arXiv:2603.15086v1 [math.RT] 16 Mar 2026

广义四元数型代数：双正则情形*

KARIN ERDMANN、ADAM HAJDUK 和 ADAM SKOWYRSKI

Abstract. 本文为广义四元数型代数的分类工作迈出了新的一步。我们将 [12], 的结果加以推广；该文在代数的 Gabriel 箭图为 2-正则（即每个顶点恰有两条箭射出、两条箭射入）的情形下完成了此类分类。受现有加权曲面代数实例的启发，一种自然的推广引出了对 Gabriel 箭图为双正则的广义四元数型代数的研究，即其顶点由 1-正则顶点和 2-正则顶点组成。在主要结果中，我们证明，任何此类代数（在底等价意义下）要么是加权曲面代数 [11] ，要么是所谓的高阶球面代数 [20]。

1. 引言 Introduction

本文中，代数是固定代数闭域 K 上的有限维、基本、不可分解 K 代数。对于代数 Λ，我们用 $\operatorname{mod}\Lambda$ 表示其模范畴，其中包含有限生成的右 Λ 模；用 D 表示标准对偶 $\operatorname{Hom}_K(-,\ K)$。任意代数都可以用箭图与关系表示，即存在同构$\Lambda = KQ/I$，其中 KQ 是箭图 Q 的路径代数，而 I 是 KQ 的可容许理想（详情见第 2 节）。箭图 Q 唯一确定（顶点置换除外），称为 Λ 的 Gabriel 箭图，记为 Q_Λ。

回顾一下，若代数 Λ 满足 Λ 是 $\operatorname{mod}\Lambda$ 中的内射模，则称其为自内射代数。我们将关注对称代数，即存在结合、非退化、对称的 K-双线性型 $(-,\ -) : \Lambda\times\Lambda\to K$ 的自内射代数 Λ；等价地，Λ 与 $D(\Lambda)$ 作为 Λ-双模同构（见 [26, 定理 IV.2.2]）。根据著名的驯性与野性定理 [4]（另见 [3]），每个代数要么是温和的，要么是野性的；温和代数是指代数 Λ，其 $\operatorname{mod}\Lambda$ 中的不可分解模（在每个维数下）分属有限多个离散族和有限多个单参数族。注意，任何表示有限代数，即 $\operatorname{mod}\Lambda$ 中不可分解模的同构类有限的代数 Λ，都是温和的。

我们尤其关注周期代数这一类。回顾一下，模 M 属于 $\operatorname{mod}\ \Lambda$，若其相对于上同调核是周期的，即对于某个 $d\geqslant 1$，有 $\Omega^d_\Lambda(M)\ \simeq M$，则称其为周期模；其中 Ω_Λ 是上同调核算子，它将模 X 关联到其在 $\operatorname{mod}\Lambda$ 中的投射覆盖的核（见第 2 节）。周期代数是指满足以下条件的代数 Λ：Λ 作为 Λ-双模是周期的，等价地说，作为包络代数 $\Lambda^e=\Lambda^{\mathrm{op}}\otimes_K\Lambda$上的模是周期的。我们的主要关注点是对所有周期为四的温和对称周期代数（TSP4 代数）进行分类，或者更一般地说，对所有所谓的广义四元数型代数（简称 GQT 代数）进行分类。按照 [12], 代数 Λ 是广义四元数型的，当且仅当 Λ 是温和的、具有无限表示型的对称代数，并且 $\operatorname{mod}\Lambda$ 中的每个简单模都是周期为 4 的周期模。我们注意到，任何具有无限表示型的 TSP4 代数自动都是 GQT 代数，但反之是否成立仍是一个未决问题（见 [10]；另见 [6]）。关于与 TSP4（或 GQT）代数相关的背景和动机，可参见论文 [11, 12] 的引言。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：16D50、16E30、16G20、16G60。
Key words and phrases. 对称代数、温和代数、周期代数、广义四元数型、加权曲面代数、Gabriel 箭图。

* 本研究获得波兰国家科学中心项目资助，项目编号为 2023/51/D/ST1/01214

分类中涉及的主要代数类是所谓的加权曲面代数（WSA），该类代数在 [11, 13, 17] 中被引入并得到研究。注意，任意加权曲面代数 $\Lambda = KQ/I$ 都由一个三角剖分箭图 Q （来自某个曲面）以及一组用于定义理想 I的权和参数所确定。我们略去构造的细节（详见第 3 节），这里只提到：除四个特殊的由所谓例外代数组成的族之外，大多数 WSA 都是 TSP4（以及 GQT）代数。

我们回顾一下，加权曲面代数不仅提供了许多 TSP4 的例子，而且在某些情形下还涵盖了所有 TSP4（或 GQT）代数。一般情形下，这一结论仍是一个猜想；而对于 2-正则代数，这一点已得到证实，见 [12, 主定理], 。这里，2-正则代数是指具有 2-正则 Gabriel 箭图的代数 Λ Q_Λ，也就是说，Q_Λ 中的每个顶点都是 2-正则的，即每个顶点都有两条箭射出、两条箭射入。具体而言，文献 [12] 已证明，对于任意 2-正则代数 Λ （其中 Q_Λ 至少有三个顶点）， Λ 是 TSP4，当且仅当Λ 是 GQT，当且仅当 Λ同构于一个加权曲面代数（底等价意义下），且该代数不是例外代数；或者同构于所谓的高阶四面体代数（见 [14]）。高阶四面体代数构成一个由三角剖分箭图 Q_Λ给出的奇异族，但它们不同构于 WSA。本文的主要结果是将这一分类推广到双正则情形。我们将看到，代数也存在类似的划分：一类是加权曲面代数，另一类是与之密切相关的其余“高阶”版本。

[12] 的主要结果涉及 2-正则代数，其中 $Q = Q_\Lambda$ 是一个三角剖分箭图。这给出了 WSA 的一部分，其箭图 Q 不包含所谓的虚箭（见第 3 节）。一般加权曲面代数 [13] 具有 $\Lambda = KQ/I$的形式，其中 $Q \neq Q_\Lambda$ 可能包含虚箭，而这些虚箭不包含在 Λ的 Gabriel 箭图中。在这种情况下，Gabriel 箭图 Q_Λ由 2-正则顶点和 1-正则顶点组成（恰有一支箭从该顶点出发并终止于该顶点），这意味着 Q_Λ 是双正则的。此外，1-正则顶点包含在以下形式的两类块中



分别记为 V_1 和 V_2（另见 [9]的引言）；注意，由 $\bullet$ 标记的顶点是 1-正则的，而 $\circ$ 是 Q_Λ的 2-正则顶点。对于任意具有双正则 Gabriel 箭图的 GQT 代数，这一性质也得到了普遍证实（见定理 4.7），该结果是预备论文 [9]的主要成果。下一步自然是推广双正则代数的分类。这引出了以下定理，它是本文的主要结果。

主定理。 设 Λ 是一个 *Gabriel* 箭图为双正则且至少有三个顶点的代数。则以下条件等价。

(i) Λ 是 *TSP4* 代数。*(ii)* Λ 是 *GQT* 代数。*(iii)* Λ 同构于一个非例外代数的加权曲面代数，或同构于一个高阶球面代数或高阶四面体代数。

本文结构如下。我们先在第 2 节回顾一些基本概念，然后讨论本文所研究的核心代数类，即加权曲面代数类（第 3 节）。接着在第 4 节回顾有关任意 GQT 代数的已知事实，并更详细地考察双正则情形下 1-顶点周围关系的形态。第 5 节是本文技术性最强的部分，我们将详细描述所有其他关系，也就是 Gabriel 箭图“2-正则部分”附近的关系，并利用这些关系（以及第 4 节的部分结果）计算任意具有双正则 Gabriel 箭图的 GQT 代数 Λ 上的不可分解射影 Λ模的基。完成这些准备后，我们将在第 6 节结束论文，并给出主定理的证明。本节也相当技术性，并分为若干小节，其中大部分

内容讨论 Gabriel 箭图不同于球面箭图或三角形箭图（见第 3 节）时的证明，最后一部分则处理其余的例外箭图。

关于代数表示论所需的背景知识，请读者参阅书籍 [1, 26]。

2. Basic notions

我们称四元组 $Q=(Q_0,\ Q_1,\ s,\ t)$ 为一个箭图，其中 Q_0 是有限顶点集，Q_1 是有限箭集，而 $s, t\colon Q_1\to Q_0$ 是两个函数，分别为每个箭 α 指定其源顶点 $s(\alpha)$ 和目标顶点 $t(\alpha)$。对于箭图 Q，我们用 KQ 表示 Q 的路径代数，其 K-基由 Q 中所有长度为 $\geqslant 0$ 的路径构成。回忆一下，KQ 的雅各布森根是由所有长度为 $\geqslant 1$ 的路径生成的 Q 的理想 R_Q；若存在某个 $m\geqslant 2$ 使得 I，则称 KQ 的理想可容许的。注意，顶点 $i\in Q_0$ 处长度为 0 的路径 ε_i 构成 KQ 的本原幂等元完全集（其和为恒等元）。

若 Q 是一个箭图，且 I 是 KQ的可容许理想 I，则称 $(Q,\ I)$ 为有界箭图，其对应的代数 KQ/I 称为有界箭图代数。代数 $\Lambda=KQ/I$ 的雅各布森根为 $J_\Lambda=R_Q+I$，记作 J。众所周知，代数闭域上的任意代数都是有界箭图代数；所谓代数Λ 的表示，是指某个有界箭图 $(Q,\ I)$ 到该代数的特定同构 $\Lambda\cong KQ/I$。在这种情况下，陪集 $e_i=\varepsilon_i+I\in\Lambda$ 构成 Λ 的一组本原幂等元完全集，而 $\sum_{i\in Q_0}e_i$ 是 Λ的恒等元。注意，表示可能并不唯一，但箭图 Q （在置换意义下）是唯一的。它称为 Λ 的 Gabriel 箭图，记作 Q_Λ；此外，Q_Λ中的箭$i\to j$与 $e_iJe_j/e_iJ^2e_j$的一组基中的元素一一对应。

路径代数 KQ 中的一个关系 是任意具有如下形式的 K-线性组合

$$\sum_{i=1}^{r}\lambda_i w_i, \tag{1}$$

其中所有 $\lambda_i\in K$ 均非零，且 w_i 是长度为 $\geqslant 2$、具有共同源顶点和目标顶点的两两不同的路径。已知，路径代数 KQ 的理想 I 是可容许的，当且仅当 I 由有限个关系 $\rho_1,\dots,\rho_m$生成。此外，我们可以选择这样的关系 $\rho_1,\dots,\rho_m$使其为极小关系（即每个 ρ_i 都不是 I中关系的线性组合）。对于有界箭图代数 $A=KQ/I$，给定生成 I 的（极小）关系集合 $\rho_1,\dots,\rho_m$，我们在 Λ 中有（极小）等式 $\rho_1=0,\dots,\rho_m=0$，称为极小关系。

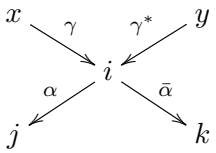
对于形如（1）的关系以及 Q 中的路径 w，若 w 是 ρ的一个项，即 $w=w_i$，其中某个 $i\in\{1,\dots,r\}$，则记作 $w\prec\rho$。此外，若 w是 Q 中的一条路径，则对于 $i\in\{1,\dots,m\}$ 和生成 I 的某些极小关系 $\rho_1,\dots,\rho_m$，若 $w\prec\rho_i$，我们将使用记号 $w\prec I$。

设 Λ 是一个由给定表示 $\Lambda=KQ/I$定义的代数。对于 $i\in Q_0$，模 $P_i=e_i\Lambda$构成模范畴 $\operatorname{mod}\Lambda$中所有两两不同构的不可分解投射模的完全集；对于 $i\in Q_0$，模 $I_i=D(\Lambda e_i)$构成模范畴 $\operatorname{mod}\Lambda$中所有两两不同构的不可分解内射模的完全集。对于 $i\in Q_0$，我们将相应的简单模 $S_i=P_i/\operatorname{rad}P_i\cong\operatorname{soc}I_i$记为 S_i。

我们始终假设代数 Λ 是对称的，即存在一个非退化的（结合）对称 K-双线性型 $\Lambda\times\Lambda\to K$。对于对称代数 Λ，对任意 $i\in Q_0$，都有 $P_i\simeq I_i$，因此特别地，Λ 是自内射的。我们还假设 Q 是连通的，或者等价地，Λ 作为代数是不可分解的。

对于 $i\in Q_0$，我们用 i^- 表示终止于 i的箭的集合，用 i^+ 表示起始于 i的箭的集合。在这篇论文中，$|i^-|$和 $|i^+|$的大小至多为 2。若对所有 $i\in Q_0$均有 $|i^-|=|i^+|=2$，则称箭图 Q为 2-正则；若对所有 $i\in Q_0$均有 $|i^-|=|i^+|\in\{1,2\}$，则称其为 双正则。回顾一下，若对于 $i\in Q_0$有 $|i^\pm|\leqslant 2$，则称 Q 为双串。

对于箭，我们采用如下记号和约定：用 α，$\bar{\alpha}$ 表示起始于顶点 i的箭，并约定当 $|i^+|=1$时 $\bar{\alpha}$ 不存在。类似地，我们用 γ，γ^* 表示终止于某个顶点 i的箭；同样，若 $|i^-|=1$，则 γ^* 不存在。于是 Q 有一个子箭图



