac{1}{2}\right)\right\}, \quad \text{for} \quad j,\, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ s \in \mathbb{Z}_{\geq 2}.$$

定理 4.9 设 $\lambda = (p,\, 0,\, r;\, a,\, 1/2;\, x) \in \mathcal{I}$ 是一组整数据，且 $\lambda' = (p,\, 0,\, r;\, a',\, 1/2;\, x) \in \mathcal{I}$ 是其对偶。那么，λ 和 λ' 构成一对非初等解，当且仅当

(1) 比值 $s := r/p$ 是整数，且 $s \geq 2$ 和 $p(s-1) \equiv 0$ 模 2,(2) 自变量 x 满足代数方程 $(s-1)^{s-1}x^s - s^s(1-x)^{s-1} = 0$,(3) 存在非负整数 j 和 j'，使得 $j + j' = s - 2$，且 $a = j/s$、$a' = j'/s$ 和

$$\mathcal{F}_k\left(\chi(j,k;s);\, 1/2 - k;\, x\right) \cdot \mathcal{F}_{k'}\left(\chi(j',k';s);\, 1/2 - k';\, x\right) = 0, \tag{62}$$

对于所有非负整数 k 和 k'，满足 $k + k' = r - 1$，其中 $\mathcal{F}_k(\beta;\gamma;\, z)$ 由公式 (40定义).

证明。除方程 (62) 外，所有条件均来自定理 2.1，因此证明的主要部分在于证明条件 (62)。由引理 3.13 可知 $\eta_k := -(k - 1/2)/r$，$c_k := (r-p)\eta_k - a$ 以及 $d_k := 1 - (r-p)(\eta_k + 1) + a$。令 $c'_k := (r-p)\eta_k - a'$ 以及 $k' := r - 1 - k$。注意到 $\eta_k + 1 = 2/r - \eta_{k'}$ 以及

$$d_k = 1 - (r-p)(2/r - \eta_{k'}) + a = (r-p)\eta_{k'} - (1 - 2p/r - a) = (r-p)\eta_{k'} - a' = c'_{k'}.$$

由定理 2.1 中的公式 (7)，我们有 $a = j/s$ 以及 $a' = j'/s$，其中 $j + j' = s - 2$，因此

$$c_k = -(r-p)(k-1/2)/r - j/s = -(s-1)(k-1/2)/s - j/s = \chi(j,k;s).$$

Si类似地，我们有 $d_k = c'_{k'} = \chi(j',\ k';s)$。因此，引理 3.13 中的公式 (42a) 变为 s

$$\Phi(\eta_k;\lambda) = (-1)^{k'} \cdot \mathcal{F}_k\left(\chi(j,k;s);\, 1/2 - k;\, x\right) \cdot \mathcal{F}_{k'}\left(\chi(j',k';s);\, 1/2 - k';\, x\right) \quad \text{for any} \quad k \in [r]. \tag{63}$$

根据推论 3.4 和引理 3.10，$\Phi(w;\,\lambda)$ 是次数至多为 $r-1$ 的多项式。因此，$\Phi(w;\lambda)$ 恒等于零，当且仅当对每个 $k \in [r]$ 都有 $\Phi(\eta_k;\lambda) = 0$，因为这些 r 数 η_k、$k \in [r]$ 互不相同。另一方面，根据命题 3.11，λ 是非初等解，当且仅当 $\Phi(w;\lambda)$ 恒等于零。因此，必要且充分条件 (62) 可由公式 (63) 得出。□

5 自变量的次数

本节旨在证明定理 2.3 和 2.7。将代数方程 (8) 化为一个具有整数系数的首一方程会更为方便，该方程的根均为代数整数。

引理 5.1 对于任意非初等解 $\lambda = (p,\, 0,\, r;\ \ a,\, 1/2;\ \ x) \in \mathcal{I}$，自变量 x 可表示为 $x = s/(y+s)$，其中 $s := r/p \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$，且 y 是代数方程的唯一正根，并且是单根

$$\psi_s(z) := z^{s-1}(z+s) - (s-1)^{s-1} = 0. \tag{64}$$

证明。显然，变量替换 $z = s/(w+s)$ 将方程（8）转化为首一方程 $\psi_s(w) = 0$。由于 $\psi_s(0) = -(s-1)^{s-1} < 0$ 且 $\psi'_s(z) = s\,z^{s-2}(z+s-1) > 0$ 对 $z > 0$成立，方程（64）有唯一正根 y，其导数 $\psi'_s(y) > 0$，因此 y 是单根。□

当 s 为奇数时，方程（64）在 $z = 1 - s$ 处有一个二重根，我们认为它是平凡根；其他根称为非平凡根。当 s 为偶数时，任何根都是非平凡根。本节的主要结果如下。

