arXiv:2603.15079v1 [cs.LG] 16 Mar 2026

使用欧拉示性曲面进行时间序列的可解释分类

Salam Rabindrajit Luwang[1], Sushovan Majhi[2, a], Vishal Mandal[1], Atish J. Mitra[3, b], Md. Nurujjaman[1, c], 以及 Buddha Nath Sharma[1, d]

[1]印度国家理工学院物理系，拉旺拉，737139，印度[2]乔治·华盛顿大学数据科学项目，华盛顿哥伦比亚特区，20052，美国[3]蒙大拿理工大学数学科学系，比尤特，59701，美国[a]s.majhi@gwu.edu[b]amitra@mtech.edu[c]md.nurujjaman@nitsikkim.ac.in[d]bnsharma09@yahoo.com

摘要

持久同调（PH）是拓扑数据分析中的传统方法，但计算开销大，在应用机器学习（ML）之前还需要对其特征进行进一步向量化，而且只能捕获空间轴上的信息。针对时间序列数据，我们提出欧拉示性曲面（ECS），作为一种基于欧拉示性数（χ）的替代性拓扑特征；欧拉示性数是一种基本的拓扑不变量。ECS具有计算效率高、兼具时空信息且天然离散化的特征表示，可直接作为机器学习模型的输入。我们证明了一个稳定性定理，保证输入时间序列发生小幅扰动时，ECS仍保持稳定。首先，我们展示了ECS能够有效捕捉Rössler系统中极限环与奇异吸引子之间非平凡的拓扑差异。随后，我们构建了基于ECS的分类框架，并将其应用于UCR/UEA档案库中的五个基准生物医学数据集（四个心电图数据集、一个脑电图数据集）。在*ECG5000*数据集上，我们的单特征ECS分类器以 $O(n + R \cdot T)$ 复杂度实现了98%的准确率，而近期一种基于持久同调的方法报告的准确率为62%。AdaBoost扩展将准确率提升至98.6%，达到最佳深度学习结果，同时保留了完全可解释性。在*TwoLeadECG*（94.1%）和*Epilepsy2*（92.6%）数据集上也取得了优异结果。

引言

拓扑数据分析（TDA）由一系列数学、统计学和算法方法组成，用于表征复杂数据集中固有的拓扑与几何结构 [1]。TDA 中最重要的技术——持久同调（PH）——考察多维同调特征（如连通分支（0D）、环（1D）和空腔（2D））在多个空间尺度上的“持久性” [2]。PH 捕捉这些特征出现（诞生）和消失（死亡）的演变过程，并将其概括为持续图等特征表示。

持久同调已成功应用于分析多个领域的多维时间序列，包括金融 [3], 医学 [4], 和化学 [5]。近年来，研究人员将拓扑工具融入机器学习（ML）模型，用于时间序列分类 [6] ，并日益借此提升模型可解释性。深度学习模型本身的不透明性推动了这一向可解释性转变的趋势；在生物医学领域，“黑箱”决策会削弱临床信任 [7]。为了获得医生认可，机器学习

模型理想情况下应当简单、可解释且透明 [8]。例如， [8] 的作者将持久同调用于嵌入时间序列的递归图，从而构建出更透明的分类流程。

尽管持久同调（PH）具有实用价值，但也存在显著局限。其计算复杂度较高，通常为$O(n^{\omega})$（其中 $2 \leq \omega < 2.373$ 和 n 是单纯形的数量） [9]。这一瓶颈源于对稀疏边界矩阵进行约简——该过程类似于高斯消元——以追踪特征的生命周期 [10]。此外，所得持久图并未自然地构成特征向量，因此难以直接集成到标准机器学习架构中。因此，人们日益需要计算高效且“可用于机器学习”的拓扑摘要，以替代持久同调。

欧拉示性数（χ）是一种基本的拓扑不变量，可将数据集的形状概括为单个标量整数。在此基础上，欧拉示性数曲面（ECS） [11] 是一种多尺度时空表征，能够捕捉 χ 在空间和时间尺度上的变化。与持久同调所需的复杂矩阵约简不同，ECS 的计算只需统计不同维数的单纯形。这种简便性使其计算复杂度为 $O(n + R \cdot T)$，其中n 是单纯形的数量，而 R 和 T 分别表示尺度参数和时间参数的离散网格大小 [9]。

因此，ECS 提供了一种计算效率高的拓扑描述符，能够将时间序列数据的时间维度自然地整合其中。作为一种天然离散化的特征，ECS 可直接用作机器学习模型的输入，避免了其他拓扑工具相关的向量化问题。ECS 的实用价值已在流体动力学中得到验证：它被用于表征干燥微米级液滴中的实验流动模式，并区分各种复杂流动状态 [12], ；在生物医学成像领域，ECS 则被用于从视网膜图像中识别糖尿病视网膜病变，重点是开发可解释的诊断工具 [13]。然而，这些应用关注的是空间数据，而非时间分类任务。据我们所知，针对时间序列数据设计的可解释机器学习框架中，ECS 的应用仍未得到探索。

为弥补这一空白，我们开发了一种基于ECS的二分类框架，用于生物医学时间序列数据，并将其应用于 UCR/UEA时间序列分类档案 [14]中的五个基准数据集：四个心电图数据集（*ECG5000*、*TwoLeadECG*、*ECG200*、*ECGFiveDays*）和一个脑电图数据集（*Epilepsy2*）。该框架为每条时间序列构建一个 ECS，根据特征在训练集上基于曲线下面积的判别能力对其排序，并采用单特征阈值分类器（以实现最高可解释性）或基于完整 ECS特征空间的 AdaBoost集成（以提高准确率）对测试实例进行分类。

我们的贡献

本文的主要贡献如下：

1. 我们引入了 K-窗口方法，用于从 Takens 嵌入时间序列构造欧拉示性曲面（ECS），从而提供一种计算高效（$O(n + R \cdot T)$）且天然离散化的时空拓扑特征——这是持久同调（$O(n^{\omega})$）的一种直接替代方法。与基于持久同调的流程不同，我们的方法直接从嵌入点云中提取拓扑特征，无需递归图、持久图像向量化或降维。

2. 我们建立了稳定性结果（定理 1），证实 ECS 对输入时间序列中的小扰动具有鲁棒性。此外，我们展示了 ECS 区分 Rössler 系统中周期性动力学与混沌动力学的能力，即使存在噪声也是如此。

3. 我们提出了一种两级分类框架：采用单特征阈值分类器以实现最大可解释性，

并采用 AdaBoost集成以提高准确率。在这两种情况下，每个分类决策都可以追溯到 ECS 中特定的尺度–时间坐标，从而提供透明且具有拓扑学依据的解释。

4. 我们在五个基准生物医学数据集（四个心电图、一个脑电图）上应用了分类框架。在*ECG5000*数据集上，我们的方法准确率达到98.6%（曲线下面积为0.999），显著优于近期一种基于持久同调的方法在同一数据集上报告的62%准确率（曲线下面积为0.90）[8]。在*TwoLeadECG*（94.1%）和*Epilepsy2*（92.6%）数据集上也取得了出色的性能。

大纲

本文其余部分安排如下。方法部分介绍数学预备知识，包括用于构建ECS的新型 K-窗口方法。Rössler系统的ECS部分展示了ECS在Rössler系统上的应用。分类框架部分介绍分类框架。结果与讨论部分报告结果并展开讨论，结论部分则总结全文。

方法

我们利用欧拉示性曲面（ECS）从数据集中提取时空拓扑特征。ECS可作为时间序列分类的高维特征向量。本节将定义相关数学预备知识，并辅以可视化表示。

单纯复形

为了提取拓扑信息，我们将数据集建模为一个度量空间，例如采用欧几里得度量，并将数据嵌入到 $\mathbb{R}^d$ 中。随后，我们在数据上构建单纯复形，以揭示其底层拓扑和几何结构 [1]。单纯复形是一种由多维构件（即单纯形）组成的拓扑空间，例如顶点（0D）、边（1D）、三角形（2D）、四面体（3D）及更高维的类似结构，用以刻画数据点的高阶连通性。为便于可视化和阐述，我们在下文给出几何定义 [15]。形式上， k 维单形（或简称 k-单形） σ 在 $\mathbb{R}^d$ 中是任意 $(k+1)$ 个处于一般位置的点 $\{a_0, a_1, \ldots, a_k\} \subset \mathbb{R}^d$ 的凸包。由 σ 的一个子集张成的单形称为 σ 的面。 $\mathcal{K}$ 中的几何单纯复形$\mathbb{R}^d$，也称为三角剖分，是由 $\mathbb{R}^d$ 中有限多个单形组成的集合，并满足以下两个条件：

1. $\mathcal{K}$ 包含 $\mathcal{K}$中每个单形的所有面。
2. 对于任意两个单形 σ和 $\tau \in \mathcal{K}$，它们的交集 $\sigma \cap \tau$ 要么为空，要么是 σ 和 τ的共同面。

$\mathcal{K}$ 中任意单形的最大维数称为 $\mathcal{K}$的维数 k，我们也将其称为单纯 k-复形。点云上常见的单纯复形包括 Vietoris–Rips（或简称 Rips复形）和 Čech复形。在我们的研究中，我们使用一种称为阿尔法复形的切赫复形变体 [10]。

神经、沃罗诺伊单元和阿尔法复形

理解神经和沃罗诺伊单元是理解阿尔法复形的前提；因此，我们将阐释这些主题，随后介绍阿尔法复形。给定拓扑空间的一个子集集合 $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$，我们将 $\mathcal{U}$ 的神经定义为单纯复形 $N(\mathcal{U})$

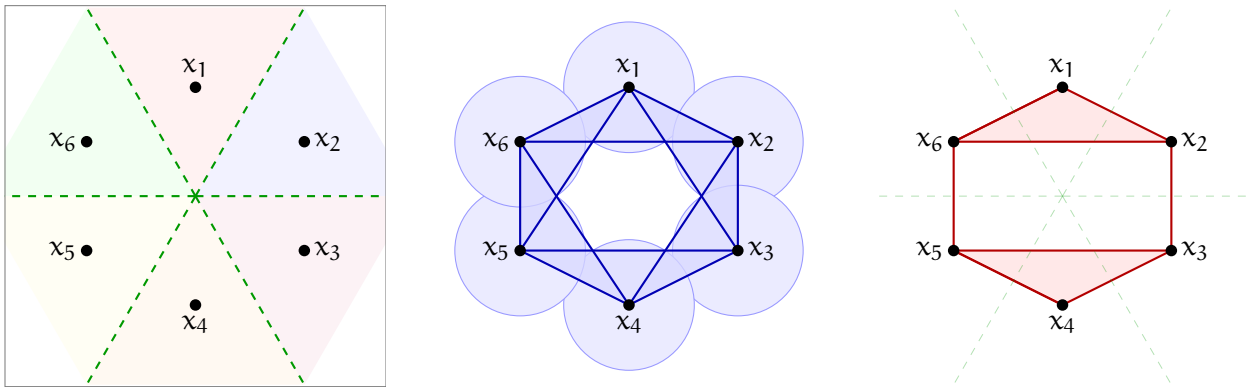
其顶点集为指标集 Λ，并且当且仅当子集 $\{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k\} \subseteq \Lambda$ 张成 $N(\mathcal{U})$ 中的一个 k-单形时

$$U_{\alpha_0} \cap U_{\alpha_1} \cap \cdots \cap U_{\alpha_k} \neq \emptyset.$$

考虑一个数据集 $P = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{R}^d$，令 $B(x_i, r) = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x_i - x\| \leq r\}$ 为半径为 r 的闭球，则尺度 r 下的切赫复形为如下单纯复形：

$$C(P, r) = \left\{ \sigma \subset P : \bigcap_{x_i \in \sigma} B(x_i, r) \neq \emptyset \right\},$$

