arXiv:2603.15032v1 [math.SP] 16 Mar 2026

离散安德森模型的积分态密度关于无序参数的高阶导数连续性

Dhriti Ranjan Dolai[1] and Naveen Kumar[1]

[1] 印度理工学院达瓦德分校,
达瓦德 580011 ，卡纳塔克邦，印度。
dhriti@iitdh.ac.in ，222071001@iitdh.ac.in

摘要

我们为安德森模型在 $\ell^2(\mathbb{G})$ 上的积分态密度（IDS）关于无序参数的高阶导数推导出了定量连续性估计。这里， $\mathbb{G}=\mathbb{Z}^d$ 或$\mathbb{B}$，其中 $\mathbb{B}$ 表示贝特格。我们的结果适用于强无序情形，此时整个谱均局域化。我们假设单点分布的密度具有足够的光滑性，从而使积分态密度存在高阶导数。更确切地说，我们建立了积分态密度高阶导数之差的界，并将其表示为无序参数之差的函数。

MSC（2020）分类： 82B44,47B93
关键词： 随机薛定谔算子、安德森模型、积分态密度、无序参数。

1 引言

贝特格 $\mathbb{B}$ 是一个无限连通且没有闭合回路的图，每个顶点的度数固定为 $K+1$ （即最近邻的数量）。度数称为配位数，连通度K 等于配位数减一。两个顶点 n_1 和 n_2 之间的距离记作$d(n_1,\ n_2)$，定义为连接它们的最短路径长度。我们用 $\ell^2(\mathbb{B})$ 表示希尔伯特空间

$$\ell^2(\mathbb{B})=\left\{u:\mathbb{B}\to\mathbb{C}:\sum_{n\in\mathbb{B}}|u(n)|^2<\infty\right\}.$$

我们固定 $\mathbb{B}$ 的任意一个顶点作为原点，并将其记为 0。对于 $n_1,\ n_2\in\mathbb{Z}^d$，距离定义为$d(n_1,\ n_2)=\|n_1-n_2\|_1$。希尔伯特空间 $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ 定义为

$$\ell^2(\mathbb{Z}^d)=\left\{u:\mathbb{Z}^d\to\mathbb{C}:\sum_{n\in\mathbb{Z}^d}|u(n)|^2<\infty\right\}.$$

我们考虑两个安德森模型 $H_j^\omega,\ j=1,\ 2$，它们作用于 $\ell^2(\mathbb{G})$，其中 $\mathbb{G}=\mathbb{B}$ 或 $\mathbb{Z}^d$，并与无序参数 λ_j相关联。这些算子定义为

$$H_j^\omega=\Delta+\lambda_jV^\omega,\quad \omega\in\Omega,\quad j=1,2. \tag{1.1}$$

这里， Δ 表示作用于 $\ell^2(\mathbb{G})$ 的离散拉普拉斯算子，定义为

$$(\Delta\psi)(n)=\sum_{d(k,n)=1}\psi(k),\quad \psi=\{\psi(n)\}_{n\in\mathbb{G}}\in\ell^2(\mathbb{G}).$$

随机势 V^ω 定义为

$$(V^\omega \psi)(n) = \omega_n \, \psi(n), \quad n \in \mathbb{G},$$

其中 $\{\omega_n\}_{n\in\mathbb{G}}$ 是一族独立同分布的非退化实值随机变量，其共同分布为 μ，称为单点分布（*SSD*）。

我们将 H_j^ω 视为概率空间 $(\Omega, \mathcal{B}_\Omega, \mathbb{P})$ 上的算子值随机变量。底层的无限乘积概率空间

$$(\Omega, \mathcal{B}_\Omega, \mathbb{P}) = \left(\mathbb{R}^{\mathbb{G}}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^{\mathbb{G}}}, \bigotimes_{n\in\mathbb{G}} \mu \right)$$

由柯尔莫哥洛夫扩张定理构造，并记为 $\omega = (\omega_n)_{n\in\mathbb{G}} \in \Omega$。对于每个 $\omega \in \Omega$，算子 H_j^ω 在 $\ell^2(\mathbb{G})$ 上是自伴的，其共同稠密核由有限支撑向量构成。此外，族 $\{H_j^\omega\}_{\omega\in\Omega}$ 是可测的，即对于任意 $y,\ z \in \ell^2(\mathbb{G})$，从 Ω 到 $\mathbb{C}$ 的映射 $\omega \mapsto \langle y,\ H_j^\omega z\rangle$ 对 $j = 1,\ 2$ 可测。关于随机薛定谔算子的可测性性质，进一步讨论请参见 [7] 。