注意，对于模 $M\in \mathrm{mod}\ \Lambda$，其上同调核是投射覆盖 $\pi\colon P(M)\to M\to M\in \mathrm{mod}\ \Lambda$ 的核 $\Omega(M)=Ker(\pi)$（它在同构意义下唯一）。若模 $M\in \mathrm{mod}\ \Lambda$ 满足对某个 $n\geqslant 1$ 有 $\Omega^d(M)\simeq M$，则称其为周期的；这样的最小数称为 M 的周期。模 $M\in \mathrm{mod}\ \Lambda$ 的逆上同调核 $\Omega^{-1}(M)$ 的概念，则通过内射包络对偶地定义。

令 $i\in Q_0$。回顾一下，存在自然同构 $\Omega(S_i)=\mathrm{rad}\ P_i=\alpha\Lambda+\bar{\alpha}\Lambda$ 和 $\Omega^{-1}(S_i)\cong(\gamma,\ \gamma^*)$ $\Lambda\subset P_x\oplus P_y$。特别地，由此可知，满同态 $[\alpha\ \bar{\alpha}]\colon P_i^+\to\Omega(S_i)$（其中$P_i^+=P_j\oplus P_k$）是 $\Omega(S_i)$ 的投射覆盖，而单态 $\left[\begin{smallmatrix}\gamma\\ \gamma^*\end{smallmatrix}\right]\colon\Omega^{-1}(S_i)\to P_i^-$（其中 $P_i^-=P_x\oplus P_y$）是 $\Omega^{-1}(S_i)$ 的内射包络（Λ 是对称的，见 [12, 引理 4.1]）。因此，若 S_i 是周期为 4 的模，则 $\Omega^2(S_i)\simeq\Omega^{-2}(S_i)$，故在 $\mathrm{mod}\,\Lambda$ 中存在如下形式的正合列

$$(*)\qquad 0\to S_i\to P_i\overset{d_3}{\to}P_i^-\overset{d_2}{\to}P_i^+\overset{d_1}{\to}P_i\to S_i\to 0$$

其中 $\mathrm{im}(d_k)\cong\Omega^k(S_i)$，对于 $k\in\{1,2,3\}$。按照我们的约定，P_y或 P_k可能不存在。我们可以假设 $d_1(x,y):=\alpha x+\bar{\alpha}y$，因为诱导的满同态 $[\alpha\ \bar{\alpha}]\colon P_i^+\to\Omega(S_i)$ 是 $\mathrm{mod}\,\Lambda$ 中 $\Omega(S_i)$ 的投射覆盖。调整箭 γ 或 γ^*（包括对表示的影响，即对 I 的生成元的影响）后，对于某种以 i 为终点的箭 γ,γ^* 的选取，我们可以固定 $d_3(e_i)=(\gamma,\gamma^*)$（见 [12,命题 4.3]）。

d_1 的核于是为 $\Omega^2(S_i)=\mathrm{im}(d_2)$，且至多有两个极小生成元。它们是幂等元 $e_x\in P_x=e_x\Lambda$ 和 $e_y\in P_y$ 在 $d_2\colon P_i^-\to P_i^+$ 下的像。我们分别将它们记为φ 和 ψ，它们都包含于 $P_j\oplus P_k$，因此我们也可以写作

$$\varphi=d_2(e_x,0)=(\varphi_{jx},\ \varphi_{kx})\ \text{ and }\ \psi=d_2(0,e_y)=(\psi_{jy},\ \psi_{ky}),$$

其中 φ_{jx} 属于 $e_j\Lambda e_x$（其他分量 φ,ψ也类似）。

回顾一下，在 $\mathrm{mod}\,\Lambda$ 中，任意同态 $d\colon P_x\oplus P_y\to P_j\oplus P_k$ 都可以表示为矩阵形式

$$M=\begin{pmatrix}m_{jx} & m_{jy}\\ m_{kx} & m_{ky}\end{pmatrix},$$

其中 m_{ab} 是 $\mathrm{mod}\,\Lambda$中的一个同态，与任意 $a\in\{j,k\}$, $b\in\{x,y\}$所对应的元素 $m_{ab}\in e_a\Lambda e_b$相对应。这样，d就成为乘以 M，即 $d(u)=M\cdot u$，其中 $u\in P_i^-$（对 P_i^-和 P_i^+中的向量采用列表示法）。

继续考虑 $\Omega^2(S_i)$ 的生成元，令 M_i 为一个矩阵，其列由 φ 和 ψ的分量构成，也就是说，d_2 由一个矩阵给出

$$M_i=\begin{pmatrix}\varphi_{jx} & \psi_{jy}\\ \varphi_{kx} & \psi_{ky}\end{pmatrix}.$$

将复合 $d_1d_2=0$ 和 $d_2d_3=0$ 改写为矩阵形式，我们得到以下恒等式

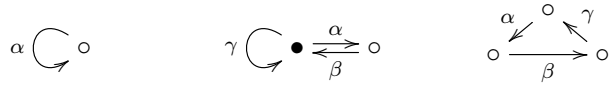
$$(1)\qquad (\alpha\ \bar{\alpha})\cdot M_i=0\ \text{ and }\ M_i\cdot\begin{pmatrix}\gamma\\ \gamma^*\end{pmatrix}=0$$

对于以 i 为终点的某种箭的选择 γ，γ^*。这至多给出两个分别以 i 为起点和终点的极小关系（参见 [12, 命题 4.3]）。

3. Weighted surface algebras

本节回顾加权曲面代数的定义，并讨论一些其他相关代数，包括奇异族高阶球面代数。这些代数是 TSP4（或 GQT）代数的主要实例，其性质将引出我们在下一节中即将讨论的一般事实。我们还概述具有球面箭图的 TSP4 代数的分类；参见定理 3.2。我们将在第 4 节看到，在包含 1-正则顶点的块中，该箭图自然出现在极小关系所涉及路径的描述中。这与 2-正则 GQT 代数分类中出现的四面体箭图情形类似 [12]。本节提到的另一个特殊箭图是三角形箭图，但它在分类中的作用略有不同（见第 6.6 节）。

首先，我们将说明什么是加权曲面（三角剖分）代数。所谓三角剖分箭图，是指由有限多个以下三种类型的块粘合而成的一个（2-正则）箭图 Q



I II III

其中，所谓粘合，是指任意块中的每个顶点 $\circ$ 都恰好与另一个块中的一个顶点 $\circ$ 粘合（粘合的精确定义见 [25, 第 2] 节）。于是， Q 的箭集合上存在一个置换 $f\colon Q_1 \to Q_1$，它固定每个 I 型块中的一个环；除此之外， f 具有形如 $(\alpha\ \beta\ \gamma)$ 的轨道。此外， Q 是 2-正则的，因此存在一个对合 $(-)^*\colon Q_1 \to Q_1$，它将任意箭 α 映射为从与 α相同的顶点出发的箭 $\bar{\alpha} \neq \alpha$。特别地，可以考虑第二个置换 $g\colon Q_1 \to Q_1$，其定义为$g(\alpha) = f(\alpha)$。现在，取任意一组整数 m_α 和参数 $c_\alpha \in K \setminus \{0\}$（其中 $\alpha \in Q_1$），它们在 g-轨道上为常数，并定义路径

$$A_\alpha := \alpha g(\alpha) \cdots g^{m_\alpha n_\alpha - 2}(\alpha) \text{ and } B_\alpha = A_\alpha g^{-1}(\alpha),$$

其中， n_α 是 α的 g型轨道的长度。我们假设对所有箭都有 $m_\alpha n_\alpha \geqslant 2$；若箭 α 满足 $m_\alpha n_\alpha = 2$，则称其为虚拟的。在最一般的版本中，我们还考虑边界函数，即任意函数 $b_\bullet\colon \partial Q_0 \to K$，它为任意顶点 $i \in \partial Q_0$赋予系数 b_i，其中 ∂Q_0 由那些具有环且该环包含于 I 型块中的顶点组成（有时称为边界顶点）。在此设定下，加权曲面（三角剖分）代数 是商 $\Lambda(Q, f, m_\bullet, c_\bullet, b_\bullet) = \Lambda := KQ/I$，其中 I由以下关系生成。

(1) 若 $\alpha \in Q_1$ 不是 I 型块中的环，则 $\alpha f(\alpha) - c_{\bar{\alpha}} A_{\bar{\alpha}}$。(1') 若 α 是 I 型块中的环，则 $\alpha^2 - c_{\bar{\alpha}} A_{\bar{\alpha}} - b_{s(\alpha)} B_\alpha$。(2) 对所有箭 $\alpha \in Q_1$，都有 $\alpha f(\alpha) g(f(\alpha))$；但 $f^2(\alpha)$是虚拟的，或 $f(\bar{\alpha})$是虚拟且$m_{\bar{\alpha}} n_{\bar{\alpha}} = 3$时除外。(3) 对所有箭 $\alpha \in Q_1$，都有 $\alpha g(\alpha) f(g(\alpha))$；但 $f(\alpha)$是虚拟的，或 $f^2(\alpha)$是虚拟且$m_{f(\alpha)} n_{f(\alpha)} = 3$时除外。

注。
(i) 最初，加权曲面代数 $\Lambda(Q, f, m_\bullet, c_\bullet)$ 的定义中不包含边界函数，或者等价地说，边界函数取为零。在本文中，我们采用上述最一般的版本，它涵盖了代数 $\Lambda(Q, f, m_\bullet, c_\bullet)$ 的所有底变形。这样，在主定理中便可以保留同构（而不是像 [12] 中那样使用底等价）。事实上，与形如 $\Lambda(Q, f, m_\bullet, c_\bullet)$ 的代数底等价的代数，恰好就是对于某个边界函数 $b_\bullet\colon \partial Q_0 \to K$ [2, 定理 1.2] 所对应的代数 $\Lambda(Q, f, m_\bullet, c_\bullet, b_\bullet)$。
(ii) 每个虚拟的箭 $\alpha \in Q_1$都满足 $A_\alpha = \alpha$，因此 $\bar{\alpha} f(\bar{\alpha}) - c_\alpha \alpha \in I$，所以 $\alpha \in J^2$不是 Gabriel 箭图 $Q_\Lambda \subset Q$中的一支箭。容易验证，虚拟箭要么是 II 型块中的环，要么是由两个共享两个顶点的三角形粘合而成的 2-圈中的箭。

因此，若 Λ 是 WSA，则其 Gabriel 箭图 Q_Λ 是有限个 I–III 型块及 V_1、 V_2的粘合。特别地，箭图 Q_Λ 是双正则的，且 1-顶点包含在 V_1、 V_2型块中。

(iii) 我们注意到，存在一些 TSP4 代数的例子，其 Gabriel 箭图不是双正则的，或不是双串的。我们不详述细节，只提及有一类称为 WSA 的虚变异的代数 [20], ，它们由箭图给出，这些箭图是四种类型的块粘合而成的：WSA 中的 I–III 型块，以及一种新型的 IV 型块，其中包含两个 1-顶点 $\bullet$ 和两个非正则顶点 $\circ$ （见[20, 引言]）。在大多数情况下，虚变异的 Gabriel 箭图包含 (2，3) 型和 (3，2) 型顶点，因此不是双串的。在一个特殊情形下，当我们粘合两个 IV 型块时，可以得到由虚箭构成的一个 2-圈，而该虚变异的 Gabriel 箭图就是球面箭图（下文将讨论）。

(iv) 我们提到，除少数称为例外代数的情形外，WSA 都是 TSP4（GQT）代数。这些例外代数包括所谓的奇异圆盘代数、三角形代数、球面代数和四面体代数。每个代数都是具有特定权和参数的 WSA，因此不满足对称性或周期性。由于球面代数和三角形代数这两种情形与双正则情形下的分类有关，下面将简要回顾它们。更多细节请参见 [13, 例 3.1–3.3 和 3.6]。

（vi）还有两个例外代数的高阶版本。事实上，第一个代数称为高阶四面体代数 $\Lambda = \Lambda(m,\ \lambda)$（简称 HTA），它是由三角剖分箭图 $Q = Q_\Lambda$ （与奇异四面体代数相同）给出的 TSP4 代数，但不同构于任何由该箭图给出的 WSA。具有类似模式的关系可视为定义 WSA 的关系的高阶扰动。第二个族由高阶球面代数 $S(m,\ \lambda)$（简称 HSA）组成，它们也有类似的描述（另见 [7]）。高阶球面代数与奇异球面代数具有相同的 Gabriel 箭图，但它们不同构于 WSA；见 [20,引理 5。2]。

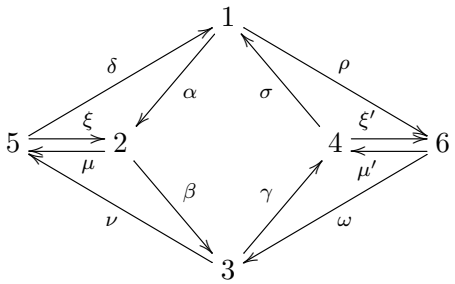
最后，回顾以下定理 [12, 主定理], ，它表明，在 Gabriel 箭图为 2-正则的情形下，WSA 几乎涵盖了所有 TSP4（或 GQT）代数。