即，点集 P 周围闭 r-球的神经。$x_i \in P$ 的沃罗诺伊单元定义为点集 $x \in \mathbb{R}^d$，其中这些点到 x_i 的距离不大于到 P 中任何其他点的距离。从数学上讲，x_i 的沃罗诺伊单元由 $V(x_i) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid d(x, x_i) \leq d(x, x_j),\ \forall x_j \in P\}$ 给出，其中 $d(x_i, x_j)$ 表示距离度量。最后，考虑处于一般位置的有限点集 $P = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{R}^d$，并考虑 $r > 0$。尺度 r 下的阿尔法复形定义为集合 $\{V(x_i) \cap B(x_i, r)\}_{x_i \in P}$ 的神经，其中 $V(x_i)$ 是与点 $x_i \in P$ [10]对应的沃罗诺伊单元。



(a) 沃罗诺伊图 (b) 神经（切赫复形） (c) 阿尔法复形

图 1：六边形点集的 (a) 沃罗诺伊图、(b) 神经（切赫复形）和 (c) 阿尔法复形示意图 $S = \{(0, 2), (2, 1), (2, -1), (0, -2), (-2, -1), (-2, 1)\}$。在 (a) 中，绿色虚线勾勒出沃罗诺伊单元。在 (b) 中，固定半径下的切赫复形包含对应球体彼此相交的边和三角形。在 (c) 中，阿尔法复形将切赫复形限制为与沃罗诺伊分解相一致的单纯形，从而得到一个更稀疏、但仍能捕捉关键拓扑结构的复形。

我们考虑构成正六边形的六个点，表示为

$$S = \{(0, 2), (2, 1), (2, -1), (0, -2), (-2, -1), (-2, 1)\}.$$

我们在图 1(a) 中展示了该数据集的沃罗诺伊单元。绿色虚线将空间划分为六个区域，每个区域对应一个点。一个点的区域就是它的沃罗诺伊单元，其中包含空间内所有距离该点比距离其他五个点更近的点。

欧拉示性曲面

欧拉示性数 (χ) 是一种拓扑不变量，贯穿于纯粹拓扑学和应用拓扑学之中 [9]。对于一个（有限）单纯复形 $\mathcal{K}$，其欧拉示性数 $\chi(\mathcal{K})$ 定义为各维数单纯形数量的交错和：

$$\chi(\mathcal{K}) \coloneqq \sum_{i=0}^{\dim(\mathcal{K})} (-1)^i \, C_i(\mathcal{K}), \tag{1}$$

其中， $C_i(\mathcal{K})$ 表示 $\mathcal{K}$ 中 i 维单纯形的数量。特别地，对于在尺度 r 下构造的阿尔法复形$\mathcal{K}_r$，欧拉示性数 $\chi(\mathcal{K}_r)$ 的计算方式相同，即对该尺度下存在的单纯形 [16] 求交错和。

欧拉示性数在同胚下保持不变，因此底层空间 [11] 的平移、旋转、仿射变换、投影和连续变形都不会改变它。

欧拉示性数曲面 *(ECS)* 是一个二维函数，在由尺度(r)轴和时间(k)轴定义的区域上取值为欧拉示性数χ。我们使用符号 k，而非传统上表示时间的 t，因为这个类时间轴将从传统的时间轴导出；参见“利用K窗口方法构建时间 ECS”一节。在时间窗口 k 对应的点云上，尺度 r 处的阿尔法复形 $\mathcal{K}_{r,k}$ 的欧拉示性数记为 $\chi(\mathcal{K}_{r,k})$。随着两个参数 r 和 k 变化，这便定义了矩形区域 $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2$ 上的二维曲面 $\chi(\mathcal{K}_{r,k})\colon \mathcal{R} \to \mathbb{R}$。实际应用中， $\mathcal{R}$ 是一个离散网格。

定义在同一区域 $\mathcal{R} = [0, R] \times [0, K]$ 上的两个 ECS $\chi(\mathcal{K}(r,k))$ 和 $\chi'(\mathcal{K}'(r,k))$ 之间的相似度，可以使用 p-欧拉度量进行量化，该度量以 $L^p(\mathcal{R})$ 范数定义如下 [9]:

$$d_p(\chi, \chi') = \|\chi - \chi'\|_p = \left(\int_0^R \int_0^K \left| \chi(r,k) - \chi'(r,k) \right|^p \, dk \, dr \right)^{1/p}, \tag{2}$$

其中 $p = 1$或 $p = 2$。在实践中，对于离散域 $\mathcal{R}$，我们用适当的求和代替上述二重积分。

用于构造时间 ECS 的 K-窗口方法

我们引入 **K-窗口方法**，将 Takens嵌入点云划分为时间块，从而能够构造具有明确时间轴的 ECS。该方法提供了一种系统化的方式，将时间序列的时间维数离散化为互不重叠的窗口，每个窗口都会在不同滤过尺度上生成一条独立的欧拉示性数轮廓。

给定标量时间序列 $\{x_t\}_{t=1}^N$，嵌入向量构造如下:

$$\mathbf{x}_t = \left(x_t, x_{t+\tau}, x_{t+2\tau}, \ldots, x_{t+(m-1)\tau} \right), \quad t = 1, 2, \ldots, N - (m-1)\tau,$$

其中 τ 为时间延迟， m 为嵌入维数，通常使用假近邻法 [17]来选择。嵌入后，我们得到一个点云 $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$。

K-窗口方法将 $\mathcal{D}$ 划分为 K个大小相等且互不重叠的子集 $\{\mathcal{D}_k\}_{k=1}^K$，如下所示。固定 $K \geq 1$，使得 K 整除 $N - (m-1)\tau$，并设窗口大小为 $w := (N - (m-1)\tau)/K$。第 k个子集为

$$\mathcal{D}_k = \{\mathbf{x}_{(k-1)w+1}, \mathbf{x}_{(k-1)w+2}, \ldots, \mathbf{x}_{kw}\}, \quad k = 1, \ldots, K.$$

如果 $N-(m-1)\tau$不能被 K整除，则令 $w = \lfloor (N-(m-1)\tau)/K \rfloor$。我们将余数分配给前 $K-1$ 个窗口，使其大小为 w，而最后一个窗口 $\mathcal{D}_K$ 则吸收所有剩余点，以确保信息不丢失。具体而言，$\mathcal{D}_K$ 包含 $(N - (m-1)\tau) - (K-1)w$ 个点。对于每个子集 $\mathcal{D}_k$，我们在一系列分辨率参数 r 下构造阿尔法复形 $\{\mathcal{K}_{r,k}\}$，并在每个尺度计算相应的欧拉示性数 $\chi(\mathcal{K}_{r,k})$。将这些值按所有 k 和 r 汇总后，即可得到 ECS。完整流程如图2所示。

稳定性

我们证明了一个稳定性定理，保证我们的处理流程在小扰动下仍保持稳定。在介绍我们的结果（定理 1）之前，我们需要补充代数拓扑中的定义和符号。

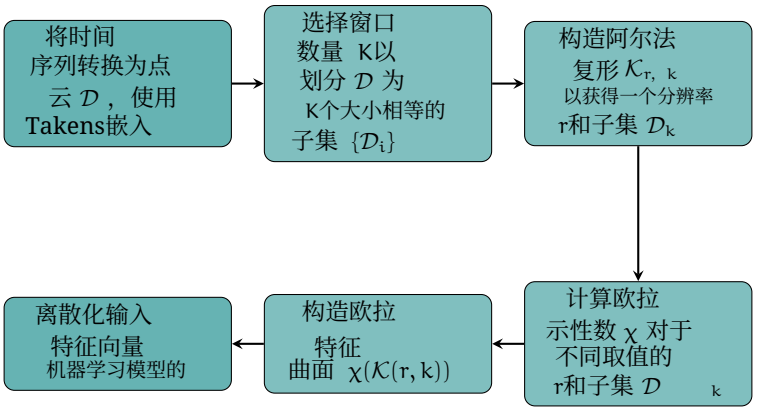


图 2：从时间序列构建欧拉示性数曲面（ECS）的示意流程，该曲面可提供一个“适用于机器学习”的拓扑学特征向量。

利用单纯复形 $\mathcal{K}$ 的同调，我们可以重新表述其欧拉示性数的一个等价定义，如下所示 [9]:

$$\chi(\mathcal{K}) = \sum_{i=0}^{\dim(\mathcal{K})} (-1)^i \beta_i(\mathcal{K}), \tag{3}$$

其中 β_i 是复形 $\mathcal{K}$的第 i个贝蒂数。

滤过 $\mathcal{K}_0 \subseteq \mathcal{K}_1 \subseteq \mathcal{K}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{K}_s$的单纯复形在同调维数 n 上的持续图 $\mathrm{PD}_n(\mathcal{K})$ 定义为点的多重集合 $(a_i, a_j) \in \mathbb{R}^2$，其中 $i < j$，每个点均被赋予一个非零重数$\mu_{i,\ j}^n$，正对角线上的点则以无限重数计入。

对于 $p \geq 1$，对应同调维数 n 的两个持久图 $\mathrm{PD}_n(\mathcal{K})$ 和 $\mathrm{PD}_n(\mathcal{L})$之间的$p$ 阶 *Wasserstein* 距离定义为:

$$W_p(\mathrm{PD}_n(\mathcal{K}), \mathrm{PD}_n(\mathcal{L})) := \inf_{\varphi:\mathrm{PD}_n(\mathcal{K})\to\mathrm{PD}_n(\mathcal{L})} \left(\sum_{x\in\mathrm{PD}_n(\mathcal{K})} d\big(x, \varphi(x)\big)^p \right)^{1/p},$$

其中 φ表示 $\mathrm{PD}_n(\mathcal{K})$ 与 $\mathrm{PD}_n(\mathcal{L})$之间的双射映射。这用于衡量两个持久图之间的不相似度。现在我们证明稳定性定理，首先介绍一个预备引理。

引理1 （中的 Alpha 滤过稳定性 $\mathbb{R}^3$）。 设 $\mathcal{D} = \{x_1, \ldots, x_M\}$ 是 $\mathbb{R}^3$中的一个点云。那么，对于任意小的 $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$最小值 $\min_{1\leq i<j\leq M} \|x_i - x_j\|_2$，存在 $\delta > 0$，使得对于任意满足最大值 $\max_{1\leq i\leq M} \|x_i - x_i'\|_2 \leq \delta$的 $\mathcal{D}' = \{x_1', \ldots, x_M'\}$，都有

$$\|\chi(\mathcal{K}(r)) - \chi(\mathcal{K}'(r))\|_1 \leq \frac{1}{4} M^4 \epsilon,$$

其中，$\mathcal{K}(r)$和 $\mathcal{K}'(r)$分别是 $\mathcal{D}$和 $\mathcal{D}'$上的对应 *Alpha* 过滤 y.