T定理 5.2 对于每个整数 $s \geq 3$，方程 （64）的任意非平凡根 α 的次数为

$$\deg \alpha > \delta(s) := \frac{(\log p_s)(s-1)}{1 + \log(s-1)}, \tag{65}$$

其中，p_s 是整数 $s-1$ 的最小素因子。

注 5.3 若 s 是奇数，则 $p_s = 2$；而若 s 是偶数，则 p_s 是一个大于或等于 3 的奇素数。在定理 5.2 和 2.3 中，实际应用时可以用下界代替 $\delta(s)$:

$$\delta_0(s) := \frac{(\log 3)(s-1)}{1+\log(s-1)} \quad \text{when } s \text{ is even;} \qquad \delta_1(s) := \frac{(\log 2)(s-1)}{1+\log(s-1)} \quad \text{when } s \text{ is odd.} \tag{66}$$

我们指出，$\delta_0(s)$ 和 $\delta_1(s)$ 是 $s \geq 2$ 中严格递增的函数，并且随着 $s \to \infty$ 趋于无穷大。

定理 5.2 和定理 2.3 的证明均在 §5.3 末尾给出。

5.1 实根和复根

我们研究多项式 $\psi_s(z)$的实根和复根。我们先讨论实根。

引理 5.4 $\psi_s(z)$ 的实根按以下方式分布。

(1) 若 $s \geq 2$ 为偶数，则有一个正根和一个负根，且二者均为单根。(2) 若 $s \geq 3$ 为奇数，则有一个正根（为单根），以及一个负根 $z = 1 -$ s，为二重根。

证明。首先求出 $\psi_s'(z) = sz^{s-2}(z+s-1)$。由于 $\psi_s'(z) > 0$ 当 $z > 0$ 时，且 $\psi_s(0) = -(s-1)^{s-1} < 0 < \psi_s(s-1) = 2(s-1)^s$，多项式 $\psi_s(z)$ 有一个唯一正根，且为单根。当 s 为偶数时，由于 $\psi_s'(z) < 0$ 当$z < 1-s$时，$\psi_s'(z) > 0$ 当 $z \in (1-s, 0)$ 时，且 $\psi_s(-s-1) = (s+1)^{s-1} - (s-1)^{s-1} > 0 > \psi_s(1-s) = -2(s-1)^{s-1}$，并且 $\psi_s(0) = -(s-1)^{s-1} < 0$，因此 $\psi_s(z)$ 有一个唯一负根，为单根，且位于 $(-s-1, 1-s)$ 中。当s 为奇数时，由于 $\psi_s'(z) > 0$ 当 $z < 1-s$时，$\psi_s'(z) < 0$ 当 $z \in (1-s, 0)$ 时，且 $\psi_s(1-s) = 0 > \psi_s(0) = -(s-1)^{s-1}$，因此 $\psi_s(z)$ 在 $z = 1-s$ 处有一个唯一负根，且为二重根，因为 $\psi_s''(1-s) = s(1-s)^{s-2} < 0$。□

变量替换 $z = -s - t$ 将方程（64）变为

$$u_s(t) = (-1)^s \qquad \text{with} \qquad u_s(t) := t\left(\frac{s+t}{s-1}\right)^{s-1}. \tag{67}$$

基本上，参数 s 取整数值，但在对 s进行微积分运算时，我们允许 s 为大于 1 的实参数。我们将经常使用不等式

$$\log(1+t) < t \quad \text{for any } t > -1 \text{ with equality only when } t = 0. \tag{68}$$

引理 5.5 对于每个 $s > 1$，方程 $u_s(t) = 1$ 都有唯一解 $t = c(s)$ 位于 $t \geq -1$ 中，该解是单根，并且位于区间 $(0,\ 1)$ 内。解 $c(s)$ 是 $s > 1$的一个 C^∞-函数，在 $s > 1$中严格递减，并且当 $s \to \infty$时收敛于常数 c_0，其中 $c_0 \approx 0.278465$ 是满足以下条件的唯一实数

$$c_0\, \mathrm{e}^{c_0+1} = 1, \qquad 0 < c_0 < 1.$$

特别地，当 $s \geq 2$ 为偶整数时，方程（64）的负根位于 $z = -s - c(s)$.

证明。数 c_0 唯一存在，因为函数 $v(t) := t\mathrm{e}^{t+1}$ 满足 $v(0) = 0 < 1 < v(1) = \mathrm{e}^2$，并且对于任意 $t \in (0,\ 1)$，有 $v'(t) = (t+1)\,\mathrm{e}^{t+1} > 0$。数值计算表明 $c_0 \approx 0.278465$。由于

$$u_s'(t) = \frac{s(t+1)}{s-1}\left(\frac{s+t}{s-1}\right)^{s-2} > 0 \qquad \text{for} \quad t > -1,$$

且 $u_s(0) = 0 < 1 < u_s(1) = \{(s+1)/(s-1)\}^{s-1}$，方程 $u_s(t) = 1$ 有一个唯一解 $t = c(s)$，它在$t \geq -1$中，且是单根，实际上位于 $(0,\ 1)$ 内。将 $u(s,\ t) := u_s(t)$ 视为关于两个变量 $(s,\ t)$ 的实 C^∞-函数，其中 $\in (1,\ \infty) \times (0,\ 1)$，可得 $u(s,\ t)$ 的偏导数为

$$\frac{\partial u}{\partial s} = -u(s,t) \cdot \left\{\frac{1+t}{s+t} + \log\left(1 - \frac{1+t}{s+t}\right)\right\}, \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = u(s,t) \cdot \frac{s(1+t)}{t(s+t)} > 0.$$