定理 3.1. 设 A 是一个代数，其 *Gabriel* 箭图是 2-正则的，且至少有三个顶点。那么以下命题等价。

(i) A是一个 *TSP4* 代数。*(ii)* A是一个 *GQT* 代数。*(iii)* A 同构于一个非例外代数的加权曲面代数，或同构于高阶四面体代数。

本节的第二部分旨在讨论一些特殊的加权曲面代数，即球面代数和三角形代数，并给出一些分类结果。

首先考虑以下三角剖分箭图 Q

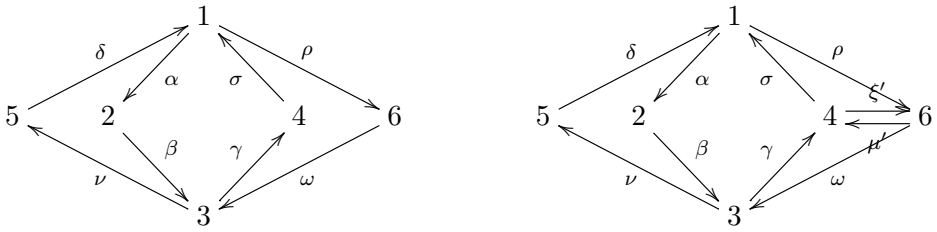


这是由四个三角形粘合而成的（注意， Q 是由一个包含四个三角形且具有相容定向的球面的某个三角剖分得到的 [13, 见例 3.2]）。显然，这里有四个 f-轨道和四个 g-轨道：

$$(\xi\ \mu),\ (\xi'\ \mu'),\ (\alpha\ \beta\ \gamma\ \sigma),\ \text{and}\ (\rho\ \omega\ \nu\ \delta)$$

长度分别为 $n_\xi = n_{\xi'} = 2$ 和 $n_\alpha = n_\rho = 4$。若权 $n = m_\xi$，$n' = m_{\xi'}$ 满足 n，$n' \geqslant 2$，则 $Q_\Lambda = Q$ 是 2-正则的，且所有形如 $\eta f(\eta)$ 的路径都出现在定义加权曲面代数 $S = \Lambda(Q,\ f,\ m_\bullet,\ c_\bullet)$ 的极小关系 (1) 中——注意，此时关系 (2) 和 (3) 对所有箭都成立。在这种情况下，I 是可容许的。利用定理 3.1 可得，具有 $Q_\Lambda = Q$ 的唯一 TSP4（或 GQT）代数 Λ 是加权曲面代数 $\Lambda(Q,\ f,\ m_\bullet,\ c_\bullet)$，其中 $m_\bullet$，$c_\bullet$ 满足 n，$n' \geqslant 2$（另见 [13, 例 3.6]）。注意，奇异球面代数仅在 $n = n' = 1$ 的情况下出现。

如果 n，n' 其中一个为 1，那么至少有一对虚箭（ξ，μ 或 ξ'，μ'）。此时，相应加权曲面代数的 Gabriel 箭图是以下两个箭图之一



分别记为 Q^S 和 $Q^{S'}$。箭图 Q^S 称为球面箭图，而 Q' 称为几乎球面箭图。

回顾一下，[15], 中引入的高阶球面代数已被证明与高阶四面体代数导出等价，但此前并未对由球面箭图给出的所有 TSP4 代数进行分类。以下近期结果 [7, （见定理 1.1] ）填补了这一空白。

定理 3.2. 设 Λ 是一个 *GQT* 代数，其 *Gabriel* 箭图为 Q^S。那么以下结论之一成立：

(a) Λ 同构于一个加权曲面代数 KQ/I（不包括例外代数），其中 Q 是带有四个虚箭 ξ、μ、ξ'、μ'的球面箭图。***(b)*** Λ 同构于一个高阶球面代数 $S(m, \lambda)$，其中 $m > 1$。

关于 Gabriel 箭图为 $Q^{S'}$ 的 GQT 代数的分类，请参阅 [7, 定理 1.2]。我们仅指出，高阶球面代数也可以实现为球面代数的迭代虚变异；另请参阅 WSA 定义之后的注(iii)。

最后，我们将简要讨论三角形箭图及其相关代数。具体而言，考虑以下三角剖分箭图 Q

$$\rho \circlearrowleft 1 \underset{\nu}{\overset{\delta}{\rightleftarrows}} 2 \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} 3 \circlearrowright \sigma$$

它由两个 II 型块粘合而成。置换 f 有两个轨道（$\alpha\ \sigma\ \beta$）和（$\nu\ \rho\ \delta$），由此诱导的置换 g 有一个长度为 4 的轨道（$\alpha\ \beta\ \nu\ \delta$），以及两个长度为 1 的轨道（$\rho$）、（$\sigma$）。与前一种情况一样，加权曲面代数 $\Lambda = \Lambda(Q,\ f,\ m_\bullet,\ c_\bullet)$ 取决于权 $n = m_\rho$，$n' = m_\sigma \geqslant 2$。事实上，若 n，$n' \geqslant 3$，则 $Q_\Lambda = Q$ 是 2-正则的；根据定理 3.1，所有以 Q 为 Gabriel 箭图的 TSP4 代数均已分类。若 n，n' 中有一个等于 2，则 Q_Λ 是一个双正则箭图，由 Q 删除一个环而得；并且它（在置换意义下）是如下形式的箭图

$$\rho \circlearrowleft 1 \underset{\nu}{\overset{\delta}{\rightleftarrows}} 2 \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} 3$$

称为近三角形箭图，记作 $Q^{T'}$。当 $n = n' = 2$ 时，两个环ρ，σ 均为虚拟的，因此 Λ 的 Gabriel 箭图如下

$$1 \underset{\nu}{\overset{\delta}{\rightleftarrows}} 2 \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} 3$$

称为三角形箭图，并记作 Q^T。

注。 由三角形或近似箭图给出的 GQT 代数分类，在证明的最后部分完成（见第 6.6 节）。由近三角形箭图 $Q_\Lambda = Q^{T'}$ 给出的 GQT 代数 Λ ，可唯一实现为一个加权曲面代数：该代数由含有一个虚环的三角剖分箭图给出（即粘合两个 II 型块）。三角形箭图 Q^T 则需要单独处理（第 6.6 节），因为它会产生具有此 Gabriel 箭图的 WSA 的两种可能情形。具体来说，我们可以从一个 WSA Λ（Q， f， $m_\bullet$， $c_\bullet$）得到 $Q_\Lambda = Q^T$；其中（Q， f）是两个 II 型块的粘合（带有两个虚环），也可以是两个 III 型块的粘合（带有一个由虚箭构成的 2-圈）。第一种情形中， Q_Λ 是从 Q 中删除两个虚环得到的；第二种情形中，则是删除由虚箭构成的 2-圈。相应的加权曲面代数构成了两个代数族，分别称为三角形代数和圆盘代数；它们在标量变形意义下同构。还需注意，两种情形中的置换 f （以及 g）具有不同的结构；详情见 [13, 示例 3.3 和 3.4]。

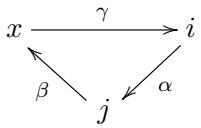
4. Algebras of generalized quaternion type

本节回顾 GQT 代数的已知事实，这些事实将在后文中用到。下文中，我们用 Λ 表示一个固定的 GQT 代数。

4.1. 一般性质。 以下结果可见于 [8, ，参见命题 4.1 和引理 4.3–4.4]。

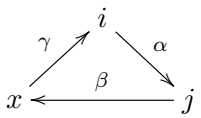
引理 4.1。 设 $\alpha\colon i \to j$ 和 $\beta\colon j \to k$ 是满足 $\alpha\beta \prec I$ 的箭。那么在 Q 中存在一支从 k 指向 i 的箭，使得 α 和 β 构成 Q 中一个三角形的一部分。

引理 4.2。 设 Q 包含一个三角形



其中 $\alpha\beta \prec I$。如果 γ 是 $x \to i$ 中唯一的箭，那么 $\gamma\alpha \prec I$ 和 $\beta\gamma \prec I$。如果存在重箭 γ、$\bar{\gamma}\colon x \to i$，那么存在一支 $\delta \in \{\gamma, \bar{\gamma}\}$，使得 $\delta\alpha \prec I$ 和 $\beta\delta \prec I$。

引理 4.3. 假设 i 是三角形中的一个 *1*-顶点



那么 x 和 j 都必须至少是 2-顶点。

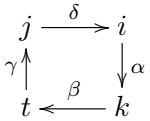
接下来的两个引理展示了长度为 3 的路径的类似性质（参见 [8, 命题 4.5 和引理 4.6]）。

引理 4.4. 假设存在一条路径

$$i \xrightarrow{\alpha} k \xrightarrow{\beta} t \xrightarrow{\gamma} j$$

使得 $\alpha\beta \nprec I$ 和 α 是 $i \to k$唯一的箭。若 $\alpha\beta\gamma \prec I$，则存在一条箭 $j \to i$。

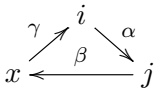
引理 4.5. 假设 Q包含一个交换方形



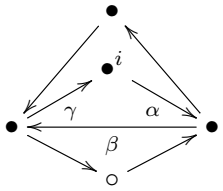
其中 $\alpha\beta\gamma \prec I$ 但 $\beta\gamma \nprec I$。若 δ 是唯一的箭 $j \to i$，则 $\beta\gamma\delta \prec I$。

注。上述所有引理都适用于所有简单模均为周期 4 的任意代数，因此尤其适用于任意 TSP4 代数（其 Gabriel 箭图任意）。若 Λ是具有双正则 Gabriel 箭图的 GQT 代数，则我们还知道更多。具体而言，来自[9, 的以下两个结果——命题 5.1 和主定理]——适用于任意具有双正则 Gabriel 箭图的 GQT 代数 $Q = Q_\Lambda$。

命题 4.6。设 Λ 是一个 *Gabriel* 箭图为 Q 的 *GQT* 代数，且 $i \in Q_0$ 是一个三角形中的1型顶点

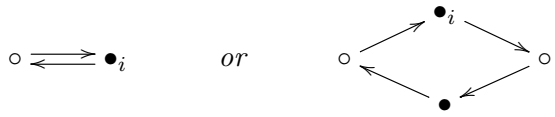


那么 Q 包含一个如下形式的块



其中 ○是一个2型顶点，而 ● 是1型顶点。

定理 4.7。若 *Gabriel* 箭图 $Q = Q_\Lambda$ 是双正则的，则每个1型顶点 $i \in Q_0$ 都包含在一个如下形式的块中

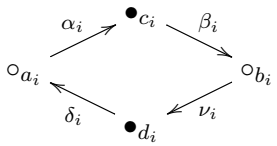


其中 ● 和 ○ 分别表示1型顶点和2型顶点。

上述定理证实，在双正则情形下， Q的 1-正则顶点属于所需的块，这与一般的加权曲面代数完全相同（见第 3 节）。

4.2. 围绕 1-顶点的极小关系。 现在，我们假设 Λ具有双正则 Gabriel 箭图$Q_\Lambda = Q$。根据定理 4.7（另见 4.6）， Q 的每个 1-顶点都包含在两类块 V_1 或 V_2中的一类内。现在我们将讨论 I 围绕此类块的极小关系。从现在起，我们假设 $Q = Q_\Lambda$ 不同于球面箭图 Q^S 以及三角形箭图或近三角形箭图 Q^T 和 $Q^{T'}$；见第 3 节。此外，我们还假设Q至少有三个顶点。

显然， Q 由 2-正则顶点和 1-正则顶点组成，并且根据定理 4.7，可以将 Q_0 中的所有 1-正则顶点分成两个顶点集合，即顶点 c_i、 d_i、 $i \in \{1, \dots, p\}$，以及顶点 y_i、 $i \in \{1, \dots, q\}$；其中，对于任意 $i \leqslant p$，顶点 c_i、 d_i 是块 B_i 中类型为V_2的 1-顶点



而 y_i 属于一个 B_i' 型为 V_1 的块：$\circ_{x_i} \prec^{\varepsilon_i}_{\eta_i} \succ \bullet_{y_i}$，若 $i \leqslant q$。特别地， Q 中的所有顶点x_i， a_i， b_i 都是 2-正则的，而 Q 中的 1-正则顶点全部是 y_i， c_i， d_i。还要注意，对所有 i， $a_i \neq b_i$ 均成立，因为否则 $Q = Q^T$ 就是三角形箭图，而目前已将其排除。

进一步注意到，对于任意 $i \in \{1, \dots, p\}$，在 Q 中 c_i 与 d_i 之间没有箭（并且 y_i 处没有环），因此由引理 4.1 可得 $\delta_i\alpha_i \neq I$、 $\beta_i\nu_i \neq I$（以及 $\eta_i\varepsilon_i \neq I$）。此外，我们可以假设至少有一个 $\alpha_i\beta_i \neq I$ 或 $\nu_i\delta_i \neq I$。事实上，如果其中一条路径（比如 $\nu_i\delta_i$）

涉及一个极小关系，那么根据引理 4.1，它是一个三角形（带有 1-顶点）的一部分，因此 Q 具有命题 4.6 中所描述的局部形状。但此时在 Q 中没有 $b_i \to a_i$ 箭，并且再次由引理 4.1 可得 $\alpha_i\beta_i \neq I$。因此，经过重新标记箭后，可以假设对于所有 $i \in \{1,\dots,p\}$，均有 $\alpha_i\beta_i \neq I$。特别地，由引理 4.1 和引理 4.2，我们还得到 $\beta_i\bar{\nu}_i \neq I$ 和 $\delta_i^*\alpha_i$。