令 $\{\delta_n\}_{n\in\mathbb{G}}$ 表示 $\ell^2(\mathbb{G})$ 的典范正交归一基。与 H_j^ω 相关的态密度测度（*DOSm*） ν_j定义为

$$\nu_j(A) = \mathbb{E}\Big[\langle \delta_0, E_{H_j^\omega}(A)\delta_0 \rangle \Big], \quad A \subset \mathbb{R} \text{ Borel}.$$

相应的分布函数 $\mathcal{N}_j(x) = \nu_j((-\infty,\ x])$，$x \in \mathbb{R}$，称为积分态密度（*IDS*）。如果测度 ν_j 关于勒贝格测度绝对连续，其拉东–尼科迪姆导数称为态密度函数（*DOSf*），记作 $\frac{d\nu_j}{dx} = g_j(x) = \mathcal{N}_j'(x)$。假设单点分布（SSD） μ_j 绝对连续，则韦格纳估计意味着态密度测度 ν_j 也绝对连续。关于积分态密度（IDS）和安德森模型的更多细节，参见 [11, 6, 1] 。

现在我们陈述关于无序参数 λ_j 和单点分布（SSD） μ 的假设。

假设 1.1. *(i)* 我们假设 $\lambda_1, \lambda_2 \geq \lambda_0$，其中 $\lambda_0 \gg 1$ 取充分大，使得当无序强度至少为 λ_0 时，整个谱都局域化。

(ii) 单点分布 μ 紧支撑于 $[a, b]$，其密度 $\frac{d\mu}{dx} = \rho$ 属于 $C_c^{m+1}((a, b))$，其中 $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$。此外，它满足

$$\sup_{0\leq k\leq m+1} \|\rho^{(k)}\|_\infty < \infty, \quad where \quad \rho^{(k)} = \frac{d^k \rho}{dx^k}$$

注记 1.2. 考虑算子 $H_\lambda^\omega = \Delta + \lambda V^\omega$。那么，$H_\lambda^\omega$ 的谱由 $\sigma(H_\lambda^\omega) = [-2d, 2d] + \lambda[a, b]$ 给出，在 $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ 上对几乎处处的 ω 成立；而 $\sigma(H_\lambda^\omega) = [-2\sqrt{K}, 2\sqrt{K}] + \lambda[a, b]$ 在 $\ell^2(\mathbb{B})$ 上对几乎处处的 ω 成立。更多细节见 *[11, 6, 1]* 。

此外，在假设 1.1 的条件 (i) 下，整个谱都呈现指数局域化。特别地，对于某个 $0 < s < 1$，分数矩判据成立：

$$\sup_{\Re(z)\in\mathbb{R},\ \Im(z)>0} \mathbb{E}\big[\big| \langle \delta_n, (H_\lambda^\omega - z)^{-1}\delta_k \rangle \big|^s \big] \leq C(s, \lambda)\, e^{-\xi(s,\lambda)\, d(n,k)}, \quad \forall\, n, k \in \mathbb{Z}^d. \tag{1.2}$$

Aizenman–Molchanov 的研究建立了形式如 (1.2) 的分数矩局域化估计 [4], Aizenman [3]; 另见 [14]。特别地，对于 $\ell^2(\mathbb{G})$ 上处于强无序区间 $\lambda \geq \lambda_0$ 的安德森模型，这些结果给出了明确的衰减率。更准确地说，可以取

$$\xi(s, \lambda) := -s \ln\left(\frac{2d\, C_{s,\rho}}{\lambda} \right) \text{ or } -s \ln\left(\frac{(K+1)\, C_{s,\rho}}{\lambda} \right) \quad \text{when } \mathbb{G} = \mathbb{Z}^d \text{ or } \mathbb{B},$$

$$C(s, \lambda) := \frac{(2\sqrt{2})^s}{(1-s)|\lambda|^s} \quad \text{for } \mathbb{G} = \mathbb{Z}^d \text{ or } \mathbb{B}.$$

