arXiv:2603.15014v1 [math.CV] 16 Mar 2026

关于 Fueter-Sce 定理及替代 $*$-代数上的柯西-柯瓦列夫斯卡娅延拓

霍庆海[1]*、Irene Sabadini[2]†和徐正华[1]‡

[1]合肥工业大学数学学院，中国合肥，邮编：*230601* 电子邮箱：*hqh86@mail.ustc.edu.cn*；*zhxu@hfut.edu.cn*[2]数学系，米兰理工大学，*Via E.Bonardi, 9*，*20133* 米兰，意大利 电子邮箱：*irene.sabadini@polimi.it*

2026年3月17日

摘要

近期，广义部分切片单值（或正则）函数的概念分别在克利福德代数和八元数上被提出并加以研究。本文进一步发展了定义在超复子空间上、取值于实替代 $*$-代数的广义部分切片单值函数理论，并重点探讨 Fueter-Sce 定理、三类柯西-柯瓦列夫斯卡娅延拓及其各种内在联系。本文为单变性、调和性与广义部分切片单生成性理论之间架起了更多桥梁。

关键词： 超复变量函数；单生成函数；切片单生成函数；替代代数；柯西-柯瓦列夫斯卡娅延拓；Fueter-Sce 定理

MSC（2020）： 主要分类：30G35；次要分类：17D05

目录

1 引言 2

2 预备结果 **4**

2.1 实交替 $*$-代数.4 2.2 超复子空间.5 2.3 广义部分切片单生成函数.6 2.4 恒等定理与表示公式.9

*本研究得到国家自然科学基金委员会（项目编号：12301097）、中央高校基本科研业务费（项目编号：JZ2025HGTB0171）和国家留学基金管理委员会（项目编号：202506690055）的部分资助。

†本研究部分受到 PRIN 2022 *Real and Complex Manifolds: Geometry and Holomorphic Dynamics. I.S. is a member of GNSAGA of INdAM* 的资助。

‡本研究部分受到安徽省自然科学基金（编号：2308085MA04）、中央高校基本科研业务费（编号：JZ2025HGTG0250）和国家留学基金管理委员会（编号：202506690052）的资助。

2.5 广义部分切片函数.10 2.6 Fueter 多项式.12

3 CK 延拓 **13**
3.1 广义部分切片单生成函数的 CK 延拓 . . . . 13 3.2 单值函数的广义 CK 延拓. 16 3.3 调和函数的广义 CK 延拓.20

4 Fueter-Sce 定理 **23**

5 Fueter-Sce 定理与 CK 延拓之间的联系 31

6 补充说明与未来研究方向 35

1 引言

超复分析是关于全纯性的高维理论，它将复数代数中的全纯函数理论推广到更一般的代数，如四元数、八元数、双复数和克利福德代数，关于一些历史评述，参见 [14] 。在各种可能的理论中，有两种已被证明尤为成功：单生成函数（也称正则函数、超全纯函数）理论，以及切片单生成函数（也称切片正则函数、切片超全纯函数）理论。

正则函数理论由 Moisil 和 Fueter [22]开创，并由 Fueter 学派进行了全面研究。此理论后来推广到取值于克利福德代数、且属于 Dirac 算子或 Weyl 算子核的函数。关于单生成（或正则）函数已有大量文献，参见 [4, 11, 16, 27, 34] 及其中的参考文献。众所周知，该理论的一个根本局限在于，四元数变量的幂并非正则函数，因为它们不属于所选算子的核。

单个四元数变量的切片正则函数理论由 Gentili 和 Struppa [24], 在 Cullen 早期思想的启发下创立。这一函数理论包括形如 $\sum_n q^n a_n$ 的幂级数，其中 q 是四元数变量， a_n 是常数，且二者都属于四元数代数。此后，这一函数类被推广到更一般的情形，例如克利福德代数[12], 、八元数 [25], 以及实替代 $*$-代数 [28]。在过去二十年中，切片分析在理论 [13, 23]及其应用方面都引起了广泛关注，尤其是在非交换算子的函数演算 [1, 6, 7, 9, 10, 47, 48] 中。感兴趣的读者可参阅 [2, 26, 33] ，了解单个四元数（或八元数）变量的切片正则函数在扭量变换和正交复结构研究中的应用。

这两类函数论各有优缺点。2023年，文献 [51] 在克利福德代数上引入了广义部分切片单值函数这一概念。该函数论将单生成函数论和切片单生成函数论作为特例。关于这一新框架下的更多结果，请参见 [19, 35, 53, 52, 54]。众所周知，所有克利福德代数都是结合的，因此自然有必要在

更一般的实交替 $*$-代数框架下进一步研究广义部分切片单值函数，尤其是八元数的情形；该情形已在 [55] 中得到研究。

在 [30, 31], 中，Ghiloni 和 Stoppato 通过引入 T-正则函数理论，发展了部分切片性的概念。该理论为交替 $*$-代数中的单个超复变量的正则性提供了统一框架。最近，关于一般结合

$*$-代数上的-正则函数的 Fueter-Sce 现象已得到研究 [32]。请注意，除表示公式（及其推论）外， [30, 31, 32], 中的所有结果都针对结合代数。关于（可能非结合的）交替

$*$-代数上的函数，读者可参阅例如 [29, 41]中关于切片正则情形的讨论，或参阅例如 [36, 50] 中关于单生成函数的讨论，以及 [3]中关于近期引入的 Dunkl-正则函数的讨论。

本文是我们此前工作的延续 [51, 55]。我们将研究一般交替 $*$-代数上的广义部分切片单生成函数，并重点关注 Fueter-Sce 定理以及三类柯西-柯瓦列夫斯卡娅延拓（简称 CK-延拓）。本文的主要创新体现在两个方面。第一，我们将 Fueter-Sce 映射的相关结果推广至非结合代数，而不再局限于 [32, 53]中的结合代数。第二，我们将 [4, 16, 18] 中关于 CK-延拓的结果拓展到新的框架，即一般交替 $*$-代数上的广义部分切片单生成函数。非结合性在各种陈述和证明中均有所体现，因此需要采用专门的技巧才能得到这些结果。

本文结构如下。在第2节中，我们回顾关于实替代 $*$-代数的一些基本定义，它们构成本文的一般框架。随后，我们在超复子空间上引入广义部分切片单值函数的概念。特别地，我们给出了一些示例以及该函数类的基本性质，例如恒等定理（定理 2.17）、表示公式（定理 2.18）、柯西积分公式（定理 2.13）和 Fueter 多项式（定义 2.25）。

在第3节中，我们分别将定义在 $\mathbb{R}^{p+1}$ 中区域上、取值于实替代 $*$-代数的实解析函数发展为三种类型的CK-延拓：广义部分切片单值函数（见定理 3.3）、单生成函数（见定理 3.10）以及调和函数（见定理 3.13）。此外，我们引入了部分偶部和部分奇部的概念，见定义 3.15，并在推论 3.17和命题 3.18中建立了单生成函数与调和函数的广义 CK 延拓之间的一些关系。这些关系有助于发现 Fueter-Sce 定理与广义 CK 延拓之间更多的联系，见第5节。

第4节的主要结果是超复子空间中部分对称域上的广义部分切片正则函数的 Fueter-Sce 定理；参见定理 4.9。

在第5节中，我们首先建立 Fueter-Sce 定理与单生成函数的广义 CK 延拓之间的联系，参见定理 5.1；该定理将定理 4.7] 从克利福德代数推广到一般的替代 $*$-代数。此外，利用部分偶部和奇部的概念，我们证明了 Fueter-Sce 定理与第3节中得到的三种类型的CK延拓之间的更多关系；参见定理5.3和定理5.4。

最后，在第6节中，我们通过讨论以下内容，提出了一些进一步研究的方向：

实数替代 $*$-代数上的多重单生成函数（以及广义部分切片单正则函数），以及与 Coxeter 群相关的 Dunkl 算子的多重 Dunkl 单生成函数。

2 预备结果

本节汇集关于交替 $*$-代数的一些预备结果，随后介绍超复子空间上的广义部分切片单生成函数，并给出若干示例及其基本性质，例如恒等定理、表示公式、柯西积分公式和 Fueter 多项式。更多详情请参见 [39, 44, 25, 31, 41]。

2.1 实交替 $*$-代数

设 $\mathbb{A}$ 是一个带单位元 1 的实代数。若实代数 $\mathbb{A}$ 满足 结合子 $[a,b,c] := (ab)c - a(bc)$ 是关于 a、b、$c \in \mathbb{A}$的三线性反对称函数，则称其为交替代数。所有交替代数都满足以下结合律:

- 阿廷定理：由 $\mathbb{A}$ 中的两个元素生成的子代数是结合的。
- Moufang恒等式:

$$a(b(ac)) = (aba)c, \qquad ((ab)c)b = a(bcb), \qquad (ab)(ca) = a(bc)a,$$

对于 $a,\ b,\ c \in \mathbb{A}$。

作为阿廷定理的直接推论，我们有

命题 2.1. （*[44,* 第 *38]* 页）对于任意 $x, y \in \mathbb{A}$，若 x 可逆，则有

$$[x^{-1}, x, y] = 0.$$

命题 2.2. 对于任意 $r \in \mathbb{R}$ 和 $x, y \in \mathbb{A}$，有

$$[r, x, y] = 0.$$

实代数 $\mathbb{A}$ 称为 $*$-代数，如果 $\mathbb{A}$ 配备了一个反对合（也称为 $*$-对合），它是一个实线性映射 $^c : \mathbb{A} \to \mathbb{A}, a \mapsto a^c$，满足

$$a^c = a, \quad a \in \mathbb{R},$$

and

$$(a^c)^c = a,\ (ab)^c = b^c a^c, \quad a, b \in \mathbb{A}.$$

假设 1. 设 $(\mathbb{A}, +, \cdot, ^c)$ 是一个带单位元 1 的有限维替代实 $*$-代数，其作为实向量空间的维数为 $d > 1$，并配备反对合^c。此外，我们赋予 $\mathbb{A}$ 自然拓扑和作为实向量空间的微分结构。

例 2.3 (除代数)。 复数$\mathbb{C}$、四元数 $\mathbb{H}$ 和八元数 $\mathbb{O}$ 的除代数是实 $*$-代数，其中 $*$-对合分别是复数、四元数和八元数的标准共轭。

例 2.4 (克利福德代数)。 克利福德代数 $\mathbb{R}_{0,m}$ 是一个结合 $*$-代数，它由m维实欧几里得空间 $\mathbb{R}^m$ 的标准正交基 $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ 生成，假设

$$e_i e_j + e_j e_i = -2\delta_{ij}, \quad 1 \le i, j \le m,$$

其中， $*$-对合由标准克利福德共轭给出。

2.2 超复子空间

设 $\mathbb{A}$ 是一个 $*$-代数。对于 $x \in \mathbb{A}$，其迹 定义为 $t(x) := x + x^c \in \mathbb{A}$，其（平方）范数 为 $n(x) := xx^c \in \mathbb{A}.$ 。将与 $*$-代数结构相容的 $\mathbb{A}$ 的虚单位球面记为

$$\mathbb{S}_{\mathbb{A}} := \{x \in \mathbb{A} : t(x) = 0, n(x) = 1\}.$$

对于每个 $J \in \mathbb{S}_{\mathbb{A}}$，记

$$\mathbb{C}_J := \langle 1, J \rangle \cong \mathbb{C},$$

由 1 和 J 生成的 $\mathbb{A}$ 的子代数。显然，有

$$\mathbb{C}_I \cap \mathbb{C}_J = \mathbb{R}, \qquad I, J \in \mathbb{S}_{\mathbb{A}},\ I \neq \pm J.$$

将 $\mathbb{A}$ 的所谓二次锥定义为

$$Q_{\mathbb{A}} := \mathbb{R} \cup \left\{x \in \mathbb{A} \mid t(x) \in \mathbb{R},\ n(x) \in \mathbb{R},\ 4\,n(x) > t(x)^2\right\}.$$

已证明，参见 [28], :

$$Q_{\mathbb{A}} = \bigcup_{J \in \mathbb{S}_{\mathbb{A}}} \mathbb{C}_J.$$

假设 2。假设 $\mathbb{S}_{\mathbb{A}} \neq \emptyset$。

定义 2.5。 设 M 是 $\mathbb{A}$ 这个 $*$-代数的一个实向量子空间。 M 的一个有序实向量基$(v_0, v_1, \ldots, v_m)$ 称为 M 的超复基，当且仅当： $m \ge 1$； $v_0 = 1$； $v_s \in \mathbb{S}_{\mathbb{A}}$，且对所有互不相同的 s、$t \in \{1, \ldots, m\}$，都有 $v_s v_t = -v_t v_s$。若 $\mathbb{R} \subsetneq M \subseteq Q_{\mathbb{A}}$，则称子空间 M 为 $\mathbb{A}$ 的超复子空间 。

等价地，基 $(1, v_1, \ldots\ldots, v_m)$ 是超复基，当且仅当 $t(v_s) = 0$， $n(v_s) = 1$ 且对所有互不相同的 s， $t \in \{1, \ldots, m\}$，都有 $t(v_s v_t^c) = 0$。

假设 3. 在实交错 $*$-代数 $\mathbb{A}$中，我们固定一个超复子空间 M，并取定其超复基 $\mathcal{B} = (v_0, v_1, \ldots, v_m)$，其中 $v_0 = 1$。此外，将$\mathcal{B}$补充为 $\mathbb{A}$ 的一组实向量基 $\mathcal{B}' = (v_0, v_1, \ldots, v_d)$，并在 $\mathbb{A}$ 上赋予与 $\mathcal{B}'$ 相关联的标准欧几里得内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 及范数 $|\cdot|$。在这种情况下，对于所有 $x, y \in M$，我们有

$$t(xy^c) = t(y^c x) = 2\langle x, y \rangle,$$

$$n(x) = n(x^c) = |x|^2.$$

例 2.6. 实交错 $*$-代数中最著名的超复子空间例子包括

$$M=\begin{cases}\mathbb{H} \text{ or } \mathbb{H}_{\mathrm{r}}, & \mathbb{A}=\mathbb{H}, \quad \mathrm{Q}_{\mathbb{A}}=\mathbb{H}, \\ \mathbb{O}, & \mathbb{A}=\mathbb{O}, \quad Q_{\mathbb{A}}=\mathbb{O}, \\ \mathbb{R}^{m+1}, & \mathbb{A}=\mathbb{R}_{0,m}, \quad Q_{\mathbb{A}} \supseteq \mathbb{R}^{m+1}, \end{cases}$$

其中， $\mathbb{H}_r$ 表示约化四元数的三维子空间 $\{x=x_0+x_1 i+x_2 j \in \mathbb{H}:\ x_0$、 x_1、 $x_2 \in \mathbb{R}\}$ ，而 $\mathbb{R}^{m+1}$ 表示$\mathbb{R}_{0,\ m}$中的副向量空间。

本文将用到以下有用性质，该性质是阿廷定理的推论。

命题 2.7。 对于任意的 $x \in M$ 和 $y \in \mathbb{A}$，有

$$[x, x, y]=[x^c, x, y]=0.$$

2.3 广义部分切片单生成函数

本小节将阐述实替代 $*$-代数上的广义部分切片单生成函数的概念，这些函数定义在该代数的超复子空间上。

本文中，任意向量（x_0， x_1，.....， x_m） $\in \mathbb{R}^{m+1}$ 均将通过以下方式与元素 $x \in M$ 对应

$$(x_0, x_1, \ldots, x_n) \rightarrow x=x_0+\sum_{s=1}^{m} x_s v_s.$$

记 $\mathbb{N}=\{0,1,2, \ldots\}$。对于 $k \in \mathbb{N} \cup\{\infty, \omega\}$，用 C^k(Ω $\mathbb{A}$) 表示所有具有实值分量 $f_t \in C^k$(Ω) 的函数 $f=\sum_{t=0}^{d} v_t f_t$ 的集合，其中 Ω 是 M 中的一个开集。特别地， C^ω(Ω $\mathbb{A}$) 表示 Ω 上实解析函数构成的双边 $\mathbb{A}$-模。

对于 $s=0$， 1， ...， m，令

$$\frac{\partial f}{\partial x_s}(x)=\lim_{\mathbb{R} \ni \varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1}(f(x+\varepsilon v_s)-f(x)).$$

注意，算子 $\partial_{x_s}=\frac{\partial}{\partial x_s}(s \geq 1)$ 不依赖于 $\mathbb{A}$ 的基 $\mathcal{B}'$，而只取决于 $\mathcal{B}$ 的选取。此外，通常的莱布尼茨法则成立:

$$\partial_{x_s}(f g)=(\partial_{x_s} f) g+f(\partial_{x_s} g), \quad f, g \in C^1(\Omega, \mathbb{A}),$$

由此可得

$$\partial_{x_s}^2(f g)=(\partial_{x_s}^2 f) g+2(\partial_{x_s} f)(\partial_{x_s} g)+f(\partial_{x_s}^2 g), \quad f, g \in C^2(\Omega, \mathbb{A}).$$

考虑由 $\mathcal{B}$ 诱导的广义柯西-黎曼算子（或 Weyl 算子），

$$D_{\mathcal{B}}=\sum_{s=0}^{m} v_s \partial_{x_s},$$

它对应于柯西-黎曼算子（或 Weyl 算子），该算子给出定义在副向量上且取值于 $\mathbb{R}_{0,\ m}$ 的单生成函数，参见例如 [4]，；Dentoni 和 Sce [17]，首先将其推广到八元数，随后 Perotti 在 [41, Definition 2] 中将其推广到实替代$_{-}$-代数，其中使用符号 $\partial_{\mathcal{B}}$ $(= \frac{1}{2}D_{\mathcal{B}})$。

鉴于 $\mathbb{A}$ 的非交换性，对函数 $f = \sum_{t=0}^{d} v_t f_t \in C^1(\Omega\ \mathbb{A})$ 的作用可以在左侧进行

$$D_{\mathcal{B}} f(x) := \sum_{s=0}^{m} v_s \partial_{x_s} f(x) = \sum_{s=0}^{m} \sum_{t=0}^{d} v_s v_t \partial_{x_s} f_t(x),$$

也可以在右侧进行

$$f(x) D_{\mathcal{B}} := \sum_{s=0}^{m} \partial_{x_s} f(x) v_s = \sum_{s=0}^{m} \sum_{t=0}^{d} v_t v_s \partial_{x_s} f_t(x).$$

事实上，算子 $D_{\mathcal{B}}$ 不依赖于超复基 $\mathcal{B}$ 的选取。备注 3]，这一点于 2014 年在八元数情形下得到了证明 [38, 定理 2.1]。因此，我们将使用符号 D （或 D_x），而不使用 $D_{\mathcal{B}}$。类似地，由 $\mathcal{B}$ 诱导的共轭广义柯西-黎曼算子

$$\overline{D} = \overline{D}_x = \sum_{s=0}^{m} v_s^c \partial_{x_s} = \partial_{x_0} - \sum_{s=1}^{m} v_s \partial_{x_s}$$

也不依赖于超复基 $\mathcal{B}$的选取。

现在我们回顾 [41，命题 5] 中的一个有用性质。

引理 2.8。 设 Ω 是 M 中的一个开集，且 $f \in C^2(\Omega\ \mathbb{A})$。则有

$$\Delta f = \overline{D}(Df) = D(\overline{D} f) = (fD)\overline{D} = (f\overline{D})D,$$

其中 $\Delta = \Delta_x$ 是由 $\mathcal{B}$ 诱导的作用于 M 上的拉普拉斯算子，其定义为

$$\Delta f(x) = \sum_{s=0}^{m} \partial_{x_s}(\partial_{x_s} f(x)).$$

注意，拉普拉斯算子 Δ是一个实系数算子，显然不依赖于 M的超复基 $\mathcal{B}$ 的选取。

从现在起，令 $p \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ 并设 $q = m - p$。我们将把元素 $x \in M$ 分解为

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_p + \underline{\boldsymbol{x}}_q \in \mathbb{R}^{p+1} \oplus \mathbb{R}^q, \quad \boldsymbol{x}_p = \sum_{s=0}^{p} x_s v_s,\ \underline{\boldsymbol{x}}_q = \sum_{s=p+1}^{m} x_s v_s,$$

其中，我们将 $\boldsymbol{x}$ 加粗以强调这一固定分解，而不使用 x。相应地，广义柯西-黎曼算子分解为

$$D_{\boldsymbol{x}} = D_{\boldsymbol{x}_p} + D_{\underline{\boldsymbol{x}}_q}, \quad D_{\boldsymbol{x}_p} = \sum_{s=0}^{p} v_s \partial_{x_s}, D_{\underline{\boldsymbol{x}}_q} = \sum_{s=p+1}^{m} v_s \partial_{x_s}. \tag{1}$$