证明。 注意，对于 $\mathbb{R}^3$ 中的任意非退化单纯形（三角形或四面体） T 以及任意 $\epsilon > 0$，都存在一个 $\delta_T > 0$，使得将顶点扰动 δ_T后，T的外接圆半径变化至多为ϵ（这源于非退化单纯形的外接圆半径函数的连续性）。

令 $\epsilon > 0$ 小于 $\frac{1}{2}\min_{1\leq i\neq j\leq M} \|x_i - x_j\|_2$。选择 $\delta > 0$，使得对于 $x_i' \in \mathcal{D}'$，我们有 $\|x_i' - x_i\| < \min \delta_T$，其中最小值取遍由 $\mathcal{D}$ 中的点构成的所有非退化单形。取

[18, Theorem 2] 中单形上的过滤函数取为定义该单形的点的最小包围球半径，其中 f 对应于 $\mathcal{D}$ 中的点，g 对应于 $\mathcal{D}'$ 中的点。

于是，根据 Skraba 和 Turner 的胞腔 Wasserstein 定理，对于 $n = 0,1,2$，我们有以下不等式（对于下列不等式，请注意，$\mathbb{R}^3$ 中有限点集的最小包围球由球面上的两个点（ dia metrically opposite）、三个点或四个点确定）：

$$W_1(\mathrm{PD}_0(f), \mathrm{PD}_0(g)) \le \binom{M}{2}\epsilon,$$

$$W_1(\mathrm{PD}_1(f), \mathrm{PD}_1(g)) \le \binom{M}{2}\epsilon + \binom{M}{3}\epsilon = \binom{M+1}{3}\epsilon,$$

$$W_1(\mathrm{PD}_2(f), \mathrm{PD}_2(g)) \le \binom{M}{3}\epsilon + \binom{M}{4}\epsilon = \binom{M+1}{4}\epsilon.$$

最后，根据 [9]的定理 1，我们有：

$$\begin{aligned}\|\chi(\mathcal{K}(r)) - \chi(\mathcal{K}'(r))\|_1 &\le 2\sum_{n=0}^{2} W_1(\mathrm{PD}_n(\mathcal{K}), \mathrm{PD}_n(\mathcal{K}')) \\ &= 2\left[2\binom{M}{2} + 2\binom{M}{3} + \binom{M}{4}\right]\epsilon \le \frac{1}{4}M^4\epsilon.\end{aligned}$$

我们只对 $n = 0, 1, 2$ 求和，因为 Čech 过滤与 Alpha 过滤具有相同的持久同调。

□

注。 由于本文对大多数数据集使用 Takens 嵌入维数 $m = 3$，因此我们在此仅针对 $\mathbb{R}^3$陈述稳定性结果。通过对 Wasserstein 界中的同调维数 $n = 0, \ldots, d-1$ 求和，该论证可推广至 $\mathbb{R}^d$，从而得到一个依赖于 $\binom{M+1}{d+1}$ 而非 $\binom{M+1}{4}$的界。

定理 1（Takens 嵌入 ECS 的稳定性）。 设 $\{x_t\}_{t=1}^N$ 是从光滑函数 $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$采样得到的离散非恒定时间序列，且 $0 < \epsilon \le \frac{\sqrt{3}}{2}$最小值$\{|x_s - x_t| : 1 \le s, t \le N, \bar{x}_s \ne x_t\}$。那么存在 $\delta > 0$，使得对于任意从光滑函数 $x'\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$采样得到的离散标量时间序列 $\{x'_t\}_{t=1}^N$，满足 上确界$_{\mathbb{R}} |x(t) - x'(t)| < \delta$，我们有

$$\|\chi(\mathcal{K}(r,k)) - \chi(\mathcal{K}'(r,k))\|_1 \le \frac{N^4\epsilon}{4K^3},$$

其中，τ 是时间延迟，$m = 3$ 是根据 *Takens* 定理为两个序列确定的嵌入维数；$\{\mathcal{D}_k\}_{k=1}^K$ 和 $\{\mathcal{D}'_k\}_{k=1}^K$ 分别是对应 *Takens*嵌入点云 $\mathcal{D}$ 和$\mathcal{D}'$的 K窗口划分；$\{\mathcal{K}_{r,k}\}$和 $\{\mathcal{K}'_{r,k}\}$是 $k = 1$、……、K和 $r = 0$、……、R所对应的阿尔法复形。

证明。 不失一般性，假设 K 整除 N，并令 $w = N/K$。对于任意满足$x_s \ne x_t$的 $s \ne t$，Takens 嵌入点之间的欧几里得距离平方满足

$$\|\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_t\|_2^2 \ge m\,[\min\{|x_s - x_t| : 1 \le s, t \le N, x_s \ne x_t\}]^2 \ge 3 \cdot \frac{4}{3}\epsilon^2 = 4\epsilon^2.$$

对于任意 $1 \le k \le K$，点云 $\mathcal{D}_k$ 包含 w 个点，并且

$$\frac{1}{2}\min_{(k-1)w+1 \le s < t \le kw} \|\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_t\|_2 \ge \epsilon.$$

引理1 因此得出一个足够小的 $\delta > 0$，使得

$$\|\chi(\mathcal{K}_k(r)) - \chi(\mathcal{K}'_k(r))\|_1 \le \frac{1}{4} w^4 \epsilon.$$

对所有 K 窗口求和，我们得到

$$\|\chi(\mathcal{K}(r,k)) - \chi(\mathcal{K}'(r,k))\|_1 = \sum_{k=1}^{K} \|\chi(\mathcal{K}_k(r)) - \chi(\mathcal{K}'_k(r))\|_1 \le \frac{1}{4} w^4 \epsilon \cdot K = \frac{1}{4} (N/K)^4 \epsilon\, K = \frac{N^4 \epsilon}{4K^3}.$$

□

Rössler 系统的 ECS

本节以著名的 Rössler 系统为例，阐释欧拉示性数曲面（ECS）的概念。该系统由三个耦合非线性微分方程构成，在连续时间演化过程中可呈现周期性和混沌动力学 [19]:

$$\begin{cases} \dot{x} &= -y - z, \\ \dot{y} &= x + ay, \\ \dot{z} &= b + z(x - c), \end{cases} \tag{4}$$

其中， x、 y和 z为状态变量， a、 b和 c为控制系统行为的实数参数。当 $a = 0.20$ 和 $b = 0.20$时，随着控制参数 c 增大，系统会从周期性动力学转变为混沌动力学。

我们考虑由 300 个时间步组成的 x分量时间序列，其时间范围为 $t = 0$ 至 $t = 150$，时间步长为 $\Delta t = 0.5$；该序列根据方程 4 在不同的 c取值下生成。图 3(a) 展示了周期一极限环（$c = 2.3$）的时间序列，图 3(b) 展示了奇异吸引子（$c = 7.3$）的时间序列。我们应用 Takens嵌入定理 [20] 来重构 $\mathbb{R}^3$中的状态空间轨迹；所得相图见图 3(c) 和图 3(d)。

按照图2中的方案，使用 $\tau = 1$ 和 $m = 3$，我们为两种动力学状态构建了 ECS。所得曲面分别如图3(e)和图3(f)所示。ECS 捕捉了欧拉示性数 χ 随滤过尺度 r 和时间窗口 k的变化，从而对底层动力学提供了时空拓扑描述。两种参数值对应的曲面结构各不相同，反映出周期性状态与混沌状态之间的定性差异。

对于 $c = 2.3$ （图3(e)），ECS呈现出相对平滑且规则的曲面，表明 χ 在尺度和时间两个维度上的变化有限。这一行为与动力学的周期性特征一致。相比之下，对于 $c = 7.3$ （图3(f)），ECS表现出明显的不规则性和更强的波动。此外，在相近的尺度–时间坐标下， χ在混沌状态下主要取较高值，反映出奇异吸引子的拓扑复杂性增加。

为量化两种状态之间的差异，我们计算整个尺度–时间网格上的绝对差值 $|\mathrm{ECS}_{\mathrm{chaotic}} - \mathrm{ECS}_{\mathrm{periodic}}|$ （图 4(a)）。最大差异集中在所有时间窗口的低滤过尺度处，明确指出拓扑特征差异最大的区域。为进一步评估 ECS 在扰动下的稳定性（定理 1），我们向两种状态的时间序列中加入高斯噪声，并计算所得 ECS 之间的成对 L_1 距离。噪声强度从未扰动时间序列振幅的 0% 变化到 10 %，每种状态生成 100 个含噪实现。图 4(b) 展示了所得的 L_1 距离热图。状态内距离

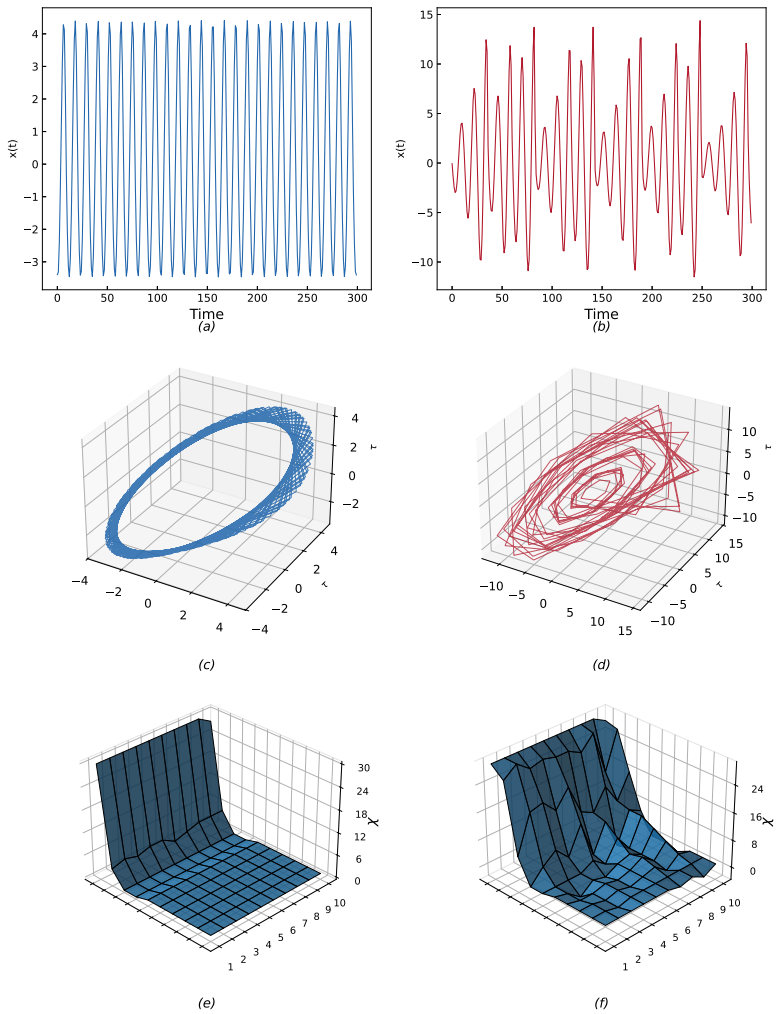


图 3：控制参数 c 取两个不同值时，Rössler 系统的时间序列、Takens嵌入相图和欧拉示性曲面（ECS）。第 *1* 列（周期性，$c = 2.3$）：(a) x 分量时间序列，(c) $\mathbb{R}^3$ 中的相图，(e) ECS。第 *2* 列（混沌，$c = 7.3$）：(b) 时间序列，(d) 相图，(f) ECS。

明显小于状态间距离，即使对于经过扰动的时间序列也是如此，这证实 ECS 对中等程度的噪声具有稳健性。

总体而言，随着控制参数 c 变化，ECS 能有效捕捉 Rössler 系统动力学行为的差异，而 L_1 指标即使在存在噪声的情况下，也能定量区分这两种状态。在后续章节中，我们将应用 ECS 对实测生物医学时间序列数据进行分类。

分类框架

我们提出了两种基于欧拉示性曲面（ECS）的分类框架。第一种使用单个 ECS 特征和阈值分类器，以实现最高程度的可解释性。第二种通过自适应提升（AdaBoost）提升多个弱学习器，在保留可解释性的同时提高准确率。