其中 $0 < C_{s,\ \rho} < \infty$ 是一个仅取决于分数阶矩指数 s 和单点密度 ρ 的常数。由此可知，对于所有 $\lambda \geq \lambda_0$, $\xi(s,\ \lambda) \geq \xi(s,\ \lambda_0)$，且 $C(s,\ \lambda) \leq C(s,\ \lambda_0)$。因此，分数矩判据 (1.2) 可以用一致的常数改写为

$$\sup_{\Re(z)\in\mathbb{R},\ \Im(z)>0} \mathbb{E}\big[\big|\langle\delta_n, (H_\lambda^\omega - z)^{-1}\delta_k\rangle\big|^s\big] \leq C(s,\lambda_0)\, e^{-\xi(s,\lambda_0)\, d(n,k)}, \quad \forall\, \lambda \geq \lambda_0. \tag{1.3}$$

在假设 1.1 下，与 $H_j^\omega (j = 1,2)$ 相关的积分态密度（IDS） $\mathcal{N}_j(\cdot)$ 存在高阶导数。

注 1.3. 在假设 *1.1* 以及分数矩判据 (1.2) 下， *[8, 9]* 的结果意味着，对于 $j = 1,2$， $\mathcal{N}_j \in C^m(\mathbb{R})$ 。

我们记 $\mathcal{N}_j' = g_j$。对于 $j = 1, 2$，定义 $\mathcal{N}_j^{(k+1)} = g_j^{(k)}$， $0 \leq k \leq m-1$,

注 1.4. 由于单点分布（*SSD*）是一个紧支撑的绝对连续概率测度，依据 *[(ii)*，假设 *1.1]*，表明， H_j^ω 的谱对于几乎处处的 ω 都是确定的紧集。此外，态密度测度（*DOSm*） ν_j 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的紧支撑绝对连续概率测度，我们记作 $d\nu_j = g_j(x)\, dx$。因此， $g_j^{(k)} \in C_c(\mathbb{R})$；也就是说，对于 $0 \leq k \leq m-1$， $g_j^{(k)}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续紧支撑函数。

现在我们可以陈述主要结果了。

定理 1.5. 设 $\mathcal{N}_j(\cdot)$ 表示与式 (1.1) 中定义的算子 $H_j^{\omega\tilde{}}$相对应的积分态密度（*IDS*），其中 $j = 1,\ 2$。假设假设 *1.1* 成立。那么，对于 $\lambda_1, \lambda_2 \in [\lambda_0, \lambda_0]$，有

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \big|\mathcal{N}_1^{(k+1)}(x) - \mathcal{N}_2^{(k+1)}(x)\big| \leq D_k\, |\lambda_1 - \lambda_2|^{\frac{m-k-2}{m}}, \quad 0 \leq k < m-2, \tag{1.4}$$

其中 $\mathcal{N}_j^{(k+1)} = \frac{d^{k+1}\mathcal{N}_j}{dx^{k+1}}$. 这里， D_k 是一个正常数，与 λ_1 和 λ_2 无关，且仅依赖于 k、~λ_0 和 λ_0。

首先，Hislop 和 Marx [10] 研究了一类离散随机薛定谔算子的积分态密度对单点分布（SSD）的依赖性，并建立了弱-* 拓扑下连续性的定量形式。随后，Shamis [13] 基于 Ky Fan 不等式提出了另一种方法，并得到了 [10] 中估计的尖锐版本。将 [10, 13] 的结果应用于模型 (1.1)，结合假设 1.1, [13, 、注 3.1]，和命题 A.3，可得

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \big|\mathcal{N}_1(x) - \mathcal{N}_2(x)\big| \leq C\, d_{KR}(\mu_1,\mu_2)^{\frac{1}{2}} \leq C\, |\lambda_1 - \lambda_2|^{\frac{1}{2}}. \tag{1.5}$$

在本文中，我们的目标是像（1.4）那样，为$\mathcal{N}_1$ 和 $\mathcal{N}_2$的高阶导数（若其存在）得到形如（1.5）的估计。（1.4）并非（1.5）的推论。换言之，无法通过直接应用 [10, 13]中的结果得到（1.4）。