当 $u(s,\ c(s)) = 1$ 时，隐函数定理意味着 $c(s)$ 是关于 $s > 1$ 的 C^∞-函数，其导数为

$$c'(s) = \frac{c(s)\,\{s + c(s)\}}{s\,\{1 + c(s)\}} \left\{\frac{1+c(s)}{s+c(s)} + \log\left(1 - \frac{1+c(s)}{s+c(s)}\right)\right\} < 0,$$

其中， $c'(s)$ 的负性由估计式 (68) 得出。因此，函数 $c(s) \in (0, 1)$ 关于 $s > 1$ 严格递减，并在 $s \to \infty$ 时收敛到一个数 $c_1 \in [0, 1)$。由于函数 $u_s(t) = t(1 + t/s)^{s-1}(1 - 1/s)^{1-s}$ 在 $s \to \infty$ 时于 $[0, 1]$ 上一致收敛到 $v(t) = te^{t+1}$，我们有 $v(c_1) = 1$ 且 $0 \le c_1 < 1$，实际上 $c_1 \neq 0$。根据这类数的唯一性，我们有 $c_1 = c_0$。因此， $c(s)$ 在 $s \to \infty$ 时收敛到 c_0。□

除负根外，方程（64）的所有（复）根都满足以下估计。

命题 5.6 除负根外，方程 （64）的任意根 α 都满足 $|\alpha| < s - 1$。

证明。 s 为偶数的情形由下文的引理 5.7 证明，而奇数的情形由引理 5.8 证明。 □

为了表述引理 5.7 和引理 5.8，将方程（64）改写为 a 更为方便 s

$$F_s(z) = (-1)^s \qquad \text{with} \qquad F_s(z) := -\frac{(-z)^{s-1}(z+s)}{(s-1)^{s-1}}. \tag{69}$$

多项式 $F_s(z)$ 恰有两个临界点；一个是 $z = 1 - s$，其临界值为 -1；另一个是 $z = 0$，其临界值为 0，因为 $F_s(z)$ 的导数计算如下

$$F_s'(z) = \frac{s(-z)^{s-2}(z+s-1)}{(s-1)^{s-1}}. \tag{70}$$

令 $C := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = s - 1\}$ 是一个半径为 $s - 1$、圆心位于原点的圆。我们有

$$|F_s(z)| \ge 1 \quad \text{for any } z \in C \text{ with equality only when } z = 1 - s. \tag{71}$$

事实上，对于任意 $z \in C$，我们有 $\mathrm{Re}(z) \ge 1 - s$，因此

$$|F_s(z))| = \frac{|z|^{s-1}|z+s|}{(s-1)^{s-1}} = |z+s| \ge \mathrm{Re}(z) + s \ge 1 \quad \text{with equalities only when } z = 1 - s.$$

设 $D := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < s - 1\}$ 且 $E := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > s - 1\}$。用 D 和 E分别表示它们的闭包。

引理 5.7 方程 $F_s(z) = 1$ 的任意根 α，若不等于 $z = -s - c(s)$，则满足 $|\alpha| < s - 1$，其中 $c(s)$ 是引理 5.5中给出的函数。

证明。由定义 (69) 显然可知，方程 $F_s(z) = 0$ 在 D中只有一个重数为 $s-1$的根 $z = 0$。对于任意 $w \in \mathbb{D} := \{w \in \mathbb{C} \mid |w| < 1\}$，估计式 (71) 表明，对所有 $z \in C$，均有 $|w| < 1 \le |F_s(z)|$。Rouch´e 定理蕴含，代数方程 $F_s(z) = w$（次数为 s）在 D 中恰有 $s - 1$ 个根（按重数计）。剩下的一个根，记作 $z = g(w)$，是单根，且位于 E中。由反函数定理，$g : \mathbb{D} \to E, w \mapsto g(w)$是一个全纯函数。令 b 为 $F_s(z) = 1$ 在 E中的任意一个根。由于 $F_s'(b) \neq 0$，反函数定理给出一个全纯函数 $h_b : U_b \to V_b$，使得 $h_b(1) = b$，并且对任意 $w \in U_b$，都有 $F_s(h_b(w)) = w$；其中 U_b 是 $\mathbb{C}$ 中的一个开集，且 $1 \in U_b$，而 V_b 是一个满足 $b \in V_b \subset E$的开集。由 $g(w)$的唯一性可知，对任意 $w \in \mathbb{D} \cap U_b$，均有 $g(w) = h_b(w)$。同理，对于任意满足 $a := -s - c(s)$的 $w \in \mathbb{D} \cap U_a$，有 $g(w) = h_a(w)$。因此，对任意 $w \in \mathbb{D} \cap U_a \cap U_b$，均有 $h_b(w) = h_a(w)$。令 $\mathbb{D} \cap U_a \cap U_b \ni w \to 1$，可得 $b = h_b(1) = h_a(1) = a$。因此， $z = -s - c(s)$是 $F_s(z) = 1$ 在E中的唯一根。□