临界块。具有 $\nu_i\delta_i \prec I$ 的块 B_i 将被称为临界块。我们注意到，非临界块 B_i 可能是命题 4.6 所示块的一部分，但此时有 $\nu_i\delta_i \neq I$。命题 4.6 中的块有时将被称为超临界块，因为 Q 中的任何临界块都包含于这样的块中。

最后注意，对于块 B_i'、$i \in \{1,\dots,q\}$，我们还有 $\varepsilon_i\eta_i \neq I$。事实上，如果 $\varepsilon_i\eta_i \prec I$，根据引理 4.1，我们在 x 处得到一个环，于是 Q 由两个顶点（和三条箭）组成，这与关于 Q 的假设相矛盾。此外，不存在箭 $t(\bar{\varepsilon}) \to y_i$ 和 $y_i \to s(\eta^*)$，因此引理 4.1 给出 $\eta_i\bar{\varepsilon}_i \neq I$ 和 $\eta_i^*\varepsilon_i \neq I$。

引理 4.8. 若 B_i 不是临界的，则 $\beta_i^*\nu_i$、$\delta_i\bar{\alpha}_i \neq I$ 以及所有路径

$$\alpha_i\beta_i\nu_i,\ \beta_i\nu_i\delta_i,\ \nu_i\delta_i\alpha_i,\delta_i\alpha_i\beta_i$$

都出现在 I的极小关系中。此外，若 $t(\nu_i)$（分别是 $t(\alpha_i)$）是一个2-顶点，则有 $\beta_i^*\nu_i \prec I$（分别有 $\delta_i^*\bar{\alpha}_i \prec I$）。

证明. 我们用 α,β,ν,δ 表示箭 $\alpha_i,\beta_i,\nu_i,\delta_i$，省略下标（顶点 $a := a_i,\dots$ 也采用相同约定）。由引理 4.1 和 4.2 可轻易得出 $\beta^*\nu \neq I$和 $\delta\bar{\alpha} \neq I$，因为根据定义，在非临界块中有 $\nu_i\delta_i \neq I$。因此，所有以来自 B_i 的箭开始或结束的长度为 2 的路径，都不出现在 I的极小关系中。特别地，利用引理 4.5，我们可以推得，B_i 中的长度为 3 的路径要么全都出现在关系中，要么全都不出现。反设这些路径全都不出现在 I的极小关系中。那么根据 [8, 引理 4.7], ，有 $\delta\alpha\beta\nu \neq I$。

注意，由引理 4.3 可知，a 和 b 都是 2-正则的。

现在，若 $b^* := s(\beta^*)$是一个 2-顶点，则我们在覆盖中得到如下野子范畴 g.

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & d & & d & & & & \\ & & & & \delta\downarrow & & \nu\uparrow & & & & \\ \bar{a} & \xleftarrow{\bar{\alpha}} & a & \xrightarrow{\alpha} & c & \xrightarrow{\beta} & b & \xleftarrow{\beta^*} & b^* & \xrightarrow{\sigma} & b' \end{array}$$

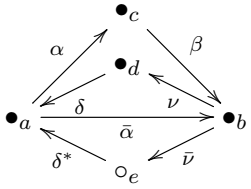
因此，我们可以假设 b^* 是一个 1-顶点，于是 $b^* = c_k$，d_k 或 y_k，其中 k。若 σ 表示终止于 b^*的唯一的箭，那么 $\sigma\beta^* \neq I$，因为否则，由引理 4.1 可知存在一支箭 $b \to s(\sigma)$，这是不可能的，因为 $s(\sigma)$是一个 2-顶点，而从b 出发的箭 ν，$\bar{\nu}$ 的目标顶点都只有 1-正则。还要注意，$\sigma\beta^*\nu \neq I$。事实上，若情况并非如此，则由引理 4.4 可知存在一支箭 $d_i \to s(\sigma)$，于是 $s(\sigma) = a_i$，从而 $Q = Q^S$，矛盾。因此，我们得到一个与上述类型相同的野子范畴，但 σ的定向相反。

这证明了断言的第一部分。最后可得，若 $t(\bar{\nu})$ 是 2-正则的，则 $\beta^*\bar{\nu} \prec I$（反向蕴含显然）。事实上，若此结论不成立，则经过 b 的四条长度为 2 的路径 $^-$均不涉及 I 的极小关系。但此时，$b := t(\bar{\nu})$ 是 2-正则的，因此我们得到以下覆盖中的野子范畴。

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & c & & \\ & & & & \downarrow\beta & & \\ b' & \xrightarrow{\beta^*} & b & \xrightarrow{\bar{\nu}} & \bar{b} & \xleftarrow{\sigma} & a' \\ & & \downarrow\nu & & & & \\ & & d & & & & \end{array}$$

对偶地，我们证明 $\delta\bar{\alpha} \prec I$，对于 $t(\bar{\alpha})$ 是 2-正则的情形。 □

现在，假设 设 B_i 是一个临界块。那么 $\alpha=\beta^*$ 和 B_i 包含在如下形式的一个块中



其中 $e=t(\bar{\nu})=s(\delta^*)$ 是 2-正则的。此外，我们记 $\tau=\delta^*$、 $\sigma=\bar{\alpha}$ 和 $\gamma=\bar{\nu}$。在此情况下，我们有如下结论。

引理 4.9。 如果 B_i 是临界的，那么路径 $\alpha\beta\nu$、 $\beta\nu\delta$、 $\nu\delta\alpha$ 和 $\delta\alpha\beta$ 都涉及 I 的极小关系，而 $\tau\alpha\beta\not\prec I$ 和 $\alpha\beta\gamma\not\prec I$。此外，我们有 $\tau\alpha\not\prec I$、 $\beta\gamma\not\prec I$ 以及 $\tau\sigma$、 $\sigma\gamma$、 $\gamma\tau\prec I$。

证明。 首先，由引理 4.1 可知， $\tau\alpha\not\prec I$ 和 $\beta\gamma\not\prec I$，因为不存在从（或到）1-正则顶点出发（或终止于）顶点 e 的箭。

接下来，注意到根据引理 4.2， $\sigma\nu\prec I$，因为我们有一个三角形（ν δ σ）和 $\nu\delta\prec I$。此外，我们得出 $\sigma\gamma\prec I$，因为否则我们将得到如下形式的野子范畴

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & c & & a & \xrightarrow{\alpha} & c & \xrightarrow{\beta} & b & \xleftarrow{\sigma} & a & \xrightarrow{\alpha} & c \\ & & & & \beta\downarrow & \swarrow\varepsilon & & & & & & & & & \\ e' & \longrightarrow & e & \xleftarrow{\gamma} & b & \xrightarrow{\nu} & d & & & & & & & & \end{array}$$

它同构于一个野单关系代数 $[22,$ ，参见定理 1.5 中的 XII。2]。由引理 4.2 可知，我们得到全部 $\sigma\gamma$, $\gamma\tau$， $\tau\sigma\prec I$。

最后，由引理 4.3（及其对偶）可知，只需证明 B_i 中的某条长度为三的路径出现在一个极小关系中。首先，注意到

$$\tau\alpha\beta\prec I \text{ or } \delta\alpha\beta\prec I,$$

因为否则，我们将得到如下类型的野子范畴 $\widetilde{\widetilde{\mathbb{E}}}_8$

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} & & & & & & & & & & & & d & & \\ & & & & & & & & & & & & \delta\downarrow & & \\ a & \xrightarrow{\sigma} & b & \xleftarrow{\beta} & c & \xleftarrow{\alpha} & a & \xrightarrow{\sigma} & b & \xleftarrow{\beta} & c & \xleftarrow{\alpha} & a & \xleftarrow{\tau} & e & \longrightarrow & \circ \end{array}$$

因此，剩下要证明的是 $\tau\alpha\beta\not\prec I$。对箭 σ 进行可能的调整后，我们有一个形如 $\tau\sigma=A_{\bar{\tau}}$ 的极小关系，其中 $A_{\bar{\tau}}$ 是以 $\bar{\tau}$ 开始的路径的组合。因此，我们可以写成 $A_{\bar{\tau}}=\bar{\tau}(\prime A_{\bar{\tau}})$，从而得到一个形如以下形式的 $\Omega^2(S_e)$ 生成元

$$\varphi=(\sigma,-(\prime A_{\bar{\tau}}))\in e_a\Lambda e_b\oplus e_{t(\bar{\tau})}\Lambda e_b.$$

现在可得 $\tau\alpha\beta\not\prec I$，因为否则，我们将得到一个形如$\tau\alpha\beta+\tau z_1+\bar{\tau}z_2=0$ 的极小关系，进而得到另一个形如 $\varphi'=(\alpha\beta+z_1,\ z_2)$ 的生成元，其中$z_1\in J$。但这样一来，存在 $x\in e_b\Lambda e_b$ 使得 $\varphi'=\varphi x$，比较第一坐标可得 $\sigma x=\alpha\beta+z_1$。设 $x\notin J$。那么左边是箭 σ 的数乘，因此，$z_1\notin J^2$ 也具有 $\lambda\in K^*$ 所对应的 $z_1=\lambda\sigma$ 形式。于是，要么 $\lambda\neq x$，从而得到 $(\lambda-x)\sigma=\alpha\beta\in J^2$，矛盾；要么 $\lambda=x$，但这时 $\alpha\beta=0$ 出现在一个极小零关系中，这并非如此（始终有 $\alpha\beta\not\prec I$）。最后，如果 $x\in J$，那么 $\varphi x\in J^2$，故 $z_1\in J^2$ 也成立，因此， $\alpha\beta$ 再次出现在一个形如 $\alpha\beta+z_1-\sigma x$ 的极小关系中，矛盾。□

对于上述临界块，我们对涉及 $\gamma\tau$ 和 $\nu\delta$的关系了解得更多一些。具体而言，以下引理成立。

引理 4.10。 我们可以假设 $\nu\delta$、 $\gamma\tau$ 都参与了一个交换关系$\nu\delta-\gamma\tau$。

证明。 为此，考虑关于 S_b的正合列

$$0 \to (\beta, \sigma)\Lambda \to P_c \oplus P_a \to P_d \oplus P_e \xrightarrow{\pi} \nu\Lambda + \gamma\Lambda \to 0.$$

我们可以写出 ker(π) 的两个极小生成元，它们都是 P_a 的像。具体来说，我们知道 $\gamma\tau$ 是三角形的一部分，因此有如下关系

$$\gamma\tau = \nu({}'A_\nu)$$

其中 ${}'A_\nu$ 是 $e_d\Lambda e_a$ 中的一个元素。因此，我们得到核的一个生成元 $({}'A_\nu,\ -\tau)e_1$，它属于 π。另一方面，由于 $\nu\delta \prec I$，我们可以假设

$$\nu\delta = \nu z_1\tau + \gamma z_2\tau$$

（其中 $z_1 \in J^2$）。事实上，我们可以写成 $\nu\delta = \nu z_1\tau + \gamma z_2\tau + \nu z_3\delta + \gamma z_4\delta$，其中某个 $z_1,\ \ldots,\ z_4 \in \Lambda$。但是 $z_3,\ z_4 \in J$，所以 $\nu z_3\delta + \gamma z_4\delta = \nu\delta z_3'\nu\delta + \gamma z_4'\nu\delta$，从而得到

$$\nu\delta - \nu\delta z_3'\nu\delta - \gamma z_4'\nu\delta = (1 - \nu\delta z_3' - \gamma z_4')\nu\delta = u\nu\delta,$$

其中 u 是一个单位元。通过对 u^{-1} 重新缩放，我们得到所需的关系。
因此，我们有一个生成元 $(\delta - z_1\tau,\ z_2\tau)e_1$，它属于 ker($\pi$)。但这样的生成元只有一个。由此可得

$$(\delta - z_1\tau, z_2\tau) = ({}'A_\nu, -\tau)w$$

其中 $w \in e_1\Lambda e_1$ 是一个单位元。我们有 $z_1 \in J^2$，因此可以将 δ 替换为 $\delta' = \delta - z_1\tau$，然后 $\delta' =' A_\nu$，从而得到 $\nu\delta' = \nu({}'A_\nu) = \gamma\tau$。□

最后，我们考虑涉及来自 $\mathbb{V}_1$型块的箭的关系。

引理 4.11. 对于任意 $i \in \{1, \ldots, p\}$，我们有

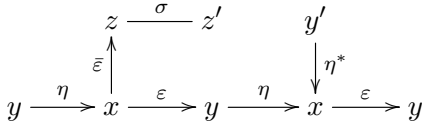
$$\varepsilon_i\eta_i\varepsilon_i, \eta_i\varepsilon_i\eta_i \prec I.$$

此外，$\eta_j^*\varepsilon_j \prec I$ 当且仅当 $t(\varepsilon_i)$ 是一个2-顶点。

证明。 按照前面的情形，我们简记 $\eta := \eta_i$ 和 $\varepsilon := \varepsilon_i$。反设 $\eta\varepsilon\eta, \varepsilon\eta\varepsilon$ 中有一个不涉及 I的极小关系。实际上，由于有交换方形 $(\eta\ \varepsilon\ \eta\ \varepsilon)$，根据引理 4.5，我们可以假设二者$\eta\varepsilon\eta, \varepsilon\eta\varepsilon \not\prec I$。因此，我们由 [8, 引理 4.7] 得出，此时 $\eta\varepsilon\eta\varepsilon \not\prec I$也成立。