由于积分态密度（IDS） $\mathcal{N}_j$ (·) 的高阶导数主要是在局域化存在时才为人所知，更多细节请参见 [8, 9] 及其中的参考文献。因此，我们考虑强无序区间中由（1.1）定义的模型 H_j^ω。

在证明中，我们没有使用 H_λ^ω的任何有限体积限制；因此，可以预期这些论证既适用于 $\mathbb{Z}^d$ ，也适用于贝特格 $\mathbb{B}$。

2 证明

本节给出我们结果的证明。为证明这些结果，我们采用傅里叶变换技巧。首先，我们利用测度的斯蒂尔切斯（博雷尔）变换的导数界，得到测度密度高阶导数的界。

我们的目标是为 $\|g_j^{(k)}\|_\infty$ 得到一个上界。由于 $g_j^{(k)}$ 连续且具有紧支撑，因此可得 $\|g_j^{(k)}\|_\infty < \infty$。然而，该上界可能依赖于无序参数 λ_j。为了得到

与 λ_j 无关的上界，我们使用一个引理，该引理将函数的导数与其博雷尔变换的导数联系起来。建立这样的上界后，便可推出态密度函数 g_j 的傅里叶变换具有充分的衰减，且该衰减与 λ_j 无关。这种衰减在定理 1.5 的证明中起着关键作用。

引理 2.1. 设 $g \in L^1(\mathbb{R}, dx)$，其博雷尔变换定义为 $F(z) = \int_{\mathbb{R}} {}^{g(x)}{}_{x-z}\, dx$. 设 $J \subset \mathbb{R}$ 为有界区间，并假设

$$\sup_{\Re(z)\in J,\, \Im(z)>0} \left| \Im\left(\frac{d^k}{dz^k} F(z) \right) \right| < \infty, \quad 0 \le k \le m+1. \tag{2.1}$$

那么 $g \in C^m(J)$，且对所有 $0 \le k \le m$，有

$$\sup_{E\in J} |g^{(k)}(E)| \le \sup_{\Re(z)\in J,\, \Im(z)>0} \left| \Im\left(\frac{d^k}{dz^k} F(z) \right) \right| + |J| \sup_{\Re(z)\in J,\, \Im(z)>0} \left| \Im\left(\frac{d^{k+1}}{dz^{k+1}} F(z) \right) \right|. \tag{2.2}$$

这里 $|J|$表示 J的勒贝格测度。

证明. 由引理 A.1]可知 $g \in C^m(J)$。为证明该估计，我们首先利用分部积分
观察到

$$\frac{d^k}{dz^k} F(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{g^{(k)}(x)}{x-z}\, dx, \quad 0 \le k \le m.$$

由于 $g^{(k)}$ 在 $0 \le k \le m$时于 J 上连续，我们得到

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \Im\left(\frac{d^k}{dz^k} F(E+i\epsilon) \right) = g^{(k)}(E), \quad \forall\, E \in J. \tag{2.3}$$

由于 $F(z)$在上半平面 $\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\}$，由微积分基本定理可知，对 $0 \le k \le m$ 和 $[E_0, E] \subseteq J$，

$$\begin{aligned} \Im\left(\frac{d^k}{dz^k} F(E+i\epsilon) \right) - \Im\left(\frac{d^k}{dz^k} F(E_0+i\epsilon) \right) &= \frac{d^k}{dx^k} \Im\big(F(E+i\epsilon)\big) - \frac{d^k}{dx^k} \Im\big(F(E_0+i\epsilon)\big) \\ &= \int_{E_0}^{E} \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} \Im\big(F(x+i\epsilon)\big)\, dx \\ &= \int_{E_0}^{E} \Im\left(\frac{d^{k+1}}{dz^{k+1}} F(x+i\epsilon) \right) dx. \end{aligned} \tag{2.4}$$