引理 5.8 方程 $F_s(z) = -1$ 的任意根 α （ $z = 1 - s$ 除外）都满足 $|\alpha| < s - 1$。

证明。假设方程 $F_s(z) = -1$ 有一个根 $a \in E$。由于 $F_s'(a) \neq 0$，反函数定理给出一个全纯函数 $h : U \to V$，使得 $h(-1) = a$ 且对于任意 $w \in U$，都有 $F_s(h(w)) = w$ ；其中 U 是 $\mathbb{C}$ 中的一个开集，满足 $-1 \in U$，而 V 是一个满足 $a \in V \subset E$的开集。注意，对于任意$w \in \mathbb{D} \cap U$，都有 $g(w) = h(w)$；其中 $g: \mathbb{D} \to E$与引理 5.7 的证明中的函数相同。令 $U^* := \{\bar{w} \mid w \in U\}$且 $V^* := \{\bar{z} \mid z \in V\}$。与 a 共轭的复共轭 $\bar{a}$ 也是方程 $F_s(z) = -1$ 的一个根，而由 $h^*(w) := h(\bar{w})$ 定义的全纯函数 $h^* : U^* \to V^*$满足 $h^*(-1) = \bar{a}$，并且对于任意 $w \in U^*$，都有 $F_s(h^*(w)) = w$；因此，对于任意 $w \in \mathbb{D} \cap U^*$，有 $g(w) = h^*(w)$，从而对于任意 $w \in \mathbb{D} \cap U \cap U^*$，有 $h(w) = h^*(w)$。令 $\mathbb{D} \cap U \cap U^* \ni w \to -1$，可得 $a = h(-1) = h^*(-1) = \bar{a}$，这意味着 a是 $z < 1 - s$中方程 $F_s(z) = -1$的一个实根。然而，这样的根不存在，因为公式（69）和（70）推出，对于任意 $z < 1 - s$，都有 $F_s(1 - s) = -1$ 且 $F_s'(z) < 0$。矛盾由此表明， $F_s(z) = -1$ 在 E 中没有根，因而在 $E \setminus \{1 - s\}$中也没有根。□

5.2 径向方程与角向方程

我们将方程（64）写成 $z^{s-1}(z+s) = (s-1)^{s-1}$ 的形式。在其极坐标表示中，暂且搁置其角分量，考虑其径向分量 $|z|^{s-1}|z+s| = (s-1)^{s-1}$，它写作

$$r^{s-1}\rho = (s-1)^{s-1} \qquad \text{with} \quad \rho = \rho(r,\theta) := |z+s| = \sqrt{s^2+2sr\cos\theta+r^2} \tag{72}$$

用 $z = re^{i\theta}$ 表示，其中 $r>0$ 且 $\theta\in\mathbb{R}$。方程（64）的唯一负根的位置我们已经知道，因此命题 5.6 将我们的注意力限制在 $0<r\le s-1$ 和 $-\pi<\theta<\pi$，其中 θ 还可以进一步限制为 $0\le\theta<\pi$（模复共轭）。对方程（72）取对数，得到

$$h(r,\theta) := \log\rho(r,\theta) + (s-1)\log r - (s-1)\log(s-1) = 0. \tag{73}$$

引理 5.9 对于每个 $\theta\in[0,\pi)$，方程 (73) 存在唯一解 $r = r(\theta)$，使得 $0<r<s-1$。作为 θ 的函数，解 $r = r(\theta)$ 在 $\theta\in[0,\pi)$ 上严格递增，并且 $r(\theta)\to s-1$ 当 $\theta\to\pi-0$ 时。

证明。注意，对于任意 $(r,\theta)\in(0,\, s-1]\times[0,\,\pi)$，$\rho(r,\theta) = \sqrt{(s-r)^2+2rs(1+\cos\theta)} > s-r\ge 1$，并且

$$\lim_{r\to+0} h(r,\theta) = -\infty, \quad h(s-1,\theta) = \log\rho(s-1,\theta) > 0 \qquad \text{for any} \quad \theta\in[0,\,\pi).$$

此外，$h = h(r,\theta)$ 的偏导数计算如下：

$$\frac{\partial h}{\partial r} = \frac{sv}{r\rho^2} \quad \text{with} \quad v = v(r,\theta) := (s-r)(s-1-r) + r(2s-1)(1+\cos\theta); \quad \frac{\partial h}{\partial\theta} = -\frac{rs\sin\theta}{\rho^2}.$$