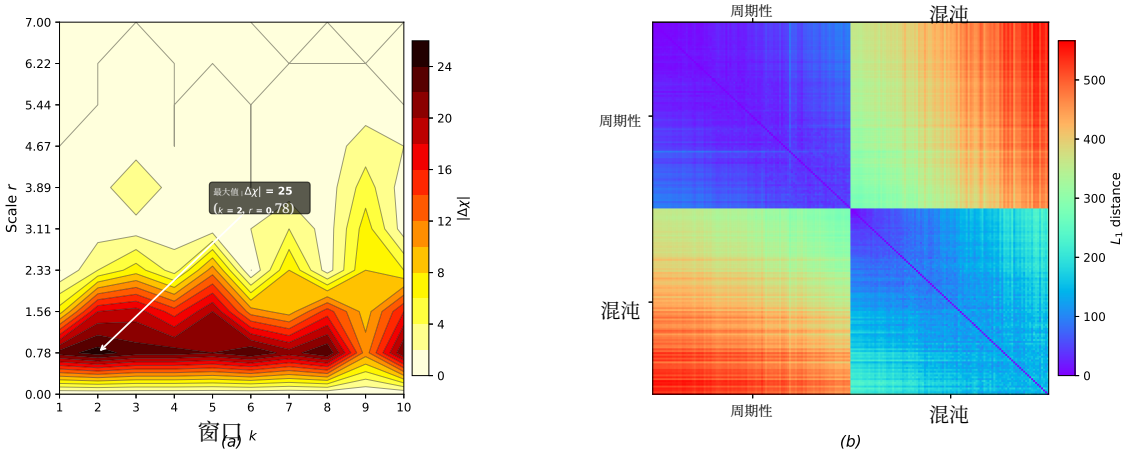


图 4：（a）尺度–时间网格上的绝对差异 $|\mathrm{ECS}_{\mathrm{chaotic}} - \mathrm{ECS}_{\mathrm{periodic}}|$，其中标注的箭头指示最大差异的坐标。（b）由周期性（$c = 2.3$）和混沌（$c = 7.3$）状态的扰动时间序列构建的 ECS 之间成对 L_1 距离的热图。状态内距离（非对角块）明显小于状态间距离（对角块）。

单特征阈值分类器（决策树桩）

单特征分类器的思路很简单：从 $K \times R$ ECS 特征中选出最能区分两个类别的特征，并根据该特征的单一阈值进行分类。特征选择通过对所有 $K \times R$ 特征在训练集上的 ROC曲线下面积（AUC）进行排序来完成，然后使用 Youden 指数确定排名最高的特征的最优阈值。由此得到的分类器完全可解释——每个决策都可追溯到 ECS 在特定尺度–时间坐标处的单个欧拉示性数值 $\chi(k_i, r_j)$。完整流程示意图见图 5。

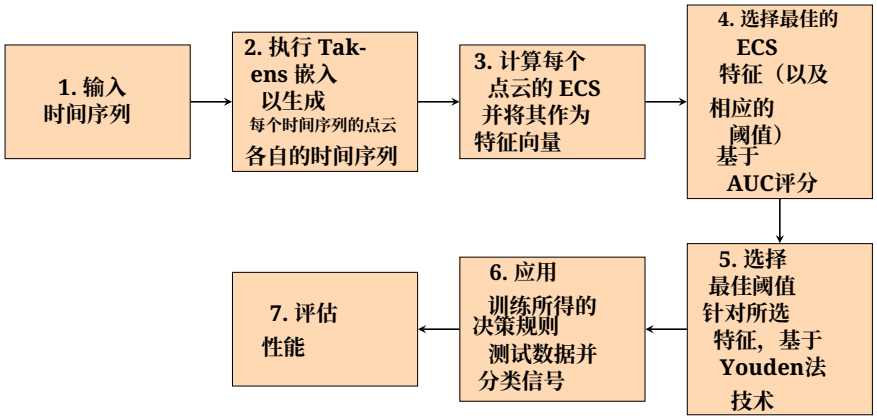


图5：该流程图展示了基于ECS的时间序列分类框架。

下面将详细说明流程图中的每个步骤。

1. 使用带有关联类别标签的时间序列来启动该流程。

2. 根据 Takens 延迟嵌入定理，将每个标量时间序列重构为一个 m维点云。为保持一致性，我们启发式地采用滞后 $\tau = 1$。

3. 按照图2所示方案，为每个点云构建一个 ECS。若 ECS 跨越 R 个空间过滤尺度和 K 个时间窗口，则每个时间序列可得到 $K \times R$ 个特征。具体而言，每个时间窗口 k_i 与空间尺度r_j 的组合对应一个欧拉示性数 χ ，构成一个特征，并依次编号为 $\chi(k_1, r_1)$、$\chi(k_1, r_2)$、……、$\chi(k_K, r_R)$。

4. 对于每个特征 $\chi(k_i, r_j)$，根据训练集构建受试者工作特征（ROC）曲线。ROC 曲线以假正率（FPR）为横轴、真正率（TPR）为纵轴，定义如下：

$$\mathrm{FPR} = \frac{\text{False Positives}}{\text{False Positives} + \text{True Negatives}}, \qquad \mathrm{TPR} = \frac{\text{True Positives}}{\text{True Positives} + \text{False Negatives}}.$$

分类基于单特征阈值分类器，也称为“决策树桩” [21]，定义如下：

$$h(\chi, p, \theta) = \begin{cases} 1 & \text{if } p\chi < p\theta, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

其中， h 是预测类别标签， $p \in \{-1, +1\}$ 是极性， θ 是阈值。根据 ROC 曲线下面积（AUC）对特征进行排序。如果 AUC 低于 0.5，则将极性从 $p = 1$ 反转为 $p = -1$ [22]。基于 AUC 的特征排序具有不受类别分布变化影响的特点，这一特性对生物医学时间序列 [22, 23, 24, 25] 颇具吸引力。选择 AUC 最高的特征对测试集进行分类。

5. 对于特征　　具有最高曲线下面积的特征，其最优阈值通过 Youden 指数确定 [26]　　：

$$J = \mathrm{TPR} - \mathrm{FPR} = \text{Sensitivity} + \text{Specificity} - 1.$$

选择使 J 最大化的阈值作为工作点 [27]。

6. 使用所选特征及其 Youden 最优阈值对测试时间序列进行分类。同时计算测试集上的曲线下面积，以评估分类性能。

AdaBoost集成分类器

虽然单特征阈值分类器提供了易于解释且计算开销较低的基线，但其分类能力受限于单个 ECS 特征的判别能力。为此，我们使用自适应提升（AdaBoost）算法 [28]，在完整的 $(K \times R)$ 维 ECS特征空间上构建由决策树桩组成的集成。集成中的每个弱学习器都是基于单个 ECS 特征的决策树桩 $\chi(k_i, r_j)$，因此集成的决策始终完全可解释：每个特征汇总后的 α 贡献可通过热图在 (k, r) 网格上可视化，从而直接揭示哪些尺度—时间区域驱动了分类。完整流程如图6所示。

标准AdaBoost流程。使用第 Single-Feature Threshold Classifier (Decision Stump) 节中介绍的 K窗口方案，为 L 个训练样本构建ECS特征矩阵$\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{L \times KR}$ 。每个样本 l的初始权重相等，为 $D_1(l) = 1/L$。在每个提升轮次 $t \in \{1, \ldots, T\}$中，选择使加权分类误差最小的决策树桩 h_t

$$\varepsilon_t = \sum_{l=1}^{L} D_t(l)\ \mathbf{1}\left[h_t\left(\chi^{(l)}_{(k_i, r_j)}\right) \neq c^{(l)}\right] \tag{5}$$

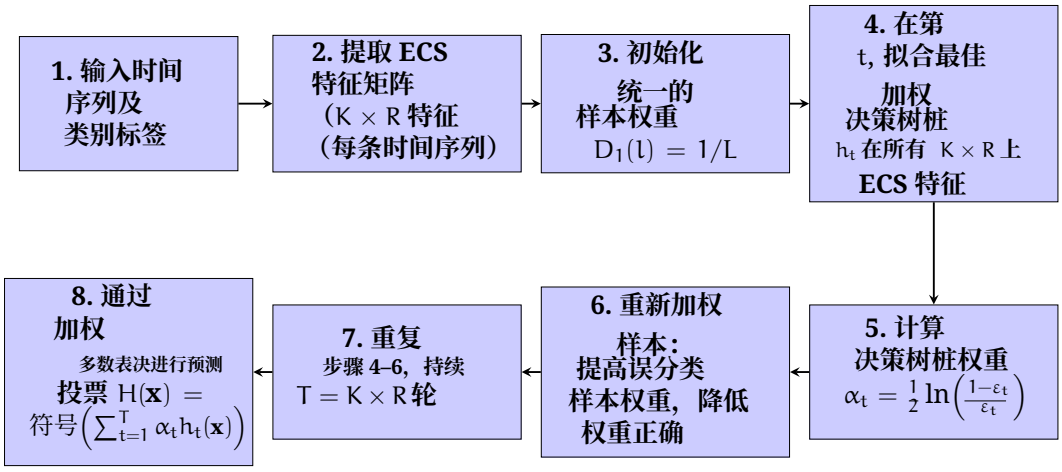


图 6：基于ECS的AdaBoost分类框架流程图。弱学习器的数量 T设为 $K \times R$，与ECS特征向量的维度相同。

从完整的 $K \times R$ ECS 特征中选出，其中 $c^{(l)} \in \{0, 1\}$ 是真实类别标签，$\mathbf{1}[\cdot]$ 是指示函数。如果 $\varepsilon_t > 0.5$，则反转决策树桩极性，使 $\varepsilon_t \leq 0.5$ 始终成立。决策树桩权重设为

$$\alpha_t = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\varepsilon_t}{\varepsilon_t}\right), \tag{6}$$

并按以下方式更新样本权重：

$$D_{t+1}(l) = \frac{D_t(l)\ \exp\left(-\alpha_t\, c^{(l)}\, h_t\left(\mathbf{x}^{(l)}\right)\right)}{\sum_{l=1}^{L} D_t(l)\ \exp\left(-\alpha_t\, c^{(l)}\, h_t\left(\mathbf{x}^{(l)}\right)\right)}, \tag{7}$$

其中，为计算指数损失，标签重新编码为 $c^{(l)} \in \{-1, +1\}$。误分类样本在下一轮中会获得更高的权重，促使后续决策树桩专注于更难分类的样本。测试实例$\mathbf{x}^*$ 的最终预测通过加权多数投票得出：

$$\hat{c} = H(\mathbf{x}^*) = \operatorname{sign}\left(\sum_{t=1}^{T} \alpha_t\, h_t(\mathbf{x}^*)\right). \tag{8}$$

ECS特定设计选择。我们的 AdaBoost 实现有三个方面专为 ECS特征空间量身定制：

1. 迭代轮数。我们设置 $T = K \times R$，使每个 ECS 特征——由时间窗口 k_i 和空间尺度 r_j的唯一组合定义——都有机会至少为集成贡献一个决策树桩。2. 网格尺寸选择。通过在训练集上进行 5 折分层交叉验证，扫描从 2×2 到 10×10 的网格大小，并选择使各折平均曲线下面积最大的配置，从而确定 K 和 R 的最优值（以及 T）。3. 通过 α热图实现可解释性。由于每个弱学习器都基于单个 ECS 特征$\chi(k_i, r_j)$进行运算，因此可以按特征汇总所有迭代轮次累积的 α_t 权重，并将其可视化

为 (k, r) 网格上的二维热图。这直观、可解释地展示了 ECS 的哪些尺度—时间区域对集成决策贡献最大——而这种透明度在集成方法中鲜有体现。

结果与讨论

我们在来自 UCR/UEA 档案库的五个基准生物医学数据集上评估基于ECS的分类框架，先详细分析主要数据集（*ECG5000*），再分析癫痫发作检测（*Epilepsy2*）以及另外三个心电图基准数据集。

ECG5000 数据集的分类

我们使用基于ECS的分类方案对基准数据集*ECG5000* 进行分类。该数据集来源于 UCR时间序列分类档案库 [14]，包含从单个受试者身上记录的 20 小时心电图（ECG）信号 [29]。每个样本代表一个心搏，由 140 个时间步组成。共计 5000 个样本被划分为五个类别，其中 500 个样本用于训练，4500 个用于测试。与参考文献 [8], 一致，我们仅保留样本数最多的两个类别，因为其余三个类别的样本数量明显不足。