最后，在前述恒等式中使用 (2.1) 和 (2.3)，即可得到 (2.2)。 □

现在我们推导 g_j 及其导数的上确界范数的统一上界（与 λ_j 无关）。

命题 2.2。设 H_j^ω 在假设 *1.1* 下由 (1.1) 定义，并设 $\mathcal{N}_j(\cdot)$ 表示与 H_j^ω 相关的积分态密度 *(IDS)* ˜。那么，对所有 $0 \le k \le m-1$ 和所有 $\lambda_j \in [\lambda_0, \lambda_0]$，均有

$$\|g_j^{(k)}\|_\infty \le C_k\big(1 + 4d + \tilde{\lambda}_0 b - \lambda_0 a\big), \quad \mathcal{N}_j^{(k+1)} = g_j^{(k)}. \tag{2.5}$$

证明。 回顾 $\mathcal{N}_j(x) := \nu_j((-\infty, x]) = \mathbb{E}\Big[\langle \delta_0, E_{H_j^\omega}((-\infty, x])\, \delta_0\rangle\Big]$, $x \in \mathbb{R}$, 并注意到 $g_j^{(k)}(x) = \mathcal{N}_j^{(k+1)}(x)$ $\in C_c(\mathbb{R})$ $0 \le k \le m-1$. 利用谱定理，我们将 g_j 的博雷尔变换写为

$$F_j(z) := \int_{\mathbb{R}} \frac{g_j(x)}{x-z}\, dx = \mathbb{E}\big[\langle \delta_0, (H_j^\omega - z)^{-1} \delta_0\rangle\big], \quad \Im(z) > 0. \tag{2.6}$$

现在我们使用指数局域化估计（1.3）。按照 [8,定理 3.4],的证明，我们得到

$$\sup_{\Re(z)\in\mathbb{R},\, \Im(z)>0} \left| \frac{d^k}{dz^k} \mathbb{E}\big[\langle \delta_0, (H_j^\omega - z)^{-1} \delta_0\rangle\big] \right| \le \tilde{C}_k, \quad 0 \le k \le m. \tag{2.7}$$

˜这里的正常数 C_k 与 $\lambda_j \ge \lambda_0$无关。

˜由于 $\lambda_0 \le \lambda_j \le \lambda_0$，谱满足 $\sigma(H_j^\omega) \subset J$ 对几乎处处的 ω成立，其中 $J = [-2d + \lambda_0 a,\ 2d + \lambda_0 b]$。因此， $g_j^{(k)}$ 连续，且其支集包含于 J。于是我们可以应用引理 2.1，得到

$$\begin{aligned}\sup_{x\in\mathbb{R}} |g_j^{(k)}(x)| &= \sup_{x\in J} |g_j^{(k)}(x)| \\ &\le \sup_{\Re(z)\in J, \Im(z)>0} \left| \Im\left(\frac{d^k}{dz^k} F_j(z) \right) \right| + |J| \sup_{\Re(z)\in J, \Im(z)>0} \left| \Im\left(\frac{d^{k+1}}{dz^{k+1}} F_j(z) \right) \right|.\end{aligned}$$

˜ ˜定义 $C_k := \max\{C_k, C_{k+1}\}$。于是由 (2.6) 和 (2.7) 立即得到 (2.5)。 □

现在我们估计 $\widehat{g_j}$ 的衰减，其中 $\widehat{g_j}$ 是 g_j 的傅里叶变换。

推论 2.3。 在与命题 *2.2* 相同的假设下，我们有

$$\left|\widehat{g_j}(t)\right| \le \frac{C_{m-1}\big(1 + 4d + \tilde{\lambda}_0 b - \lambda_0 a\big)}{|t|^{m-1}}, \quad |t| > 0, \quad j = 1, 2. \tag{2.8}$$

证明。 由于对 $0 \le k \le m-1$ 有 $g_j^{(k)} \in C_c(\mathbb{R})$，因此可得

$$\widehat{g_j^{(k)}}(t) = (\mathrm{i}t)^k\, \widehat{g_j}(t), \quad \mathrm{i} = \sqrt{-1}.$$

特别地，对于 $k = m-1$，我们得到

$$\widehat{g_j}(t) = \frac{1}{(\mathrm{i}t)^{m-1}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\mathrm{i}tx}\, g_j^{(m-1)}(x)\, dx, \quad j = 1, 2.$$

由于 $\operatorname{supp} g_j^{(m-1)} \subset [-2d + \lambda_0 a,\ 2d + \tilde{\lambda}_0 b] = J$，衰减估计 (2.8) 可直接由 (2.5) 得出。 □