这意味着，对于任意 $(r,\theta)\in(0,\, s-1)\times[0,\,\pi]$，$(\partial h/\partial r)(r,\theta)>0$。因此，对每个 $\theta\in[0,\,\pi)$，方程 (73) 都存在唯一解 $r = r(\theta)\in(0,\, s-1)$。根据隐函数定理，对于任意 $\theta\in(0,\,\pi)$，$r'(\theta) = r^2(\sin\theta)/v > 0$，因此函数 $r(\theta)$ 在 $\theta\in[0,\,\pi)$ 上严格递增，并且当 $\theta\to\pi-0$ 时趋于极限 $r_*\in(0,\, s-1]$。这里我们有 $r_* = s-1$，因为对于任意 $r\in(0,\, s-1)$，$h(r_*,\pi) = h(s-1,\pi) = 0 > h(r,\pi)$。□

函数 $r(\theta)$ in 引理 5.9 在 $\theta = 0$ 处达到最小值。我们给出 $r(0)$ 的一个下界。

引理5.10 对于每个 $s\ge 26$，值 $r(0)$ 都有一个下界

$$r(0) > R := \frac{s-1}{1+\dfrac{1+\log(s-1)}{s-1}}. \tag{74}$$

证明。由于 $h(r,0)$ 关于 $r\in(0,\, s-1)$ 严格递增，且 $h(r(0),0) = 0$，只需证明 $h(R,0) < 0$。令 $L(y)$ 为 $y>-1$ 中的 C^∞-函数，使得 $\log(1+y) = y - y^2L(y)$。注意，$L(0) = 1/2$，$L'(y) < 0$，因此对于任意 $y>0$，$L(y) < 1/2$。为简化记号，设 $t := s-1$。经过仔细计算可得

$$\begin{aligned}
h(R,0) &= \log(2t) + \log\left[1+\frac{1}{2t} - \frac{1+\log t}{2(t+1+\log t)}\right] - t\log\left(1+\frac{1+\log t}{t}\right)\\
&= \log(2t) + \log\left[1+\frac{1}{2t} - \frac{1+\log t}{2(t+1+\log t)}\right] - t\left(\frac{1+\log t}{t}\right) + t\left(\frac{1+\log t}{t}\right)^2 L\left(\frac{1+\log t}{t}\right)\\
&= \log 2 - 1 + \log\left[1+\frac{1}{2t} - \frac{1+\log t}{2(t+1+\log t)}\right] + \frac{(1+\log t)^2}{t} L\left(\frac{1+\log t}{t}\right)\\
&< \log 2 - 1 + \frac{1}{2t} - \frac{1+\log t}{2(t+1+\log t)} + \frac{(1+\log t)^2}{2t} =: \eta(t),
\end{aligned}$$

最后一行用到了不等式 (68) 和 $L(y) < 1/2$（对于 $y>0$）。由于

$$\eta'(t) = \frac{\log t}{2(t+1+\log t)^2} - \frac{(\log t)^2}{2t^2} < \frac{\log t}{2t^2} - \frac{(\log t)^2}{2t^2} < 0 \qquad \text{for} \quad t > \mathrm{e},$$

并且 $\eta(25) < -0.003$，我们有 $\eta(t) < 0$，对任意 $t\ge 25$ 都成立，也就是说，对任意 $s\ge 26$ 都成立。 □

注记 5.11 为便于后续使用，我们还给出一个下界 $r(0)>1$。它比 (74) 弱得多，但对每个 $s>3$ 都成立。这是因为对每个 $s>3$，都有 $\psi_s(1)=s+1-(s-1)^{s-1}<0$。

方程（64）的实根数目（按重数计）在 s 为偶数时为 2，在 s 为奇数时为 3。如果令 $m:=\lfloor s/2\rfloor-1$，则当 s 为偶数时 $s=2m+2$，当 s 为奇数时 $s=2m+3$。无论哪种情形，方程（64）都有 $2m$ 个非实根，其中一半位于上半平面，其余为它们的复共轭，位于下半平面。为了使 $m\geq 1$，我们假设 $s\geq 4$。

命题 5.12 设 $s\geq 4$，并令 $m:=\lfloor s/2\rfloor-1\geq 1$。对于每个 $j=1,\ldots,m$，该方程

$$G_s(\theta):=(\sin\theta)\cdot s^s(-1)^{s-1}\sin^{s-1}[(s-1)\theta]-(s-1)^{s-1}\sin^s(s\theta)=0 \tag{75}$$

在区间 $I_j:=(2\pi j/s,\ 2\pi j/(s-1))$ 内有唯一解 θ_j。这些数

$$\alpha_j:=r_j\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_j}\qquad with\quad r_j:=-\frac{s\sin[(s-1)\theta_j]}{\sin(s\theta_j)},\quad j=1,\ldots,m, \tag{76}$$