用于心电图信号的ECS

使用 $\tau = 1$的滞后重构每个时间序列的相空间，并通过伪近邻判据确定最优嵌入维数为 $m = 3$。在训练集上进行五折交叉验证，评估最佳单一特征的平均交叉验证AUC，并在网格大小从 2×2 到 10×10 的范围内优化 ECS 网格大小。结果如图 7 所示。AUC 从 3×3 网格开始急剧上升，并在 10×10 配置下达到峰值，因此所有单一特征实验均采用该配置。

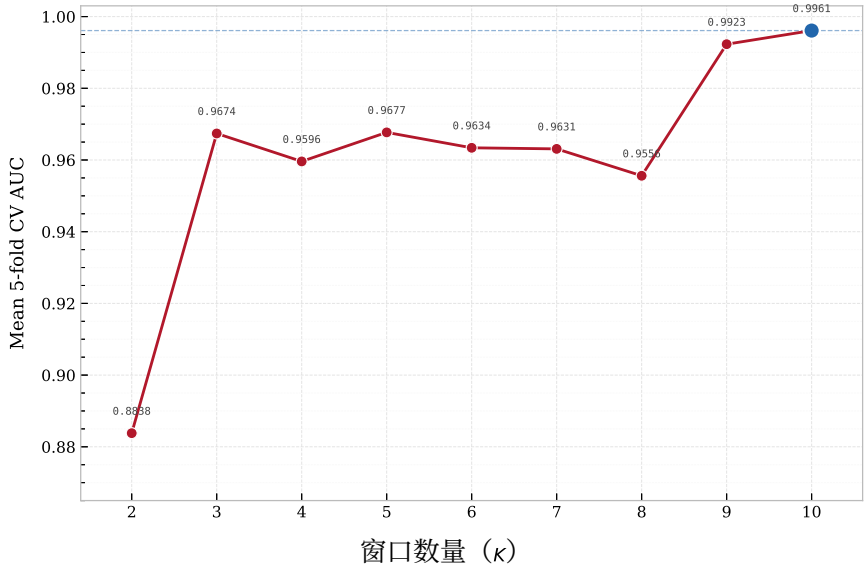


图 7：用于构建 *ECG5000* 数据集 ECS 的最佳 ECS 特征的平均交叉验证AUC 随网格大小（K）的变化。

图 8(a) 和 (b) 展示了各类别的代表性时间序列，图 8(c) 和 (d) 则展示了相应的 ECS。在特定的尺度–时间坐标处，两个类别的欧拉示性数 χ 呈现出明显的结构差异。我们研究特定尺度-时间坐标处欧拉示性数 $|\Delta\chi|$ 的差异，以理解两个类别之间的拓扑差异。

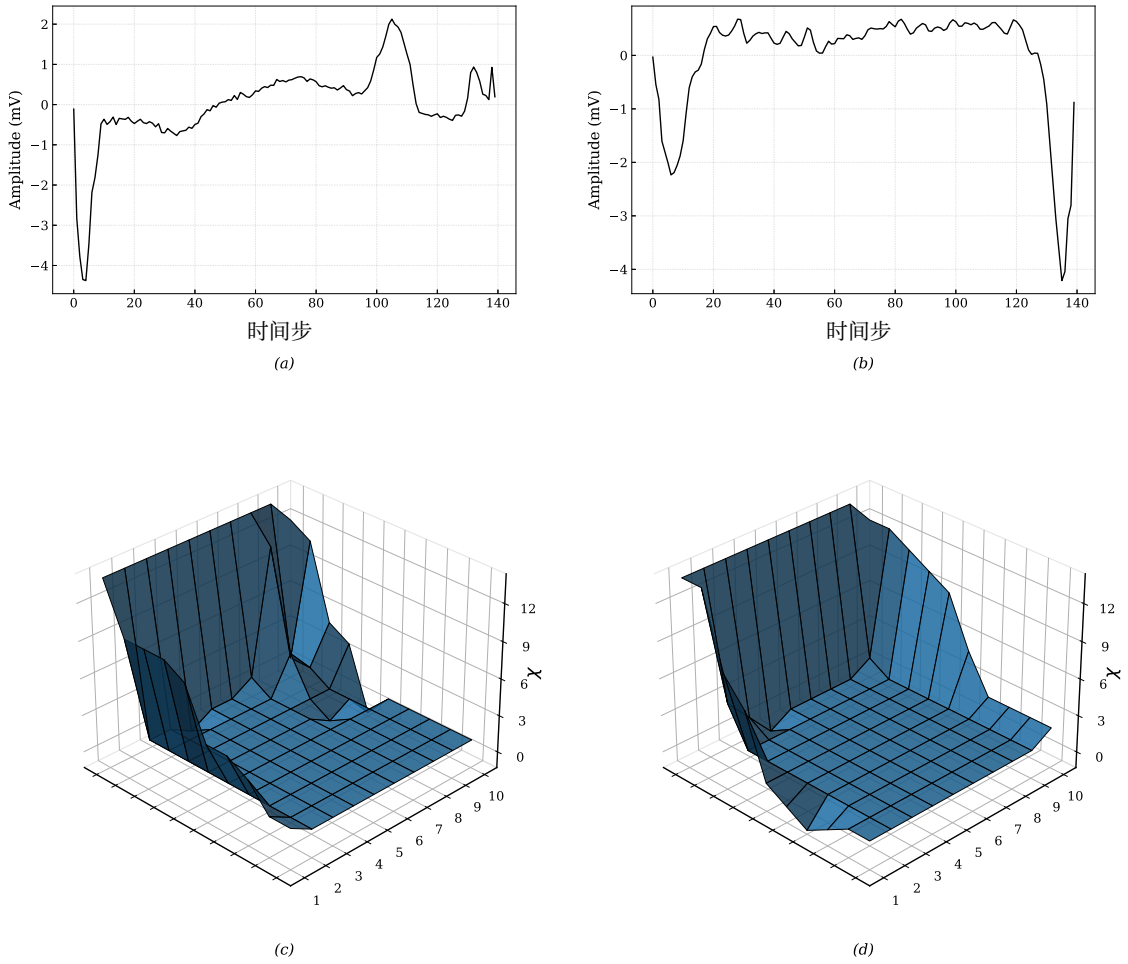


图 8：面板 (a) 和 (b) 分别展示了类别 1 和类别 2 的代表性心电图时间序列。面板 (c) 和 (d) 展示了对应的 ECS。

图 9(a) 展示了 ECS 8(c) 和 8(d) 之间的这种差异。为提高视觉清晰度，对 ECS 进行了插值。我们观察到，在尺度 0.11 处的窗口 8 中，χ 的差异较大。这对应于约为 $(r, t) \approx (0.11, 100)$ 的尺度–时间坐标。此外，为了量化两个类别的 ECS 之间的差异，我们使用公式 (2) 计算所有训练集 ECS 之间的成对 L_1 距离。由此得到的热图（图 9）证实，类内距离始终小于类间距离。类别 1 和类别 2 的平均类内 L_1 距离分别为 5.58 和 4.14，而平均类间距离为 8.89，这表明 ECS 编码了具有拓扑意义且具有类别判别能力的信息。

单特征分类

按训练集曲线下面积对 $10 \times 10 = 100$ ECS 特征进行排序后，特征72显示出最强的判别能力，训练集曲线下面积达到 0.9962。该特征对应于一个尺度–时间坐标

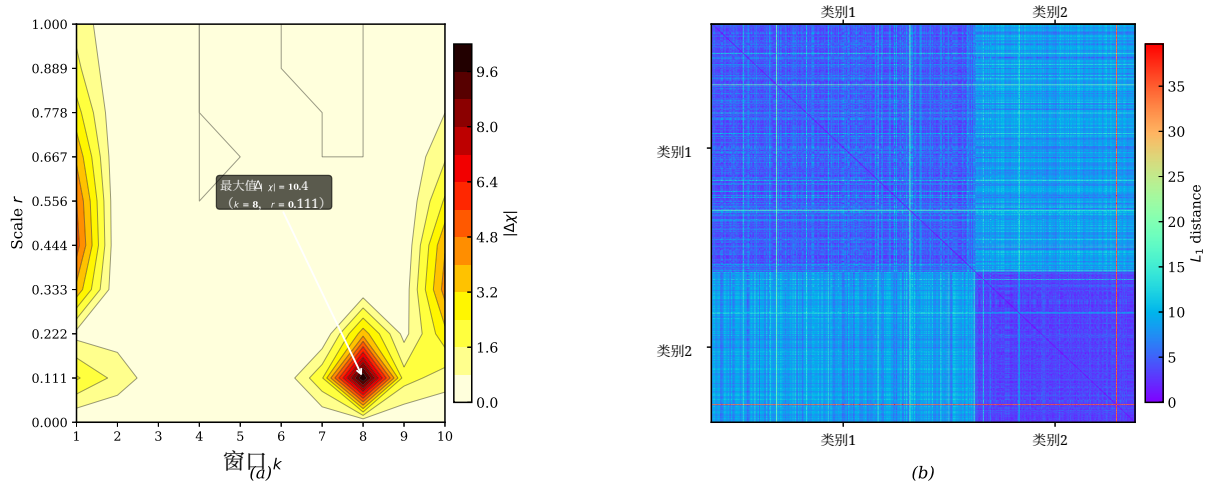


图 9：由 *ECG5000* 训练集构建的 ECS 表征的拓扑比较。面板 (a) 显示各类别平均ECS之间的逐点绝对差异 $|\Delta\chi|$，并绘制于尺度–窗口网格上；标注的最大值指出两个类别在拓扑上最易区分的 (k, r) 坐标。面板 (b) 以热图形式展示所有训练样本的 ECS 两两 L_1 距离。

位于滤过尺度 $r \approx 0.11$ 和 $k = 8$处。该窗口包含 Takens 嵌入心跳信号中时间步98至112之间的点。这是图9(a)中欧拉示性数差异最大的同一坐标 $|\Delta\chi|$。图10(a)展示了该特征的类别条件密度。在此坐标处，类别1的 χ 值系统性地高于类别2。应用极性反转（$p = -1$）和 Youden 最优阈值 $\theta = 3$后，$\chi_{72} > 3$的样本被分配到类别1，低于该阈值的样本则被分配到类别2。

该单特征决策规则具有直接的生理学解释。判别性坐标位于心跳波形的末端区域附近，其中，尺度 $r \approx 0.11$ 处 Takens 嵌入点云的拓扑差异反映了两个类别之间心脏动力学的结构差异。测试集的 ROC曲线如图 10(b)所示。

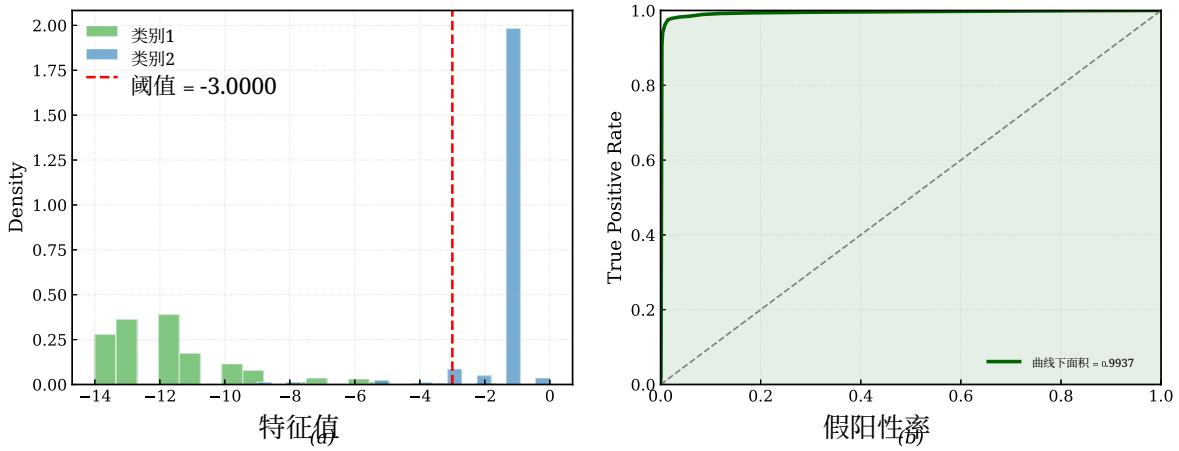


图 10：(a) 极性反转后两个类别的特征72训练集密度（$p = -1$），以及 Youden 最优阈值 $\theta = 3$。(b) 使用特征72得到的测试集 ROC 曲线。