现在证明主要结果。

定理 *1.5* 的证明。 对于 $j = 1, 2$，令 $\nu_j(\cdot) := \mathbb{E}\Big[\langle \delta_0, E_{H_j^\omega}(\cdot)\, \delta_0 \rangle\Big]$ 表示与 H_j^ω 相关的态密度测度（DOSm）。定义其傅里叶变换为

$$\widehat{\nu}_j(t) := \int_{\mathbb{R}} e^{-\mathrm{i}tx}\, d\nu_j(x), \quad \mathrm{i} = \sqrt{-1}.$$

Usi应用杜哈梅尔公式（附录中的定理 A.1）和富比尼定理，我们得到 in

$$\begin{aligned}|\widehat{\nu}_1(t) - \widehat{\nu}_2(t)| &= \left| \mathbb{E}\Big[\langle \delta_0, (e^{-\mathrm{i}tH_1^\omega} - e^{-\mathrm{i}tH_2^\omega}) \delta_0 \rangle \Big] \right| \\ &= \left| \int_0^t \mathbb{E}\Big[\langle \delta_0, e^{-\mathrm{i}(t-s)H_1^\omega} (V_1^\omega - V_2^\omega) e^{-\mathrm{i}sH_2^\omega} \delta_0 \rangle \Big]\, ds \right|.\end{aligned}$$

展开

$$e^{-\mathrm{i}sH_2^\omega} \delta_0 = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \langle \delta_n, e^{-\mathrm{i}sH_2^\omega} \delta_0 \rangle\, \delta_n,$$

我们得到

$$\langle \delta_0, e^{-\mathrm{i}(t-s)H_1^\omega} (V_1^\omega - V_2^\omega) e^{-\mathrm{i}sH_2^\omega} \delta_0 \rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} (\lambda_1 - \lambda_2) \omega_n \langle \delta_n, e^{-\mathrm{i}sH_2^\omega} \delta_0 \rangle \langle \delta_0, e^{-\mathrm{i}(t-s)H_1^\omega} \delta_n \rangle.$$

取期望、绝对值，并应用柯西–施瓦茨不等式，

$$\left| \mathbb{E}\Big[\langle \delta_0, e^{-\mathrm{i}(t-s)H_1^\omega} (V_1^\omega - V_2^\omega) e^{-\mathrm{i}sH_2^\omega} \delta_0 \rangle \Big] \right|$$

$$
\begin{aligned}
&\le |\lambda_1-\lambda_2| \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \mathbb{E}\Big[|\omega_n|\,|\langle\delta_n, e^{-\mathrm{i}sH_2^\omega}\delta_0\rangle||\langle\delta_0, e^{-\mathrm{i}(t-s)H_1^\omega}\delta_n\rangle|\Big] \\
&\le M\,|\lambda_1-\lambda_2|\,\mathbb{E}\left[\sqrt{\sum_{n\in\mathbb{Z}^d}|\langle\delta_n, e^{-\mathrm{i}sH_2^\omega}\delta_0\rangle|^2}\sqrt{\sum_{m\in\mathbb{Z}^d}|\langle\delta_0, e^{-\mathrm{i}(s-t)H_1^\omega}\delta_m\rangle|^2}\right] \\
&= M\,|\lambda_1-\lambda_2|\,\mathbb{E}\Big[\|e^{-\mathrm{i}sH_2^\omega}\delta_0\|\,\|e^{\mathrm{i}(s-t)H_1^\omega}\delta_0\|\Big] \\
&= M\,|\lambda_1-\lambda_2|.
\end{aligned}
$$

这里我们利用单点分布的支撑集为 $[a,b]$（假设 1.1），因此 $|\omega_n|\le M$几乎处处成立，且有 $M:=\max\{|a|,|b|\}$；随后利用算子 $e^{-\mathrm{i}tH_j^\omega}$ 的幺正性来控制这些求和。因此，

$$
|\widehat{\nu}_1(t)-\widehat{\nu}_2(t)| \le M\,|\lambda_1-\lambda_2|\,|t|, \quad \forall\, t\in\mathbb{R}. \tag{2.9}
$$