将 $\mathbb{R}^q$ 中的球面记为 $\mathbb{S}$

$$\mathbb{S}=\{\underline{\boldsymbol{x}}_q:\underline{\boldsymbol{x}}_q^2=-1\}=\Big\{\underline{\boldsymbol{x}}_q=\sum_{s=p+1}^{m}x_s\upsilon_s:\sum_{s=p+1}^{m}x_s^2=1\Big\}.$$

对于$\underline{\boldsymbol{x}}_q\neq 0$，存在唯一确定的 $r\in\mathbb{R}^+=\{x\in\mathbb{R}:\ x>0\}$ 以及 $\omega\in\mathbb{S}$，使得$\boldsymbol{x}_q=r\omega$，其中 $r=|\underline{\boldsymbol{x}}_q|$，$\omega=\frac{\boldsymbol{x}_q}{|\boldsymbol{x}_q|}$. 对于 $\boldsymbol{x}_q=0$，令 $r=0$，且 ω 为任意$\omega\in\mathbb{S}$。对于任意 $\underline{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{x}_p+\boldsymbol{x}_q\in M$，令 $\boldsymbol{x}':=(\boldsymbol{x}_p,\ r)=(x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_p,\ r)\in\mathbb{R}^{p+2}$，其中 $r=|\boldsymbol{x}_q|$。

与 $\omega\in\mathbb{S}$ 相关联的 $\mathbb{R}^{p+2}$ 中的上半空间 H_ω 定义为

$$\mathrm{H}_{\underline{\omega}}=\{\boldsymbol{x}_p+r\underline{\omega},\boldsymbol{x}_p\in\mathbb{R}^{p+1},r\geq 0\},$$

并且显然

$$M=\bigcup_{\underline{\omega}\in\mathbb{S}}\mathrm{H}_{\underline{\omega}},\quad \mathbb{R}^{p+1}=\bigcap_{\underline{\omega}\in\mathbb{S}}\mathrm{H}_{\underline{\omega}}.$$

回顾 (1)，实替代 $*$-代数上的广义部分切片单生成函数的定义可如下给出。

定义 2.9。设Ω 为 M中的一个开集。函数 $f:\Omega\to\mathbb{A}$ 称为类型(p,q) 的左广义部分切片单值，若对于所有 $\omega\in\mathbb{S}$，其在$\Omega_\omega:=\Omega\cap(\mathbb{R}^{p+1}\oplus\omega\mathbb{R})\subseteq\mathbb{R}^{p+2}$ 上的限制 f_ω属于 C^1 类，且满足

$$D_{\underline{\omega}}f_{\underline{\omega}}(\boldsymbol{x}):=(D_{\boldsymbol{x}_p}+\underline{\omega}\partial_r)f_{\underline{\omega}}(\boldsymbol{x}_p+r\underline{\omega})=0,$$

对于所有 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_p+r\underline{\omega}\in\Omega_{\omega}$。

类似地，若对于所有 $\omega\in\mathbb{S}$，$f_\omega\in C^1(\Omega_\omega,\mathbb{A})$ 均满足以下条件，则称 f 为类型 (p,q)的右广义部分切片单值函数：

$$f_{\underline{\omega}}(\boldsymbol{x})D_{\underline{\omega}}:=f_{\underline{\omega}}(\boldsymbol{x}_p+r\underline{\omega})D_{\boldsymbol{x}_p}+\partial_r f_{\underline{\omega}}(\boldsymbol{x}_p+r\underline{\omega})\underline{\omega}=0,$$

对于所有 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_p+r\underline{\omega}\in\Omega_{\omega}$。

在本文中，(p,q) 始终固定。因此，我们分别用 $\mathcal{GSM}^L(\Omega,\mathbb{A})$（简写为 $\mathcal{GSM}(\Omega,\mathbb{A})$）和 $\mathcal{GSM}^R(\Omega,\mathbb{A})$ 表示 Ω 中所有类型为 (p,q) 的左、右广义部分切片单值函数所构成的类。当 $\mathbb{A}$ 为结合的时，例如 $\mathbb{A}=\mathbb{H}$ 或 $\mathbb{R}_{0,m}$, $\mathcal{GSM}^L(\Omega,\mathbb{A})$ 是一个右 $\mathbb{A}$-模。另一方面，当 $\mathbb{A}$ 为非结合的时，例如对于 $\mathbb{A}=\mathbb{O}$, $\mathcal{GSM}^L(\Omega,\mathbb{A})$ 通常不是右 $\mathbb{A}$-模。

当 $(p,q)=(m-1,1)$ 时，定义 2.9 中（左）广义部分切片单值函数的概念与（左）单生成函数的概念一致，记为 $\mathcal{M}(\Omega,\mathbb{A})$。当 $(p,q)=(0,m)$ 时，定义 2.9 退化为（左）切片单值函数的概念，见 [12], ，记为 $\mathcal{SM}(\Omega,\mathbb{A})$。

例 2.10。设 $p\in\{0,1,\ldots,m-2\}$、$\omega\in\mathbb{S}$ 以及 a、$b\in\mathbb{A}$，其中 $a\neq b$。令$U=\mathrm{H}_\omega\cup\mathrm{H}_{-\omega}$，并考虑

$$f(\boldsymbol{x})=\begin{cases}a, & \text{if } \boldsymbol{x}\in M\setminus U,\\ b, & \text{if } \boldsymbol{x}\in U\setminus\mathbb{R}^{p+1}.\end{cases}$$

那么 $f\in\mathcal{GSM}^L(M\setminus\mathbb{R}^{p+1},\mathbb{A})\cap\mathcal{GSM}^R(M\setminus\mathbb{R}^{p+1},\mathbb{A})$。

例 2.11. 给定 $n \in \mathbb{N}$，令

$$f(\boldsymbol{x}) = (x_0 + \underline{\boldsymbol{x}}_q)^n.$$

那么 $f \in \mathcal{GSM}^L(M, \mathbb{A}) \cap \mathcal{GSM}^R(M, \mathbb{A})$。

例 2.12。定义柯西核

$$E(\boldsymbol{x}) := \frac{1}{\sigma_{p+1}} \frac{\overline{\boldsymbol{x}}}{|\boldsymbol{x}|^{p+2}}, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega = M \setminus \{0\},$$

其中 $\sigma_{p+1} = 2\frac{\Gamma^{p+2}}{\Gamma(\frac{p+2}{2})}$ 表示 $\mathbb{R}^{p+2}$ 中单位球的表面积。

那么 $E(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{GSM}^L(\Omega, \mathbb{A}) \cap \mathcal{GSM}^R(\Omega, \mathbb{A})$。

以下柯西积分公式可用与 [55, 定理 4.7] 的证明完全相同的方法证明，因此我们省略细节。

定理 2.13（柯西公式）。设 $\eta \in \mathbb{S}$ 和 Ω 是 M 中具有光滑边界 $\partial\Omega_\eta$ 的有界区域。若 $f \in C^1(\Omega_\eta, \mathbb{A}) \cap C(\Omega_\eta, \mathbb{A})$ 满足 $D_\eta f(\boldsymbol{y}) = 0$，对所有 $\boldsymbol{y} \in \Omega_\eta$ 均成立，则

$$f(\boldsymbol{x}) = \int_{\partial\Omega_\eta} E_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{n}(\boldsymbol{y}) f(\boldsymbol{y}))dS(\boldsymbol{y}), \quad \boldsymbol{x} \in \Omega_\eta,$$

其中 $E_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}) := E(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})$、$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{y}) = \sum_{i=0}^{p} n_i(\boldsymbol{y}) v_i + n_{p+1}(\boldsymbol{y})\eta$ 是 $\partial\Omega_\eta$ 在 $\boldsymbol{y}$ 处的单位外法向量，dS 和 dV 分别表示 $\mathbb{R}^{p+2}$ 中经典的勒贝格曲面元和体积元。

注 2.14。根据定理 2.13，所有函数 $f \in \mathcal{GSM}(\Omega, \mathbb{A})$ 都满足 $f_\omega \in C^\infty(\Omega_\omega, \mathbb{A})$，对所有 $\omega \in \mathbb{S}$ 均成立。

由注 2.14 和引理 2.8 可得

命题 2.15。函数 $f \in \mathcal{GSM}(\Omega, \mathbb{A})$ 必然在 Ω 上逐片调和，即 f_ω 对任意 $\omega \in \mathbb{S}$ 都在 Ω_ω 内调和。

2.4 恒等定理和表示公式

为陈述接下来的结果，我们需要一些术语，这些术语将在下一个定义中给出。

定义 2.16. 设 Ω 是 M 中的一个区域。

1. 若 $\Omega \cap \mathbb{R}^{p+1} \neq \emptyset$ 且对每个 $\omega \in \mathbb{S}$，Ω_ω 是 $\mathbb{R}^{p+2}$ 中的一个区域，则称 Ω 为切片域。

2. 若对于 $\boldsymbol{x}_p \in \mathbb{R}^{p+1}$、$r \in \mathbb{R}^+$ 和 $\omega \in \mathbb{S}$，$\mathbb{R}^{p+1}$，则称 Ω 关于 $\mathbb{R}^{p+1}$ 部分对称（简称 *p*-对称）。

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_p + r\underline{\omega} \in \Omega \Longrightarrow [\boldsymbol{x}] := \boldsymbol{x}_p + r\mathbb{S} = \{\boldsymbol{x}_p + r\underline{\omega}, \ \underline{\omega} \in \mathbb{S}\} \subseteq \Omega.$$

用 $\mathcal{Z}_f(\Omega)$ 表示函数 $f : \Omega \subseteq M \to \mathbb{A}$ 的零点集。依照 [55, Theorem 3.14], 的证明，可以得到如下关于切片域上广义部分切片单值函数的恒等定理。详情请参见 [55] 。

定理 2.17。**（恒等定理）**设 $\Omega \subseteq M$ 是一个切片域，且 $f, g : \Omega \to \mathbb{A}$ 是广义部分切片单值函数。若存在一个虚数 $\omega \in \mathbb{S}$，使得 $f = g$ 在 Ω_ω 中的一个 $p+1)$维光滑流形上成立，则 $f \equiv g$ 在 Ω 中成立。

广义部分切片单生成函数的恒等定理可用于建立一个表示公式。对于这一结果，证明与 [55, 定理 3.16] 的证明相同，因此此处略去。我们注意到，在下文中，当变量 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_p + r\omega$ 写成带上标的形式（例如 $\boldsymbol{x}'$）时，它表示 $\mathbb{R}^{p+2}$ 中的有序对 $\boldsymbol{x}' = (\boldsymbol{x}_p,\ r)$，以强调讨论与 $\omega \in \mathbb{S}$ 无关。

定理 2.18。**（表示公式）**设 $\Omega \subseteq M$ 是一个 p-对称切片域，且 $f : \Omega \to \mathbb{A}$ 是一个广义部分切片单生成函数。那么，对于任意 $\omega \in \mathbb{S}$ 以及任意 $\boldsymbol{x}_p + r\omega \in \Omega$，

$$f(\boldsymbol{x}_p + r\underline{\omega}) = \frac{1}{2}(f(\boldsymbol{x}_p + r\underline{\eta}) + f(\boldsymbol{x}_p - r\underline{\eta})) + \frac{1}{2}\underline{\omega}(\underline{\eta}(f(\boldsymbol{x}_p - r\underline{\eta}) - f(\boldsymbol{x}_p + r\underline{\eta}))),$$

对于任意 $\eta \in \mathbb{S}$。

此外，以下两个函数不依赖于 η:

$$F_1(\boldsymbol{x}') = \frac{1}{2}(f(\boldsymbol{x}_p + r\underline{\eta}) + f(\boldsymbol{x}_p - r\underline{\eta})),$$

$$F_2(\boldsymbol{x}') = \frac{1}{2}\underline{\eta}(f(\boldsymbol{x}_p - r\underline{\eta}) - f(\boldsymbol{x}_p + r\underline{\eta})).$$

有兴趣的读者可参阅 [20]，其中给出了非轴对称域上切片正则函数表示公式的一个版本。

2.5 广义部分切片函数

定理 2.18 表明，在某些特定区域上，我们所研究的函数具有特定形式，这一事实促使我们定义广义部分切片函数（进而定义广义正则函数）；关于实交替 $*$-代数上的切片正则函数这一特殊情形，参见 [28] 。

如果 D 是 $\mathbb{R}^{p+2}$ 的一个开集，且在对第 $p+2$ 个变量进行反射后保持不变，则称其关于第 $p+2$ 个变量的反射不变。

$$\boldsymbol{x}' = (\boldsymbol{x}_p, r) \in D \Longrightarrow \boldsymbol{x}'_\diamond := (\boldsymbol{x}_p, -r) \in D.$$

p-对称完备化 Ω_D 的 D 定义如下

$$\Omega_D = \bigcup_{\underline{\omega} \in \mathbb{S}} \left\{ \boldsymbol{x}_p + r\underline{\omega} \in M : \exists \boldsymbol{x}_p \in \mathbb{R}^{p+1},\ \exists r \geq 0,\ \text{s.t. } (\boldsymbol{x}_p, r) \in D \right\}.$$

定义 2.19。若函数 $F = (F_1, F_2) : D \longrightarrow \mathbb{A}^2$ 定义在一个开集 $D \subseteq \mathbb{R}^{p+2}$ 上，且该开集关于第 $(p+2)$ 个变量的反射保持不变，则称其为茎函数，前提是其取值于 $\mathbb{A}$ 的分量 F_1, F_2 满足所谓的奇偶条件。

$$F_1(\boldsymbol{x}'_\diamond) = F_1(\boldsymbol{x}'), \qquad F_2(\boldsymbol{x}'_\diamond) = -F_2(\boldsymbol{x}'), \qquad \boldsymbol{x}' = (\boldsymbol{x}_p, r) \in D.$$

每个茎函数 F 都会导出一个（左）广义偏切片函数 $f = \mathcal{I}(F) : \Omega_D \longrightarrow \mathbb{A}$，其定义为

$$f(\boldsymbol{x}) = \mathcal{I}(F)(\boldsymbol{x}) := F_1(\boldsymbol{x}') + \underline{\omega} F_2(\boldsymbol{x}'), \qquad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_p + r\underline{\omega} \in \Omega_D.$$

我们引入 Ω 上所有导出的广义偏切片函数的集合$_D$，记作

$$\mathcal{GS}(\Omega_D,\mathbb{A})=\Big\{f=\mathcal{I}(F):\ F \text{ is an } \mathbb{A}^2\text{-valued stem function on } D\Big\}$$

并且，对于 $k\in\mathbb{N}$，我们设

$$\mathcal{GS}^k(\Omega_D,\mathbb{A})=\Big\{f=\mathcal{I}(F):\ F\in C^k(D,\mathbb{A}^2) \text{ is an } \mathbb{A}^2\text{-valued stem function}\Big\}.$$

定义 2.20。 设 $f\in\mathcal{GS}^1(\Omega_D,\mathbb{A})$。若其茎函数 $F=(F_1,F_2)\in\mathbb{A}^2$ 满足广义柯西-黎曼方程，则称函数 f 为类型 (p,q) 的广义部分切片正则函数

$$\begin{cases} D_{\boldsymbol{x}_p}F_1-\partial_r F_2=0,\\ \overline{D}_{\boldsymbol{x}_p}F_2+\partial_r F_1=0. \end{cases}\tag{2}$$

与前面一样，类型 (p,q) 将固定不变，并在下文中省略。用 $\mathcal{GSR}(\Omega_D,\mathbb{A})$ 表示 Ω_D 上所有广义部分切片正则函数的集合。

注 2.21。 设 $\boldsymbol{x}'=(0,x_1,x_2,\ldots,x_p,r)=(0,x_1,x_2,\ldots,x_p,x_m)\in\{0\}\oplus\mathbb{R}^m$，其中 $m=p+1$，并考虑如下形式的函数 $F=(F_1,F_2)\in C^1(D,\mathbb{A}^2)$

$$F_1(\boldsymbol{x}')=\sum_{i=1}^{p}f_i(\boldsymbol{x}')v_i,\ F_2(\boldsymbol{x}')=f_m(\boldsymbol{x}'),\quad f_i(\boldsymbol{x}')\in\mathbb{R},i=1,2,\ldots,m.$$

于是，*(2)* 化为所谓的黎兹系统：

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m}\partial_{x_i}f_i=0,\\ \partial_{x_i}f_j=\partial_{x_j}f_i,\quad i,j=1,2,\ldots,m, \end{cases}$$

该系统由 *Stein* 和 *Weiss [46]* 于 *1960*年在研究多变量调和函数理论时提出。

定理 2.18 给出了在 p-对称域中定义的函数类 $\mathcal{GSM}$ 与 $\mathcal{GSR}$之间的关系，可表述为以下结果。其证明与 [55, 定理 5.8]相同，因此此处略去。

定理 2.22。 *(i)* 对于 *p*-对称域 $\Omega=\Omega_D$ 且满足 $\Omega\cap\mathbb{R}^{p+1}=\emptyset$，有 $\mathcal{GSM}(\Omega,\mathbb{A})\supsetneqq\mathcal{GSR}(\Omega_D,\mathbb{A})$。

(ii) 对于 *p*-对称域 $\Omega=\Omega_D$ 且满足 $\Omega\cap\mathbb{R}^{p+1}\neq\emptyset$，有$\mathcal{GSM}(\Omega,\mathbb{A})=\mathcal{GSR}(\Omega_D,\mathbb{A})$。

在四元数、克利福德代数和八元数上的经典表述中，切片函数类自然地作为 Fueter-Sce 构造的第一步出现。在研究 Fueter-Sce 定理时，考虑实交替 $*$-代数上的广义部分切片函数类也很方便。我们指出，构造中出现的映射可以因式分解，从而得到所谓的精细结构，见 [6, 8]。

2.6 Fueter 多项式

要引入 Fueter 多项式，我们需要先引入所谓的 Fueter 变量；在部分切片情形下，它们分为左型和右型。

定义 2.23. 由 $\mathcal{B}$ 诱导的所谓（左）*Fueter* 变量定义如下：

$$z_\ell(\boldsymbol{x}) = z_\ell^L(\boldsymbol{x}) = z_\ell(\boldsymbol{x}_p + r\underline{\omega}) = x_\ell + r\underline{\omega}v_\ell,\ \ell = 0, 1, \ldots, p.$$

类似地，由 $\mathcal{B}$ 诱导的所谓右 *Fueter* 变量定义如下：

$$z_\ell^R(\boldsymbol{x}) = z_\ell^R(\boldsymbol{x}_p + r\underline{\omega}) = x_\ell + rv_\ell\underline{\omega},\ \ell = 0, 1, \ldots, p.$$

令 $(a_1a_2\cdots a_k)^{\otimes_k}$ 为按固定的结合次序 $\otimes_k$ 排列的 k 个元素（$a_1, a_2, \ldots, a_k$）的乘积。特别地，将从左到右的乘法记为

$$(a_1a_2\cdots a_k)_L := (\cdots((a_1a_2)a_3)\cdots)a_k,$$

将从右到左的乘法记为

$$(a_1a_2\cdots a_k)_R := a_1(\cdots(a_{k-2}(a_{k-1}a_k))\cdots).$$

回顾一下命题 4.2], ，它可用于在实交替代数的一般情形下定义 Fueter 多项式。

命题 2.24。 设 a、a_0、a_1、……、$a_p \in \mathbb{A}$ 以及 $(j_1$、j_2、……、$j_k)$ $\in \{0, 1, \ldots, p\}^k$，允许重复出现。则下述求和与所选取的结合阶 $\otimes_{(k+1)}$ 无关

$$\sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_k)\in\sigma} (a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_k}a)_{\otimes_{(k+1)}},$$

其中，求和遍历 $(j_1$、j_2、……、$j_k)$ 的所有可区分排列 σ。特别地，有

$$\sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_k)\in\sigma} (a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_k}a)_L = \sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_k)\in\sigma} (a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_k}a)_R.$$

定义 2.25 (Fueter 多项式)。 对于 $\mathrm{k} = (k_0$、k_1、……、$k_p) \in \mathbb{N}^{p+1}$，设 $\overrightarrow{\mathrm{k}} := (j_1$、$j_2$、……、$j_k)$ 是一个排列，其中排列中的 0 的个数为 k_0，1 的个数为 k_1，而 p 的个数为 k_p，其中 $k = |\mathrm{k}| := k_0 + k_1 + \cdots + k_p$、$0 \leq j_1 \leq j_2 \leq \ldots \leq j_k \leq p$。定义

$$\mathcal{P}_\mathrm{k}(\boldsymbol{x}) = \mathcal{P}_\mathrm{k}^L(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{k!} \sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_k)\in\sigma(\overrightarrow{\mathrm{k}})} z_{i_1}z_{i_2}\cdots z_{i_k},$$

其中求和遍历 $k!$ k! 个不同的排列 $\sigma(\overrightarrow{\mathrm{k}})$ 的 $\overrightarrow{\mathrm{k}}$。当$\mathrm{k} = (0, \ldots, 0) = \mathbf{0}$时，令 $\mathcal{P}_\mathbf{0}(\boldsymbol{x}) = 1$；当k至少有一个分量为负时，令 $\mathcal{P}_\mathrm{k}(\boldsymbol{x}) = 0$。