现在考虑顶点 $z = t(\bar{\varepsilon})$。若 z 是一个 2-顶点，令 $\sigma : z' \to z$ 表示终止于 z、且不同于 $\bar{\varepsilon}$ 的第二条箭。若 z 是一个 1-顶点，令 $\sigma : z \to z'$ 表示从 z 出发的唯一的箭。我们断言，此时 $\bar{\varepsilon}\sigma \not\prec I$。事实上，由于 z 是一个 1-顶点，我们得出 $\bar{\varepsilon}\sigma = \alpha_k\beta_k$、$\nu_k\delta_k$ 或 $\varepsilon_k\eta_k$，其中某个 k。在第一种和最后一种情形下，断言显然成立；对于第二种情形，注意到 B_k 不可能是临界块的一部分。

最后，还需证明在 z 是一个 1-顶点的情况下，$\eta\bar{\varepsilon}\sigma \not\prec I$。否则，根据引理 4.4，我们会得到一条箭 $z' \to s(\eta) = y$，进而得到 $z' = x$，因此 Q 是三角形箭图 $Q = Q^T$，这已被排除在我们的考虑范围之外。因此，我们得出 Λ 包含以下 $\overset{\sim}{\sim}$ 型的野遗传子范畴。



这就证明了断言的第一部分。对于第二部分，只需注意到，$\eta^*\bar{\varepsilon}$ 是唯一一条经过 x 且可能出现在极小关系中的长度为 2 的路径。

因此，如果 z 是一个 2-顶点，那么 $\eta^*\bar{\varepsilon} \prec I$，否则我们就会得到以下类型为 $\mathbb{D}_4$的野性$\sim$遗传子范畴。

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & y & & \\ & & & & \downarrow{\scriptstyle \eta} & & \\ x' & \xrightarrow{\eta^*} & x & \xrightarrow{\bar{\varepsilon}} & z & \xleftarrow{\sigma} & z' \\ & & & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon} & & \\ & & & & y & & \end{array}$$

容易看出，如果 $\eta^*\bar{\varepsilon} \prec I$，那么 z 必须是一个 2-顶点，证明至此完成。 □

4.3. 总结。综上，由引理4.8-4.9可知，对于任意 $i \in \{1, \ldots, p\}$，我们可以固定下列涉及 B_i中长度为 3 的路径的 I 极小关系。

$$\rho_1^{(i)} = \alpha_i\beta_i\nu_i - \mathbf{A}_{\overline{\alpha_i}},\ \rho_2^{(i)} = \beta_i\nu_i\delta_i - \mathbf{A}_{\beta_i},\ \rho_3^{(i)} = \nu_i\delta_i\alpha_i - \mathbf{A}_{\overline{\nu_i}},\ \text{and}\ \rho_4^{(i)} = \delta_i\alpha_i\beta_i - \mathbf{A}_{\delta_i}.$$

此外，每个$\mathbf{A}_\alpha$ 都是 Q 中以箭 α 开始的路径的组合。事实上，每条从 a_i到 d_i且以 α_i 开始的ˆ路径都具有 $\alpha_i\beta_i \ldots \nu_i$ 的形式，因此我们可以将$\mathbf{A}_{\alpha_i}$写成 $\alpha_i\beta_i z\nu_i + A_{\alpha_i}$，其中 $z \in \mathcal{I}$，且ˆ A_{α_i} 的所有项都以 α_i 开始。这样，关系 $\rho_1^{(i)}$ 就变为

$$\alpha_i\beta_i(1-z)\nu_i - \hat{A}_{\overline{\alpha_i}},$$

因此，将关系按单位元 $1-z$ 的逆元重新缩放后，我们可以取新的关系 $\rho_1^{(i)}$，其中$\mathbf{A}_{\alpha_i} := (1-z)^{-1}\hat{}A_{\alpha_i}$ 的所有项都以 α_i 开始（并以 ν_i 结束）。类似地，可以证明（相差一个数乘因子）$\mathbf{A}_{\nu_i}$ 的所有项都以 ν_i 开始（并以 α_i 结束）。实际上，用同样的论证可以证明$\mathbf{A}_{\alpha_i}$ 以 $\beta_i^*\nu_i$ 结束，而 $\mathbf{A}_{\nu_i}$ 以 $\delta_i^*\alpha_i$ 结束。

此外，从 c_i 出发的每条路径都以 β_i 开头（从 c_i出发的唯一的箭），因此 $\mathbf{A}_{\beta_i}$ 的所有项都以 β_i 开头。于是我们可以写成 $\rho_2^{(i)} = \beta_i(\nu_i\delta_i - {}'A_{\beta_i})$。如上所述，经过单位元的重新缩放后，我们可以假设 ${}'A_{\beta_i}$ 的所有项（因此 $\mathbf{A}_{\beta_i}$的所有项）都以 δ_i^*结尾。同理，可以证明 $\mathbf{A}_{\delta_i}$ 的所有项都以 δ_i 开头并以 β_i^*结尾。事实上，我们很快将在第 5 节看到，每个 $\mathbf{A}_\alpha$ 都是某一条路径的数乘（是某个 socle 元素的一个初始子单项式）。

最后，由引理 4.11 可知，我们有如下形式的极小关系

$$\rho_5^{(j)} = \varepsilon_j\eta_j\varepsilon_j - \mathbf{A}_{\overline{\varepsilon_j}} \text{ and } \rho_6^{(j)} = \eta_j\varepsilon_j\eta_j - \mathbf{A}_{\eta_j},$$

$j \in \{1, \ldots, q\}$。应用与 $\mathbf{V}_2$, 型块情形类似的论证，我们可以取$\mathbf{A}^{\varepsilon_j}$，使其所有项都以 ε_j 开头并以 $\eta^*\varepsilon_j$ 结尾；并取$\mathbf{A}^{\eta_j}$，使其所有项都以 $\eta_j\bar{\varepsilon}_j$开头并以 η_j^*结尾。

因此，对于箭 $\alpha = \beta_i, \delta_i, \eta_i$ 或 $\bar{\alpha}_i, \bar{\nu}_i$，我们可以定义元素${}'A_\alpha$ 和 A'_α，使得

$$\overline{\alpha_i}({}'A_{\overline{\alpha_i}}) = \mathbf{A}_{\overline{\alpha_i}} = A'_{\overline{\alpha_i}}\nu_i,\ \overline{\nu_i}({}'A_{\overline{\nu_i}}) = \mathbf{A}_{\overline{\nu_i}} = A'_{\overline{\nu_i}}\alpha_i,\ \beta_i({}'A_{\beta_i}) = \mathbf{A}_{\beta_i} = A'_{\beta_i}\delta_i^*,$$

$$\delta_i({}'A_{\delta_i}) = \mathbf{A}_{\delta_i} = A'_{\delta_i}\beta_i^*,\ \overline{\varepsilon_j}({}'A_{\overline{\varepsilon_j}}) = \mathbf{A}_{\overline{\varepsilon_j}} = A'_{\overline{\varepsilon_j}}\varepsilon_j,\ \text{and}\ \eta_j({}'A_{\eta_j}) = \mathbf{A}_{\eta_j} = A'_{\eta_j}\eta_j^*.$$

现在考虑关于 S_{c_i}的正合列:

$$P_{c_i} \xrightarrow{\alpha_i} P_{a_i} \longrightarrow P_{b_i} \xrightarrow{\beta_i} P_{c_i}\ .$$

由关系 $\rho_2^{(i)}$ 可知，$\beta_i(\nu_i\delta_i - {}'A_{\beta_i}) = 0$，因此 $\Omega^2(S_{c_i})$ 的唯一生成元由元素 $\varphi = \nu_i\delta_i - {}'A_{\beta_i}$给出。利用正合列，我们推得 $\varphi\alpha_i = 0$，从而得到 $\rho_3^{(i)}$，于是 $\mathbf{A}_{\nu_i} = {}'A_{\beta_i}\alpha_i$，进而得到 $A'_{\nu_i} = {}'A_{\beta_i}$。

类似地，利用关于 S_{d_i} 和关系 $\rho_4^{(i)}$ 的正合列，我们得出 ${}'A_{\delta_i}\nu_i = \mathbf{A}_{\alpha_i}$，也就是说 $A'_{\alpha_i} = {}'A_{\delta_i}$。同样的论证也适用于 $\rho_6^{(j)}$，由此得到 $A'_{\varepsilon_j} = {}'A_{\eta_j}$。

5. Bases of projectives

本节旨在描述任意具有双正则 Gabriel 箭图的广义四元数型代数 Λ 的投射 Λ-模的基。全文假设 Q_Λ 不同于球面箭图 Q^S 以及三角形箭图和近三角形箭图 Q^T和 $Q^{T'}$。特别地，这样我们便可以使用上一节中描述极小关系的结果。

设 Λ 为一个具有双正则 Gabriel 箭图的固定 GQT 代数。我们采用第 4 节（定理 4.7 之后）引入的 $Q = Q_\Lambda$ 的顶点和箭的记号。在上一节中，我们主要描述了围绕 1-顶点的关系；本节则需要研究其他极小关系。

本节主要致力于描述对于 2-正则顶点 $i \in Q_0$而言的射影 P_i的一组基。当 i 为 1-正则时的情形将在最后讨论（见引理 5.12）。

固定一个 2-顶点 $i \in Q_0$，设从 i 出发的箭为 α，$\bar{\alpha}$，以 i为终点的箭为 γ，γ^*；令 $j = t(\alpha)$、$k = t(\bar{\alpha})$、$x = s(\gamma)$ 和 $y = s(\gamma^*)$。注意，由命题 4.6 可知，我们可以重新标记顶点，使得 j 为 1-正则当且仅当 x 为 1-正则；若确实如此，则它们属于 V1型或 V2型的同一块。同样地，如果 k，y 中的一个是 1-顶点，则它们属于 V1型或 V2型的同一块。

根据 i的邻点，我们需要考虑三种情形。如果 i属于 Q的“2-正则部分”，也就是说，j，k 都是 2-正则的，我们就称 i 为*A*型顶点。在其余两种情形中，i 有1-正则的前驱（等价地说，有后继）；如果 i 分别恰有一个或两个1-正则前驱，我们就称 i 为*B*型或*C*型。在这些情形中，从 i 出发的关系以及投射 P_i的根商都会呈现显著不同的行为，正如下文所示。

本节其余部分安排如下。在第一部分5.1中，我们将研究生成 I的其余关系，并证明所有从2-顶点出发的极小关系都具有一种共同形式，类似于1-顶点周围的关系 $\rho_1^{(i)}$，……，$\rho_6^{(i)}$（见第4.3节）。接着，在第5.2节中，我们分析对应于2-正则顶点的射影模的根商，并求得生成集：首先是A型2-顶点的生成集（引理5.8），然后是在一般情况下所有2-顶点的生成集（引理5.10）。最后一部分5.3包含两个关于投射模 P_i的基的结果：第一个针对2-顶点 i，第二个针对1-顶点。

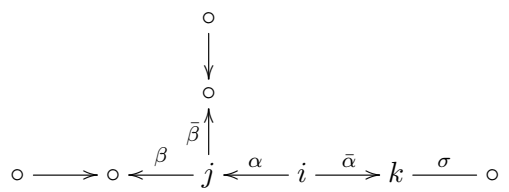
5.1. 从 2-顶点出发的极小关系。

我们先给出以下命题，它是对 [12,命题 4.2]的部分推广。

命题 5.1。设 i 是 Q的一个2-顶点，α 是从 i出发的一条箭。若 $j = t(\alpha)$ 是一个2-顶点，且 β、β是从 j出发的箭，则路径 $\alpha\beta$、$\alpha\beta$中有一条参与了 I的一个极小关系。

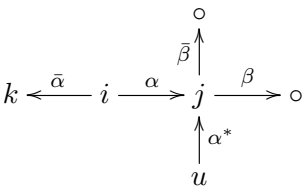
证明。反设 $\alpha\beta \neq I$ 和 $\alpha\beta \neq I$都成立。考虑第二条箭$\bar{\alpha}$：从 i出发的 $i \to k$。若 k 是一个2-顶点，则存在一条箭 σ：$l \to k$，$\sigma \neq \bar{\alpha}$；否则，对于 $k^+ = \{\sigma\}$，我们得到 $\bar{\alpha}\sigma \neq I$，因为此时 $\bar{\alpha} = \alpha_s$，ν_s 或 η_s，而只有当 $\bar{\alpha} = \nu_s$ 属于临界块 B_s时，才能有 $\bar{\alpha}\sigma \prec I$，这不可能，因为此时 $\alpha = \bar{\nu_s}$ 满足 $\alpha\beta \prec I$ 或 $\alpha\beta \prec I$（β 或 β 是 τ）。

因此，我们在覆盖中得到以下野子范畴



如果 $t(\beta)$ 和 $t(\beta)$ 都是 2-正则的（注意，σ 要么是一个不同于 $\bar{\alpha}$ 的箭 $l \to k$，要么它是从 k 出发的唯一的箭 $\bar{\alpha}\sigma \neq I$）。因此，我们可以假设其中一个