AdaBoost 分类

对训练集进行交叉验证后，确定 6×6 网格对于 AdaBoost 最优，从而得到 $\mathrm{T} = 36$个决策树桩。所有决策树桩在尺度–时间网格上的聚合 α 贡献如图 11所示。分类模型中不同特征的 α 贡献如图 11所示。

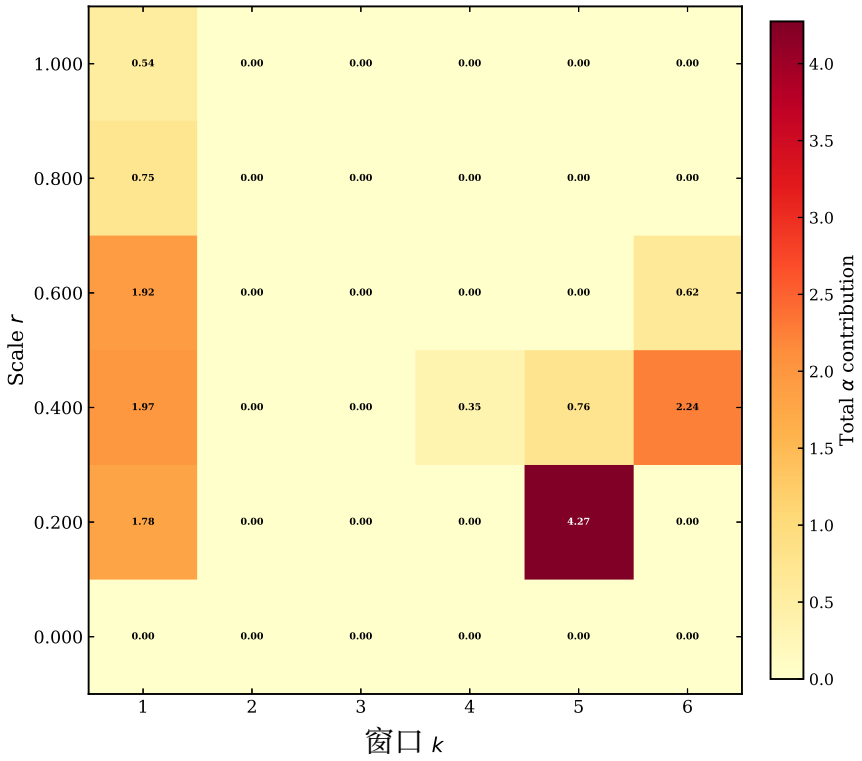


图 11：在 *ECG5000* 数据集（6×6 网格、 $\mathrm{T} = 36$ 个决策树桩）上训练的 AdaBoost集成中，各 ECS 特征的总 α 贡献热图。

6×6 集成中的主导特征是特征 26，对应于尺度–时间块$(\mathrm{r}, \mathrm{k}) \approx (0.2, 5)$。此窗口包含嵌入 Takens 点云的心搏信号中从时间步 92 到 115 的点云。当在 10×10 网格 ECS 上计算 AdaBoost模型时，特征 72 的 α贡献最大。这种在不同网格分辨率下的一致性证实了所识别判别区域的物理鲁棒性；无论 ECS 如何细分，集成都持续将同一局部邻域识别为信息量最大的区域。单一特征显著更高的贡献表明，该分类问题由一个高度局部化的拓扑事件所支配——Takens点云在 $\mathrm{r} \approx 0.1 - 0.2$ 和 $\mathrm{time} - \mathrm{step} \approx 92 - 115$处的连通性发生了明显且可重复的变化。

定量性能总结

表 1 总结了两种框架在包含 4217 个样本的留出测试集上的分类指标。AdaBoost集成在所有指标上的表现均优于单特征基线。曲线下面积从 0.994 升至 0.999，准确率从 98.0% 升至 98.6%，F1 分数从 0.974 升至 0.981。值得注意的是，假负例数量从 60 个减少到 37 个；在异常心跳检测中，这一改善具有重要的临床意义，因为漏检阳性的代价高于误报。

指标	单一特征	AdaBoost
ROC 曲线下面积	0.9937	0.9988
准确率	0.9803	0.9855
精确率	0.9852	0.9848
召回率（敏感度）	0.9623	0.9767
特异度	0.9912	0.9909
F1 分数	0.9736	0.9807
真正例	1,530	1,553
假负例	60	37
假正例	23	24
真阴性	2,604	2,603

表 1：*ECG5000* 测试集（4,217 个样本）上的分类性能。单特征模型使用 10×10 ECS 网格；AdaBoost 模型使用带有 $T = 36$ 个决策树桩的 6×6 网格。

比较分析

已有多种机器学习和深度学习模型报告称，在该数据集上取得了始终超过 95% 的准确率 [30, 31, 32]。然而，这些模型决策背后的依据大多仍不透明，限制了其临床实用性。我们的框架在达到相当准确率的同时，将每个分类决策都建立在欧拉示性数 χ ——这一基本拓扑不变量——之上，从而提供透明且具有物理意义的解释。

最接近的拓扑学先例是 Ichinomiya 的工作 [8], ：其从嵌入时间序列构造递归图，并通过持久同调（PH）提取拓扑特征，将其向量化为持久图像（PI），然后通过非负矩阵分解（NMF）进一步降维。该处理流程使用单一特征达到了 62% 的准确率和 0.90 的曲线下面积。我们的方法完全绕过递归图构造、持久同调计算、持久图像向量化和非负矩阵分解降维，直接从 Takens点云计算 ECS。在同一数据集上，我们的单一特征方案达到了 98% 的准确率和 0.994 的曲线下面积，显著超过了基于持久同调的方法。AdaBoost扩展将这些数值进一步提升至 98.6% 和 0.999，在保持完全可解释性的同时，达到了最佳深度学习结果的水平，并且计算成本显著更低。

Epilepsy2 数据集的分类

接下来，我们对 UEA/UCR档案库 [14]中的*Epilepsy2*数据集（最近更名为*EpilepticSeizures*）进行分类。该数据集包含来自 500 名受试者的单通道脑电图记录，每段记录采集了 23.6 秒、采样率为 178 Hz 的脑活动，因此每个样本的时间序列包含 178 个时间步。这些记录对应五种类别标签，分别代表不同的生理状态：闭眼、睁眼、来自健康皮层区域的脑电图、来自肿瘤部位的脑电图，以及发作期活动（癫痫发作） [33]。进行二分类时，前四类合并为一个非发作类别 [34], ，从而将任务简化为区分癫痫发作与非发作脑活动——这是自动化癫痫监测中具有重要临床意义的问题。训练集包含 80 个平衡样本（40 个癫痫发作样本、40 个非发作样本），而测试集包含 11,420 个样本，类别分布严重不平衡。

脑电图信号的 ECS

使用假近邻判据确定滞后 $\tau = 1$下的最优嵌入维数为 $m = 4$ 。通过在训练集上进行五折交叉验证，优化了 ECS网格大小。单一特征方案和 AdaBoost 方案的最佳网格均为 9×9 网格，因此所有实验都采用该网格。

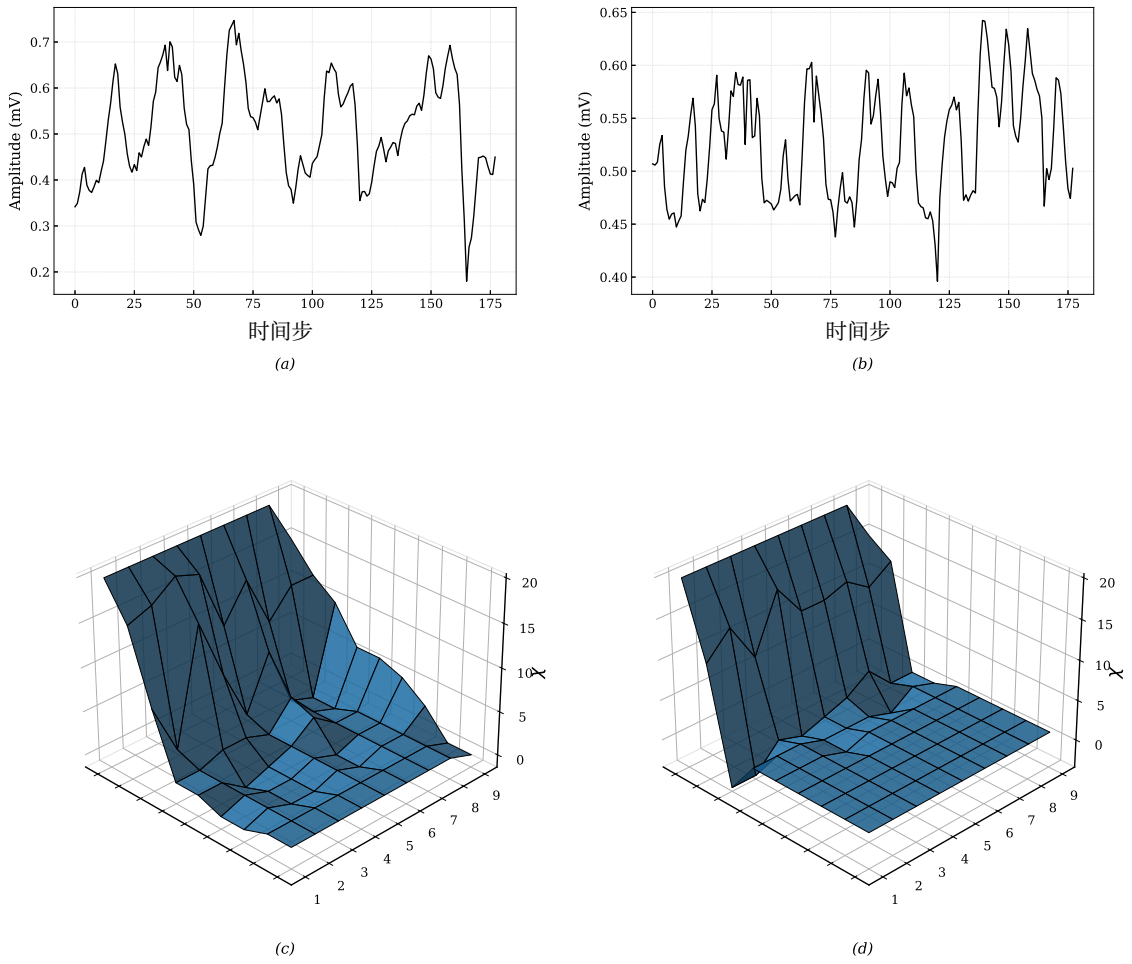


图 12：面板 (a) 和 (b) 分别展示了癫痫发作类别和非癫痫发作类别的代表性脑电时间序列。面板 (c) 和 (d) 展示了对应的 ECS。

两个类别的 ECS 如图 12 所示。癫痫发作 ECS（图 12(c)）明显比平滑、缓慢变化的非发作 ECS（图 12(d)）更粗糙、更不规则。这种对比反映了癫痫发作事件期间高频神经振荡众所周知的增强现象；从拓扑角度看，这表现为 Takens点云在尺度和时间维度上的连通性快速波动。图 13(a) 展示了 ECS 图 12(c) 和 (d) 在特定尺度-时间坐标处的差异 $|\Delta\chi|$ 。我们观察到， χ 的差异分布于尺度不超过 0.075 的各个窗口中。成对 L_1 距离热图（图 13(b)）证实了较强的类间分离度。非癫痫发作类别内部的类内距离非常小，表明其具有较高的拓扑规则性，而类间距离则明显更大。癫痫发作类别较高的类内分离度，可能是由不同癫痫发作事件 [35]的脑电图信号中固有的时空差异所致。