我们有 $d\nu_j(x) = g_j(x)\,dx$；见注 1.4。此外，根据注 1.4 和注 1.3，积分态密度
$\mathcal{N}_j\ x \quad = \nu_j \quad -\infty\ x]$ $C^k\ \mathbb{R}$ $0 \le k \le m$ $\mathcal{N}_j^{(k+1)}\ x \quad = g_j^{(k)}\ x \quad \in (\,) : ((,)$ 属于 $(\,)$，且满足 $(\,)\,(\,)\,(\,)$。
$C_c\ \mathbb{R}$ $0 \le k \le m-1$

因此，对每个 $x\in\mathbb{R}$ 和 $0\le k<m-2$，我们得到该估计。

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{N}_1^{(k+1)}(x)-\mathcal{N}_2^{(k+1)}(x)| &= |g_1^{(k)}(x)-g_2^{(k)}(x)| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}} t^k e^{\mathrm{i}tx}\big(\widehat{g}_1(t)-\widehat{g}_2(t)\big)\,dt\right| \\
&\le \int_{\mathbb{R}} |t|^k|\widehat{g}_1(t)-\widehat{g}_2(t)|\,dt =: I_1+I_2.
\end{aligned}
$$

我们在参数 $A>0$ 处拆分积分：

$$
I_1 := \int_{|t|\le A}|t|^k|\widehat{g}_1(t)-\widehat{g}_2(t)|\,dt, \quad I_2 := \int_{|t|>A}|t|^k|\widehat{g}_1(t)-\widehat{g}_2(t)|\,dt.
$$

利用 (2.9)，我们估计 I_1 如下

$$
I_1 = \int_{|t|\le A}|t|^k|\widehat{\nu}_1(t)-\widehat{\nu}_2(t)|dt \le M\int_{|t|\le A}|t|^{k+1}|\lambda_1-\lambda_2|dt = \frac{2MA^{k+2}}{k+2}|\lambda_1-\lambda_2|.
$$

当 $j=1,2$ 时，衰减估计 (2.8) 给出 $|\widehat{g}_j(t)| \le \frac{C_{m-1}}{(1+4d+\lambda_0 b-\lambda_0 a)\,|t|^{m-1}}$，
$t\neq 0$.因此

$$
\begin{aligned}
I_2 &\le \int_{|t|\ge A}|t|^k|\widehat{g}_1(t)|dt + \int_{|t|\ge A}|t|^k|\widehat{g}_2(t)|dt \\
&\le 2\int_{|t|\ge A}\frac{C_{m-1}(1+4d+\tilde{\lambda}_0 b-\lambda_0 a)}{|t|^{m-k-1}}dt \\
&= \frac{4C_{m-1}(1+4d+\tilde{\lambda}_0 b-\lambda_0 a)}{(m-k-2)A^{m-k-2}}.
\end{aligned}
$$

选择 $A=|\lambda_1-\lambda_2|^{-1/m}$ 以平衡 I_1 和 I_2。然后

$$
|\mathcal{N}_1^{(k+1)}(x)-\mathcal{N}_2^{(k+1)}(x)| \le D_k|\lambda_1-\lambda_2|^{\frac{m-k-2}{m}}, \quad x\in\mathbb{R},
$$

其中

$$
D_k = \frac{2M}{k+2}+\frac{4C_{m-1}(1+4d+\tilde{\lambda}_0 b-\lambda_0 a)}{m-k-2},
$$

它与 λ_1 和 λ_2 无关。对 x 取上确界，即完成证明。 □

A 附录

我们回顾杜哈梅尔公式的以下形式。

定理 A.1. 设 B 是希尔伯特空间 H上的自伴算子， V 是有界自伴算子，并令 $A = B + V$。则对所有 $t \in \mathbb{R}$,

$$e^{-\mathrm{i}tA} - e^{-\mathrm{i}tB} = \int_0^t e^{-\mathrm{i}(t-s)A}\,\mathrm{i}(B-A)\,e^{-\mathrm{i}sB}\,ds. \tag{A.1}$$