给出所有根 上半平面内方程（64）的根。数值 $\rho_j:=|s+\alpha_j|$ 可表示为 as

$$\rho_j=\frac{s\sin\theta_j}{\sin(s\theta_j)},\qquad j=1,\ldots,m. \tag{77}$$

令 R 为式（74）中定义的数，$r_0:=r(0)$ 为 $\psi_s(z)$ 的正根，且 $\rho_0:=s+r_0$。则有

$$R<r_0<r_1<\cdots<r_m<s-1,\qquad \rho_0>\rho_1>\cdots>\rho_m>1. \tag{78}$$

证明。设 $\alpha=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 为方程（64）的一个根，其 $r>0$ 和 $0<\theta<\pi$ 用极坐标表达式表示。方程 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s\theta}\psi_s(\alpha)=r^{s-1}(r+s\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s\theta}(s-1)^{s-1}=0$ 的实部和虚部分别为

$$r^{s-1}(s\cos\theta+r)=(s-1)^{s-1}\cos(s\theta),\qquad r^{s-1}s\sin\theta=(s-1)^{s-1}\sin(s\theta),$$

分别如此。这些方程中的第二个推出 $\sin(s\theta)>0$，且

$$|s+\alpha|=\frac{(s-1)^{s-1}}{r^{s-1}}=\frac{s\sin\theta}{\sin(s\theta)}. \tag{79}$$

用方程求解 r，并利用公式（79）和正弦函数的和角公式，可得

$$r=\frac{(s-1)^{s-1}}{r^{s-1}}\cos(s\theta)-s\cos\theta=-\frac{s\sin[(s-1)\theta]}{\sin(s\theta)}, \tag{80}$$

这尤其意味着 $\sin[(s-1)\theta]<0$。将公式（80）代入方程（79），可知 θ 是方程（75）的一个解。正弦函数的符号变化意味着，$\theta\in(0,\pi)$ 满足 $\sin(s\theta)>0$ 且 $\sin[(s-1)\theta]<0$，当且仅当 $\theta\in I':=\bigcup_{j=1}^{m'}I_j$，其中 $m':=\lfloor(s-1)/2\rfloor$。我们注意到，$I_j$、$j=1,\ldots,m'$ 是 $(0,\pi)$ 中两两不相交且严格递增的子区间。反过来，如果 $\theta\in I'$ 是方程（75）的一个解，那么 $\alpha:=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$（其中 r 由公式（80）定义）给出上半平面内方程（64）的一个根。方程（75）可以看作方程（64）的角分量，而（72）是其径向分量。

注意到，当 s 为偶数时，$m=m'$；当 s 为奇数时，$m=m'-1$；并且 $I:=\bigcup_{j=1}^{m}I_j$ 在区间 $(0,\ \pi)$ 中相对紧。对于每个 $j=1,\ldots,m$，在区间 I_j 的端点处，我们有

$$G_s(2\pi j/s)=s^s\sin^s(2\pi j/s)>0>G_s(2\pi j/(s-1))=-(s-1)^{s-1}\sin^s[2\pi j/(s-1)].$$

因此，对于每个 $j=1,\ldots,m$，方程（75）至少有一个解 $\theta_j\in I_j$。这些 θ_j 给出彼此不同的m，因此通过公式（76）得到上半平面中方程（64）的全部根 $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$。特别地，θ_j 是 I_j 中方程（75）的唯一解。对于 $j=1,\ldots,m$，根据命题 5.6，我们有 $0<r_j<s-1$，从而根据引理 5.9，有 $r_j=r(\theta_j)$。由于 $r(\theta)$ 关于 θ 严格递增，我们有 $R<r_0<r_1<\cdots<r_m<s-1$；结合 $\rho_jr_j^{s-1}=(s-1)^{s-1}$，可得公式（77）中的 $\rho_0>\rho_1>\cdots>\rho_m>1$。这就证明了（78）。□

引理 5.13 在命题 5.12 的情形下，数 ρ_m 满足以下下界：

(1) $\rho_m > s$正弦$[\pi/(s-1)] > \pi$ 当 $s \geq 4$ 为偶数时，

(2) $\rho_m > s$正弦$[2\pi/(s-1)]$ 当 $s \geq 7$ 为奇数时，而 $\rho_m > 5$ 正弦$(2\pi/5)$ 当 $s = 5$ 时。

证明。命题 5.12 中的公式 (77) 推出 $\rho_m \geq s$ 正弦 θ_m，其中 $2m\pi/s < \theta_m < 2m\pi/(s-1)$。对于$s = 2m+2$ 且 $m \geq 1$，由于 $\pi/2 \leq m\pi/(m+1) < \theta_m < 2m\pi/(2m+1) < \pi$，我们有 正弦$\theta_m >$正弦$[2m\pi/(2m+1)] =$正弦$[\pi/(2m+1)] =$正弦$[\pi/(s-1)]$，因此 $\rho_m \geq s$ 正弦 $\theta_m > s$ 正弦$[\pi/(s-1)]$。通过一些微积分可得s 正弦$[\pi/(s-1)] > \pi$，当 $s \geq 4$ 时成立。对于 $s = 2m+3$ 且 $m \geq 2$，由于 $\pi/2 \leq 2m\pi/(2m+3) < \theta_m < m\pi/(m+1) < \pi$，我们有 正弦 $\theta_m >$正弦$[m\pi/(m+1)] =$正弦$[\pi/(m+1)] =$正弦$[2\pi/(s-1)]$，因此 $\rho_m \geq s$ 正弦 $\theta_m > s$ 正弦$[2\pi/(s-1)]$。对于 $s = 5$，由于 $2\pi/5 < \theta_1 < \pi/2$，我们有 $\rho_1 \geq 5$正弦 $\theta_1 > 5$正弦$(2\pi/5)$。 □