类似地，将 z_ℓ 替换为 z_ℓ^R 后，我们可以定义 $\mathcal{P}_\mathrm{k}^R$。

事实上，与 [36, 命题 4.4], 中的单生成情形不同，非结合性使得直接验证 $\mathcal{P}_\mathrm{k}$ 是广义部分切片单生成的几乎不可能。随后，我们将沿用 [55, 定理 6.12] 所用的方法，证明 Fueter 多项式也可以通过定义 3.1 中的 CK 延拓得到；参见定理 3.7。这一事实意味着 Fueter 多项式 $\mathcal{P}_\mathrm{k}$具有广义部分切片单生成性。

3 CK-延拓

本节将讨论实交替
$*$-代数。我们首先考虑将一个实解析函数延拓为广义部分切片单生成函数；然后考虑将其延拓为单值函数，正如我们将看到的，这将属于一种特殊类型。最后，我们将讨论将一对实解析函数延拓为调和函数，而这同样将属于一种特殊类型。

3.1 广义部分切片单生成函数的 CK 延拓

首先，我们定义一种广义部分切片单生成的柯西-柯瓦列夫斯卡娅延拓，它从定义在 $\mathbb{R}^{p+1}$ 中某个区域内的实解析函数出发。

定义 3.1（CK-延拓）。设 Ω_0 是 $\mathbb{R}^{p+1}$ 中的一个区域，并将 Ω_0^* 记为

$$\Omega_0^* = \{\boldsymbol{x}_p + \underline{\boldsymbol{x}}_q : \boldsymbol{x}_p \in \Omega_0, \underline{\boldsymbol{x}}_q \in \mathbb{R}^q\}.$$

给定一个实解析函数 $f_0 \in C^\omega(\Omega_0, \mathbb{A})$，假设存在定义在某个区域 $\Omega \subseteq \Omega_0^*$ 中的左广义部分切片单生成函数 f^*，其中 $\Omega_0 \subset \Omega$，并且满足 $f^*(\boldsymbol{x}_p) = f_0(\boldsymbol{x}_p)$。这样的函数 f^*称为 f_0的左广义部分切片柯西-柯瓦列夫斯卡娅延拓（简称 *CK*-延拓）。

接下来，我们将使用一个基本结果，其证明可由 [55,引理 3.15]推出。

引理 3.2. 设 $a \in \mathbb{R}^{p+1}$,$\omega \in \mathbb{S}$。则对任意 $b \in \mathbb{A}$，有

$$a(\underline{\omega} b) = \underline{\omega}(a^c b).$$

证明。注意，对任意 $a, b, \omega \in \mathbb{A}$,

$$[a, \underline{\omega}, b] + [a^c, \underline{\omega}, b] = [a + a^c, \underline{\omega}, b].$$

在 $a \in M$ 且 $b, \omega \in \mathbb{A}$ 的特殊情形下，

$$[a, \underline{\omega}, b] + [a^c, \underline{\omega}, b] = 0,$$

这给出

$$[a, \underline{\omega}, b] = -[a^c, \underline{\omega}, b] = [\underline{\omega}, a^c, b],$$

这里，我们利用代数是交错代数这一事实得到了第二个等式。将此与以下事实结合起来:

$$a\underline{\omega} = \underline{\omega} a^c, \quad a \in \mathbb{R}^{p+1}, \underline{\omega} \in \mathbb{S},$$

由此得到该结论。 □

定理 3.3。设 Ω_0 是 $\mathbb{R}^{p+1}$ 中的一个区域，并考虑实解析函数$f_0 \in C^\omega(\Omega_0, \mathbb{A})$。则由下式给出的函数

$$CK[f_0](\boldsymbol{x}) := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{r^{2k}}{(2k)!}(-\Delta_{\boldsymbol{x}_p})^k f_0(\boldsymbol{x}_p) + \underline{\omega} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{r^{2k+1}}{(2k+1)!}(-\Delta_{\boldsymbol{x}_p})^k (D_{\boldsymbol{x}_p} f_0(\boldsymbol{x}_p)), \quad (3)$$

是 f_0 在 *p*-对称切片域 $\Omega \subseteq \Omega_0^*$ 中满足 $\Omega_0 \subset \Omega$的 *CK* 延拓，其中$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_p + r\omega$ 满足 $\boldsymbol{x}_p \in \mathbb{R}^{p+1}$, $r \geq 0$和 $\omega \in \mathbb{S}$。

证明。 首先，应当指出，式（3）中的级数在任意ω 处均不依赖于 $\boldsymbol{x}_p \in \Omega_0 \subseteq \mathbb{R}^{p+1}$。令 $f_0 \in C^{\omega}(\Omega_0,\ \mathbb{A})$。我们证明，由式（3）给出的 $CK[f_0]$ 在某个 p-对称切片域上是良定义的。为此，我们回顾一个众所周知的结果：实值函数 g 在 Ω_0 中实解析，当且仅当对于任意紧集 $K \subset \Omega_0,$，存在某个常数 $C = C_{g,\ K} > 0$ 使得

$$|\partial^{\mathrm{k}} g(\boldsymbol{x}_p)| \leq \mathrm{k}! C^{1+|\mathrm{k}|}, \quad \forall \boldsymbol{x}_p \in K, \mathrm{k} \in \mathbb{N}^{p+1},$$

其中 $\partial^{\mathrm{k}} = \frac{\partial^k}{\partial_{x_0}^{k_0} \partial_{x_1}^{k_1} \cdots \partial_{x_p}^{k_p}}$与 $\mathrm{k} = (k_0,\ k_1,\ \ldots\ldots,\ k_p)$，且 $k = |\mathrm{k}|$。

因此，给定 $f_0 \in C^{\omega}(\Omega_0,\ \mathbb{A})$，存在一些常数 $\lambda = \lambda_{p,\ K},\ C = C_K > 0$，使得

$$|\Delta_{\boldsymbol{x}_p}^k f_0(\boldsymbol{x}_p)| \leq \lambda (2k)! C^{2k}, \quad \boldsymbol{x}_p \in K, k \in \mathbb{N},$$

这说明，对所有 $\boldsymbol{x}_p \in K$，

$$\Big| \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{r^{2k}}{(2k)!} (-\Delta_{\boldsymbol{x}_p})^k f_0(\boldsymbol{x}_p) \Big| \leq \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} (rC)^{2k},$$

and

$$\Big| \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{r^{2k+1}}{(2k+1)!} (-\Delta_{\boldsymbol{x}_p})^k f_0(\boldsymbol{x}_p) \Big| \leq \lambda r \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(rC)^{2k}}{2k+1}.$$

因此，式（3）的右侧在 p-对称切片域中正规收敛 n

$$\Omega = \bigcup_{K \subset \Omega_0} \mathring{K} \times \{\underline{\boldsymbol{x}}_q \in \mathbb{R}^q : |\underline{\boldsymbol{x}}_q| < \frac{1}{C_K}\} \subseteq \Omega_0^*.$$

现在只需证明 $CK[f_0] \in \mathcal{GSM}^L(\Omega\ \mathbb{A})$。为此，我们固定 $\omega \in \mathbb{S}$，并证明对于 $\boldsymbol{x}_p + r\omega \in \Omega_\omega$，

$$D_{\boldsymbol{x}_p}(\underline{\omega}(D_{\boldsymbol{x}_p} f_0(\boldsymbol{x}_p))) = \underline{\omega} \Delta_{\boldsymbol{x}_p} f_0(\boldsymbol{x}_p), \tag{4}$$

and

$$\underline{\omega}(\underline{\omega}(D_{\boldsymbol{x}_p} f_0)) = -D_{\boldsymbol{x}_p} f_0. \tag{5}$$

注意，式（5）由阿廷定理得出

$$\underline{\omega}(\underline{\omega}(D_{\boldsymbol{x}_p} f_0)) = (\underline{\omega}^2)(D_{\boldsymbol{x}_p} f_0) = -D_{\boldsymbol{x}_p} f_0.$$

为证明 (4)，我们回顾一下， M 是替代 $*$代数 $\mathbb{A}$的一个超复子空间，因此对于所有 i、$j = 0$、1、……、p，其中 $i < j$，并且对于所有 $a \in \mathbb{A}$，我们有

$$v_i^c v_j + v_j^c v_i = 0, \quad [v_i^c, v_j, a] + [v_j^c, v_i, a] = 0,$$

由此得到

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=0, i<j}^{p} \big(v_i^c (v_j a) + v_j^c (v_i a) \big) \\ = & \sum_{i,j=0, i<j}^{p} \big((v_i^c v_j) a - [v_i^c, v_j, a] + (v_j^c v_i) a - [v_j^c, v_i, a] \big) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i,j=0,i<j}^{p}(v_i^c v_j + v_j^c v_i)a - \sum_{i,j=0,i<j}^{p}([v_i^c, v_j, a] + [v_j^c, v_i, a]) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

因此，根据引理 3.2 和命题 2.7，并回想 $f_0 \in C^\omega(\Omega_0, \mathbb{A})$ ，

$$
\begin{aligned}
& D_{\boldsymbol{x}_p}(\underline{\omega}(D_{\boldsymbol{x}_p} f_0)) = \sum_{i=0}^{p} v_i(\underline{\omega}(D_{\boldsymbol{x}_p}\partial_{x_i} f_0)) \\
= \;& \sum_{i=0}^{p}\underline{\omega}(v_i^c(D_{\boldsymbol{x}_p}\partial_{x_i} f_0)) = \sum_{i,j=0}^{p}\underline{\omega}(v_i^c(v_j\partial_{x_i}\partial_{x_j} f_0)) \\
= \;& \sum_{i=0}^{p}\underline{\omega}(v_i^c(v_i\partial_{x_i}^2 f_0)) + \sum_{0\le i<j\le p}\underline{\omega}\big(v_i^c(v_j\partial_{x_i}\partial_{x_j} f_0) + v_j^c(v_i\partial_{x_i}\partial_{x_j} f_0)\big) \\
= \;& \sum_{i=0}^{p}\underline{\omega}((v_i^c v_i)\partial_{x_i}^2 f_0)) = \underline{\omega}\Delta_{\boldsymbol{x}_p} f_0.
\end{aligned}
$$

现在我们可以利用 (4) 和 (5) 得到

$$
\begin{aligned}
& D_{\underline{\omega}} CK[f_0](\boldsymbol{x}_p + r\underline{\omega}) \\
= \;& (D_{\boldsymbol{x}_p} + \underline{\omega}\partial_r)\Big(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{r^{2k}}{(2k)!}(-\Delta_{\boldsymbol{x}_p})^k f_0(\boldsymbol{x}_p)\Big) \\
& +(D_{\boldsymbol{x}_p} + \underline{\omega}\partial_r)\Big(\underline{\omega}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{r^{2k+1}}{(2k+1)!}(-\Delta_{\boldsymbol{x}_p})^k (D_{\boldsymbol{x}_p} f_0(\boldsymbol{x}_p))\Big) \\
= \;& \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{r^{2k}}{(2k)!}(-\Delta_{\boldsymbol{x}_p})^k D_{\boldsymbol{x}_p} f_0(\boldsymbol{x}_p) + \underline{\omega}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{r^{2k-1}}{(2k-1)!}(-\Delta_{\boldsymbol{x}_p})^k f_0(\boldsymbol{x}_p) \\
& +\underline{\omega}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{r^{2k+1}}{(2k+1)!}(-\Delta_{\boldsymbol{x}_p})^k \Delta_{\boldsymbol{x}_p} f_0(\boldsymbol{x}_p) - \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{r^{2k}}{(2k)!}(-\Delta_{\boldsymbol{x}_p})^k D_{\boldsymbol{x}_p} f_0(\boldsymbol{x}_p) \\
= \;& 0,
\end{aligned}
$$

从而 $CK[f_0] \in \mathcal{GSM}^L(\Omega\ \mathbb{A})$，如所需。 □

注 3.4. 注意，*(3)* 中的级数可改写为

$$
CK[f_0](\boldsymbol{x}) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\underline{\boldsymbol{x}}_q^{2k}}{(2k)!}\Delta_{\boldsymbol{x}_p}^k f_0(\boldsymbol{x}_p) + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\underline{\boldsymbol{x}}_q^{2k+1}}{(2k+1)!}\Delta_{\boldsymbol{x}_p}^k (D_{\boldsymbol{x}_p} f_0(\boldsymbol{x}_p)),
$$

其中 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_p + \underline{\boldsymbol{x}}_q$。类似地，我们可以证明级数

$$
CK^R[f_0](\boldsymbol{x}) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\underline{\boldsymbol{x}}_q^{2k}}{(2k)!}\Delta_{\boldsymbol{x}_p}^k f_0(\boldsymbol{x}_p) + \sum_{k=0}^{+\infty}\Delta_{\boldsymbol{x}_p}^k (f_0(\boldsymbol{x}_p) D_{\boldsymbol{x}_p})\frac{\underline{\boldsymbol{x}}_q^{2k+1}}{(2k+1)!},
$$

是 f_0 的右广义部分切片 *CK*-延拓。

由显然事实 $CK[f_0](\boldsymbol{x}_p) = f_0(\boldsymbol{x}_p)$ 以及定理 2.17，可得

定理 3.5。 设 $f_0 : \mathbb{R}^{p+1} \to \mathbb{A}$ 是一个多项式。那么 $CK[f_0]$ 是 f_0 到 M 的唯一广义部分切片单正则延拓。

定义 3.6。对于 $\mathrm{k} = (k_0, k_1, \ldots, k_p) \in \mathbb{N}^{p+1}$ 和 $\boldsymbol{x}_p^{\mathrm{k}} = x_0^{k_0} x_1^{k_1} \ldots x_p^{k_p}$，定义

$$V_{\mathrm{k}}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\mathrm{k}!} CK[\boldsymbol{x}_p^{\mathrm{k}}](\boldsymbol{x}),$$

其中 $\mathrm{k}! = k_0! k_1! \cdots k_p!$。

现在注意到，根据定义，我们有

$$z_\ell(\boldsymbol{x}) = CK[x_\ell](\boldsymbol{x}) = x_\ell + r\underline{\omega} v_\ell, \quad \ell = 0, 1, \ldots, p,$$

其中 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_p + r\omega$ 满足 $\boldsymbol{x}_p \in \mathbb{R}^{p+1}, r \geq 0$, 且 $\omega \in \underline{\mathbb{S}}$。因此，采用证明 [55,定理 6.12], 时相同的论证，我们推导出以下结论:

定理 3.7。 对于每个 $\mathrm{k} \in \mathbb{N}^{p+1}$，都有 $V_{\mathrm{k}}(\boldsymbol{x}) = \mathcal{P}_{\mathrm{k}}(\boldsymbol{x})$，因此多项式 $\mathcal{P}_{\mathrm{k}}$ 是广义部分切片单正则的。

3.2 单生成函数的广义 CK 延拓

在本小节中，我们将建立实 alternative $*$-代数上单生成函数的广义 CK 延拓形式。

引理 3.8。 对于任意函数 $g = g(\boldsymbol{x}_p) \in C^1(\mathbb{R}^{p+1}, \mathbb{A})$ 和 $k \in \mathbb{N}$，以下公式成立

$$D_{\boldsymbol{x}_p}(\underline{\boldsymbol{x}}_q^{2k} g) = \underline{\boldsymbol{x}}_q^{2k} (D_{\boldsymbol{x}_p} g), \tag{6}$$

$$D_{\boldsymbol{x}_p}(\underline{\boldsymbol{x}}_q^{2k+1} g) = \underline{\boldsymbol{x}}_q^{2k+1} (\overline{D}_{\boldsymbol{x}_p} g), \tag{7}$$

$$D_{\underline{\boldsymbol{x}}_q}(\underline{\boldsymbol{x}}_q^{2k} g) = -2k \underline{\boldsymbol{x}}_q^{2k-1} g, \tag{8}$$

$$D_{\underline{\boldsymbol{x}}_q}(\underline{\boldsymbol{x}}_q^{2k+1} g) = -(2k+q) \underline{\boldsymbol{x}}_q^{2k} g. \tag{9}$$

证明。 我们首先证明（6）和（7）。令 $r = |\boldsymbol{x}_q| = (x_{p+1}^2 + \ldots + x_{p+q}^2)^{1/2}$。注意到，$\boldsymbol{x}_q^{2k} = (-1)^k r^{2k}$ 为实数，且与 x_i、$i = 0$、1、.....、p无关，对于任意函数 $g = g(\boldsymbol{x}_p) \in C^1(\mathbb{R}^{p+1}$、$\mathbb{A})$ 和 $k \in \mathbb{N}$，可得

$$D_{\boldsymbol{x}_p}(\underline{\boldsymbol{x}}_q^{2k} g) = \underline{\boldsymbol{x}}_q^{2k} (D_{\boldsymbol{x}_p} g),$$

and

$$D_{\boldsymbol{x}_p}(\underline{\boldsymbol{x}}_q^{2k+1} g) = (\underline{\boldsymbol{x}}_q^{2k}) D_{\boldsymbol{x}_p}(\underline{\boldsymbol{x}}_q g).$$

因此，根据引理 3.2，我们有

$$D_{\boldsymbol{x}_p}(\underline{\boldsymbol{x}}_q^{2k+1} g) = (\underline{\boldsymbol{x}}_q^{2k}) D_{\boldsymbol{x}_p}(\underline{\boldsymbol{x}}_q g) = \underline{\boldsymbol{x}}_q^{2k+1} (\overline{D}_{\boldsymbol{x}_p} g).$$

现在还需证明（8）和（9）。直接计算可得

$$D_{\underline{\boldsymbol{x}}_q}(r^{2k} g) = \sum_{i=p+1}^{p+q} (e_i \partial_{x_i} r^{2k}) g = 2k (r^{2k-2} \underline{\boldsymbol{x}}_q) g.$$

另外注意到 $\boldsymbol{x}_q^{2k} = (-1)^k r^{2k}$，我们得到

$$D_{\underline{\boldsymbol{x}}_q}(r^{2k}g) = (-1)^{k-1}2k(\underline{\boldsymbol{x}}_q^{2k-1})g = (-1)^{k-1}2k\underline{\boldsymbol{x}}_q^{2k-1}g.$$

因此，

$$D_{\underline{\boldsymbol{x}}_q}(\underline{\boldsymbol{x}}_q^{2k}g) = (-1)^k D_{\underline{\boldsymbol{x}}_q}(r^{2k}g) = -2k\underline{\boldsymbol{x}}_q^{2k-1}g,$$

从而得到（8）。

接着，我们注意到

$$[D_{\underline{\boldsymbol{x}}_q}, \underline{\boldsymbol{x}}_q, g] = \sum_{i=p+1}^{p+q}\sum_{j=p+1}^{p+q}[e_i, e_j\partial_{x_i}x_j, g] = \sum_{i=p+1}^{p+q}\sum_{j=p+1}^{p+q}[e_i, e_j, g]\delta_{i,j} = 0,$$

由此可得

$$D_{\underline{\boldsymbol{x}}_q}(\underline{\boldsymbol{x}}_q g) = (D_{\underline{\boldsymbol{x}}_q}\underline{\boldsymbol{x}}_q)g = -qg.$$

因此，（9）可证明如下：

$$\begin{aligned}
D_{\underline{\boldsymbol{x}}_q}(\underline{\boldsymbol{x}}_q^{2k+1}g) &= D_{\underline{\boldsymbol{x}}_q}(\underline{\boldsymbol{x}}_q^{2k}(\underline{\boldsymbol{x}}_q g)) \\
&= (-1)^k\big((D_{\underline{\boldsymbol{x}}_q}r^{2k})(\underline{\boldsymbol{x}}_q g) + r^{2k}D_{\underline{\boldsymbol{x}}_q}(\underline{\boldsymbol{x}}_q g)\big) \\
&= (-1)^k\big((2kr^{2k-2}\underline{\boldsymbol{x}}_q)(\underline{\boldsymbol{x}}_q g) - qr^{2k}g\big) \\
&= (-1)^k\big((2kr^{2k-2}(\underline{\boldsymbol{x}}_q\underline{\boldsymbol{x}}_q)g - qr^{2k}g\big) \\
&= (-1)^{k+1}(2k+q)r^{2k}g \\
&= -(2k+q)\underline{\boldsymbol{x}}_q^{2k}g,
\end{aligned}$$