¯ $t(\beta)$ $t(\beta)$ 是一个 1-顶点，记作 $t(\beta)$。那么 j 的前驱中必有一个是 1-顶点（由命题 4.7 可知），因此有一个箭 $\alpha^*: u \to j$，其中 u 是一个 1-顶点。还可得出，$t(\beta)$ 必须是 2-正则的，因为 j 的第二个前驱是一个 2-顶点 i。特别地，我们有¯ ¯ $\alpha^*\beta \neq I$ 和 $\alpha^*\beta \neq I$，否则 $t(\beta)$ 就落在一个临界块中，进而 $\alpha = \delta_s^*$，因此 $\alpha\beta$ 会涉及一个极小关系。但这样一来，我们便在覆盖中得到一个如下形式的野性（遗传）子范畴



□

因此，对 A 型的 2-顶点 i 应用上述命题，我们得出存在箭 $\beta_1 \in j^+$ 和 $\gamma_1 \in k^+$，其中路径 $\alpha\beta_1$，$\bar{\alpha}\gamma_1$ 涉及极小关系。下面的结果表明，以 i 为起点的关系，其行为如 [12, 命题 4.2(ii)] 中对 2-正则 Gabriel 箭图所述；换言之，在双正则情形下，Q的“2-正则部分”中的关系，其行为与 2-正则情形完全相同。

引理 5.2. 我们可以假设路径 $\alpha\beta_1$ 和 $\bar{\alpha}\gamma_1$ 涉及 I的两个相互独立的极小关系。

证明。 反设 $\alpha\beta_1$，$\bar{\alpha}\gamma_1$ 涉及一个 C 型极小关系：

$$a\alpha\beta_1 + b\bar{\alpha}\gamma_1 \in J^3,$$

¯其中 a，$b \neq 0$。设 $u = t(\beta)$ 和 $v = t(\gamma)$，其中 $\beta = \beta_1$ 和 $\gamma = \bar{\gamma_1}$。特别地，路径 $\alpha\beta_1$，$\bar{\alpha}\gamma_1$ 终止于公共顶点 $t(\beta_1) = t(\gamma_1)$，该顶点不同于 u 和 v，否则我们便有 $j = k$，且 Q 是一个马尔可夫箭图（见 [12, 引理 5.2]）。

我们还可以假设 $\alpha\beta \neq I$ 和 $\bar{\alpha}\gamma \neq I$。事实上，若情况并非如此，则可以交换 β 和 β_1（或 γ, γ_1），从而得到涉及两个独立关系的路径（从 i 出发，终止于 $t(\beta_1)$ 和 u 或 v，它们不同于 $t(\beta_1)$）。此外，在 Q中有两条箭 $\delta: x \to i$ 和 $\delta^*: y \to i$，根据给定的关系和引理 4.1，我们得到一条箭 $t(\beta_1) \to i$，因此 $t(\beta_1) = x$ 或 y。我们可以假设 C 型关系从 i出发，终止于 $x = t(\beta_1)$。

我们断言此时 $y = x$。事实上，若 $y \neq x$，则 $\delta^*\alpha \neq I$，因为否则，根据引理 4.1，我们有一条箭 $j = t(\alpha) \to y$，所以 $y = x$ 或 u，于是根据假设，$y = u$，因此我们得到一个三角形 (δ^* α β)（不含重箭），其中 $\delta^*\alpha \prec I$，但 $\alpha\beta \neq I$，这与引理 4.2 矛盾。同理（利用 $\bar{\alpha}\gamma \neq I$ 和引理 4.1-4.2），可以证明 $\delta^*\bar{\alpha} \neq I$。现在应用命题 4.7，可推出 i 的两个前驱 x，y 均为 2-正则（因为根据一般假设，此处的后继 k，j 均为 2-正则）。因此，在 2-顶点 y 和 i 之间有一条箭$\delta^*: y \to i$，使得 $\delta^*\alpha \neq I$ 和 $\delta^*\bar{\alpha} \neq I$均成立，这与命题 5.1 矛盾。

因此，我们有 $y = x$ 和 δ，δ^* 是重箭 $x \to i$。现在，回想一下，我们有一个关于 S_i 的如下形式的正合列

$$0 \longrightarrow S_i \longrightarrow P_i \xrightarrow{d_1} P_x \oplus P_x \xrightarrow{d_2} P_j \oplus P_k \xrightarrow{d_3} P_i \longrightarrow S_i \longrightarrow 0$$

其中 $d_2 = [\varphi\ \psi]$, $\varphi = \left[\begin{smallmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{smallmatrix}\right]$, $\psi = \left[\begin{smallmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{smallmatrix}\right]$ 的行在 i 处终止，并诱导出两个（相互独立的）极小关系。根据引理 4.2，我们可以调整箭 δ，δ^*，从而同时得到 $\delta\alpha$，$\beta_1\delta \prec I$ 以及 $\delta^*\alpha$，$\beta_1\delta^* \neq I$。

如果我们还有 $\gamma_1\delta^* \neq I$，就会得到一个箭 δ^*（连接两个 2-正则顶点），其两条路径都以 δ^* 结尾且满足 $\neq I$，这与命题 5.1 的对偶相矛盾。因此，我们还有 $\gamma_1\delta^* \prec I$。

在可能调整箭 β_1 或 γ_1之后，我们可以假设 $\beta_1\delta$ 和 $\gamma_1\delta^*$ 分别出现在两个（相互独立的）如下形式的极小关系中

$$\beta_1\delta+\psi_1\delta^*=0 \qquad \text{and} \qquad \varphi_2\delta+\gamma_1\delta^*=0$$

换言之，我们得到 $\varphi_1=\beta_1$ 和 $\psi_2=\gamma_1$。现在利用 $[\alpha\ \bar{\alpha}]d_2=0$，可得到两个涉及 $\alpha\beta_1$ 和 $\bar{\alpha}\gamma_1$ 的相互独立的极小关系（由 d_2的列诱导）。证明至此完成。□

特别地，我们得到以下推论。

推论 5.3. 存在一个置换 f，其局部定义为 $f(\alpha)=\beta_1$和 $f(\bar{\alpha})=\gamma_1$，适用于 2-顶点之间的箭。诱导置换 g 如下给出： $g(\alpha)=\beta(=\beta_1)$ 和$g(\bar{\alpha})=\gamma(=\gamma_1)$。

因此，对于 2-顶点之间的所有箭 $\alpha\in Q_1$，我们可以定义一支箭 $f(\alpha)$（起点为顶点 $t(\alpha)$），使得 $\alpha f(\alpha)\prec I$和箭 $g(\alpha)=f(\alpha)$。如果 $\alpha\in Q_1$起于一个 2-顶点，却止于一个 1-顶点，那么对于某个 i， $\alpha=\alpha_i$、 ν_i或 ε_i成立，并且 $f(\alpha)$未定义。不过，我们可以分别定义 $g(\alpha)=\beta_i$、 δ_i 或 η_i。反之，如果 α 起于一个 1-顶点，却止于一个 2-顶点，那么对于某个 i， $\alpha=\beta_i$、 δ_i 或 η_i成立，因此我们分别定义 $f(\alpha)=\nu_i$、α_i 或 ε_i。我们还可以定义 $g(\alpha)=f(\alpha)$，但在这种情况下， $\alpha f(\alpha)\nprec I$。

综上，我们有一个置换 $g:Q_1\to Q_1$，以及一个部分定义的置换 f（对所有终点为 2-顶点的箭）。此外，只要 f有定义，就有 $g=f$；并且 $\alpha f(\alpha)\prec I$ 当且仅当 α不同于 β_i， δ_i， η_i，也就是说， $s(\alpha)$ 是一个 2-顶点。

我们可以人为地“扩展”置换 f，为箭 $\alpha=\alpha_i$， ν_i， ε_i定义 $f(\alpha)$，使得对所有箭 α，$f(\alpha)$都有定义，但 $f(\alpha)$ 可能是一条路径。实际上，我们可以令

$$f(\alpha_i)=\beta_i\nu_i,\ f(\nu_i)=\delta_i\alpha_i,\ \text{and}\ f(\varepsilon_i)=\eta_i\varepsilon_i.$$

这样，对于任意箭 $\alpha\in Q_1$，我们都有一条路径 $\alpha f(\alpha)$（长度为 2 或 3），使得 $\alpha f(\alpha)\prec I$ 当且仅当 $s(\alpha)$ 是一个 2-顶点。此外，若情况如此，则存在一个形如 $\alpha f(\alpha)-\mathbf{A}_{\bar{\alpha}}$ 的极小关系，其中 $\mathbf{A}_{\bar{\alpha}}\in J^2$。对于类型为 V_1 或 V_2 的块中的箭 α，我们对 $\mathbf{A}_{\bar{\alpha}}$ 的各项了解得更多；具体而言，第 4.3 节已证明

$$\mathbf{A}_{\bar{\alpha}_i}\in\bar{\alpha}_i\Lambda\beta_i^*\nu_i,\ \mathbf{A}_{\beta_i}\in\beta_i\Lambda\delta_i^*,\ \mathbf{A}_{\bar{\nu}_i}\in\bar{\nu}_i\Lambda\delta_i^*\alpha_i,\ \text{and}\ \mathbf{A}_{\delta_i}\in\delta_i\Lambda\beta_i^*,$$

而且：$\mathbf{A}_{\bar{\varepsilon}_i}\in\bar{\varepsilon}_i\Lambda\varepsilon_i$ 和 $\mathbf{A}_{\eta_i}\in\eta_i\Lambda\eta_i^*$。我们将在下文看到，类似的性质对所有元素 $\mathbf{A}_{\bar{\alpha}}$, $\alpha\in Q_1$都成立。

现在假设 i是 B 型或 C 型顶点。则 $\alpha f(\alpha)\prec I$和 $\bar{\alpha}f(\bar{\alpha})\prec I$，因为 $s(\alpha)=s(\bar{\alpha})=i$ 是一个 2-顶点，而这些路径（长度为 2 或 3）出现在如下形式的极小关系中

$$(*)\qquad \alpha f(\alpha)-\mathbf{A}_{\bar{\alpha}} \qquad \text{and} \qquad \bar{\alpha}f(\bar{\alpha})-\mathbf{A}_{\alpha},$$

其中至少一个是 $\rho_1^{(k)}$ 或 $\rho_3^{(k)}$ 的形式。于是，一个关系终止于 1-顶点，另一个终止于 2-顶点或另一个 1-顶点，因此它们始终是两个独立关系（终止于不同的顶点）。因此，我们得到以下推论。

推论 5.4。 如果 i是 B 型或 C 型的2顶点，那么路径 $\alpha f(\alpha)$和 $\bar{\alpha}f(\bar{\alpha})$有定义，且包含在 I 的两条相互独立的极小关系中。

还要注意，如果 $f(\alpha)$ 不是箭，那么 $\alpha f(\alpha)=\alpha g(\alpha)f(g(\alpha))$ 是路径 $\alpha_i\beta_i\nu_i$、$\nu_i\delta_i\alpha_i$ 或 $\varepsilon_i\eta_i\varepsilon_i$ 之一。

综上所述，对于任意 2-顶点 i，都有两个以 i 为起点、形如 $(*)$ 的相互独立的极小关系。若 i 属于 C 型，则根据上述讨论（见第 4.3 节），有 $\mathbf{A}_{\bar{\alpha}}\in\bar{\alpha}\Lambda g(\alpha)^*f(g(\alpha))$ 和$\mathbf{A}_{\alpha}\in\alpha\Lambda g(\bar{\alpha})^*f(g(\bar{\alpha}))$。否则， $\alpha,\bar{\alpha}$ 中有一个是连接两个 2-顶点的箭，不妨设为 $\bar{\alpha}$。于是，我们可以将涉及 $\bar{\alpha}f(\bar{\alpha})$ 的关系改写为 $\bar{\alpha}(f(\bar{\alpha})+z)-\mathbf{A}_{\alpha}$，使得新的 $\mathbf{A}_{\alpha}$ 属于 $\alpha\Lambda$，必要时调整箭

$f(\bar{\alpha})$。我们可以假设，任何此类调整都满足 $z \in \Lambda f(\bar{\alpha})^*$，因为在 $\Lambda f(\bar{\alpha})$ 中，z 的各项都可以跳过，只需对 $f(\bar{\alpha})$ 作数乘即可。对 $\bar{\alpha}$ 作类似调整，得到涉及 $\bar{\alpha} f(\bar{\alpha})$ 的极小关系 $(*)$，其中 $\mathbf{A}_\alpha \in \Lambda f(\bar{\alpha})^*$。类似地，若 $t(\alpha)$ 是一个 2-顶点（可调整箭 $f(\alpha)\ \alpha$），则可假设 $\mathbf{A}_{\bar{\alpha}} \in \bar{\alpha}\Lambda f(\alpha)^*$；否则，$\mathbf{A}_{\bar{\alpha}} \in \bar{\alpha}\Lambda g(\alpha)^* f(g(\alpha))$。于是我们可以写出 $\mathbf{A}_\alpha = \alpha({}'A)\alpha$ 和 $\mathbf{A}_{\bar{\alpha}} = \bar{\alpha}({}'A_{\bar{\alpha}})$，从而得到 $[\alpha\ \bar{\alpha}] \cdot M = 0$，其中矩阵 M 的形式如下

$$M = \begin{bmatrix} f(\alpha) & {}'A_\alpha \\ {}'A_{\bar{\alpha}} & f(\bar{\alpha}) \end{bmatrix},$$