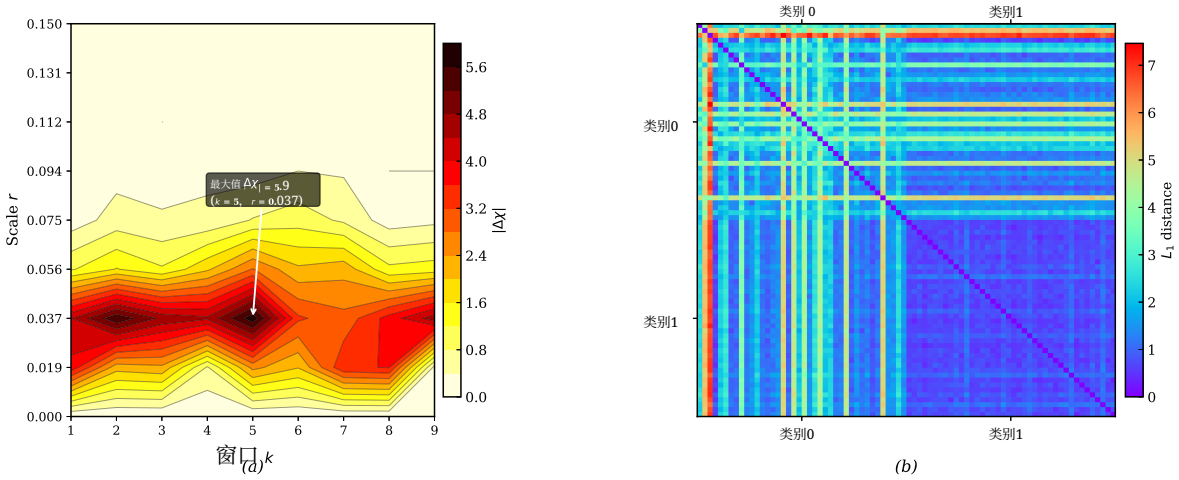


图13：由*Epilepsy2* 训练集构建的 ECS 表征的拓扑比较。面板 (a) 显示各类别平均ECS之间逐点绝对差值 $|\Delta\chi|$ 在尺度–窗口网格上的分布；标注的最大值指出两类在拓扑上最易区分的 (k, r) 坐标。面板 (b) 以热图形式显示所有训练样本的 ECS 之间的成对 L_1 距离。

单特征与 AdaBoost 分类

留出测试集中的 11,420 个样本的分类结果见表2。单特征分类器的准确率达到 87.6%，曲线下面积为 0.835，表明单个 ECS 特征在规模较大且类别不平衡的测试集上也能提供有效的区分能力。精确率为 0.940，表现较高；但召回率为 0.903，且假阳性数量为 530——即被误分类为非发作的癫痫发作事件——这反映了仅凭单个拓扑坐标捕获所有癫痫发作事件的难度。

AdaBoost集成在所有指标上都有显著提升。曲线下面积从 0.835 升至 0.963，增幅超过十二个百分点，这是因为集成利用了 $(K \times R) = (9 \times 9) = 81$维 ECS特征空间中多个互补区域的信息。准确率提升至 92.6%，F1 分数则从 0.921 升至 0.953。最重要的是，假阳性数量从 530 降至 331，这意味着集成正确识别出 199 起此前被误判为非发作的癫痫发作事件。在癫痫发作检测中，这是临床上至关重要的错误：漏掉一次癫痫发作的代价远高于误报。假阴性数量也从 885 降至 519，这证实漏诊减少并非以误报率升高为代价，而是实现了均衡提升，这一提升直接源于AdaBoost重加权机制。

AdaBoost集成的 α-贡献热图如图14所示。与*ECG5000* 的情况不同，后者由单一特征主导；*Epilepsy2* 的热图显示，分布在不同时间块中的多个特征都对分类有显著贡献。这表明，当判别信息分布在 ECS 的时空范围内，而非集中于单个坐标时，AdaBoost集成能够有效地将这些单独较弱的决策树桩组合成一个强分类器。

指标	单一特征	AdaBoost
ROC 曲线下面积	0.8347	0.9628
准确率	0.8761	0.9256
精确率	0.9398	0.9631
召回率（敏感度）	0.9034	0.9433
F1 分数	0.9212	0.9531
真正例	8,275	8,641
假负例	885	519
假正例	530	331
真阴性	1,730	1,929

表2：*Epilepsy2* 测试集上的分类性能（11,420 个样本）。ECS 使用 9×9 网格（$m = 4$，$\tau = 1$）构建，AdaBoost集成包含 $T = 81$ 个决策树桩。

其他心电图数据集

我们将相同的处理流程应用于来自 UCR档案库的另外三个心电图数据集，结果见表3。

数据集	方法	AUC	准确率	精确率	召回率	特异度	F1
TwoLeadECG	单一特征	0.9742	0.9263	0.8894	0.9737	0.8787	0.9296
	AdaBoost	0.9780	0.9412	0.9736	0.9070	0.9754	0.9391
ECG200	单一特征	0.8516	0.7800	0.9565	0.6875	0.9444	0.8000
	AdaBoost	0.8811	0.8000	0.8143	0.8906	0.6389	0.8507
ECGFiveDays	单一特征	0.7949	0.7851	0.7431	0.8753	0.6939	0.8038
	AdaBoost	0.8494	0.7933	0.7904	0.8014	0.7850	0.7959

表3：UCR档案库中另外三个心电图数据集的分类性能。所有指标均在留出测试集上报告。通过五折交叉验证，针对每个数据集分别确定最优 ECS网格大小。

TwoLeadECG 数据集在两种框架下均表现出色。单特征分类器的曲线下面积为 0.974，准确率为 92.6%，召回率尤其高，达到 0.974，但精确率略低，为 0.889。这表明该单一特征几乎捕获了所有真正例，但也带来了不可忽视的假正例率。AdaBoost 弥补了这种不平衡：精确率大幅升至 0.974，特异度从 0.879 升至 0.975，而召回率则从 0.974 降至 0.907——这典型地表明，提升法通过将有效决策边界向更保守的方向移动，过度补偿了初始的假正例过多问题。最终，分类器更加均衡，准确率从 92.6% 提高到 94.1%，F1 分数则保持稳定（0.930 对 0.939）。这证实，该数据集在 ECS特征空间中具有良好的可分性，且单一特征已能捕获主要的拓扑判别特征。

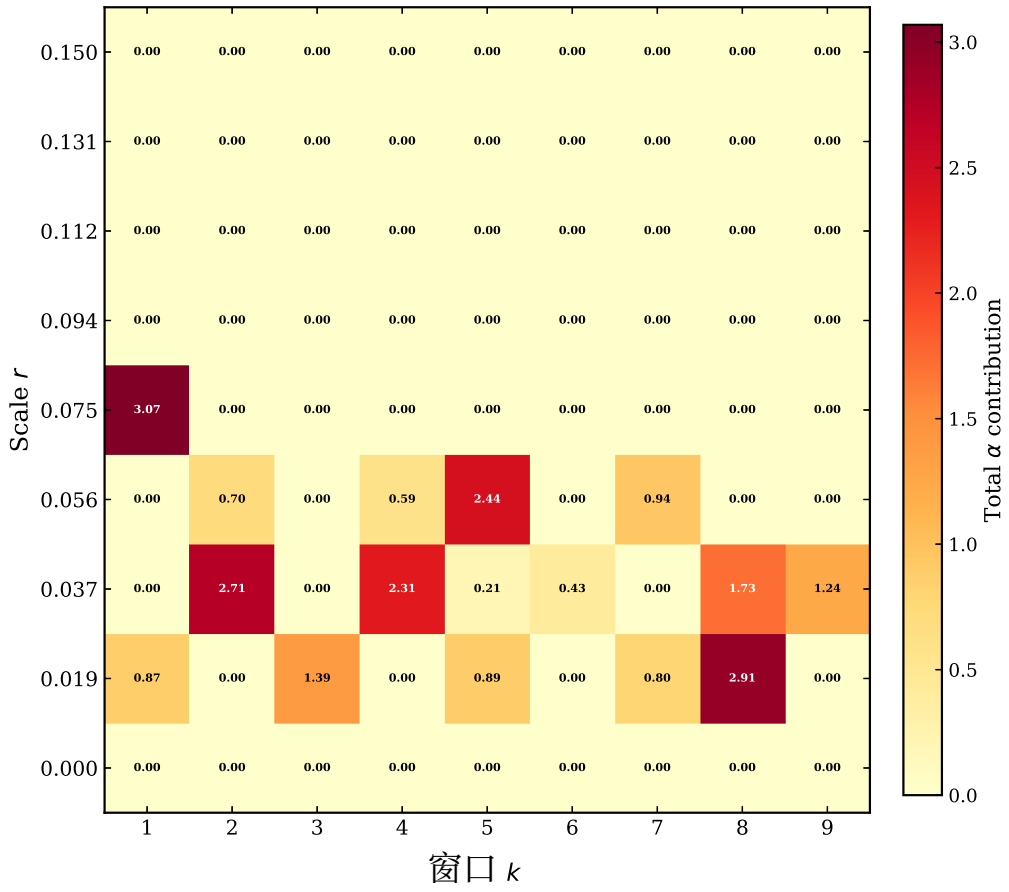


图14：在*Epilepsy2*数据集上训练的 AdaBoost集成中各个 ECS 特征的总 α 贡献热图（9×9 网格，$\mathrm{T} = 81$ 决策树桩）。

ECG200 数据集的分类难度适中偏高。单特征分类器的精确率高达 0.957，特异度为 0.944，但召回率较低，仅为 0.688，因此 F1 分数为 0.800。这种不平衡表明，尽管所选特征很少会将负样本误判为正样本，但仍会漏掉相当一部分真正例；这可能是因为少数类的拓扑变异性高于任何单个坐标所能捕获的程度。AdaBoost 直接应对了这一问题：在每个提升轮次中，对被误分类的正样本实例重新加权后，集成模型的召回率达到 0.891，精确率为 0.814，混淆矩阵也更加对称；曲线下面积则从 0.852 提高到 0.881。

ECGFiveDays 数据集揭示了我们框架的适用边界。单特征分类器的召回率为 0.875，但特异度仅为 0.694，这表明它虽然能捕获大多数真正例，却要以显著的假正例率为代价。曲线下面积为 0.795，F1 分数为 0.804，反映出该分类器虽具备一定实用性，但表现并不均衡：在小型训练集上确定的 Youden 最优阈值将决策边界置于一个无法在两个类别之间均匀泛化的位置。AdaBoost 显著改善了这种失衡；通过迭代地重新加权误分类实例，集成方法将特异度从 0.694 提高到 0.785，将曲线下面积从 0.795 提高到 0.849，而召回率则从 0.875 小幅降至 0.801——这再次体现了提升法通过移动有效决策边界，纠正初始假正例过多问题的特征。最终得到的分类器明显更加均衡，精确率从 0.743 升至 0.790，F1 分数则基本稳定，为 0.804 对 0.796。该数据集上的绝对性能相对有限，可能反映出不同类别间的拓扑差异