5.3 算术

令 α 为 $\psi_s(z)$ 的任意一个非平凡根，且 $d := \deg \alpha$ 是它作为代数数的次数。令

$$M = M(\alpha) := (s+\beta_1)\cdots(s+\beta_d), \qquad N = N(\alpha) := \beta_1 \cdots \beta_d,$$

其中 $B = \{\beta_1, \ldots, \beta_d\}$ 是 α 的所有共轭元（包括其自身）组成的集合。由于 α 是代数整数， M 和 N 都是有理整数。对于 $s = 2$，有 $d = 2$ 和 $M = N = -1$。

引理 5.14 对于每个整数 $s \geq 3$，都存在一个整数 $n = n(\alpha)$，使得

$$|n| \geq 2, \qquad n \,|\, (s-1), \qquad M = n^{s-1}, \qquad nN = (s-1)^d.$$

证明。对于 $s = 3$，有 $d = 1$、$M = 4$、$N = 1$ 和 $n = 2$，因此引理成立。下文假设 $s \geq 4$。由于 β_1、……、β_d 是 $\psi_s(z)$ 的根，对于 $j = 1$、……、d，有 $\beta_j^{s-1}(s+\beta_j) = (s-1)^{s-1}$。将它们相乘得到$N^{s-1}M = (s-1)^{d(s-1)}$，即 $M = \{(s-1)^d/N\}^{s-1}$。由于 M 是整数， $n := (s-1)^d/N$ 也必定是整数， $M = n^{s-1}$ 且 $nN = (s-1)^d$。令 $P(z)$ 为 α 的最小多项式。由于 α 是代数整数，$P(z) \in \mathbb{Z}[z]$ 是一个首一多项式，它在 $\mathbb{Z}[z]$ 中整除 $\psi_s(z)$，因此整数 $P(-s)$ 在 $\mathbb{Z}$ 中整除 $\psi_s(-s) = -(s-1)^{s-1}$。由于 $P(z) = (z-\beta_1)\cdots(z-\beta_d)$，我们有 $P(-s) = (-1)^d \cdot M$，因此 $M = n^{s-1}$ 整除 $(s-1)^{s-1}$，进而n 在 $\mathbb{Z}$ 中整除 $s-1$。剩下只需证明 $|n| \geq 2$，也就是 $|n| > 1$。

除非 s 为偶数且 B 包含负根 $\beta(s) := -s - c(s)$，其中 $c(s)$由引理 5.5 给出，否则命题 5.12 中的不等式（78）蕴含 $|s+\beta_j| > 1$ 对，……，d成立，因此 $|n|^{s-1} = |M| = |s+\beta_1|\cdots|s+\beta_d| > 1$，从而得到 $|n| > 1$。现在假设 s 为偶数且 $\beta(s) \in B$。我们可以令 $\beta_1 = \beta(s)$。由引理 5.5 可知 $c_0 < |s+\beta_1| < 1$，从而 $d \geq 2$，因为代数整数 β_1 不是有理整数。若 $d \geq 3$，则引理 5.13 的断言（1）和不等式（78）蕴含

$$|n|^{s-1} = |M| = |s+\beta_1||s+\beta_2|\cdots|s+\beta_d| > c_0 \cdot \pi^{d-1} \geq c_0 \cdot \pi^2 > 2.74 > 1,$$

从而 $|n| > 1$。最后，假设 $d = 2$ 且 $B = \{\beta_1, \beta_2\}$。那么 $\beta_1 = \beta(s)$ 是一个实二次数，因此根据引理 5.4，它的共轭 β_2 必须是 $\psi_s(z)$ 的正根。由于 $s \geq 4$，根据注记 5.11 可得 $|s+\beta_2| = s+\beta_2 > 4+1 = 5$。因此 $|n|^{s-1} = |M| = |s+\beta_1||s+\beta_2| > c_0 \cdot 5 > 1.39$，所以 $|n| > 1$。 □

引理 5.15 在引理 5.14的情形下，对于任意整数 $s \geq 26$， α 的次数 d 有一个下界

$$d > \frac{(\log|n|)(s-1)}{1+\log(s-1)} \geq \delta(s) := \frac{(\log p_s)(s-1)}{1+\log(s-1)}. \tag{81}$$

证明。由命题 5.12 中的不等式 (78)，对于 $j = 1, \ldots, d$，我们有 $|\beta_j| > R$，因此 $|N| = |\beta_1 \cdots \beta_d| > R^d$，并且

$$|n| = \frac{(s-1)^d}{|N|} < \frac{(s-1)^d}{R^d} = \left(1 + \frac{1+\log(s-1)}{s-1}\right)^d,$$