可识别为一个同态 $m\colon P_x \oplus P_y \to P_j \oplus P_k$。

现在，与 S_i 相关联的正合列具有以下形式

$$P_i \xrightarrow{\begin{bmatrix}\gamma \\ \gamma^*\end{bmatrix}} P_x \oplus P_y \xrightarrow{d_2} P_j \oplus P_k \xrightarrow{[\alpha\ \bar{\alpha}]} P_i\ ,$$

根据 $[8, \text{引理 } 3.2\text{(i)}]$,，我们可以取 $d_2 = [\varphi\ \psi] = \begin{bmatrix}\varphi_1 & \psi_1 \\ \varphi_2 & \psi_2\end{bmatrix}$，使其第二列 ψ等于 M的第二列（可能需要调整箭头 γ, γ^*）。类似地，如果 $f(\alpha)$ 是一个箭头，那么我们可以取 φ等于 M的第一列 θ。如果 $f(\alpha)$ 不是箭头，但 ${}'A_{\bar{\alpha}} \notin J^2$，那么我们可以重复同样的论证。因此，我们假设 $f(\alpha)$ 和 ${}'A_{\bar{\alpha}}$ 都不是箭头，或者等价地，$\theta \in J^2$；由于 $f(\alpha) \not\prec I$，我们得出结论，θ不属于 J^3。显然，$[\alpha\ \bar{\alpha}] \cdot \theta = 0$，因此$\theta$是$d_1$的核，$=$是$d_2$的像，于是我们可以将 $\theta = \begin{bmatrix}\theta_1 \\ \theta_2\end{bmatrix}$ 写成 $\theta = d_2(X, Y)$ $= \varphi X + \psi Y$，其中 $X \in e_x \Lambda e_x$ 和 $Y \in e_y \Lambda e_x$。由此，我们得到 I中的以下两个关系

$$\theta_1 - \varphi_1 X + ({}'A_\alpha)Y \quad \text{and} \quad \theta_2 - \varphi_2 X - f(\bar{\alpha})Y.$$

由此得到矩阵 $N = \begin{bmatrix}1 & 0 \\ X & e_x \\ Y & e_y\end{bmatrix}$ 的恒等式 $M = d_2 \cdot N$。我们断言 $Y \in J^2$and $X \notin J$。事实上，否则 Y is an arrow $y \to x$（且 $\alpha = \nu_i$ 包含在命题 4.7 所给出的某个块中），但这样一来 $f(\bar{\alpha})Y \prec I$，这是不可能的，因为我们没有从 1 型顶点 $x$to $s(f(\bar{\alpha})) = k$ 的箭。因此，我们确实有 $Y \in J^2$，从而有 $\psi Y \in J^3$，进而有 $\varphi X \notin J^3$，因为 $\theta \notin J^3$。最后，由于 $\varphi \in J$，我们不可能有 $X \in J^2$，因此 X 要么是一个箭，要么是 $X \notin J$。但是 x 处没有环，因此 $X \notin J$ 是局部代数 $e_x \Lambda e_x$ 的一个单位元。由此可知，由矩阵 N 定义的映射 $v\colon$ $P_x \oplus P_y \to P_x \oplus P_y$ 是一个同构（其作用是调整箭 $\gamma\colon x \to i$），并且我们有如下的 mod Λ 中的交换图

$$\begin{array}{ccccccc} P_i & \xrightarrow{d_3} & P_x \oplus P_y & \xrightarrow{d_2} & P_j \oplus P_k & \xrightarrow{d_1} & P_i \\ {\scriptstyle 1}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle v} & & \uparrow{\scriptstyle 1} & & \uparrow{\scriptstyle 1} \\ P_i & \xrightarrow{d_3'} & P_x \oplus P_y & \xrightarrow{M} & P_j \oplus P_k & \xrightarrow{d_1} & P_i \end{array}$$

其中 $d_3' = v^{-1} d_3$，且所有竖直映射都是同构。这意味着，调整箭 γ，γ^* 后，我们可以取模 S_i 的一个正合列，其中 $d_2 = M$ 由从 i 出发的两个极小关系（$*$）确定；此外，若 $t(\alpha)$ 是一个 2-顶点，则还满足 $\mathbf{A}_\alpha \in \alpha\Lambda f(\bar{\alpha})^*$ 和 $\mathbf{A}_{\bar{\alpha}} \in \bar{\alpha}\Lambda f(\alpha)^*$；否则满足 $\mathbf{A}_{\bar{\alpha}} \in \bar{\alpha}\Lambda g(\alpha)^* f(g(\alpha))$。

特别地，从 i 出发的每两个关系（$*$）都会给出两个以 i结束的关系。具体而言，重写恒等式 $M \cdot d_3 = 0$，我们得到两个形如以下形式的极小关系

$$f(\alpha)\gamma -' A_\alpha \gamma^* \quad \text{and} \quad f(\bar{\alpha})\gamma^* -' A_{\bar{\alpha}}\gamma.$$

与之前一样，再次调整 γ，γ^* 后，我们可以假设 ${}'A_\alpha \in g(\alpha)\Lambda$ 和 ${}'A_{\bar{\alpha}} \in g(\bar{\alpha})\Lambda$，并得到两个形如 $\omega f(\omega)$ $-\mathbf{A}_{\bar{\omega}}$ 的关系，其中 $\omega = f(\alpha)$ 或 $f(\bar{\alpha})$ 是从 i 出发的关系的旋转；此外，对于这两个箭，我们还有 $\mathbf{A}_{\bar{\omega}} \in \bar{\omega}\Lambda f(\omega)^*$。

如此继续进行“旋转”，便可得到三角形中所有箭所需的关系（涉及含有 1-顶点的块中的路径的关系已知）。需要指出的是，如果箭 α曾被调整过一次，从而得到关系 $\alpha f(\alpha) - \mathbf{A}_{\bar{\alpha}}$，其中 $\mathbf{A}_{\bar{\alpha}} \in \bar{\alpha}\Lambda f(\alpha)^*$，那么此后无论如何进一步调整（$\alpha$ 或 $f(\alpha)$），这些性质都会保持不变；也就是说，我们仍有 $\alpha f(\alpha) \prec I$（针对

一组新的极小关系），且可能改变的 $\mathbf{A}_{\bar{\alpha}}$ 也属于 $\bar{\alpha}\Lambda f(\alpha)^*$。因此，对于任意 2-正则顶点 $i \in Q_0$，我们可以取关于 S_i 的正合列，其中中间映射d_2 由如下形式的矩阵 M 给出，该矩阵由从 I出发的两个关系（$*$）确定。对于 1-顶点，利用第 4.3 节中的关系，同样可以得到这一结论。由于 I 中的所有关系都由单模正合列所诱导的极小关系生成，我们可以得出，存在一组生成 I的极小关系，其中包括所有关系 $\rho_1^{(i)}$、.....、 $\rho_6^{(i)}$，以及所有关系 $\alpha f(\alpha) - \mathbf{A}_{\bar{\alpha}}$; 后一类关系对应于 2-顶点之间的箭 α，其中 $\mathbf{A}_{\bar{\alpha}} \in \bar{\alpha}\Lambda f(\alpha)^*$。此外，对于所有箭 α，我们都有 $'A_\alpha = A'_{g(\alpha)}$（另见第 4.3 节）。

5.2. **根商与生成元**。现在，我们将研究与 2-正则顶点相关联的射影模的根商。下面的推论描述了 A 型顶点情形下的第二个商。

推论5.5. 若 i 是一个 A 型2-顶点，则陪集 $\alpha g(\alpha) + J^3$和 $\bar{\alpha}g(\bar{\alpha}) + J^3$构成 e_iJ^2/e_iJ^3 的一组基。

注。注意，对于一个具有 1-正则后继的 2-顶点 i，例如 $j = t(\alpha)$，e_iJ^2/e_iJ^3 可能是一维的，但对于更高的 k，$\dim_K e_iJ^k/e_iJ^{k+1} = 2$。也就是说，当 $\alpha = \alpha_i$ 位于临界块 B_i 中且满足 $\alpha_i\beta_i\nu_i \notin J^3$ 时，就会出现这种情况。此时，模去 J^3，必有 $\alpha_i\beta_i\nu_i = \mathrm{A}_{\bar{\alpha}} \equiv \bar{\alpha}g(\bar{\alpha})$。在这种情况下，箭 α、$\bar{\alpha}$ 生成第一个根商；但对于第二个根商，我们只有一个生成元 $\alpha g(\alpha) = \alpha_i\beta_i$，因为所有其他长度为 2 的路径都是 $\bar{\alpha}g(\bar{\alpha}) \equiv \alpha_i\beta_i\nu_i$，它属于 J^3；以及 $\bar{\alpha}f(\bar{\alpha}) = \mathrm{A}_{\alpha}$，它也属于 J^3，因为 Q 中所有以 α 开始并以 $t(f(\bar{\alpha}))$ 结束的路径，其长度均为 $\geqslant 3$（B_i 包含在命题 4.6 陈述中所列出的某个块内）。因此 $\dim_K e_iJ^2/e_iJ^3 = 1$，而 $\alpha g(\alpha)$ 的陪集是一个生成元。但进一步的步骤表明，维数会增加，即 $\alpha_i\beta_i\nu_i \equiv \bar{\alpha}g(\bar{\alpha}) \in J^3$ 和 $\alpha_i\beta_i\bar{\nu}_i = \alpha g(\alpha)g^2(\alpha)$ 的陪集生成 e_iJ^3/e_iJ^4。

另请注意，对于一个 1-顶点 i, $i^+ = \{\alpha\}$，商 e_iJ^2/e_iJ^3 由路径 $\alpha f(\alpha)$ 和 $\alpha g(\alpha)$ 的陪集生成。

现在，我们将给出一些预备引理。下文中，我们用记号 $\Theta_k(\eta)$ 表示沿着箭 $\eta \in Q_1$的 g-回路、长度为 k的路径 $\eta g(\eta) \cdots g^{k-1}(\eta)$。

引理 5.6。设 α为箭 $\alpha = \alpha_i$或 ν_i。那么 $\alpha g(\alpha)f(g(\alpha)) = \mathbf{A}_{\bar{\alpha}} \in J^4$或 $\mathbf{A}_{\bar{\alpha}} \equiv \Theta_k(\bar{\alpha})$，对于 $k = 2$或 3（模 J^4）。在第二种情况下，我们有 $g^{-1}(\alpha)\mathbf{A}_{\bar{\alpha}} \in J^5$。

证明。我们用 β, ν表示箭 $g(\alpha)$ 和 $f(g(\alpha)) = f(\beta)$ 和 $\delta = g(\nu)$。设 $j = t(\alpha), k = t(\bar{\alpha})$ 为从 a 出发的箭的终点：$= a_i$，而 $x = s(\delta) = t(\nu)$，$y = s(\delta^*)$ 为终止于 a 的箭的源顶点（这是一个 2-顶点）。那么 $\beta f(\beta) \neq I$，因为该路径始于 1-顶点；又由关系 4.3，$\alpha\beta\nu = \mathbf{A}_{\bar{\alpha}}$。注意，每条路径 $p \prec \mathbf{A}_{\bar{\alpha}}$ 都是一条从 $\bar{\alpha}$ 出发并以 $\beta^*\nu$结束的路径。

当然，如果每个 $p \prec \mathrm{A}_{\bar{\alpha}}$ 的长度都是 $\geqslant 4$，那么 $\mathrm{A}_{\bar{\alpha}}$ 属于 J^4，问题便解决了。否则，我们有一个长度为 2 或 3 的项 p。第一种情况下，必有 $\bar{\alpha} = \beta^*$，于是 $p = \beta^*\nu = \bar{\alpha}g(\bar{\alpha})$ 是 $\mathrm{A}_{\bar{\alpha}}$中唯一长度为 2 的项（其余项都属于 J^4），因此模 J^4 有 $\alpha\beta\nu = \mathrm{A}_{\bar{\alpha}} \equiv \bar{\alpha}g(\bar{\alpha}) = \Theta_2(\bar{\alpha})$，如所需。若最短长度的项 $p \prec \mathrm{A}_{\bar{\alpha}}$ 长度为 3，则 $\bar{\alpha} \neq \beta^*$，且 $p = \bar{\alpha}\beta^*\nu$ 是 $\mathrm{A}_{\bar{\alpha}}$ 中唯一长度为 3 的项，因此模 J^4 可得 $\mathrm{A}_{\bar{\alpha}} \equiv p$。在这种情况下，顶点 $t(\bar{\alpha}) = k$ 不能是 1-顶点，因为它会包含在一个 V_2, 型的块中，进而得到 $Q = Q^S$，这就产生矛盾。因此，k、y 都是 2-正则的，并且有箭 $f(\bar{\alpha})$: $k \to y$ 和 $f^2(\bar{\alpha}) = \delta^*$: $y \to a$。我们可以假设 $f(\bar{\alpha}) \neq \beta^*$，因为否则会有一个极小关系 $\bar{\alpha}f(\bar{\alpha}) = \mathrm{A}_{\alpha}$，其中 $\mathrm{A}_\alpha = z\alpha\beta$，于是 $p = \mathrm{A}_\alpha\nu$，因此我们有关系 $\alpha\beta\nu = cp + \mathrm{A}_{\bar{\alpha}} = \mathrm{A}_{\bar{\alpha}} = cz\alpha\beta\nu + \mathrm{A}_{\bar{\alpha}}$，其中某个 $c \in K^*$。接着用单位元 $1 - cz$重新缩放后，可以从 $\mathrm{A}_{\bar{\alpha}}$中去掉项 cp，得到关系 $\alpha\beta\nu = \mathrm{A}_{\bar{\alpha}}$，其中新的 $\mathrm{A}_{\bar{\alpha}} := (1 - cz)^{-1}\,\tilde{}\,\mathrm{A}_{\bar{\alpha}} \in J^4$不含形如 $\bar{\alpha}\beta^*\nu = \bar{\alpha}f(\bar{\alpha})g(f(\bar{\alpha}))$ 的项。由此，我们证明了 p 必为 $p = \bar{\alpha}\beta^*\nu = \bar{\alpha}g(\bar{\alpha})g^2(\bar{\alpha}) = \Theta_3(\bar{\alpha})$ 的形式，断言得证。