分布在 ECS 的多个尺度—时间区域中，而非集中于单个判别性坐标——在这种情况下，集成方法在结构上优于任何单特征方法。

综上，五个数据集上的结果呈现出两种一致趋势。首先，当两个类别在局部尺度–时间坐标上的差异显著时，单特征 ECS 分类器是一种具有竞争力且易于解释的基线方法，例如*ECG5000* 和 *TwoLeadECG*。其次，AdaBoost 集成在所有情况下都能带来稳健的性能提升；尤其是在单特征基线产生不对称或退化分类时，这一点最为关键，例如*ECG200*、*ECGFiveDays*和*Epilepsy2*。该集成通过系统地将分类器的注意力重新分配到完整的 $(K \times R)$维 ECS 特征空间，实现了这一点，从而找回了单独看来较弱、但合在一起作用强大的拓扑判别特征。易于解释的单桩基线与稳健的 AdaBoost 集成之间的互补性，构成了我们框架的主要方法学贡献。

结论

我们提出了一种计算效率高且易于解释的拓扑框架，利用欧拉示性曲面（ECS）进行二元时间序列分类。该框架通过 Takens 延迟嵌入重构标量时间序列的相空间，并采用本文提出的 K 窗口方法，将嵌入点云划分为时间块；随后，基于这些时间块计算 ECS，将其表示为一个时空矩阵，用于追踪欧拉示性数 χ 随滤过尺度和时间的变化。

分类在两个层面进行：其一是单特征阈值分类器，通过曲线下面积排序和 Youden 最优阈值，选出最具区分性的 ECS 坐标；其二是 AdaBoost 集成，将 $K \times R$ 决策树桩组合起来，覆盖完整的 ECS特征空间。在这两种情况下，每个分类决策都可以直接追溯到特定的尺度–时间坐标，从而提供了深度学习和大多数机器学习方法所不具备的可解释性。我们还证明了稳定性定理（定理 1），保证 ECS 在输入时间序列发生小扰动时仍保持有界，为经验观察到的稳健性提供了理论支持。

与基于持久同调（PH）的框架相比，ECS 具有三个具体优势：计算成本更低（$O(n + R \cdot T)$ 相较于 $O(n^{\omega})$），原生离散化，无需向量化即可直接作为特征向量使用；同时还能沿空间轴和时间轴编码拓扑信息。这些优势得到了实验结果的验证：在 *ECG5000* 上，我们的框架仅使用单一特征就达到了 98% 的准确率和 0.937 的曲线下面积，显著优于近期一种基于 PH 的方法（62%，曲线下面积 0.90） [8]。AdaBoost 将准确率提升至 98.6%，曲线下面积提升至 0.999，达到了最佳深度学习结果的水平，同时保留了完整的可解释性。在 *TwoLeadECG* （94.1%）以及基于脑电图的 *Epilepsy2* 癫痫发作检测任务（92.6%）中也观察到了较强的性能，表明该方法对不同信号类型具有普适性。

未来仍有若干值得探索的方向。ECS 的最大尺度根据 Takens嵌入点云中各点之间的距离检查结果，针对每个数据集分别选取。网格参数 K 和R 目前通过交叉验证选取。未来可依据有原则的准则对其进行优化；例如以点云的内在维数或时间序列的自相关结构为依据。稳定性定理目前针对嵌入维数 $m = 3$给出，将其推广至一般的 m 是一个自然的理论目标。推广至多变量时间序列、更长的记录，以及多类别场景（其中必须以多类别策略取代单阈值框架）也是重要的后续工作。除了生物医学信号，我们预计，ECS 所提供的时空拓扑编码还将在其他重视可解释时间序列分类的领域得到应用，包括金融、气候科学以及工业机械故障检测。

参考文献

[1] Frédéric Chazal 和 Bertrand Michel。拓扑数据分析简介：面向数据科学家的基础与实践方面。人工智能前沿，4:108，2021年。[2] Nina Otter、Mason A Porter、Ulrike Till mann、Peter Grindrod 和 Heather A Harrington。持久同调计算路线图。*EPJ*数据科学，6(1):17，2017年。[3] Anish Rai、Buddha Nath Sharma、Salam Rabindrajit Luwang、Md Nurujjaman 和 Sushovan Majhi。识别股票市场中的极端事件：一种拓扑数据分析方法。《混沌：非线性科学跨学科期刊》，34(10)，2024年。[4] Rodrigo Henrique Ramos、Yago Augusto Bardelotte、Cynthia de Oliveira Lage Ferreira 和 Adenilso Simao。利用持久同调识别癌症网络中的关键基因。《科学报告》，15(1):2751，2025年。[5] Jacob Townsend、Cassie Putman Micucci、John H Hymel、Vasileios Maroulas 和 Konstantinos D Vogiatzis。利用持久同调表示分子结构，以应用于化学领域的机器学习。《自然通讯》，11(1):3230，2020年。[6] Sourav Majumdar 和 Arnab Kumar Laha。利用拓扑数据分析对时间序列进行聚类和分类，并应用于金融领域。《应用专家系统》，162:113868，2020年。[7] Yanxiang Niu、Xin Chen、Jianqi Fan、Chunli Liu、Menghao Fang、Ziquan Liu、Xiangyan Meng、Yanqing Liu、Lu Lu 和 Haojun Fan。基于脑电图、心电图和临床特征的可解释机器学习模型，用于预测心脏骤停患者的神经系统结局。《科学报告》，15(1):11498，2025年。[8] Takashi I chinomiya。利用持久同调对时间序列数据进行机器学习。《科学报告》，15(1):20508，2025年。[9] Anamika Roy、Atish J Mitra 和 Tapati Dutta。欧拉示性曲面：时间序列数据的稳定多尺度拓扑摘要。《数学》，第1–29页，2025年。[10] Edelsbrunner、Letscher 和 Zomorodian。拓扑持久性与简化。《离散与计算几何》，28(4):511–533，2002年。[11] A Roy、RAI Haque、AJ Mitra、M Dutta Choudhury、S Tarafdar 和 T Dutta。通过欧拉示性曲面这一拓扑工具理解干燥液滴中的流动特征。《流体物理学》，32(12)，2020年。[12] A Roy、RAI Haque、AJ Mitra、S Tarafdar 和 T Dutta。利用欧拉示性曲面和欧拉度量表征流体动力系统。《流体物理学》，35(8)，2023年。[13] Gabriele Beltramo、Rayna Andreeva、Ylenia Giarratano、Miguel O Bernabeu、Rik Sarkar 和 Primoz Skraba。欧拉示性曲面。*arXiv* 预印本 *arXiv:2102.08260*，2021年。[14] Anthony Bagnall、Hoang Anh Dau、Jason Lines、Michael Flynn、James Large、Aaron Bostrom、Paul Southam 和 Eamonn Keogh。UEA 多变量时间序列分类档案，2018年。*arXiv* 预印本 *arXiv:1811.00075*，2018年。[15] Tamal Krishna Dey 和 Yusu Wang。面向数据分析的计算拓扑学。剑桥大学出版社，2022年。

[16] Gunnar Carlsson 和 Mikael Vejdemo-Johansson。《应用中的拓扑数据分析》。剑桥大学出版社，2021年。[17] Matthew B Kennel、Reggie Brown 和 Henry DI Abarbanel。使用几何构造确定相空间重构的嵌入维数。《物理评论*A*》，45(6):3403，1992年。[18] Primoz Skraba 和 Katharine Turner。持久图的 Wasserstein稳定性。《*arXiv*预印本 *arXiv:2006.16824*》，2020年。[19] Otto E Rössler。一个描述连续混沌的方程。《物理快报*A*》，57(5):397–398，1976年。[20] Floris Takens。检测湍流中的奇异吸引子。载于《动力系统与湍流，华威，*1980*：*1979/80*年在华威大学举行的研讨会论文集》，第366–381页。施普林格，2006年。[21] Paul Viola 和 Michael J Jones。鲁棒的实时人脸检测。《国际计算机视觉杂志》，57(2):137–154，2004年。[22] Tom Fawcett。ROC分析简介。《模式识别快报》，27(8):861–874，2006年。[23] Antonio J Serrano、Emilio Soria、Jose D Martin、Rafael Magdalena 和 Juan Gomez。利用ROC曲线进行分类问题的特征选择。载于《*2010*年国际神经网络联合会议（*IJCNN*）》，第1–6页。IEEE，2010年。[24] Thu Phuong Ta、Duc Hoang Le 和 Dinh Khoa Bach Le。一种新颖的基于AUC的特征选择方法：机器学习在信用评分问题中的实证见解。《*Cogent*经济与金融》，13(1):2558032，2025年。[25] Lei Sun、Jun Wang 和 Jinmao Wei。AVC：通过最大化变量互补性，基于AUC选择判别特征。《*BMC*生物信息学》，18(Suppl 3):50，2017年。[26] William J Youden。诊断测试评价指数。《癌症》，3(1):32–35，1950年。[27] Ronen Fluss、David Faraggi 和 Benjamin Reiser。Youden 指数及其相关截断点的估计。《生物统计学杂志：生物科学数学方法杂志》，47(4):458–472，2005年。[28] Robert E Schapire 等。提升法简介。载于*IJCAI*，第99卷，第1401–1406页，1999年。[29] Ary L. Goldberger、Luis A. N. Amaral、Leon Glass、Jeffrey M. Hausdorff、Plamen Ch. Ivanov、Roger G. Mark、Joseph E. Mietus、George B. Moody、Chung-Kang Peng 和 H. Eugene Stanley。Physiobank、Physiotoolkit 和 Physionet。《循环》，101(23):e215–e220，2000年。[30] Moumita Roy、Sukanta Majumder、Anindya Halder 和 Utpal Biswas。ECG-Net：一种用于检测异常心电图的深度LSTM自编码器。《人工智能工程应用》，124:106484，2023年。[31] Shiyong Geng、Changhao Sun 和 Yongping Dan。用于低延迟心电图分类的脉冲神经网络优化负尖峰。《模式识别快报》，194:8–12，2025年。[32] Zeyu Xing、Owais Mehmood 和 William A.P. Smith。利用时间延续和置信度感知VAE-GAN进行无监督异常检测。《模式识别》，166:111699，2025年。[33] Ralph G. Andrzejak、Klaus Lehnertz、Florian Mormann、Christoph Rieke、Peter David 和 Christian E. Elger。脑电活动时间序列中非线性确定性及有限维结构的迹象：对记录区域和脑状态的依赖。《物理评论E》，64:061907，2001年11月。

[34] Xiang Zhang、Ziyuan Zhao、Theodoros Tsiligkaridis 和 Marinka Zitnik。通过时频一致性对时间序列进行自监督对比式预训练。《神经信息处理系统进展》，35:3988–4003，2022年。

[35] Mariella Panagiotopoulou、Christoforos A. Papasavvas、Gabrielle M. Schroeder、Rhys H. Thomas、Peter N. Taylor 和 Yujiang Wang。以分钟至天为尺度，在受试者特异性时间尺度上脑电图频带功率的波动解释了癫痫发作演变中的变化。*HumanBrainMapping*，43(8):2460–2477，2022。

致谢

我们感谢锡金国立理工学院为 B.N.S.、V.M. 和 S.R.L. 分配博士奖学金。

作者贡献声明

B.N.S. 开发了计算框架并开展了实验。V.M. 和 S.R.L. 对数据分析作出了贡献。M.N. 负责监督实验工作。A.J.M. 构建并证明了稳定性结果。S.M. 提出了该项目并监督整体研究方向。所有作者均审阅了稿件。

利益冲突

作者声明不存在任何竞争性利益。