其中 R 由 (74) 给出。对这个估计取对数并使用不等式 (68)，我们得到

$$\log|n| < d \cdot \log\left(1 + \frac{1+\log(s-1)}{s-1}\right) < d \cdot \frac{1+\log(s-1)}{s-1},$$

这与 $|n| \geq p_s$ 一起确立了估计 (81)。 □

定理 5.2和2.3的证明。对于任意 $s \geq 26$，估计式 (65) 可由 (81) 得出。容易看出，对于任意 $s \geq 2$，$s-2 \geq \delta(s)$。至于 $s = 2$，……，25，逐一检验可知，当 s为偶数时， $\psi_s(z)$不可约；而当 s为奇数时， $\psi_s(z)$除以$(z+s-1)^2$所得的商不可约。两种情况下都有 $\deg \alpha \geq s-2 \geq \delta(s)$。因此，对于 $s = 2$，……，25，估计式 (65) 同样成立，于是定理 5.2 得证。由引理 5.1 可知 $\deg x = \deg y$。将定理 5.2 应用于非平凡根 $\alpha = y$，即可得到定理 2.3。□

5.4 有理数与二次自变量

定理 2.7 是一个 定理 2.1 和 2.3 的一个直接推论。我们将其重述为以下命题 n.

命题 5.16 设 $\lambda = (p, 0, r; a, 1/2;\, x) \in \mathcal{I}$ 是任意一个非初等解。

(1) 若 x 是有理数，则 λ 是例2.4中解 (14a) 或解 (14b) 的倍数。(2) 若 x 是二次无理数，则 λ 是例 2.5中解 (15) 的倍数。

证明。我们将定理 2.3，或者更确切地说注 5.3，应用于方程 (8) 的根 x 。对于 (66) 中的函数，我们注意到 δ_0(6) > 2.1 和 δ_1 (11) > 2.09。因此，若 deg $x \le 2$，则 $s = r/p \in \{2, 4\} \cup \{3, 5, 7, 9\}$。在这些候选项中，仅当 $s = 3$ 时，deg $x = 1$（有理数情形）；仅当 $s = 2$ 时，deg $x = 2$（二次情形）。

断言（1）。假设 x 是一个有理数。那么 $s = r/p = 3$、 $y = 1$ 和 $x = 3/4$。定理 2.1 中的公式 (7) 表明 $j + j' = 1$，因此要么 $(j,\ j') = (0,\ 1)$，要么 $(j,\ j') = (1,\ 0)$。在前一种情况下，我们有 $a = 0$，且 λ 必须是 $\lambda_1 = (1,\ 0,\ 3;\ 0,\ 1/2;\ 3/4)$ 的 p 倍数。在后一种情况下，我们有 $a = 1/3$，且 λ 必须是 $\lambda_2 = (1,\ 0,\ 3;\ 1/3,\ 1/2;\ 3/4)$ 的 p 倍数。注意， λ_1 和 λ_2 恰好是例 2.4 中的解 (14a) 和 (14b)。因此，断言（1）立即成立。

断言（2）。假设 x 是二次无理数。那么 $s = r/p = 2$、 $y = -1 + \sqrt{2}$ 和 $x = 2\sqrt{2} - 2$。定理 2.1 中的公式 (7) 意味着 $j + j' = 0$，而这只有在 $(j,\ j') = (0,\ 0)$ 且 $a = 0$ 时才成立。此外，$p(j + j' + 1)$ 必须是偶数，因此 λ 是 $\lambda_3 = (2,\ 0,\ 4; 0,\ 1/2; 2\sqrt{2} - 2)$ 的 $(p/2)$ 倍数。注意， λ_3 恰好就是例 2.5 中的解 (15)。因此，断言（2）立即成立。□

致谢。本研究得到 JSPS KAKENHI 项目资助，项目编号为 JP22K03365。遗憾的是，第二作者在本研究进行期间去世。第一作者谨以本文的定稿纪念她。

参考文献

[1] G.E. Andrews、R. Askey 和 R. Roy，《特殊函数》，剑桥大学出版社，剑桥，1999。[2] Y.A. Brychkov，《特殊函数手册》，Chapman & Hall/CRC，博卡拉顿，FlL，2008。[3] A. Ebisu，超几何级数的三项关系，Funkcial. Ekvac. **55** （2012），255–283。[4] A. Ebisu，超几何级数的特殊值，美国数学会回忆录**248** （1177），2017。[5] A. Erd´elyi 等编，《高等超越函数》第 I 卷，麦格劳-希尔，纽约，1953。[6] K. Iwasaki，带有伽马乘积公式的超几何级数，Indag. Math. **28** （2017），第 2 期，463–493。[7] K. Iwasaki，带有伽马乘积公式的超几何级数的对偶性与互反性，九州数学杂志**73** （2019），第 2 期，251–294。[8] F.W.J. Olver、D.W. Lozier、R.F. Boisvert 和C.W. Clark 编，《NIST 数学函数手册》，剑桥大学出版社，纽约，2010。