其中第三个和第四个等式由阿廷定理得出。证明完毕。

□

引理 3.9. 对于任意函数 $g = g(\boldsymbol{x}_p) \in C^1(\mathbb{R}^{p+1}, \mathbb{A})$ 以及 $k \in \mathbb{N}$，以下公式成立

$$D_{\boldsymbol{x}}(\underline{\boldsymbol{x}}_q^{2k}g) = \underline{\boldsymbol{x}}_q^{2k}(D_{\boldsymbol{x}_p}g) - 2k\underline{\boldsymbol{x}}_q^{2k-1}g, \tag{10}$$

$$D_{\boldsymbol{x}}(\underline{\boldsymbol{x}}_q^{2k+1}g) = \underline{\boldsymbol{x}}_q^{2k+1}(\overline{D}_{\boldsymbol{x}_p}g) - (2k+q)\underline{\boldsymbol{x}}_q^{2k}g, \tag{11}$$

$$\overline{D}_{\boldsymbol{x}}(\underline{\boldsymbol{x}}_q^{2k}g) = \underline{\boldsymbol{x}}_q^{2k}(\overline{D}_{\boldsymbol{x}_p}g) + 2k\underline{\boldsymbol{x}}_q^{2k-1}g, \tag{12}$$

$$\overline{D}_{\boldsymbol{x}}(\underline{\boldsymbol{x}}_q^{2k+1}g) = \underline{\boldsymbol{x}}_q^{2k+1}(D_{\boldsymbol{x}_p}g) + (2k+q)\underline{\boldsymbol{x}}_q^{2k}g. \tag{13}$$

证明. 由 (6) 和 (8) 可直接得到 (10)，而 (11) 则由 (7) 和 (9) 得出。同理，我们可以证明 (12) 和 (13)。 □

定理 3.10（广义 CK 延拓）。设$\Omega_0 \subseteq \mathbb{R}^{p+1}$ 是一个区域，并考虑实解析函数 $A_0 \in C^\omega(\Omega_0, \mathbb{A})$。那么存在唯一的实解析函数序列 $\{A_k\}_{k=1}^\infty \subset C^\omega(\Omega_0, \mathbb{A})$，使得级数

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=0}^{+\infty}\underline{\boldsymbol{x}}_q^k A_k(\boldsymbol{x}_p) \tag{14}$$

在 p-对称切片域$\Omega \subseteq \Omega_0^*$ 中收敛，其中$\Omega_0 \subset\Omega$，且其和 f 在Ω中是单生成的。此外，函数 f 可形式化地写为

$$f(\boldsymbol{x}) = \Gamma(\frac{q}{2})\Big(\frac{r\sqrt{\Delta_{\boldsymbol{x}_p}}}{2}\Big)^{-\frac{q}{2}}\Big[\frac{r\sqrt{\Delta_{\boldsymbol{x}_p}}}{2}J_{\frac{q}{2}-1}(r\sqrt{\Delta_{\boldsymbol{x}_p}})[A_0(\boldsymbol{x}_p)]+\frac{\underline{\boldsymbol{x}}_q}{2}J_{\frac{q}{2}}(r\sqrt{\Delta_{\boldsymbol{x}_p}})[D_{\boldsymbol{x}_p}A_0(\boldsymbol{x}_p)]\Big], \tag{15}$$

其中，$r = |\underline{\boldsymbol{x}}_q|$、$\sqrt{\Delta}_{\boldsymbol{x}_p}$ 表示拉普拉斯算子 $\Delta_{\boldsymbol{x}_p}$ 的平方根（所得级数中只出现偶次幂），而 J_n 是 n 阶的第一类贝塞尔函数，其定义为

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k(x/2)^{n+2k}}{k!\Gamma(n+k+1)}.$$

证明。首先，我们证明唯一性，即如果式（14）中的级数存在且收敛，那么它是唯一的，并由式（15）给出。为此，对式（14）中的和 $f(\boldsymbol{x})$应用算子$D_{\boldsymbol{x}}$，由引理 3.9可得

$$\begin{aligned}
D_{\boldsymbol{x}}f(\boldsymbol{x}) &= \sum_{k=0}^{+\infty}D_{\boldsymbol{x}}(\underline{\boldsymbol{x}}_q^{2k}A_{2k}(\boldsymbol{x}_p)) + D_{\boldsymbol{x}}(\underline{\boldsymbol{x}}_q^{2k+1}A_{2k+1}(\boldsymbol{x}_p)) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\Big(\underline{\boldsymbol{x}}_q^{2k}(D_{\boldsymbol{x}_p}A_{2k}(\boldsymbol{x}_p)) - 2k\underline{\boldsymbol{x}}_q^{2k-1}A_{2k}(\boldsymbol{x}_p) \\
&\quad +\underline{\boldsymbol{x}}_q^{2k+1}(\overline{D}_{\boldsymbol{x}_p}A_{2k+1}(\boldsymbol{x}_p)) - (2k+q)\underline{\boldsymbol{x}}_q^{2k}A_{2k+1}(\boldsymbol{x}_p)\Big) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\Big(\underline{\boldsymbol{x}}_q^{2k}(D_{\boldsymbol{x}_p}A_{2k}(\boldsymbol{x}_p) - (2k+q)A_{2k+1}(\boldsymbol{x}_p)) \\
&\quad +\underline{\boldsymbol{x}}_q^{2k+1}(\overline{D}_{\boldsymbol{x}_p}A_{2k+1}(\boldsymbol{x}_p) - (2k+2)A_{2k+2}(\boldsymbol{x}_p))\Big).
\end{aligned} \tag{16}$$

因此，如果 f 是单生成的，则对所有 $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} (2k+q)A_{2k+1}(\boldsymbol{x}_p) = D_{\boldsymbol{x}_p}A_{2k}(\boldsymbol{x}_p), \\ (2k+2)A_{2k+2}(\boldsymbol{x}_p) = \overline{D}_{\boldsymbol{x}_p}A_{2k+1}(\boldsymbol{x}_p), \end{cases} \tag{17}$$

这意味着

$$\begin{aligned}
A_{2k}(\boldsymbol{x}_p) &= \frac{1}{2k}\overline{D}_{\boldsymbol{x}_p}A_{2k-1}(\boldsymbol{x}_p) \\
&= \frac{1}{2k(2k+q-2)}\overline{D}_{\boldsymbol{x}_p}(D_{\boldsymbol{x}_p}A_{2k-2}(\boldsymbol{x}_p)) \\
&= \frac{1}{2k(2k+q-2)}\Delta_{\boldsymbol{x}_p}A_{2k-2}(\boldsymbol{x}_p),
\end{aligned}$$

其中，最后一个等式由引理 2.8得出。
反复使用该公式，我们得到

$$A_{2k}(\boldsymbol{x}_p) = \frac{\Delta_{\boldsymbol{x}_p}^k A_0(\boldsymbol{x}_p)}{(2k)!!(2k+q-2)(2k+q-4)\cdots q} = \frac{\Gamma(\frac{q}{2})}{2^{2k}k!\Gamma(k+\frac{q}{2})}\Delta_{\boldsymbol{x}_p}^k A_0(\boldsymbol{x}_p).$$

类似地，由 (17) 和引理 2.8 可得

$$A_{2k+1}(\boldsymbol{x}_p) = \frac{1}{2k+q}D_{\boldsymbol{x}_p}A_{2k}(\boldsymbol{x}_p)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2k(2k+q)} D_{\boldsymbol{x}_p}(\overline{D}_{\boldsymbol{x}_p} A_{2k-1}(\boldsymbol{x}_p)) \\
&= \frac{1}{2k(2k+q)} \Delta_{\boldsymbol{x}_p} A_{2k-1}(\boldsymbol{x}_p) \\
&= \cdots \\
&= \frac{1}{(2k)!!(2k+q)(2k+q-2)\cdots(q+2)} \Delta^k_{\boldsymbol{x}_p} A_1(\boldsymbol{x}_p), \\
&= \frac{1}{(2k)!!(2k+q)(2k+q-2)\cdots(q+2)q} \Delta^k_{\boldsymbol{x}_p} D_{\boldsymbol{x}_p} A_0(\boldsymbol{x}_p) \\
&= \frac{\Gamma(\frac{q}{2})}{2^{2k+1}k!\Gamma(k+\frac{q}{2}+1)} \Delta^k_{\boldsymbol{x}_p} D_{\boldsymbol{x}_p} A_0(\boldsymbol{x}_p).
\end{aligned}
$$

因此， f 的表达式为

$$
f(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(\frac{q}{2})(-1)^k r^{2k}}{2^{2k}k!\Gamma(k+\frac{q}{2})} \Delta^k_{\boldsymbol{x}_p} A_0(\boldsymbol{x}_p) + \underline{\boldsymbol{x}}_q \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(\frac{q}{2})(-1)^k r^{2k}}{2^{2k+1}k!\Gamma(k+\frac{q}{2}+1)} \Delta^k_{\boldsymbol{x}_p} (D_{\boldsymbol{x}_p} A_0(\boldsymbol{x}_p)) \tag{18}
$$

因此， f 具有形式 (15)，且是唯一的。最后，按照 [4, 定理 14.8], 中的经典方法，我们可以证明 (18) 中的两个级数都在 p-对称切片域 $\Omega \subseteq \Omega_0^*$ 且 $\Omega_0 \subset \Omega$ 的区域内收敛。这里我们只考虑 (18) 中的第一个级数，另一个级数的收敛性可类似地证明。根据定理 3.3 的证明，给定 $A_0 \in C^\omega(\Omega_0, \mathbb{A})$，存在一些常数 $\lambda = \lambda_{p,K}, C = C_K > 0$，使得

$$
|\Delta^k_{\boldsymbol{x}_p} A_0(\boldsymbol{x}_p)| \leq \lambda (2k)! C^{2k}, \quad \boldsymbol{x}_p \in K, k \in \mathbb{N}.
$$

这意味着，对所有 $\boldsymbol{x}_p \in K$,

$$
\Big| \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k r^{2k}}{2^{2k}k!\Gamma(k+\frac{q}{2})} \Delta^k_{\boldsymbol{x}_p} A_0(\boldsymbol{x}_p) \Big| \leq \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{r^{2k}(2k)! C^{2k}}{2^{2k}k!\Gamma(k+\frac{q}{2})}.
$$

注意到上述不等式右侧的级数在$r < C^{-1}$处收敛，我们推知级数

$$
\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(\frac{q}{2})(-1)^k r^{2k}}{2^{2k}k!\Gamma(k+\frac{q}{2})} \Delta^k_{\boldsymbol{x}_p} A_0(\boldsymbol{x}_p)
$$

在 p-对称切片域中正规收敛

$$
\Omega = \bigcup_{K \subset \Omega_0} \mathring{K} \times \{\underline{\boldsymbol{x}}_q \in \mathbb{R}^q : |\underline{\boldsymbol{x}}_q| < \frac{1}{C_K}\}.
$$

证明完毕。 □

定理 3.10 使我们能够引入以下定义：

定义 3.11. 由式 *(14)* 中的级数给出的函数称为 A_0 的单生成广义 *CK* 延拓，记为 $GCK[A_0]$。

Note that $GCK[A_0] = CK[A_0]$ when $q = 1$.

注 3.12. 令 $\boldsymbol{x}_q = \omega r$、 $r \geq 0$，显然，(14) 中的函数可改写为

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \big((-1)^k r^{2k} A_{2k}(\boldsymbol{x}_p) + \underline{\omega}(-1)^k r^{2k+1} A_{2k+1}(\boldsymbol{x}_p)\big) = F_1(\boldsymbol{x}') + \underline{\omega} F_2(\boldsymbol{x}'),$$

其中 $\boldsymbol{x}' = (\boldsymbol{x}_p, r)$。显然，$F_1(\boldsymbol{x}'_\diamond) = F_1(\boldsymbol{x}')$ 且 $F_2(\boldsymbol{x}'_\diamond) = -F_2(\boldsymbol{x}')$，因此 f 是广义偏切片函数。因此，式 (14) 中的 f 属于集合 $\mathcal{M}(\Omega\ \mathbb{A}) \cap \mathcal{GS}(\Omega\ \mathbb{A})$，该集合之后记作 $\mathcal{AM}(\Omega\ \mathbb{A})$。当 $\mathbb{A} = \mathbb{R}_{0,\ m}$ 且 $M = \mathbb{R}^{m+1}$ 时，它就是众所周知的轴向单生成函数集合，也是 *Fueter-Sce* 映射的值域。

3.3 调和函数的广义 CK 延拓

本小节将建立实交替 $*$-代数上调和函数的广义 CK 延拓。

定理 3.13（调和广义 CK 延拓）。设 $\Omega_0 \subseteq \mathbb{R}^{p+1}$ 是一个区域，并考虑给定的两个实解析函数 $A_k \in C^\omega(\Omega_0,\ \mathbb{A})$、 $k = 0$、1。则存在唯一的实解析函数序列 $\{A_k\}_{k=2}^{\infty} \subset C^\omega(\Omega_0,\ \mathbb{A})$，使得级数

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \underline{\boldsymbol{x}}_q^k A_k(\boldsymbol{x}_p) \tag{19}$$

在 p-对称切片域 $\Omega \subseteq \Omega_0^*$ 中收敛，其中$\Omega_0 \subset \Omega$，且其和 f 在Ω上是调和函数。此外，函数 f 可以形式化地写作

$$f(\boldsymbol{x}) = \Gamma(\frac{q}{2})\Big(\frac{r\sqrt{\Delta_{\boldsymbol{x}_p}}}{2}\Big)^{-\frac{q}{2}}\Big[\frac{r\sqrt{\Delta_{\boldsymbol{x}_p}}}{2} J_{\frac{q}{2}-1}(r\sqrt{\Delta_{\boldsymbol{x}_p}})[A_0(\boldsymbol{x}_p)] + \frac{q\underline{\boldsymbol{x}}_q}{2} J_{\frac{q}{2}}(r\sqrt{\Delta_{\boldsymbol{x}_p}})[A_1(\boldsymbol{x}_p)]\Big], \tag{20}$$

并满足初始条件

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{x})\mid_{\underline{\boldsymbol{x}}_q=0} = A_0(\boldsymbol{x}_p), \\ D_{\underline{\boldsymbol{x}}_q} f(\boldsymbol{x})\mid_{\underline{\boldsymbol{x}}_q=0} = -qA_1(\boldsymbol{x}_p). \end{cases} \tag{21}$$

证明。给定初始实解析函数 $A_k \in C^\omega(\Omega_0,\ \mathbb{A})$, $k = 0,\ 1$，我们将证明调和延拓 (20) 的存在性和唯一性。按照定理 3.10 的证明中的推理，可以得到 (20) 中该函数的存在性。唯一性证明如下。对 (19) 应用拉普拉斯算子 $\Delta_{\boldsymbol{x}}$，由引理 2.8、(16) 和引理 3.8 可得

$$\begin{aligned} \Delta_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}) &= \overline{D}_{\boldsymbol{x}}(D_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x})) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \Big(\overline{D}_{\boldsymbol{x}}(\underline{\boldsymbol{x}}_q^{2k}(D_{\boldsymbol{x}_p} A_{2k}(\boldsymbol{x}_p) - (2k+q)A_{2k+1}(\boldsymbol{x}_p))) \\ &\quad + \overline{D}_{\boldsymbol{x}}(\underline{\boldsymbol{x}}_q^{2k+1}(\overline{D}_{\boldsymbol{x}_p} A_{2k+1}(\boldsymbol{x}_p) - (2k+2)A_{2k+2}(\boldsymbol{x}_p)))\Big) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \Big(\underline{\boldsymbol{x}}_q^{2k}(\overline{D}_{\boldsymbol{x}_p}(D_{\boldsymbol{x}_p} A_{2k}(\boldsymbol{x}_p) - (2k+q)A_{2k+1}(\boldsymbol{x}_p))) \\ &\quad + 2k\underline{\boldsymbol{x}}_q^{2k-1}(D_{\boldsymbol{x}_p} A_{2k}(\boldsymbol{x}_p) - (2k+q)A_{2k+1}(\boldsymbol{x}_p)) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\underline{\boldsymbol{x}}_q^{2k+1}(D_{\boldsymbol{x}_p}(\overline{D}_{\boldsymbol{x}_p}A_{2k+1}(\boldsymbol{x}_p)-(2k+2)A_{2k+2}(\boldsymbol{x}_p)))\\
&+(2k+q)\underline{\boldsymbol{x}}_q^{2k}(\overline{D}_{\boldsymbol{x}_p}A_{2k+1}(\boldsymbol{x}_p)-(2k+2)A_{2k+2}(\boldsymbol{x}_p))\Big)\\
=\ &\sum_{k=0}^{+\infty}\Big(\underline{\boldsymbol{x}}_q^{2k}(\Delta_{\boldsymbol{x}_p}A_{2k}(\boldsymbol{x}_p)-(2k+q)(2k+2)A_{2k+2}(\boldsymbol{x}_p))\\
&+\underline{\boldsymbol{x}}_q^{2k+1}(\Delta_{\boldsymbol{x}_p}A_{2k+1}(\boldsymbol{x}_p)-(2k+2)(2k+q+2)A_{2k+3}(\boldsymbol{x}_p))\Big).
\end{aligned}
$$

因此，由 f 的调和性可知，对所有 $k\in\mathbb{N}$,

$$
\begin{cases}
\Delta_{\boldsymbol{x}_p}A_{2k}(\boldsymbol{x}_p)=(2k+q)(2k+2)A_{2k+2}(\boldsymbol{x}_p),\\
\Delta_{\boldsymbol{x}_p}A_{2k+1}(\boldsymbol{x}_p)=(2k+2)(2k+q+2)A_{2k+3}(\boldsymbol{x}_p),
\end{cases}
$$

这意味着

$$
\begin{aligned}
A_{2k}(\boldsymbol{x}_p) &= \frac{1}{2k(2k+q-2)}\Delta_{\boldsymbol{x}_p}A_{2k-2}(\boldsymbol{x}_p)\\
&= \cdots\\
&= \frac{\Delta_{\boldsymbol{x}_p}^k A_0(\boldsymbol{x}_p)}{(2k)!!(2k+q-2)(2k+q-4)\cdots q}\\
&= \frac{\Gamma(\frac{q}{2})}{2^{2k}k!\Gamma(k+\frac{q}{2})}\Delta_{\boldsymbol{x}_p}^k A_0(\boldsymbol{x}_p),
\end{aligned}
$$

类似地,

$$
A_{2k+1}(\boldsymbol{x}_p)=\frac{\Gamma(\frac{q}{2}+1)}{2^{2k}k!\Gamma(k+\frac{q}{2}+1)}\Delta_{\boldsymbol{x}_p}^k A_1(\boldsymbol{x}_p).
$$

因此， f 可展开为

$$
f(\boldsymbol{x})=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\Gamma(\frac{q}{2})(-1)^k r^{2k}}{2^{2k}k!\Gamma(k+\frac{q}{2})}\Delta_{\boldsymbol{x}_p}^k A_0(\boldsymbol{x}_p)+\underline{\boldsymbol{x}}_q\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\Gamma(\frac{q}{2}+1)(-1)^k r^{2k}}{2^{2k}k!\Gamma(k+\frac{q}{2}+1)}\Delta_{\boldsymbol{x}_p}^k A_1(\boldsymbol{x}_p),\quad (22)
$$

因此， f 具有式 (20) 中的闭式:

$$
f(\boldsymbol{x})=\Gamma(\frac{q}{2})\Big(\frac{r\sqrt{\Delta_{\boldsymbol{x}_p}}}{2}\Big)^{-\frac{q}{2}}\Big[\frac{r\sqrt{\Delta_{\boldsymbol{x}_p}}}{2}J_{\frac{q}{2}-1}(r\sqrt{\Delta_{\boldsymbol{x}_p}})[A_0(\boldsymbol{x}_p)]+\frac{q\underline{\boldsymbol{x}}_q}{2}J_{\frac{q}{2}}(r\sqrt{\Delta_{\boldsymbol{x}_p}})[A_1(\boldsymbol{x}_p)]\Big].
$$

最后，我们证明由式 (19) 给出的函数满足初始条件 (21)。根据引理 3.8，对于任意函数 $g(\boldsymbol{x}_p)\in C^1(\mathbb{R}^{p+1},\ \mathbb{A})$，有

$$
D_{\underline{\boldsymbol{x}}_q}(\underline{\boldsymbol{x}}_q^k g(\boldsymbol{x}_p))\mid_{\underline{\boldsymbol{x}}_q}=0,\quad k\geq 2,
$$

and

$$
D_{\underline{\boldsymbol{x}}_q}(\underline{\boldsymbol{x}}_q g(\boldsymbol{x}_p))=-qg(\boldsymbol{x}_p).
$$

因此,

$$
D_{\underline{\boldsymbol{x}}_q}f(\boldsymbol{x})\mid_{\underline{\boldsymbol{x}}_q=0}=-qA_1(\boldsymbol{x}_p).
$$

此外，公式 $f(\boldsymbol{x})\mid_{\boldsymbol{x}_q=0}=A_0(\boldsymbol{x}_p)$ 显然成立。证明完毕。