证明. 证明见 [2]中的引理 5.2。 □

我们还给出了随机变量 $\lambda_1\omega_0$ 和$\lambda_2\omega_0$之间康托罗维奇–鲁宾斯坦距离的一个上界。

定义 A.2. 两个概率测度μ_1和 μ_2 在 $\mathbb{R}$ 上的康托罗维奇–鲁宾斯坦（*Wasserstein–1*）距离定义为

$$d_{KR}(\mu_1,\mu_2) = \sup\left\{\left|\int_{\mathbb{R}} f\,d\mu_1 - \int_{\mathbb{R}} f\,d\mu_2\right| : f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ \textit{is 1-Lipschitz}\right\}.$$

命题 A.3. 设 μ_1 和 μ_2 分别是随机变量 $\lambda_1\omega_0$ 和 $\lambda_2\omega_0$的分布。则

$$d_{KR}(\mu_1,\mu_2) \le |\lambda_1-\lambda_2|\,\mathbb{E}(|\omega_0|). \tag{A.2}$$

证明。 我们将利普希茨半范数定义为

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}} := \sup_{x\neq y}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}.$$

根据康托罗维奇–鲁宾斯坦距离的定义，我们得到

$$\begin{aligned} d_{KR}(\mu_1,\mu_2) &= \sup_{\|f\|_{\mathrm{Lip}}\le 1}\left|\int_{\mathbb{R}} f\,d\mu_1 - \int_{\mathbb{R}} f\,d\mu_2\right| \\ &= \sup_{\|f\|_{\mathrm{Lip}}\le 1}|\mathbb{E}[f(\lambda_1\omega_0)-f(\lambda_2\omega_0)]| \\ &\le \sup_{\|f\|_{\mathrm{Lip}}\le 1}\mathbb{E}|f(\lambda_1\omega_0)-f(\lambda_2\omega_0)| \\ &\le \mathbb{E}|\lambda_1\omega_0-\lambda_2\omega_0| \\ &= |\lambda_1-\lambda_2|\,\mathbb{E}(|\omega_0|). \end{aligned} \tag{A.3}$$

□

参考文献

[1] Acosta, V., Klein, A.: 贝特格上安德森模型态密度的解析性. 《统计物理学杂志》 **69**(1–2), 277–305 (1992).[2] Azamov, N. A., Carey, A. L., Dodds, P. G., Sukochev, F. A.: 算子积分、谱移与谱流. 《加拿大数学杂志》**61**(2), 241–263 (2009).[3] Aizenman, M.: 弱无序下的局域化：一些初等界. 《数学物理评论》**6**(5A), 1163– 1182 (1994).（专刊献给 Elliott H. Lieb）[4] Aizenman, M., Molchanov, S.: 强无序及极端能量下的局域化：一种初等推导. 《数学物理通讯》**157**(2), 245–278 (1993).

[5] Aizenman, M., Schenker, J. H., Friedrich, R. M., Hundertmark, D.: 安德森局域化的有限体积分数矩判据. 《数学物理通讯》**224**(1), 219–253 (2001).[6] Aizenman, M., Warzel, S.: 随机算子：无序对量子谱与动力学的影响. 数学研究生教程，第 168 卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州（2015）。[7] Carmona, R., Lacroix, J.: 随机薛定谔算子谱理论. 概率及其应用。Birkhäuser，波士顿（1990）。[8] Dolai, D. R., Krishna, M., Mallick, A.: 随机薛定谔算子态密度的正则性. 《数学物理通讯》**378**, 299–328 (2020).[9] Dolai, D. R., Krishna, M.: 强无序下贝特格上安德森模型积分态密度的光滑性. 《统计物理学杂志》**190**(5), 第 103 号论文，12 页（2023）。[10] Hislop, P. D., Marx, C. A.: 离散随机薛定谔算子的态密度对概率分布的依赖性. 《国际数学研究通知》 **17**, 5279–5341 (2020).[11] Kirsch, W.: 随机薛定谔算子导论. 全景与综合 **25**，法国数学会，巴黎，1–119 (2008).[12] Kirsch, W., Metzger, B.: 随机薛定谔算子的积分态密度. 《纯数学专题讨论会论文集》 **76**，第 2 部分，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，649–696 (2007).[13] Shamis, M.: 积分态密度关于无序的连续性. 《国际数学研究通知》**22**, 17304–17315 (2021).[14] Stolz, G.: 安德森局域化数学导论. 《当代数学》**552**，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，71–108 (2011).