□

定义 3.14. 由式 *(19)* 中的级数给出的函数称为二元组(A_0, A_1) 的调和广义 *CK* 延拓，记作 $HGCK[A_0, A_1]$。

我们引入一个有用的记号。

定义 3.15. 设 $f \in \mathcal{GS}(\Omega_D, \mathbb{A})$。函数 $\mathcal{PE}[f]: \Omega_D \longrightarrow \mathbb{A}$ 称为 f 的部分偶部，函数 $\mathcal{PO}[f]: \Omega_D \longrightarrow \mathbb{A}$ 称为f 的部分奇部，它们分别定义为:

$$\mathcal{PE}[f](\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\big(f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{x}_\diamond)\big),$$

$$\mathcal{PO}[f](\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\big(f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_\diamond)\big).$$

其中 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_p + \boldsymbol{x}_q$和 $\boldsymbol{x}_\diamond = \boldsymbol{x}_p - \boldsymbol{x}_q$。

我们用以下记号表示 p-对称区域 Ω 上的调和广义偏切片函数类

$$\mathcal{AH}(\Omega, \mathbb{A}) := \mathrm{Harm}(\Omega, \mathbb{A}) \cap \mathcal{GS}(\Omega, \mathbb{A}). \tag{23}$$

注 3.16. 由于 f 在(19) 中是一个广义偏切片函数，见注 *3.12*。定理 *3.13* 给出了$(C^\omega(\Omega_0, \mathbb{A}))^2$ 与$\mathcal{AH}(\Omega\ \mathbb{A})$ 之间的一一对应，具体如下:

$$HGCK : (C^\omega(\Omega_0, \mathbb{A}))^2 \to \mathcal{AH}(\Omega, \mathbb{A}),$$
$$(A_0, A_1) \mapsto HGCK[A_0, A_1],$$

其中Ω 是 M 中的一个 *p*-对称切片域，且$\Omega_0 = \Omega \cap \mathbb{R}^{p+1}$。此外，调和广义 *CK* 延拓可分为两部分:

$$HGCK[A_0, A_1] = HGCK[A_0, 0] + HGCK[0, A_1],$$

其中

$$HGCK[A_0, 0] = \mathcal{PE} \circ HGCK[A_0, A_1],\ HGCK[0, A_1] = \mathcal{PO} \circ HGCK[A_0, A_1].$$

由定理 3.10 和 3.13，我们推得

推论 3.17。 设 $\Omega_0 \subseteq \mathbb{R}^{p+1}$ 为一个区域，并考虑实解析函数$A_k \in C^\omega(\Omega_0, \mathbb{A})$， $k = 0$, 1。则有

$$GCK[A_0] = HGCK[A_0, 0] + \frac{1}{q} HGCK[0, D_{\boldsymbol{x}_p} A_0],$$

and

$$HGCK[A_0, A_1] = \mathcal{PE} \circ GCK[A_0] + q\mathcal{PO} \circ GCK[f_0].$$

其中，若存在， f_0 是方程 $D_{\boldsymbol{x}_p} f_0 = A_1$ 的一个解。

命题 3.18。 设$\Omega_0 \subseteq \mathbb{R}^{p+1}$ 为一个区域，并考虑实解析函数 $f_0 \in C^\omega(\Omega_0, \mathbb{A})$。那么有

$$\overline{D}_{\boldsymbol{x}} \circ HGCK[f_0, 0] = GCK \circ \overline{D}_{\boldsymbol{x}_p}[f_0],$$

and

$$\overline{D}_{\boldsymbol{x}} \circ HGCK[0, f_0] = qGCK[f_0].$$

注意，算子 $D_{\boldsymbol{x}_p}$ 和 $GC\overline{K}$ 通常不交换，除非 $p=0$。

证明。设 $\Omega_0 \subseteq \mathbb{R}^{p+1}$ 是一个区域，且 $f_0 \in C^\omega(\Omega_0, \mathbb{A})$。回顾式 (22)、引理 3.9 中的式 (12)、引理 2.8 以及式 (18)，可得以下等式链

$$
\begin{aligned}
& \overline{D}_{\boldsymbol{x}} \circ HGCK[f_0, 0](\boldsymbol{x}) \\
= \; & \overline{D}_{\boldsymbol{x}} \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(\frac{q}{2}) \underline{\boldsymbol{x}}_q^{2k}}{2^{2k} k! \Gamma(k+\frac{q}{2})} \Delta_{\boldsymbol{x}_p}^k f_0(\boldsymbol{x}_p) \Big) \\
= \; & \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(\frac{q}{2})}{2^{2k} k! \Gamma(k+\frac{q}{2})} \big(\underline{\boldsymbol{x}}_q^{2k} (\Delta_{\boldsymbol{x}_p}^k \overline{D}_{\boldsymbol{x}_p} f_0(\boldsymbol{x}_p)) + 2k \underline{\boldsymbol{x}}_q^{2k-1} \Delta_{\boldsymbol{x}_p}^k f_0(\boldsymbol{x}_p) \big) \\
= \; & \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(\frac{q}{2}) \underline{\boldsymbol{x}}_q^{2k}}{2^{2k} k! \Gamma(k+\frac{q}{2})} \Delta_{\boldsymbol{x}_p}^k (\overline{D}_{\boldsymbol{x}_p} f_0(\boldsymbol{x}_p)) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\Gamma(\frac{q}{2}) \underline{\boldsymbol{x}}_q^{2k-1}}{2^{2k-1} (k-1)! \Gamma(k+\frac{q}{2})} \Delta_{\boldsymbol{x}_p}^k f_0(\boldsymbol{x}_p) \\
= \; & \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(\frac{q}{2}) \underline{\boldsymbol{x}}_q^{2k}}{2^{2k} k! \Gamma(k+\frac{q}{2})} \Delta_{\boldsymbol{x}_p}^k (\overline{D}_{\boldsymbol{x}_p} f_0(\boldsymbol{x}_p)) + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(\frac{q}{2}) \underline{\boldsymbol{x}}_q^{2k+1}}{2^{2k+1} k! \Gamma(k+1+\frac{q}{2})} \Delta_{\boldsymbol{x}_p}^k (D_{\boldsymbol{x}_p} (\overline{D}_{\boldsymbol{x}_p} f_0(\boldsymbol{x}_p))) \\
= \; & GCK[\overline{D}_{\boldsymbol{x}_p} f_0](\boldsymbol{x}).
\end{aligned}
$$

此外，由式 (22)、引理 3.9 中的式 (13)以及式 (18)，可得

$$
\begin{aligned}
& \overline{D}_{\boldsymbol{x}} \circ HGCK[0, f_0](\boldsymbol{x}) \\
= \; & \overline{D}_{\boldsymbol{x}} \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(\frac{q}{2}+1) \underline{\boldsymbol{x}}_q^{2k+1}}{2^{2k} k! \Gamma(k+1+\frac{q}{2})} \Delta_{\boldsymbol{x}_p}^k f_0(\boldsymbol{x}_p) \Big) \\
= \; & \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(\frac{q}{2}+1)}{2^{2k} k! \Gamma(k+1+\frac{q}{2})} \big(\underline{\boldsymbol{x}}_q^{2k+1} \Delta_{\boldsymbol{x}_p}^k (D_{\boldsymbol{x}_p} f_0(\boldsymbol{x}_p)) + (2k+q) \underline{\boldsymbol{x}}_q^{2k} \Delta_{\boldsymbol{x}_p}^k f_0(\boldsymbol{x}_p) \big) \\
= \; & q \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(\frac{q}{2}) \underline{\boldsymbol{x}}_q^{2k+1}}{2^{2k+1} k! \Gamma(k+1+\frac{q}{2})} \Delta_{\boldsymbol{x}_p}^k (D_{\boldsymbol{x}_p} f_0(\boldsymbol{x}_p)) + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(\frac{q}{2}) \underline{\boldsymbol{x}}_q^{2k}}{2^{2k} k! \Gamma(k+\frac{q}{2})} \Delta_{\boldsymbol{x}_p}^k f_0(\boldsymbol{x}_p) \Big) \\
= \; & qGCK[f_0].
\end{aligned}
$$

证明完毕。 □

4 Fueter-Sce 定理

在广义部分切片单值函数的背景下，文献 [53] 证明了一个 Fueter-Sce 定理。在 [41]，中，Perotti 给出了实交替 $*$-代数上切片正则函数的 Fueter-Sce-Qian 定理的一个版本。本节讨论综合情形，即研究实交替 $*$-代数上的广义部分切片正则函数。注意，当 $\mathbb{A}$ 不结合时，[41] 中得到的所有结果都要求所涉及的函数在 [41, 定义 6]，的意义下是 M-可容许的，而我们不采用这一附加假设。

本节将使用下一定义中引入的一些符号和术语。我们会用到第 2.5 节中的一些记号。

定义 4.1. 设 $f \in \mathcal{GS}(\Omega_D, \mathbb{A})$。函数 $f_s^\circ \colon \Omega_D \longrightarrow \mathbb{A}$ 称为 f 的球值，函数 $f_s' \colon \Omega_D \setminus \mathbb{R}^{p+1} \longrightarrow \mathbb{A}$ 称为 f 的球导数，

分别定义为：

$$f_s^\circ(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\big(f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{x}_\diamond)\big),$$

$$f_s'(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\underline{\boldsymbol{x}}_q^{-1}\big(f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_\diamond)\big).$$

设 $f(\boldsymbol{x}) = F_1(\boldsymbol{x}') + \underline{\omega}F_2(\boldsymbol{x}') \in \mathcal{GS}(\Omega_D, \mathbb{A})$。根据定义，对于 $\boldsymbol{x} \in \Omega_D$，有

$$\mathcal{PE}[f](\boldsymbol{x}) = f_s^\circ(\boldsymbol{x}) = F_1(\boldsymbol{x}') = f_s^\circ(\boldsymbol{x}_\diamond), \quad f(\boldsymbol{x}) = \mathcal{PE}[f](\boldsymbol{x}) + \mathcal{PO}[f](\boldsymbol{x}), \tag{24}$$

对于 $\boldsymbol{x} \in \Omega_D \setminus \mathbb{R}^{p+1}$

$$f_s'(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{r}F_2(\boldsymbol{x}') = f_s'(\boldsymbol{x}_\diamond), \quad \mathcal{PO}[f](\boldsymbol{x}) = \underline{\boldsymbol{x}}_q f_s'(\boldsymbol{x}), \quad f(\boldsymbol{x}) = f_s^\circ(\boldsymbol{x}) + \underline{\boldsymbol{x}}_q f_s'(\boldsymbol{x}). \tag{25}$$

与 $\mathcal{B}$ 基 $\mathbb{R}^q$ 相关的球面狄拉克算子 Γ定义为

$$\Gamma f = -\frac{1}{2}\sum_{i,j=p+1}^{p+q} v_i(v_j(L_{ij}f)), \quad f \in C^1(\Omega, \mathbb{A}),$$

其中 $L_{ij} = x_i\partial_{x_j} - x_j\partial_{x_i}$ 是切向微分算子。由引理 3.2 的证明可知，对所有 $a \in \mathbb{A}$

$$v_i(v_j a) = -v_j(v_i a), \quad 1 \le i \ne j \le m.$$

因此，我们得到

$$\Gamma f = -\sum_{p+1 \le i < j \le p+q} v_i(v_j L_{ij} f).$$

引理 4.2。设 $f(\boldsymbol{x}) = F_1(\boldsymbol{x}') + \omega F_2(\underline{\boldsymbol{x}}') \in \mathcal{GS}^2(\Omega_D, \mathbb{A}) \cap C^2(\Omega_D, \mathbb{A})$。那么，对所有 $\boldsymbol{x} \in \Omega_D$，均有

$$\Delta_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}) = \Delta_{\boldsymbol{x}'} F_1(\boldsymbol{x}') + \underline{\omega}\Delta_{\boldsymbol{x}'} F_2(\boldsymbol{x}') + (q-1)\big(\big(\frac{1}{r}\partial_r\big)F_1(\boldsymbol{x}') + \underline{\omega}\big(\partial_r \frac{1}{r}\big)F_2(\boldsymbol{x}')\big), \tag{26}$$

其中，$\Delta_{\boldsymbol{x}'} = \Delta_{\boldsymbol{x}_p} + \partial_r^2$ 是 $\mathbb{R}^{p+2}$ 中的拉普拉斯算子，而 $(\frac{1}{r}\partial_r)F_1$ 和 $(\partial_r \frac{1}{r})E_2$ 在 $\boldsymbol{x}' = (\boldsymbol{x}_p, 0) \in D$ 处的值分别表示为

$$\lim_{r\to 0}(\frac{1}{r}\partial_r)F_1(\boldsymbol{x}') = \partial_r^2 F_1(\boldsymbol{x}_p, 0), \tag{27}$$

and

$$\lim_{r\to 0}(\partial_r \frac{1}{r})F_2(\boldsymbol{x}') = \frac{1}{2}\partial_r^2 F_2(\boldsymbol{x}_p, 0), \tag{28}$$

分别。

证明。令 $f(\boldsymbol{x}) = F_1(\boldsymbol{x}') + \underline{\omega}F_2(\boldsymbol{x}') \in \mathcal{GS}^2(\Omega_D, \mathbb{A}) \cap C^2(\Omega_D, \mathbb{A})$。首先应指出，式（27）和（28）中极限的存在性取决于 (F_1, F_2) 关于第 $(p+2)$ 个变量的奇偶性，这可通过标准论证加以证明。然后，我们证明 $\boldsymbol{x} \in \Omega_D \setminus \mathbb{R}^{p+1}$ 时的（26），这样 $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_p, 0) \in \Omega_D$的情形便可由连续性立即得到。

事实上，通过证明下式即可得到（26）：

$$\Delta_{\boldsymbol{x}} f_s^{\circ}(\boldsymbol{x}) = \Delta_{\boldsymbol{x}'} F_1(\boldsymbol{x}') + (q-1)(\frac{1}{r}\partial_r) F_1(\boldsymbol{x}'), \tag{29}$$

and

$$\Delta_{\boldsymbol{x}}(\underline{\boldsymbol{x}}_q f_s'(\boldsymbol{x})) = \underline{\omega}(\Delta_{\boldsymbol{x}'} F_2(\boldsymbol{x}') + (q-1)(\partial_r \frac{1}{r}) F_2(\boldsymbol{x}')). \tag{30}$$

为此，考虑如下分解

$$\Delta_{\boldsymbol{x}} = \Delta_{\boldsymbol{x}_p} + \Delta_{\underline{\boldsymbol{x}}_q}, \quad \Delta_{\boldsymbol{x}_p} = \sum_{i=0}^{p} \partial_{x_i}^2, \quad \Delta_{\underline{\boldsymbol{x}}_q} = \sum_{i=p+1}^{p+q} \partial_{x_i}^2,$$

其中， $\Delta_{\underline{\boldsymbol{x}}_q}$ 可用球坐标表示为

$$\Delta_{\underline{\boldsymbol{x}}_q} = \partial_r^2 + \frac{q-1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\Delta_{\underline{\omega}},$$

且 $\Delta_{\underline{\omega}}$ 是 $\mathbb{S}$上的拉普拉斯-贝尔特拉米算子，更多细节请参见例如 [15, 引理 1.4。1] 注意， $\Delta_{\underline{\omega}} f_s^{\circ}(\boldsymbol{x}) = 0$，因此（29）立即成立。为证明（30），我们注意到

$$\Delta_{\boldsymbol{x}} \underline{\boldsymbol{x}}_q = 0, \ \Delta_{\underline{\omega}} f_s'(\boldsymbol{x}) = 0,$$

我们有

$$\begin{aligned}
\Delta_{\boldsymbol{x}}(\underline{\boldsymbol{x}}_q f_s'(\boldsymbol{x})) &= 2\sum_{i=0}^{p+q}(\partial_{x_i}\underline{\boldsymbol{x}}_q)(\partial_{x_i} f_s'(\boldsymbol{x})) + \underline{\boldsymbol{x}}_q(\Delta_{\boldsymbol{x}} f_s'(\boldsymbol{x})) \\
&= 2\sum_{i=p+1}^{p+q} v_i\Big(\frac{x_i}{r}\partial_r\frac{F_2(\boldsymbol{x}')}{r}\Big) + \underline{\boldsymbol{x}}_q(\Delta_{\boldsymbol{x}} f_s'(\boldsymbol{x})) \\
&= 2\sum_{i=p+1}^{p+q}(v_i x_i)\frac{1}{r}\partial_r\frac{F_2(\boldsymbol{x}')}{r} + \underline{\boldsymbol{x}}_q(\Delta_{\boldsymbol{x}} f_s'(\boldsymbol{x})) \\
&= 2\frac{\underline{\boldsymbol{x}}_q}{r}\partial_r\frac{F_2(\boldsymbol{x}')}{r} + \underline{\boldsymbol{x}}_q\Big((\Delta_{\boldsymbol{x}_p} + \partial_r^2 + \frac{q-1}{r}\partial_r)\frac{F_2(\boldsymbol{x}')}{r}\Big) \\
&= \underline{\omega}(\Delta_{\boldsymbol{x}'} F_2(\boldsymbol{x}') + (q-1)(\partial_r\frac{1}{r})F_2(\boldsymbol{x}')),
\end{aligned}$$

其中最后一个等式由公式

$$\partial_r^2\frac{F_2(\boldsymbol{x}')}{r} = -\frac{2}{r}\partial_r\frac{F_2(\boldsymbol{x}')}{r} + \frac{1}{r}\partial_r^2 F_2(\boldsymbol{x}'),$$

证明完毕。 □

命题 4.3。 设 $f(\boldsymbol{x}) = F_1(\boldsymbol{x}') + \omega F_2(\boldsymbol{x}') \in \underline{\mathcal{GSR}}(\Omega_D, \mathbb{A})$。那么 F_1, F_2 在 D上实解析，f 在Ω_D上实解析，并且

$$\Delta_{\boldsymbol{x}'} F_1 = 0, \quad \Delta_{\boldsymbol{x}'} F_2 = 0,$$

其中 $\Delta_{\boldsymbol{x}'}$ 是 $\mathbb{R}^{p+2}$ 中的拉普拉斯算子。

证明。设 $f(\boldsymbol{x}) = F_1(\boldsymbol{x}') + \omega F_2(\boldsymbol{x}') \in \mathcal{GSR}(\Omega_D, \mathbb{A})$。由定理 2.22 可得 $f \in \mathcal{GSM}(\Omega_D, \mathbb{A})$。因此，根据命题 2.15，我们知道 $F_1, F_2 \in C^2(D, \mathbb{A})$。于是，由 (2) 和引理 2.8 可得

$$\Delta_{\boldsymbol{x}_p} F_1(\boldsymbol{x}') = \overline{D}_{\boldsymbol{x}_p}(D_{\boldsymbol{x}_p} F_1(\boldsymbol{x}')) = \overline{D}_{\boldsymbol{x}_p}(\partial_r F_2(\boldsymbol{x}')) = \partial_r \overline{D}_{\boldsymbol{x}_p} F_2(\boldsymbol{x}') = -\partial_r^2 F_1(\boldsymbol{x}'),$$

由此得到 $\Delta_{\boldsymbol{x}'} F_1 = 0$。现在， F_1 的调和性保证它在 D上也是实解析的。类似地，我们可以证明 $\Delta_{\boldsymbol{x}'} F_2 = 0$ 满足

$$\Delta_{\boldsymbol{x}_p} F_2(\boldsymbol{x}') = D_{\boldsymbol{x}_p}(\overline{D}_{\boldsymbol{x}_p} F_2(\boldsymbol{x}')) = -D_{\boldsymbol{x}_p}(\partial_r F_1(\boldsymbol{x}')) = -\partial_r D_{\boldsymbol{x}_p} F_1(\boldsymbol{x}') = -\partial_r^2 F_2(\boldsymbol{x}').$$

现在只需证明 f 在 Ω_D上是实解析的。为此，回想一下，(F_1, F_2) 关于第 $(p+2)$ 个变量构成一个偶奇对。根据 [49, 定理 1]和 [49, 定理 2], , 存在实解析函数 G_1 和 G_2 ，使得

$$F_1(\boldsymbol{x}_p, r) = G_1(\boldsymbol{x}_p, r^2),\ F_2(\boldsymbol{x}_p, r) = rG_2(\boldsymbol{x}_p, r^2), \quad (\boldsymbol{x}_p, r) \in D.$$

那么函数

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_p + \underline{\boldsymbol{x}}_q) = G_1(\boldsymbol{x}_p, r^2) + \underline{\boldsymbol{x}}_q G_2(\boldsymbol{x}_p, r^2), \quad r = |\underline{\boldsymbol{x}}_q|,$$

在 Ω_D上是实解析的，从而完成证明。 □

注 4.4。令 $f(\boldsymbol{x}) = F_1(\boldsymbol{x}') + \omega F_2(\boldsymbol{x}') _\in \mathcal{GSR}(\Omega_D)$。那么，对于所有 $k \in \mathbb{N}$，命题 *4.3* 保证函数

$$(\frac{1}{r}\partial_r)^k F_1(\boldsymbol{x}'),\ (\partial_r \frac{1}{r})^k F_2(\boldsymbol{x}') \tag{31}$$

对于 $\boldsymbol{x}' = (\boldsymbol{x}_p, r) \in D$ ，在 $r \neq 0$的条件下有良好定义。仿照引理 *4.2* 的证明，可以推知以下两个极限存在

$$\lim_{r\to 0}(\frac{1}{r}\partial_r)^k F_1(\boldsymbol{x}'), \qquad \lim_{r\to 0}(\partial_r \frac{1}{r})^k F_2(\boldsymbol{x}'). \tag{32}$$

记号。为简便起见，在下文的引理 *4.5*、引理 *4.7* 和定理 *4.9* 中，我们约定，函数在 *(31)* 中于$(\boldsymbol{x}_p, 0) \in D$处的取值分别表示为 *(32)* 中的极限。

引理 4.5。设 $f(\boldsymbol{x}) = F_1(\boldsymbol{x}') + \omega F_2(\underline{\boldsymbol{x}}') \in \mathcal{GSR}(\Omega_D, \mathbb{A})$ 并记 $k \in \mathbb{N}$

$$A_k(\boldsymbol{x}') = (\frac{1}{r}\partial_r)^k F_1(\boldsymbol{x}'), \quad B_k(\boldsymbol{x}') = (\partial_r \frac{1}{r})^k F_2(\boldsymbol{x}'). \tag{33}$$

则对所有 $k \in \mathbb{N}$ 和 $\boldsymbol{x} \in \Omega_D$，均有

$$\begin{cases} D_{\boldsymbol{x}_p} A_k(\boldsymbol{x}') - \partial_r B_k(\boldsymbol{x}') = \frac{2k}{r} B_k(\boldsymbol{x}'), \\ \overline{D}_{\boldsymbol{x}_p} B_k(\boldsymbol{x}') + \partial_r A_k(\boldsymbol{x}') = 0. \end{cases} \tag{34}$$

证明。对于 $k = 0$，系统 (34) 与 (2) 中的广义柯西-黎曼方程相同；参见定义 2.20。对于 (34)，从 $k-1$ 到 k 的步骤可如下得到：

$$D_{\boldsymbol{x}_p} A_k(\boldsymbol{x}') = \frac{1}{r}\partial_r D_{\boldsymbol{x}_p} A_{k-1}(\boldsymbol{x}')$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{r}\partial_r(\partial_r B_{k-1}(\boldsymbol{x}') + \frac{2k-2}{r}B_{k-1}(\boldsymbol{x}')) \\
&= \frac{1}{r}\partial_r^2 B_{k-1}(\boldsymbol{x}') + \frac{2k-2}{r}B_k(\boldsymbol{x}') \\
&= \partial_r B_k(\boldsymbol{x}') + \frac{2k}{r}B_k(\boldsymbol{x}'),
\end{aligned}
$$

and

$$
\begin{aligned}
\overline{D}_{\boldsymbol{x}_p} B_k(\boldsymbol{x}') &= \overline{D}_{\boldsymbol{x}_p}(\partial_r \frac{B_{k-1}(\boldsymbol{x}')}{r}) \\
&= \partial_r \frac{\overline{D}_{\boldsymbol{x}_p} B_{k-1}(\boldsymbol{x}')}{r} \\
&= \partial_r \frac{-\partial_r A_{k-1}(\boldsymbol{x}')}{r} \\
&= -\partial_r A_k(\boldsymbol{x}'),
\end{aligned}
$$

正如所断言的。

□

现在，我们需要为广义部分切片函数建立以下结果，这些结果将 [51, 命题 5.3] 从克利福德代数推广到一般实交替 $*$-代数。关于克利福德代数框架下的 [40, 命题 3.3.2] ，以及实交替 $*$-代数上 M-容许函数的 [41, 定理 8 和命题 9] ，可参见相关文献。还需再次指出，我们的结果不要求附加的 M-容许条件。

命题 4.6。 设 $f \in \mathcal{GS}^1(\Omega_D, \mathbb{A}) \cap C^1(\Omega_D, \mathbb{A})$。则以下两个公式在 $\Omega_D \setminus \mathbb{R}^{p+1}$ 上成立：

(i) $\Gamma f(\boldsymbol{x}) = (q-1)\underline{\boldsymbol{x}}_q f_s'(\boldsymbol{x})$;
(ii) $(D_{\boldsymbol{x}} - D_{\underline{\omega}})f(\boldsymbol{x}) = (1-q)f_s'(\boldsymbol{x})$.

证明。 首先，根据阿廷定理和 Moufang恒等式，对于所有$a \in \mathbb{A}$ 以及 $i,\ j = 1, \ldots, p+q$ 满足 $i \neq j$,

$$
v_i(v_j(v_j a)) = v_i((v_j v_j)a) = -v_i a, \tag{35}
$$

and

$$
v_i(v_j(v_i a)) = (v_i v_j v_i)a = -(v_j v_i v_i)a = v_j a. \tag{36}
$$

设 $f(\boldsymbol{x}) = F_1(\boldsymbol{x}') + \omega \underline{F_2}(\boldsymbol{x}') \in \mathcal{GS}^1(\Omega_D, \mathbb{A}) \cap C^1(\Omega_D, \mathbb{A})$。那么，对于$x \in \Omega_D \setminus \mathbb{R}^{p+1}$, 有

$$
L_{ij} f_s^\circ(\boldsymbol{x}) = L_{ij} f_s'(\boldsymbol{x}) = 0.
$$

因此，由（35）和（36）可得,

$$
\begin{aligned}
\Gamma f(\boldsymbol{x}) &= \Gamma(\underline{\boldsymbol{x}}_q f_s'(\boldsymbol{x})) \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{p+1 \leq i \neq j \leq p+q} v_i(v_j((x_i v_j - x_j v_i) f_s'(\boldsymbol{x}))) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\sum_{p+1 \leq i \neq j \leq p+q} (x_i v_i + x_j v_j)\Big) f_s'(\boldsymbol{x})
\end{aligned}
$$

$$= \quad (q-1)\underline{\boldsymbol{x}}_q f_s'(\boldsymbol{x}),$$

这就证明了（i）。

为证明 (ii)，我们先证明以下公式

$$D_{\underline{\boldsymbol{x}}_q}(\underline{\omega}F_2(\boldsymbol{x}')) = (1-q)f_s'(\boldsymbol{x}) - \partial_r F_2(\boldsymbol{x}'). \tag{37}$$

事实上，通过直接计算并利用阿廷定理，可得

$$\begin{aligned}
D_{\underline{\boldsymbol{x}}_q}(\underline{\omega}F_2(\boldsymbol{x}')) &= D_{\underline{\boldsymbol{x}}_q}(\underline{\boldsymbol{x}}_q f_s'(\boldsymbol{x})) \\
&= \sum_{i=p+1}^{p+q} v_i\Big((\partial_{x_i}\underline{\boldsymbol{x}}_q)f_s'(\boldsymbol{x}) + \underline{\boldsymbol{x}}_q(\partial_{x_i}f_s'(\boldsymbol{x}))\Big) \\
&= \sum_{i=p+1}^{p+q} v_i\Big(v_i f_s'(\boldsymbol{x}) + \underline{\boldsymbol{x}}_q\big(\frac{x_i}{r}\partial_r f_s'(\boldsymbol{x})\big)\Big) \\
&= \sum_{i=p+1}^{p+q} v_i^2 f_s'(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=p+1}^{p+q}(v_i\frac{x_i}{r})(\underline{\boldsymbol{x}}_q\partial_r f_s'(\boldsymbol{x})) \\
&= -qf_s'(\boldsymbol{x}) + \frac{\underline{\boldsymbol{x}}_q}{r}(\underline{\boldsymbol{x}}_q\partial_r f_s'(\boldsymbol{x})) \\
&= -qf_s'(\boldsymbol{x}) - r\partial_r f_s'(\boldsymbol{x}) \\
&= (1-q)f_s'(\boldsymbol{x}) - \partial_r F_2(\boldsymbol{x}').
\end{aligned}$$

因此，再次利用阿廷定理和 (37)，可得

$$\begin{aligned}
(D_{\boldsymbol{x}} - D_{\underline{\omega}})f(\boldsymbol{x}) &= (D_{\underline{\boldsymbol{x}}_q} - \underline{\omega}\partial_r)(F_1(\boldsymbol{x}') + \underline{\omega}F_2(\boldsymbol{x}')) \\
&= D_{\underline{\boldsymbol{x}}_q}F_1(\boldsymbol{x}') - \underline{\omega}\partial_r F_1(\boldsymbol{x}') + D_{\underline{\boldsymbol{x}}_q}(\underline{\omega}F_2(\boldsymbol{x}')) - \underline{\omega}(\underline{\omega}\partial_r F_2(\boldsymbol{x}')) \\
&= \frac{\underline{\boldsymbol{x}}_q}{r}\partial_r F_1(\boldsymbol{x}') - \underline{\omega}\partial_r F_1(\boldsymbol{x}') + D_{\underline{\boldsymbol{x}}_q}(\underline{\omega}F_2(\boldsymbol{x}')) + \partial_r F_2(\boldsymbol{x}') \\
&= (1-q)f_s'(\boldsymbol{x}),
\end{aligned}$$

由此完成证明。 □

引理 4.7. 设 $f(\boldsymbol{x}) = F_1(\boldsymbol{x}') + \omega F_2(\boldsymbol{x}')_ \in \mathcal{GSR}(\Omega_D, \mathbb{A})$。则对所有 $k \in \mathbb{N}$ 和 $\boldsymbol{x} \in \Omega_D$, 有

$$\Delta_{\boldsymbol{x}}^k f(\boldsymbol{x}) = C_q(k)(A_k(\boldsymbol{x}') + \underline{\omega}B_k(\boldsymbol{x}')), \tag{38}$$

and

$$D_{\boldsymbol{x}}\Delta_{\boldsymbol{x}}^k f(\boldsymbol{x}) = -C_q(k+1)\frac{B_k(\boldsymbol{x}')}{r}, \tag{39}$$

其中，对于 $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ 和 $C_q(0) = 1$, $C_q(k) := (q-1(q-3)\cdots(q-2k+1)$ 由 *(33)* 给出。

证明。令 $f(\boldsymbol{x}) = F_1(\boldsymbol{x}') + \underline{\omega}F_2(\boldsymbol{x}') \in \mathcal{GSR}(\Omega_D, \mathbb{A})$。根据命题 4.3 和注 4.4，(38) 和 (39) 两边都有定义。与引理 4.2 的证明一样，我们只证明 $\boldsymbol{x} \in \Omega_D \setminus \mathbb{R}^{p+1}$ 的情形，因为 $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_p, 0) \in \Omega_D$ 的情形可由连续性得到。我们用归纳法证明 (38)。由引理 4.2 和命题 4.3，得到

$$\Delta_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}) = (q-1)((\frac{1}{r}\partial_r)F_1(\boldsymbol{x}') + \underline{\omega}(\partial_r\frac{1}{r})F_2(\boldsymbol{x}')),$$

这表明 $k=1$ 的情形下 (38) 成立。

现在我们假设 (38) 对于 $k-1$ 成立，即

$$\Delta_{\boldsymbol{x}}^{k-1} f(\boldsymbol{x}) = C_q(k-1)((A_{k-1}(\boldsymbol{x}') + \underline{\omega} B_{k-1}(\boldsymbol{x}'))), \tag{40}$$

其中 A_{k-1}, B_{k-1} 由 (33) 给出，我们将证明 (38) 对于 k 成立。根据引理 2.8 以及引理 4.5 中的 (34)，有

$$\begin{aligned}
\Delta_{\boldsymbol{x}_p} A_{k-1}(\boldsymbol{x}') &= \overline{D}_{\boldsymbol{x}_p}(D_{\boldsymbol{x}_p} A_{k-1}(\boldsymbol{x}')) \\
&= \overline{D}_{\boldsymbol{x}_p}(\partial_r + \frac{2k-2}{r}) B_{k-1}(\boldsymbol{x}') \\
&= (\partial_r + \frac{2k-2}{r}) \overline{D}_{\boldsymbol{x}_p} B_{k-1}(\boldsymbol{x}') \\
&= (\partial_r + \frac{2k-2}{r})(-\partial_r A_{k-1}(\boldsymbol{x}')) \\
&= -\partial_r^2 A_{k-1}(\boldsymbol{x}') - (2k-2) A_k(\boldsymbol{x}'),
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
\Delta_{\boldsymbol{x}_p} B_{k-1}(\boldsymbol{x}') &= D_{\boldsymbol{x}_p}(\overline{D}_{\boldsymbol{x}_p} B_{k-1}(\boldsymbol{x}')) \\
&= D_{\boldsymbol{x}_p}(-\partial_r A_{k-1}(\boldsymbol{x}')) \\
&= -\partial_r^2 B_{k-1}(\boldsymbol{x}') - (2k-2)\partial_r \frac{B_{k-1}(\boldsymbol{x}')}{r} \\
&= -\partial_r^2 B_{k-1}(\boldsymbol{x}') - (2k-2) B_k(\boldsymbol{x}').
\end{aligned}$$

因此，结合引理 4.2，可得

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta_{\boldsymbol{x}}^k f(\boldsymbol{x})}{C_q(k-1)} &= \Delta_{\boldsymbol{x}'} A_{k-1}(\boldsymbol{x}') + \underline{\omega} \Delta_{\boldsymbol{x}'} B_{k-1}(\boldsymbol{x}') + (q-1)(\frac{1}{r}\partial_r A_{k-1}(\boldsymbol{x}') + \underline{\omega}\partial_r \frac{B_{k-1}(\boldsymbol{x}')}{r}) \\
&= -(2k-2)(A_k(\boldsymbol{x}') + \underline{\omega} B_k(\boldsymbol{x}')) + (q-1)(A_k(\boldsymbol{x}') + \underline{\omega} B_k(\boldsymbol{x}')) \\
&= (q-2k+1)(A_k(\boldsymbol{x}') + \underline{\omega} B_k(\boldsymbol{x}')),
\end{aligned}$$

这就得到了 (38)。

现在我们可以使用 (38)、引理 4.5 和命题 4.6，得到 (39)，如下所示 ws:

$$\begin{aligned}
& D_{\boldsymbol{x}} \Delta_{\boldsymbol{x}}^k f(\boldsymbol{x}) \\
= \; & C_q(k)\Big(D_{\underline{\omega}}(A_k(\boldsymbol{x}') + \underline{\omega} B_k(\boldsymbol{x}')) + (1-q)\frac{B_k(\boldsymbol{x}')}{r}\Big) \\
= \; & C_q(k)\Big(D_{\boldsymbol{x}_p} A_k(\boldsymbol{x}') - \partial_r B_k(\boldsymbol{x}') + \underline{\omega}(\overline{D}_{\boldsymbol{x}_p} B_k(\boldsymbol{x}') + \partial_r A_k(\boldsymbol{x}')) + (1-q)\frac{B_k(\boldsymbol{x}')}{r}\Big) \\
= \; & C_q(k)(2k+1-q)\frac{B_k(\boldsymbol{x}')}{r} \\
= \; & -C_q(k+1)\frac{B_k(\boldsymbol{x}')}{r}.
\end{aligned}$$

证明完毕。 □

接下来的结果证明，在实替代 $*$-代数上的广义部分切片函数这一情形中，单变性条件可以由如下 Vekua 型系统描述。

引理 4.8. 设 $D \subseteq \mathbb{R}^{p+2}$ 是关于第 $(p+2)$ 个变量的反射不变的区域，并且 $f(\boldsymbol{x}) = F_1(\boldsymbol{x}') + \omega F_2(\boldsymbol{x}') \in \mathcal{GS}^1(\Omega_D, \mathbb{A}) \cap C^1(\Omega_D, \mathbb{A})$，其中 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_p + r\omega \in \Omega_D$, $\boldsymbol{x}' = (\boldsymbol{x}_p, r) \in D$。那么，$f \in \mathcal{M}(\Omega_D, \mathbb{A})$ 当且仅当 f 的分量 F_1, F_2 满足以下系统

$$\begin{cases} D_{\boldsymbol{x}_p} F_1(\boldsymbol{x}') - \partial_r F_2(\boldsymbol{x}') = \frac{q-1}{r} F_2(\boldsymbol{x}'), \\ \overline{D}_{\boldsymbol{x}_p} F_2(\boldsymbol{x}') + \partial_r F_1(\boldsymbol{x}') = 0, \end{cases} \qquad \boldsymbol{x}' \in D \setminus \mathbb{R}^{p+1}. \tag{41}$$

证明。令 $f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_p + r\omega) = F_1(\boldsymbol{x}') + \omega F_2(\boldsymbol{x}') \in \mathcal{GS}^1(\Omega_D, \mathbb{A}) \cap C^1(\Omega_D, \mathbb{A})$。根据阿廷定理和引理 3.2，可得

$$D_{\omega} f(\boldsymbol{x}) = D_{\boldsymbol{x}_p} F_1(\boldsymbol{x}') - \partial_r F_2(\boldsymbol{x}') + \omega(\overline{D}_{\boldsymbol{x}_p} F_2(\boldsymbol{x}') + \partial_r F_1(\boldsymbol{x}')).$$

因此，由命题 4.6 (ii) 可推得

$$D_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}) = D_{\boldsymbol{x}_p} F_1(\boldsymbol{x}') - \partial_r F_2(\boldsymbol{x}') + \frac{1-q}{r} F_2(\boldsymbol{x}') + \omega(\overline{D}_{\boldsymbol{x}_p} F_2(\boldsymbol{x}') + \partial_r F_1(\boldsymbol{x}')), \tag{42}$$

对所有 $\boldsymbol{x} \in \Omega_D \setminus \mathbb{R}^{p+1}$ 均成立。

假设 $f \in \mathcal{M}(\Omega_D, \mathbb{A})$。由 (42) 中 $\omega \in \mathbb{S}$ 的任意性，可推得系统 (41) 成立。

反之，若 F_1, F_2 属于 $f(\boldsymbol{x}) = F_1(\boldsymbol{x}') + \omega F_2(\boldsymbol{x}') \in \mathcal{GS}^1(\Omega_D, \mathbb{A}) \cap C^1(\Omega_D, \mathbb{A})$ 的分量满足 (41)，则由 (42) 可知 $D_{\boldsymbol{x}} f = 0$ 在 $\Omega_D \setminus \mathbb{R}^{p+1}$ 上成立。鉴于 $\Omega_D \setminus \mathbb{R}^{p+1}$ 在 Ω_D 中稠密，且 $f \in C^1(\Omega_D, \mathbb{A})$，我们可推得 $D_{\boldsymbol{x}} f = 0$ 对所有 $\boldsymbol{x} \in \Omega_D$ 均成立，至此证明完毕。 □

利用前面的所有结果，我们现在可以证明本节的主要结论。

定理 4.9 (Fueter-Sce 定理)。设 $f(\boldsymbol{x}) = F_1(\boldsymbol{x}') + \omega F_2(\boldsymbol{x}') \in \mathcal{GSR}(\Omega_D, \mathbb{A})$，那么，对于奇数 $q \in \mathbb{N}$，函数 $\Delta_{\boldsymbol{x}}^{\frac{q-1}{2}} f(\boldsymbol{x})$ 在 Ω_D 中是单生成的，且可表示为

$$\Delta_{\boldsymbol{x}}^{\frac{q-1}{2}} f(\boldsymbol{x}) = (q-1)!!(A(\boldsymbol{x}') + \omega B(\boldsymbol{x}')), \tag{43}$$

其中

$$A(\boldsymbol{x}') = (\frac{1}{r}\partial_r)^{\frac{q-1}{2}} F_1(\boldsymbol{x}'), \quad B(\boldsymbol{x}') = (\partial_r \frac{1}{r})^{\frac{q-1}{2}} F_2(\boldsymbol{x}'). \tag{44}$$

证明。设 $f(\boldsymbol{x}) = F_1(\boldsymbol{x}') + \omega F_2(\boldsymbol{x}') \in \mathcal{GSR}(\Omega_D, \mathbb{A})$。由引理 4.7 中的式 (38)，函数 $\Delta_{\boldsymbol{x}}^{\frac{q-1}{2}} f(\boldsymbol{x})$ 具有形式 (43)。于是，由引理 4.8，只需验证由 (44) 给出的数对 (A, B) 满足 (41)，这恰好是引理 4.5 中 $k = \frac{q-1}{2}$ 所对应的式 (34)。证明完毕。 □

当 $\mathbb{A} = \mathbb{H} = M$ 时，定理 4.9 最初由 Fueter [22] 得到。1957年，Sce [45] 将 Fueter 定理推广到定理 4.9 的情形，适用于 $\mathbb{A} = \mathbb{R}_{0,m}$，$M = \mathbb{R}^{m+1}$，$(p, q) = (0, m)$ 且 m 为奇数的情况（参见英文译本 [14]）；1997年，Qian [42] 又将其推广到 m 为偶数的情况。关于 Fueter-Sce-Qian 定理的更多细节，可参见例如 [43] 及其中的参考文献。

5 Fueter-Sce 定理与 CK 延拓之间的联系

本节将阐述 Fueter-Sce 定理与第3节给出的三种类型的 CK 延拓之间的一些联系。

我们将 p-对称区域 Ω 上广义偏切片函数的单生成类记为

$$\mathcal{AM}(\Omega,\mathbb{A}):=\mathcal{M}(\Omega,\mathbb{A})\cap\mathcal{GS}(\Omega,\mathbb{A}),$$

而 $\mathcal{A}(\Omega_0,\ \mathbb{A})$ 表示 $\Omega_0\subseteq\mathbb{R}^{p+1}$中所有取值于 $\mathbb{A}$、且具有唯一广义部分切片单生成延拓至 Ω 的实解析函数的集合。

定理 5.1。 设 $\Omega\subseteq M$ 是一个 ***p***-对称切片域，且 $f:\Omega\to\mathbb{A}$ 是一个广义部分切片单生成函数。那么，对于奇数 $q\in\mathbb{N}$，有

$$\Delta_{\boldsymbol{x}}^{\frac{q-1}{2}}f(\boldsymbol{x})=\gamma_q GCK[\Delta_{\boldsymbol{x}_p}^{\frac{q-1}{2}}f(\boldsymbol{x}_p)],$$

这给出了如下交换图

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{A}(\Omega_0,\mathbb{A}) & \xrightarrow{CK} & \mathcal{GSM}(\Omega,\mathbb{A}) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \gamma_q\Delta_{\boldsymbol{x}_p}^{\frac{q-1}{2}}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \Delta_{\boldsymbol{x}}^{\frac{q-1}{2}}} \\ \mathcal{A}(\Omega_0,\mathbb{A}) & \xrightarrow{GCK} & \mathcal{AM}(\Omega,\mathbb{A}),\end{array}$$

其中 γ_q 由下式给出

$$\gamma_q:=(-1)^{\frac{q-1}{2}}\frac{(q-1)!!}{(q-2)!!}. \tag{45}$$

证明。 设 $f\in\mathcal{GSM}(\Omega\ \mathbb{A})$，其中 $\Omega\subseteq M$ 是一个 p-对称切片域。根据定理 2.22，我们可以设 $f(\boldsymbol{x})=F_1(\boldsymbol{x}')+\omega F_2(\boldsymbol{x}')\in\mathcal{GSR}(\Omega_D,\ \mathbb{A})$。根据定理 4.9，我们有

$$\Delta_{\boldsymbol{x}}^{\frac{q-1}{2}}f(\boldsymbol{x})=(q-1)!!(A(\boldsymbol{x}')+\underline{\omega}B(\boldsymbol{x}'))\in\mathcal{AM}(\Omega,\mathbb{A}),$$

其中 $A,\ B$ 由式 (44) 给出。注意，$B(\boldsymbol{x}_p,\ r)$ 关于变量r是奇函数，因此我们得到

$$\Delta_{\boldsymbol{x}}^{\frac{q-1}{2}}f(\boldsymbol{x})\mid_{\underline{\boldsymbol{x}}_q=0}=(q-1)!!A(\boldsymbol{x}_p,0)=(q-1)!!(\frac{1}{r}\partial_r)^{\frac{q-1}{2}}[F_1](\boldsymbol{x}_p,0),$$

其中 F_1 由定理 3.3 和 2.17 可得,

$$F_1(\boldsymbol{x}')=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{r^{2k}}{(2k)!}(-\Delta_{\boldsymbol{x}_p})^k f(\boldsymbol{x}_p)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{r^{2k}}{(2k)!}(-\Delta_{\boldsymbol{x}_p})^k[F_1](\boldsymbol{x}_p,0).$$

通过直接计算，我们得到

$$(\frac{1}{r}\partial_r)^{\frac{q-1}{2}}[F_1](\boldsymbol{x}_p,0)=\frac{(-1)^{\frac{q-1}{2}}}{(q-2)!!}\Delta_{\boldsymbol{x}_p}^{\frac{q-1}{2}}f(\boldsymbol{x}_p).$$

$^{q-1}$根据定理 3.10，单值函数 $\Delta_{\boldsymbol{x}}{}^{2}\ f(\boldsymbol{x})$ 完全由其在 $\mathbb{R}^{p+1}$上的限制确定。因此，

$$\Delta_{\boldsymbol{x}}^{\frac{q-1}{2}} f(\boldsymbol{x}) = (-1)^{\frac{q-1}{2}} \frac{(q-1)!!}{(q-2)!!} GCK[\Delta_{\boldsymbol{x}_p}^{\frac{q-1}{2}} f(\boldsymbol{x}_p)](\boldsymbol{x}) = \gamma_q GCK[\Delta_{\boldsymbol{x}_p}^{\frac{q-1}{2}} f(\boldsymbol{x}_p)](\boldsymbol{x}),$$

从而完成证明。 □

回顾式 (23) 中 $\mathcal{AH}(\Omega\ \mathbb{A})$ 的定义，我们可以陈述并证明以下结果。

定理 5.2。 设Ω_0 是 $\mathbb{R}^{p+1}$ 中的一个区域，并考虑实解析函数$_{q-1}f_0 \in C^{\omega}(\Omega_0, \mathbb{A})$。那么，对于奇数 $q \in \mathbb{N}$， $\Delta_{\boldsymbol{x}}{}^{2}\ \circ CK[f_0]$的部分偶部和奇部是调和的，并且是一个$(m+1)$维 p-对称切片域Ω M 中的广义部分切片函数，其中$\Omega_0 \subset \Omega$，它们给出

$$\mathcal{A}(\Omega_0, \mathbb{A}) \xrightarrow{CK} \mathcal{GSM}(\Omega, \mathbb{A}) \xrightarrow{\mathcal{PE}\circ\Delta_{\boldsymbol{x}}^{\frac{q-1}{2}}} \mathcal{AH}(\Omega, \mathbb{A}),$$

and

$$\mathcal{A}(\Omega_0, \mathbb{A}) \xrightarrow{CK} \mathcal{GSM}(\Omega, \mathbb{A}) \xrightarrow{\mathcal{PO}\circ\Delta_{\boldsymbol{x}}^{\frac{q-1}{2}}} \mathcal{AH}(\Omega, \mathbb{A})\ .$$

证明。 设 $f_0 \in C^{\omega}(\Omega_0, \mathbb{A})$。根据定理 3.3， $f = CK[f_0]$ 在 M 中的一个 $(m+1)$ 维 p-对称切片域 Ω 内是广义部分切片单正则的，且 $\Omega_0 \subset \Omega$。由定理 2.22 (ii)，我们可以设 $f(\boldsymbol{x}) = F_1(\boldsymbol{x}') + \omega F_2(\boldsymbol{x}')$；根据定理 4.9，对于奇数 $q \in \mathbb{N}$，有

$$\Delta_{\boldsymbol{x}}^{\frac{q-1}{2}} f(\boldsymbol{x}) = (q-1)!!(A(\boldsymbol{x}') + \underline{\omega} B(\boldsymbol{x}')) \in \mathcal{AM}(\Omega, \mathbb{A}),$$

其中 $A(\boldsymbol{x}')$和 $B(\boldsymbol{x}')$由（44）给出。
因此，由引理 2.8 可得

$$\Delta_{\boldsymbol{x}}^{\frac{q+1}{2}} f(\boldsymbol{x}) = \Delta_{\boldsymbol{x}}(\Delta_{\boldsymbol{x}}^{\frac{q-1}{2}} f(\boldsymbol{x})) = 0.$$

然后由引理 4.2 可得

$$\frac{\Delta_{\boldsymbol{x}}^{\frac{q+1}{2}} f(\boldsymbol{x})}{(q-1)!!} = \Delta_{\boldsymbol{x}'} A(\boldsymbol{x}') + (q-1)(\frac{1}{r}\partial_r) A(\boldsymbol{x}') + \underline{\omega}(\Delta_{\boldsymbol{x}'} B(\boldsymbol{x}') + (q-1)(\partial_r \frac{1}{r}) B(\boldsymbol{x}')) = 0.$$

由 $\omega \in \mathbb{S}$ 的任意性（例如取 $\pm\omega$），我们可推得

$$\Delta_{\boldsymbol{x}'} A(\boldsymbol{x}') + (q-1)(\frac{1}{r}\partial_r) A(\boldsymbol{x}') = 0,$$

and

$$\Delta_{\boldsymbol{x}'} B(\boldsymbol{x}') + (q-1)(\partial_r \frac{1}{r}) B(\boldsymbol{x}') = 0.$$

因此，由（29）和（30）可得，

$$\Delta_{\boldsymbol{x}} A(\boldsymbol{x}') = \Delta_{\boldsymbol{x}}(\underline{\omega} B(\boldsymbol{x}')) = 0,$$

$^{q-1}$ $^{q-1}$结合（24）和（25）可知，$\mathcal{PE}[\Delta_{\boldsymbol{x}}{}^{2}\ f]$ 和$\mathcal{PO}[\Delta_{\boldsymbol{x}}{}^{2}\ f]$ 均属于$\mathcal{AH}(\Omega\ \mathbb{A})$。证明完毕。 □

定理 5.3。 设$\Omega \subseteq M$ 是一个 *p*-对称切片域，且 $f:\Omega \to \mathbb{A}$ 是一个广义部分切片单生成函数。则对于奇数 $q \in \mathbb{N}$，有

$$\mathcal{PO} \circ \Delta_{\boldsymbol{x}}^{\frac{q-1}{2}} f(\boldsymbol{x}) = \frac{\gamma_q}{q} HGCK[0, \Delta_{\boldsymbol{x}_p}^{\frac{q-1}{2}} D_{\boldsymbol{x}_p} f(\boldsymbol{x}_p)],$$

and

$$\mathcal{PE} \circ \Delta_{\boldsymbol{x}}^{\frac{q-1}{2}} f(\boldsymbol{x}) = \gamma_q HGCK[\Delta_{\boldsymbol{x}_p}^{\frac{q-1}{2}} f(\boldsymbol{x}_p), 0].$$

由此得到以下交换图

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{A}(\Omega_0,\mathbb{A}) & \xrightarrow{CK} & \mathcal{GSM}(\Omega,\mathbb{A}) \\
{\scriptstyle \frac{\gamma_q}{q}(0,\Delta_{\boldsymbol{x}_p}^{\frac{q-1}{2}} D_{\boldsymbol{x}_p})}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{PO}\circ\Delta_{\boldsymbol{x}}^{\frac{q-1}{2}}} \\
(\mathcal{A}(\Omega_0,\mathbb{A}))^2 & \xrightarrow{HGCK} & \mathcal{AH}(\Omega,\mathbb{A}) \\
{\scriptstyle qP_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \overline{D}_{\boldsymbol{x}}} \\
\mathcal{A}(\Omega_0,\mathbb{A}) & \xrightarrow{GCK} & \mathcal{AM}(\Omega,\mathbb{A}),
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
\mathcal{A}(\Omega_0,\mathbb{A}) & \xrightarrow{CK} & \mathcal{GSM}(\Omega,\mathbb{A}) \\
{\scriptstyle \gamma_q(\Delta_{\boldsymbol{x}_p}^{\frac{q-1}{2}},0)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{PE}\circ\Delta_{\boldsymbol{x}}^{\frac{q-1}{2}}} \\
(\mathcal{A}(\Omega_0,\mathbb{A}))^2 & \xrightarrow{HGCK} & \mathcal{AH}(\Omega,\mathbb{A}) \\
{\scriptstyle P_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \overline{D}_{\boldsymbol{x}}} \\
\mathcal{A}(\Omega_0,\mathbb{A}) & \xrightarrow{GCK\circ\overline{D}_{\boldsymbol{x}_p}} & \mathcal{AM}(\Omega,\mathbb{A}),
\end{array}$$

其中， P_k 是带有 $k=1$、2的 k阶分量的投影， γ_q 由（*45*）给出。

证明。 设 $f \in \mathcal{GSM}(\Omega\ \mathbb{A})$，其中 Ω 是 M中的一个 p-对称切片域。根据定理 5.1 和命题 3.17，有

$$\mathcal{PO} \circ \Delta_{\boldsymbol{x}}^{\frac{q-1}{2}} f(\boldsymbol{x}) = \gamma_q \mathcal{PO} \circ GCK[\Delta_{\boldsymbol{x}_p}^{\frac{q-1}{2}} f(\boldsymbol{x}_p)] = \frac{\gamma_q}{q} HGCK[0, \Delta_{\boldsymbol{x}_p}^{\frac{q-1}{2}} D_{\boldsymbol{x}_p} f(\boldsymbol{x}_p)],$$

and

$$\mathcal{PE} \circ \Delta_{\boldsymbol{x}}^{\frac{q-1}{2}} f(\boldsymbol{x}) = \gamma_q \mathcal{PE} \circ GCK[\Delta_{\boldsymbol{x}_p}^{\frac{q-1}{2}} f(\boldsymbol{x}_p)] = \gamma_q HGCK[\Delta_{\boldsymbol{x}_p}^{\frac{q-1}{2}} f(\boldsymbol{x}_p), 0].$$

结合上述两个公式与命题 3.18，即可得到所需的交换图。证毕。

□

定理 5.4。 设$\Omega \subseteq M$ 是一个 *p*-对称切片域，且 $f:\Omega \to \mathbb{A}$ 是一个广义部分切片单生成函数。那么，对于奇数 $q \in \mathbb{N}$，有

$$D_{\boldsymbol{x}} \Delta_{\boldsymbol{x}}^{\frac{q-3}{2}} f(\boldsymbol{x}) = \gamma_q HGCK[\Delta_{\boldsymbol{x}_p}^{\frac{q-3}{2}} D_{\boldsymbol{x}_p} f(\boldsymbol{x}_p), 0], \tag{46}$$

由此得到交换图

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{A}(\Omega_0,\mathbb{A}) & \xrightarrow{CK} & \mathcal{GSM}(\Omega,\mathbb{A}) \\
{\scriptstyle (\gamma_q\Delta_{\boldsymbol{x}_p}^{\frac{q-3}{2}}\circ D_{\boldsymbol{x}_p},0)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Delta_{\boldsymbol{x}}^{\frac{q-3}{2}}\circ D_{\boldsymbol{x}}} \\
(\mathcal{A}(\Omega_0,\mathbb{A}))^2 & \xrightarrow{HGCK} & \mathcal{AH}(\Omega,\mathbb{A}) \\
{\scriptstyle \overline{D}_{\boldsymbol{x}_p}\circ P_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \overline{D}_{\boldsymbol{x}}} \\
\mathcal{A}(\Omega_0,\mathbb{A}) & \xrightarrow{GCK} & \mathcal{AM}(\Omega,\mathbb{A}),
\end{array}$$

其中， γ_q 由式 *(45)* 给出， P_1 为第一分量的投影。

证明。设 $f \in \mathcal{GSM}(\Omega\ \mathbb{A})$，其中 Ω 是 M 中的一个 p-对称切片域。由定理 3.3 和 2.17，可得

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{r^{2k}}{(2k)!}(-\Delta_{\boldsymbol{x}_p})^k f(\boldsymbol{x}_p) + \underline{\omega} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{r^{2k+1}}{(2k+1)!}(-\Delta_{\boldsymbol{x}_p})^k (D_{\boldsymbol{x}_p} f(\boldsymbol{x}_p)).$$

由公式

$$(\partial_r \frac{1}{r})^s r^{2k+1} = 2^s \frac{k!}{(k-s)!} r^{2k-2s+1}, \quad s \geq k,$$

我们得到

$$\begin{aligned} & (\partial_r \frac{1}{r})^s \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{r^{2k+1}}{(2k+1)!}(-\Delta_{\boldsymbol{x}_p})^k D_{\boldsymbol{x}_p} f(\boldsymbol{x}_p) \\ = \quad & 2^s \sum_{k=s}^{+\infty} \frac{k! r^{2k-2s+1}}{(k-s)!(2k+1)!}(-\Delta_{\boldsymbol{x}_p})^k D_{\boldsymbol{x}_p} f(\boldsymbol{x}_p) \\ = \quad & 2^s \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+s)! r^{2k+1}}{k!(2k+2s+1)!}(-\Delta_{\boldsymbol{x}_p})^{k+s} D_{\boldsymbol{x}_p} f(\boldsymbol{x}_p). \end{aligned}$$

因此，根据关于 $s = \frac{q-3}{2}$ 的引理 4.7，我们得到

$$D_{\boldsymbol{x}} \Delta_{\boldsymbol{x}}^{\frac{q-3}{2}} f(\boldsymbol{x}) = -C_q(\frac{q-1}{2}) 2^{\frac{q-3}{2}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+\frac{q-3}{2})! r^{2k}}{k!(2k+q-2)!}(-\Delta_{\boldsymbol{x}_p})^{k+\frac{q-3}{2}} D_{\boldsymbol{x}_p} f(\boldsymbol{x}_p), \quad (47)$$

从而得到

$$\begin{aligned} D_{\boldsymbol{x}} \Delta_{\boldsymbol{x}}^{\frac{q-3}{2}} f(x) \mid_{\underline{\boldsymbol{x}}_q=0} \quad &= \quad -C_q(\frac{q-1}{2}) 2^{\frac{q-3}{2}} \frac{(\frac{q-3}{2})!}{(q-2)!}(-\Delta_{\boldsymbol{x}_p})^{\frac{q-3}{2}} D_{\boldsymbol{x}_p} f(\boldsymbol{x}_p) \\ &= \quad (-1)^{\frac{q-1}{2}} 2^{q-2} \frac{(\frac{q-1}{2})!(\frac{q-3}{2})!}{(q-2)!} \Delta_{\boldsymbol{x}_p}^{\frac{q-3}{2}} D_{\boldsymbol{x}_p} f(\boldsymbol{x}_p). \end{aligned} \quad (48)$$

注意到

$$2^{q-2} \frac{(\frac{q-1}{2})!(\frac{q-3}{2})!}{(q-2)!} = 2^{q-3}(q-1) \frac{\left((\frac{q-3}{2})!\right)^2}{(q-2)!} = \frac{(q-1)!!}{(q-2)!!},$$

我们可以将（48）改写为

$$D_{\boldsymbol{x}} \Delta_{\boldsymbol{x}}^{\frac{q-3}{2}} f(\boldsymbol{x}) \mid_{\underline{\boldsymbol{x}}_q=0} = \gamma_q \Delta_{\boldsymbol{x}_p}^{\frac{q-3}{2}} D_{\boldsymbol{x}_p} f(\boldsymbol{x}_p), \quad (49)$$

其中 γ_q 由式 (45) 给出。

注意到引理 3.8 中的 (8)，并将算子 $D_{\boldsymbol{x}_q}$ 应用于 (47)

$$D_{\boldsymbol{x}} \Delta_{\boldsymbol{x}}^{\frac{q-3}{2}} f(\boldsymbol{x}) = (-1)^{\frac{q-1}{2}} C_q(\frac{q-1}{2}) 2^{\frac{q-3}{2}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+\frac{q-3}{2})! \underline{\boldsymbol{x}}_q^{2k}}{k!(2k+q-2)!} \Delta_{\boldsymbol{x}_p}^k (D_{\boldsymbol{x}_p} f(\boldsymbol{x}_p)),$$

我们得到

$$D_{\underline{\boldsymbol{x}}_q}(D_{\boldsymbol{x}}\Delta_{\boldsymbol{x}}^{\frac{q-3}{2}}f(\boldsymbol{x}))=(-1)^{\frac{q+1}{2}}C_q(\frac{q-1}{2})2^{\frac{q-1}{2}}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(k+\frac{q-3}{2})!\underline{\boldsymbol{x}}_q^{2k-1}}{(k-1)!(2k+q-2)!}\Delta_{\boldsymbol{x}_p}^k(D_{\boldsymbol{x}_p}f(\boldsymbol{x}_p)),$$

这意味着

$$D_{\underline{\boldsymbol{x}}_q}(D_{\boldsymbol{x}}\Delta_{\boldsymbol{x}}^{\frac{q-3}{2}}f(\boldsymbol{x}))\mid_{\underline{\boldsymbol{x}}_q=0}=0. \tag{50}$$

根据调和广义 CK 延拓（定理 3.13），调和函数 $D_{\boldsymbol{x}}\Delta_{\boldsymbol{x}}^{\frac{q-3}{2}}f(\boldsymbol{x})$ 完全由其在 $\mathbb{R}^{p+1}$ 上的限制以及 $D_{\boldsymbol{x}_q}(D_{\boldsymbol{x}}\Delta_{\boldsymbol{x}}^{\frac{q-3}{2}}f(\boldsymbol{x}))$ 在 $\mathbb{R}^{p+1}$ 上的限制所确定。因此，由（49）和（50），我们得到

$$D_{\boldsymbol{x}}\Delta_{\boldsymbol{x}}^{\frac{q-3}{2}}f(\boldsymbol{x})=\gamma_q HGCK[\Delta_{\boldsymbol{x}_p}^{\frac{q-3}{2}}D_{\boldsymbol{x}_p}f(\boldsymbol{x}_p),0](\boldsymbol{x}).$$

最后，结合定理 5.1 和引理 2.8，我们可以得到所需的交换图。证明完毕。

□

注 5.5. 当 $\mathbb{A}=\mathbb{R}_{0,m}$ 且 $M=\mathbb{R}^{m+1}$ 时，*De Martino* 和 *Guzm´an Ad´an* 在 *[18,*定理 *5.6]* 中得到了定理 *5.4* 的切片单生成版本。

6 进一步说明与未来研究方向

对于取值于实交替 $*$ 代数且在适当意义下解析的函数，其研究在切片正则函数的情形中已相当深入，但对于经典单生成函数，相关研究则较少。在此框架下，考虑多单生成函数这一更一般的情形或许颇有意义。在非结合环境中，首先需要解决的问题是如何恰当地定义算子的幂。对于任意整数 $k>1$，可以将算子 D^k 定义为

$$D^kf(x)=D(D^{k-1}f(x)),\quad f\in C^k(\Omega,\mathbb{A}),$$

即，回顾第 2.6 节中的记号，

$$D^kf(x)=\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_k=0}^{m}\Big(v_{i_1}v_{i_2}\ldots v_{i_k}\frac{\partial^k}{\partial_{x_{i_1}}\partial_{x_{i_2}}\ldots\partial_{x_{i_k}}}f(x)\Big)_R.$$

利用这些记号，我们可以引入另类

$*$代数上的多重单生成函数。

定义 6.1 (多重单生成函数)。设 $k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ 和 Ω 是 M中的一个开集。函数 $f\in C^k(\Omega,\mathbb{A})$ 称为阶数为 k 的左多重单生成函数，如果

$$D^kf(x)=0,\quad x\in\Omega.$$

记 $\mathcal{PM}_k^L(\Omega,\mathbb{A})$（或简写为 $\mathcal{PM}_k(\Omega,\mathbb{A})$）为所有 k 阶左单生成函数构成的函数类。当 $k=1$, $\mathcal{PM}_k(\Omega,\mathbb{A})=\mathcal{M}(\Omega,\mathbb{A})$ 与单生成函数集重合时。

更一般地，给定结合次序 $\otimes_{(k+1)}$，可以定义

$$(\underbrace{DD\cdots D}_{k}f(x))_{\otimes_{(k+1)}}=\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_k=0}^{m}\Big(v_{i_1}v_{i_2}\ldots v_{i_k}\big(\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_n}}(x)\big)\Big)_{\otimes_{(k+1)}}. \tag{51}$$

注意，对于 $f\in C^k(\Omega,\mathbb{A})$，在（51）式右侧，我们可以将所有形如 $\partial^{\mathrm{k}}f=\frac{\partial^k f}{\partial_{x_0}^{k_0}\partial_{x_1}^{k_1}\cdots\partial_{x_m}^{k_m}}$ 且 $\mathrm{k}=(k_0,k_1,\ldots,k_m)\in\mathbb{N}^{m+1}$ 且 $k=|\mathrm{k}|$ 的导数归为一组，写作

$$\begin{aligned}&\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_k=0}^{m}\Big(v_{i_1}v_{i_2}\ldots v_{i_k}\big(\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_k}}(x)\big)\Big)_{\otimes_{(k+1)}}\\ =&\sum_{|\mathrm{k}|=k}\ \sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_k)\in\sigma(\overrightarrow{\mathrm{k}})}(v_{i_1}v_{i_2}\cdots v_{i_k}\partial^{\mathrm{k}}f(x))_{\otimes_{(k+1)}},\end{aligned} \tag{52}$$

其中 $\sigma(\overrightarrow{\mathrm{k}})$ 如定义 2.25 所示。

因此，根据命题 2.24，$(\underbrace{DD\cdots D}_{k}f(x))^{\otimes_{(k+1)}}$ 与结合次序 $\otimes$ 无关，于是我们可以将（51）式写作 $D^k f(x)$，因为这并无歧义。

例 6.2。 设 $\Omega=M\setminus\{0\}$，并对 $k=1$、2、.....定义

$$E^{[k]}(x)=\frac{1}{\sigma_m}\frac{1}{(k-1)!}\frac{\overline{x}x_0^{k-1}}{|x|^{m+1}},\quad x\in\Omega,$$

其中 $\sigma_m=2\frac{\Gamma^{m+1}}{\Gamma(\frac{m+1}{2})}$ 是 $\mathbb{R}^{m+1}$ 中单位球的表面积。

容易验证

$$D^nE^{[k]}=E^{[k]}D^n=E^{[k-n]},\quad n=1,2,\ldots,k,$$

and

$$D^kE^{[k]}=E^{[k]}D^k=0,$$

这表明 $E^{[k]}\in\mathcal{PM}_k(\Omega,\mathbb{A})$。

注 6.3。 当 $\mathbb{A}=\mathbb{O}=M$ 时，算子 D 按照 *[37, 定义 4.5]* 的意义是幂结合的；另见 *[37, 命题 8.3]*。现在我们通过证明 D^k 对所有 $k\in\mathbb{N}$ 都是右八元数拟线性的，来直接证明这一事实。首先，我们注意到 *(52)* 表明，对所有 $a\in\mathbb{O}$，

$$\begin{aligned}D^k(f(x)a)&=\sum_{|\mathrm{k}|=k}\ \sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_k)\in\sigma(\overrightarrow{\mathrm{k}})}(v_{i_1}v_{i_2}\cdots v_{i_k}(\partial^{\mathrm{k}}f(x)a))_L\\ &=\sum_{|\mathrm{k}|=k}\Big(\sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_k)\in\sigma(\overrightarrow{\mathrm{k}})}(v_{i_1}v_{i_2}\cdots v_{i_k})_L\Big)(\partial^{\mathrm{k}}f(x)a).\end{aligned}$$

其中 $\sigma(\overrightarrow{\mathrm{k}})$ 如定义 *2.25* 所述。

因此，回顾基本公式

$$\mathrm{Re}\,(a+b)=\mathrm{Re}\,a+\mathrm{Re}\,b,\quad \mathrm{Re}\,((ab)c)=\mathrm{Re}\,(a(bc)),\quad a,b,c\in\mathbb{O},$$

对于 $f \in C^k(\Omega\ \mathbb{O})$ 和 $a \in \mathbb{O}$，我们有，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\,(D^k(f(x)a)) &= \sum_{|\mathrm{k}|=k} \mathrm{Re}\Big(\Big(\sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_k)\in\sigma(\overrightarrow{\mathrm{k}})} (v_{i_1}v_{i_2}\cdots v_{i_k})_L\Big)(\partial^{\mathrm{k}} f(x)a)\Big) \\
&= \sum_{|\mathrm{k}|=k} \mathrm{Re}\Big(\Big(\Big(\sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_k)\in\sigma(\overrightarrow{\mathrm{k}})} (v_{i_1}v_{i_2}\cdots v_{i_k})_L\Big)\partial^{\mathrm{k}} f(x)\Big)a\Big) \\
&= \sum_{|\mathrm{k}|=k} \mathrm{Re}\Big(\Big(\sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_k)\in\sigma(\overrightarrow{\mathrm{k}})} ((v_{i_1}v_{i_2}\cdots v_{i_k})_L\partial^{\mathrm{k}} f(x))\Big)a\Big) \\
&= \sum_{|\mathrm{k}|=k} \mathrm{Re}\Big(\Big(\sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_k)\in\sigma(\overrightarrow{\mathrm{k}})} (v_{i_1}v_{i_2}\cdots v_{i_k}\partial^{\mathrm{k}} f(x))_L\Big)a\Big) \\
&= \sum_{|\mathrm{k}|=k} \mathrm{Re}\Big(\Big(\sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_k)\in\sigma(\overrightarrow{\mathrm{k}})} (v_{i_1}v_{i_2}\cdots v_{i_k}\partial^{\mathrm{k}} f(x))_L\Big)a\Big) \\
&= \mathrm{Re}\,((D^k f(x))a),
\end{aligned}$$

由此我们可以得出，对于所有 k，所有算子 D^k 都是右八元数拟线性的。

注 6.4。注意，*(52)* 依赖于以下事实：偏导数 ∂_{x_s} 在 $\mathcal{C}^k(\Omega\ \mathbb{A})$ 上彼此可交换，对于 $s = 0$、1、...、m仍然成立；对于与 *Coxeter* 群及重数函数相关联的 *Dunkl* 算子，即 $\mathfrak{D}_s\mathfrak{D}_t = \mathfrak{D}_t\mathfrak{D}_s$，这一点依然成立。关于 $\mathfrak{D}_s$的精确定义，参见例如 *[21]*。因此，我们可以定义多重 *Dunkl*-单生成函数，它们属于核 $\mathfrak{D}^k$，其中 $\mathfrak{D}$ 是所谓的 *Dunkl-Dirac* 算子，定义为

$$\mathfrak{D}f(x) = \sum_{s=0}^{m} v_s\mathfrak{D}_s f(x) = \sum_{s=0}^{m}\sum_{t=0}^{d} v_s v_t \mathfrak{D}_s f_t(x), \quad x \in \Omega,$$

其中 $f = \sum_{t=0}^{d} v_t f_t \in C^1(\Omega\ \mathbb{A})$。

关于 $k = 1$ 和 $\mathbb{A} = \mathbb{R}_{0,\ m}$，其中 $M = \mathbb{R}^{m+1}$，请参见 [5] 。此外，我们还可以定义广义部分切片多重单生成函数类（或多重广义部分切片单生成函数类）。

定义 6.5（广义部分切片多重单生成函数）。设 $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ 和 Ω 是 M 中的一个开集。若函数 $f : \Omega \to \mathbb{A}$ 满足以下条件，则称其为类型 (p, q)、阶为 k 的左广义部分切片多重单生成函数：对于所有 $\omega \in \mathbb{S}$，其限制$f_\omega \in C^k$（$\Omega_\omega, \mathbb{A}$）满足

$$D^k_{\underline{\omega}} f_{\underline{\omega}}(\boldsymbol{x}_p + r\underline{\omega}) = (D_{\boldsymbol{x}_p} + \underline{\omega}\partial_r)^k f_{\underline{\omega}}(\boldsymbol{x}_p + r\underline{\omega}) = 0,$$

对于所有 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_p + r\underline{\omega} \in \Omega_{\underline{\omega}}$。

作为本文的总结，我们给出一个左（及右）广义部分切片多重单生成函数的例子，其类型为 $(p,\ q)$，阶为 k。关于替代 $*$-代数上的广义部分切片多重单生成函数的更多性质，将在后续工作中探讨。

例6.6。 令 $\Omega = M \setminus \{0\}$ 并定义，对于 $k = 1, 2, \ldots,$

$$E^{[k]}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sigma_{p+1}} \frac{1}{(k-1)!} \frac{\overline{\boldsymbol{x}} x_0^{k-1}}{|\boldsymbol{x}|^{p+2}}, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega,$$

其中 $\sigma_{p+1} = 2\frac{\Gamma^{p+2}}{(\Gamma 2)\Gamma(\frac{p+2}{2})}$ 是 $\mathbb{R}^{p+2}$ 中单位球的表面积。

作者贡献 所有作者对本稿件的各个方面贡献均等，并已审阅最终稿。

利益冲突 不存在与所提交发表的工作直接或间接相关的财务或非财务利益。

数据可用性 本文不适用数据共享，因为本研究未生成任何数据集。

参考文献

[1] D. Alpay, F. Colombo, I. Sabadini, 切片超全纯舒尔分析，《算子理论：进展与应用》第256卷，Birkh¨auser/Springer，Cham，2016年。[2] A. Altavilla, 切片正则函数的扭子解释，《几何与物理学杂志》123（2018年），184-208。[3] G. Binosi, A. Perotti，替代$*$-代数上的 *Dunkl* 正则性，arXiv:2602.01907，2026年。[4] F. Brackx, R. Delanghe, F. Sommen，*Clifford* 分析，《数学研究札记》第76卷，Pitman，波士顿，1982年。[5] P. Cerejeiras, U. K¨ahler, G. Ren，有限反射群的 *Clifford* 分析，《复变函数与椭圆方程》51（2006年），第5-6期，487-495。[6] F. Colombo, A. De Martino, S. Pinton, I. Sabadini，五维 S-谱上的谱理论精细结构，《J. Geom. Anal.》33（2023年），第9期，论文编号300，共73页。[7] F. Colombo, A. De Martino, S. Pinton, I. Sabadini，轴向调和函数及 S-谱上的调和函数演算，《J. Geom. Anal.》33（2023年），第1期，论文编号2，共54页。[8] F. Colombo, A. De Martino, I. Sabadini，轴向调和、*Fueter* 正则和多解析函数的新泰勒级数与洛朗级数，arXiv:2505.06555，2025年。[9] F. Colombo, J. Gantner，四元数闭算子、分数幂与分数阶扩散过程。《算子理论：进展与应用》，第274卷，Birkh¨auser/Springer，Cham，2019年。[10] F. Colombo, J. Gantner, D. P. Kimsey，四元数算子的 *S*-谱谱理论。《算子理论：进展与应用》，第270卷，Birkh¨auser/Springer，Cham，2018年。

[11] F. Colombo, I. Sabadini, F. Sommen, D. C. Struppa，*Dirac* 系统分析与计算代数，《数学物理进展丛书》第39卷，Birkh¨auser 波士顿，2004年。[12] F. Colombo, I. Sabadini, D. C. Struppa，切片单值函数，《以色列数学杂志》171（2009年），385-403。[13] F. Colombo, I. Sabadini, D. C. Struppa，非交换函数演算：切片超全纯函数理论及其应用，第289卷，《数学进展丛书》，Birkh¨auser，巴塞尔（2011年）。[14] F. Colombo, I. Sabadini, D. C. Struppa, *Michele Sce* 的超复分析著作：附评注译本，Birkh¨auser，巴塞尔，2020年。[15] F. Dai, Y. Xu，球面与球上的逼近理论和调和分析，《施普林格数学专著》，施普林格，纽约，2013年。[16] R. Delanghe, F. Sommen, V. Sou˘cek，克利福德代数与旋量值函数：*Dirac* 算子的函数论，《数学及其应用》第53卷，Kluwer Academic Publishers Group，多德雷赫特，1992年。[17] P. Dentoni, M. Sce, 凯莱代数中的正则函数，《帕多瓦大学数学研讨会报告》50（1973年），251-267。[18]A. De Martino, A. Guzm´an Ad´an，关于调和广义柯西–科瓦列夫斯卡娅延拓及其与 *Futer–Sce* 定理的联系，Trans. Amer. Math. Soc. DOI: 10.1090/tran/9614，2026年，在线发表。[19] C. Ding, Z. Xu，切片单生成函数的迭代全局微分算子的不变性，《函数理论计算方法》25（2025年），第3期，735-752。[20] X. Dou, G. Ren, I. Sabadini，非轴对称域中切片正则函数的延拓定理与表示公式，《欧洲数学会杂志》25（2023年），第9期，3665-3694。[21] C. F. Dunkl, Y. Xu，多变量正交多项式，第二版。《数学及其应用百科全书》第155卷。剑桥大学出版社，剑桥，2014年。[22]R. Fueter，四个实变量中的微分方程函数论 $\Delta u = 0$ 与$\Delta\Delta u = 0$ 函数论，（德文）Comment. Math. Helv. 7（1934年），第1期，307-330。[23] G. Gentili, C. Stoppato, D. C. Struppa，四元数变量的正则函数，《施普林格数学专著》，施普林格，柏林–海德堡，第二版，2022年。[24] G. Gentili, D. C. Struppa，四元数变量正则函数的新理论，《数学进展》216（2007年），第1期，279-301。[25] G. Gentili, D. C. Struppa，凯莱数空间上的正则函数，《落基山数学杂志》40（2010年），225-241。

[26] G. Gentili, S. Salamon, C. Stoppato，四元数函数的扭量变换与正交复结构，J. Eur. Math. Soc. 16 (2014), no. 11, 2323-2353.[27] J. E. Gilbert, M. A. M. Murray，调和分析中的克利福德代数与 Dirac 算子，剑桥高等数学研究丛书，第 26 卷，剑桥大学出版社，剑桥，1991.[28] R. Ghiloni, A. Perotti，实交替代数上的切片正则函数，《数学进展》226 (2011), no. 2, 1662-1691.[29] R. Ghiloni, A. Perotti, C. Stoppato，实交替 $*$代数上的切片正则函数的奇点，《数学进展》305 (2017), 1085-1130.[30] R. Ghiloni, C. Stoppato，单个超复变量中统一的正则性概念，《几何与物理学杂志》202 (2024), Paper No. 105219, 13 pp.[31] R. Ghiloni, C. Stoppato，超复变量正则函数统一理论，《数学科学通报》209 (2026), Paper No. 103794, 92 pp.[32] R. Ghiloni, C. Stoppato，单个超复变量中的流形 Fueter-Sce 现象，arXiv:2511.04771, 2025.[33] R. Ghiloni, A. Perotti, C. Stoppato， $\mathbb{R}^8$上的切片正则函数与正交复结构，《非交换几何杂志》16 (2022), no. 2, 637-676.[34] K. G¨urlebeck, K. Habetha, W.Spr¨oßig，平面及n维空间中的全纯函数，Birkh¨auser Verlag，巴塞尔，2008.[35] Q. Huo, P. Lian, J. Si, Z. Xu, 广义部分切片正则函数的 Almansi 型分解与 Fueter-Sce 定理, arXiv:2411.05571, 2024.[36] Q. Huo, G. Ren, Z. Xu，实交替 $*$代数上的单生成函数：基本结果与应用，arXiv:2504.01359, 2025.[37] Q. Huo, G. Ren, I. Sabadini, Z. Xu，八元数 Riesz-Dunford 函数演算，2026，准备中.[38] X. Li, J. Wang, Dirac 算子的正交不变性与八元数解析函数的次调和性临界指标，Adv. Appl. Clifford Algebr. 24 (2014), no. 1, 141-149.[39]S. Okubo，物理学中的八元数及其他非结合代数导论，Montroll 数学物理纪念讲座丛书，2. 剑桥大学出版社，剑桥，1995.[40] A. Perotti，克利福德代数上的切片正则性与调和性，《克利福德分析专题》，53-73，数学趋势丛书，Birkh¨auser/Springer，Cham，2019.[41] A. Perotti，实交替代数上的柯西-黎曼算子与局部切片分析，《数学分析及其应用杂志》516 (2022), no. 1, Paper No. 126480, 34 pp.

[42] T. Qian，将 *Fueter* 的结果推广至 $\mathbb{R}^{n+1}$。Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl. 8 (1997), no. 2, 111-117.[43] T. Qian，超复分析中的 *Fueter* 映射定理，算子理论，施普林格，柏林 (2015) pp. 1491-1507.[44] R. D. Schafer，非结合代数导论，纯粹与应用数学，第 22 卷。学术出版社，纽约—伦敦，1966.[45] M. Sce，关于二次模上的幂级数的观察，Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. 23 (1957), 220-225.[46] E. M. Stein, G. Weiss，关于多变量调和函数理论 *I*。 H^p空间理论，Acta Math. 103 (1960), 25-62[47] C. Wang, G. Qin, R. P. Agarwal，通过 S谱分裂研究四元数指数二分算子及其在柯西问题中的应用，《数学进展》410 (2022), part B, Paper No. 108747, 97 pp.[48] C. Wang, T. Xu, J. Li，连续与离散四元数半群的遍历性及陶伯定理，《数学进展》480 (2025), part B, Paper No. 110485, 70 pp.[49] H. Whitney，可微偶函数，Duke Math. J. 10 (1943), 159-160.[50] Z. Xu, C. Ding, H. Wang，实交替 $*$代数上的单生成函数：多超复变量情形，arXiv:2506.08307, 2025。即将在 J. Geom. Anal. 发表.[51] Z. Xu, I. Sabadini，广义部分切片单值函数，Trans. Amer. Math. Soc. 378 (2025), no. 2, 851-883.[52] Z. Xu, I. Sabadini, 广义部分切片单值函数：两种函数理论的综合，Adv. Appl. Clifford Algebr. 34 (2024), no. 2, Paper No. 10.[53] Z. Xu, I. Sabadini，广义部分切片单生成函数的 *Fueter-Sce* 定理，Ann. Mat. Pura Appl. 204 (2025), no. 2, 835-857.[54]Z. Xu, I. Sabadini，广义部分切片单生成函数的 *Segal-Bargmann* 变换，Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. 89 (2025), no. 6, 105-130；重印于 Izv. Math. 89 (2025), no. 6, 1182-1207.[55] Z. Xu, I. Sabadini，广义部分切片单生成函数：八元数情形，Trans. Amer. Math. Soc. DOI: 10.1090/tran/9646, 2026，在线发表。