还需证明，当 $\mathbf{A}_{\bar{\alpha}} \equiv p$ 是长度为 $k=2$ 或 3 的路径 $p=\Theta_k(\bar{\alpha})$ 时，$Z=g^{-1}(\alpha)\mathbf{A}_{\bar{\alpha}} \in J^5$。

如果 $p=\Theta_2(\bar{\alpha}) = \bar{\alpha}\nu$，那么包含 α 的块出现在命题 4.6 所示的块中，且 $\bar{\alpha}=f(g^{-1}(\alpha))$，因此我们有如下形式的极小关系

$$g^{-1}(\alpha)\bar{\alpha}=\mathbf{A}_{\bar{\sigma}},$$

其中 $\sigma = g^{-1}(\alpha)$，且所有路径 $p \prec \mathbf{A}_{\bar{\sigma}}$ 都以 $\bar{\sigma}$ 开始并以 $\alpha\beta$ 结束。由于 $t(\bar{\sigma}) \neq a = s(\alpha)$，我们得出 $\sigma f(\sigma) = \mathbf{A}_{\bar{\sigma}} \in J^4$，从而 $Z=\sigma f(\sigma)\nu \in J^5$。

最后，设 $p=\Theta_3(\bar{\alpha}) = \bar{\alpha}\beta^*\nu$。此时，$Z \equiv \sigma p = \sigma f(\sigma)\beta^*\nu$。如上所述，我们得到一个极小关系 $\sigma f(\sigma) = \mathrm{A}_{\bar{\sigma}}$，其中 $\mathrm{A}_{\bar{\sigma}}$ 的各项都以 $\bar{\sigma}$ 开始，并以 $(\bar{\alpha})^* = f^{-1}(\beta^*)$ 结束。如果 $\sigma f(\sigma) = \mathrm{A}_{\bar{\sigma}} \in J^3$，那么显然 $Z \in J^5$，无需证明。若 $\mathrm{A}_{\bar{\sigma}}$ 含有一个由 $cq, c \in K^*$ 构成的项，且其长度为 2，那么 $q=\bar{\sigma}(\bar{\alpha})^* = \bar{\sigma}g(\bar{\sigma})$ 是 $\mathrm{A}_{\bar{\sigma}} \equiv q$ 模 J^3 中涉及的唯一一条长度为 2 的路径，于是 $\sigma p \equiv q\beta^*\nu = \bar{\sigma}f^{-1}(\beta^*)\beta^*\nu$。但是，$f^{-1}(\beta^*)$ 是 Q 中连接两个 2-顶点的箭，因此我们得到如下形式的极小关系：$f^{-1}(\beta^*)\beta^* = \mathrm{A}_{\zeta}$，其中所有路径 $r \prec A_{\zeta}$ 都以 $\zeta = f^{-1}(\beta^*)$ 开始并以 $\alpha\beta$ 结束。但这样一来 $\mathrm{A}_{\zeta} \in J^3$，因此 $Z \equiv \sigma p \equiv \bar{\sigma}\mathrm{A}_{\zeta}\nu \in J^5$。□

对于类型为 V_1 的块，可以证明如下结论。

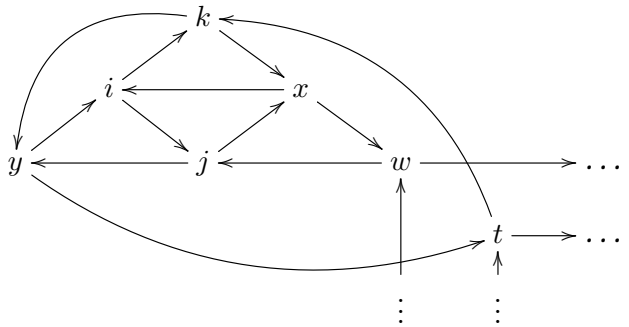
引理 5.7. 对于任意箭 $\alpha=\varepsilon_i$，都有 $\alpha g(\alpha)f(g(\alpha)) = \mathbf{A}_{\bar{\alpha}} \in J^4$。

证明。简记为 $\eta=\eta_i$, $\varepsilon=\varepsilon_i$。显然，所有路径 $p \prec \mathbf{A}_{\bar{\alpha}}$ 的长度均为 $\geqslant 4$，但 $p=\bar{\alpha}\eta^*\varepsilon = \bar{\varepsilon}\eta^*\varepsilon$除外；此时它是 $\mathbf{A}_{\bar{\alpha}} \equiv \Theta_3(\bar{\alpha})$。在第二种情况下，$Q$ 必须是一个类型为 V_1 的块（$\alpha\ \eta$）与一个类型为 V_1 或 II 的块粘合而成的；于是 Q 要么是三角形箭图 Q^T，要么是近三角形箭图 $Q^{T'}$，而这两种情况目前都不在我们的考察范围内。□

现在，以下引理描述了 A 型顶点的根商。

引理 5.8。 若 i 是 A 型的 2-顶点，α、$\bar{\alpha}$ 是从 i 出发的箭，则商空间 e_iJ^k/e_iJ^{k+1}、$k \geqslant 1$ 由沿 α 的 g-回路和 $\bar{\alpha}$ 的单项式的陪集张成。特别地，我们有 $\text{维数}_K\, e_iJ^k/e_iJ^{k+1} \leq 2$。

证明。根据假设，顶点 $j=t(\alpha)$ $k=t(\bar{\alpha})$ 是 2-正则的，因此，x，y 也是 2-顶点（见命题 4.7）。我们无需考虑从顶点 i 出发有两个 C 型关系的情形。事实上，假设从 i 出发并在顶点 x、y 处结束的两个 C 型关系。实际上，Q 有如下子箭图



若 $w=t$，则该子箭图是双正则的（等于四面体箭图），并且等于 Q，所以我们无需考虑这种情形。否则，$w \neq t$，那么 w、t 不可能是 1-顶点；这由包含 1-顶点的块的形状可知（命题 4.7）。因此它们是 2-顶点，于是我们可以应用 [12, 引理 7.1]；特别地，$\dim e_i\Lambda = 6$，且根商由所需的陪集张成。

现在我们将分两种情况，通过对 $k \geqslant 2$ 进行归纳来证明这一断言（$k=1$ 的情形显然）：

a) 不存在从 i出发的 C 型关系；b) 存在（恰好）一个从 i出发的 C 型关系 $\alpha f(\alpha) + \bar{\alpha}g(\bar{\alpha}) \in J^3$。

因此，在情形 a) 或 b) 中，我们分别可以选择一条箭，记为 $\bar{\alpha}$，使得 $\bar{\alpha}f(\bar{\alpha}) \in J^3$，并且第二条箭满足 $\alpha f(\alpha) \in J^3$ 或 $\alpha f(\alpha) \equiv \bar{\alpha}g(\bar{\alpha})$（模 J^3）。对于沿着 $\alpha, \bar{\alpha}$ 的 g-轨道的路径 $\Theta_k(\alpha)$ $\Theta_k(\bar{\alpha})$（长度为 k），我们采用记号 $\Theta_k, \bar{\Theta}_k$。此外，令 $\sigma_k = g^{k-1}(\alpha)$ 表示 Θ_k 上的最后一个箭头，令 $\rho_k = g^{k-1}(\bar{\alpha})$ 表示 $\bar{\Theta}_k$ 上的最后一个箭头。

现在，我们断言对于所有 $k \geqslant 2$，以下条件成立

$$(*) \qquad \bar{\Theta}_{k-1}f(\rho_{k-1}) \in J^{k+1} \text{ and } \Theta_{k-1}f(\sigma_{k-1}) \in J^{k+1} \text{ or } \equiv \bar{\Theta}_k \text{ (modulo } J^{k+1}),$$

只要路径有定义即可。这也意味着，对于任意 $k \geqslant 2$，$e_i J^k = \langle \Theta_k, \bar{\Theta}_k \rangle + e_i J^{k+1}$，因此断言得证。

若 $k = 2$，则有 $\Theta_{k-1}f(\sigma_{k-1}) = \alpha f(\alpha)$ 且 $\Theta_{k-1}f(\rho_{k-1}) = \bar{\alpha}f(\bar{\alpha})$，因此根据假设，条件（$*$）成立。只需注意，$e_i J^k$ 中的所有路径都是 $\Theta_k, \bar{\Theta}_k$，并且可能是 $\Theta_{k-1}f(\sigma_{k-1})$ 或 $\bar{\Theta}_{k-1}f(\rho_{k-1})$。根据（$*$），最后两条路径模 J^{k+1} 为 0 或 $\bar{\Theta}_k$，因此 $e_i J^k / e_i J^{k+1}$ 由 Θ_k, Θ_k 的陪集张成。在 $k = 2$ 的情况下，根据假设，箭 $f(\alpha)$ 和 $f(\bar{\alpha})$ 有定义。

假设对于某个 $k \geqslant 2$，$(*)$ 成立，并将箭 ρ_k, σ_k 记作 ρ, σ。若 $f(\rho)$ 有定义，则分两种情况。

首先，假设 $\rho f(\rho) \not\prec I$，或者等价地，$s(\rho)$ 是一个 1-顶点。那么箭 $\theta = \rho_{k-1}$ 是 α_i, ν_i 或者 ε_i，并且 因此

$$\bar{\Theta}_k f(\rho) = \bar{\Theta}_{k-2}\theta g(\theta) f(g(\theta)) = \Theta_{k-2}\mathbf{A}_{\bar{\theta}}.$$

根据假设，必有 $k \geqslant 3$，因为否则，$\bar{\alpha} = \rho_1$ 就是一条箭，其目标顶点 $t(\rho_1) = s(\rho_2)$ 是 1-正则的，这与关于 i 的假设矛盾。因此，我们得出 Θ_{k-2} 至少有一条箭，所以路径 $\bar{\Theta}_{k-2}\mathbf{A}_{\bar{\theta}}$ 包含一个子路径 $g^{-1}(\rho)\mathbf{A}_{\bar{\theta}}$，根据引理 5.6 和 5.7，该子路径属于 J^5。由此可得 $\bar{\Theta}_k f(\rho_k) \in J^{k+2}$。

接下来，设 $\rho f(\rho) \prec I$，于是 $\rho f(\rho) \in J^3$，或者我们有一个 C 型关系 $\rho f(\rho) + \bar{\rho}g(\bar{\rho}) \in J^3$。在第一种情况下，显然 $\bar{\Theta}_k f(\rho) = \bar{\Theta}_{k-1}\rho f(\rho) \in J^{k+2}$。在第二种情况下，我们得到

$$\bar{\Theta}_k f(\rho) \equiv \bar{\Theta}_{k-1}\bar{\rho}g(\bar{\rho}) = \bar{\Theta}_{k-1}f(\rho_{k-1})g(\bar{\rho}) \in J^{k+2},$$

因为 $\bar{\Theta}_{k-1}f(\rho_{k-1})$ 有定义且属于 J^{k+1}，这是由归纳假设得出的。

现在，假设 $f(\sigma)$ 有定义。如上所述，在 $\sigma f(\sigma) \not\prec I$ 的情况下，我们有 $\Theta_k f(\sigma) = \Theta_{k-2}\mathbf{A}_{\bar{\theta}}$，其中 $\theta = \sigma_{k-1}$ 为 α_i, ν_i 或 ε_i。在这种情况下，由于对 i 的假设，我们有 $k \geqslant 3$，因此根据引理 5.6、5.7，$\Theta_k f(\sigma) \in J^{k+2}$。

如果路径 $\sigma f(\sigma)$ 涉及某个极小关系，那么它要么属于 J^3，要么存在一个 C 型关系 $\sigma f(\sigma) + \bar{\sigma}g(\bar{\sigma}) \in J^3$。与 $\bar{\Theta}_k f(\rho)$ 的情形类似，在第一种情况下，我们得到 $\Theta_k f(\sigma) = \Theta_{k-1}\sigma f(\sigma) \in J^{k+2}$，而

$$\Theta_k f(\sigma_k) = \Theta_{k-1} \equiv \Theta_{k-1}\bar{\sigma}g(\bar{\sigma}) = \Theta_{k-1}f(\sigma_{k-1})g(\bar{\sigma})$$

在第二种情况下，模 J^{k+2}。对于后一种情况，根据归纳假设，我们有 $\Theta_{k-1}f(\sigma_{k-1}) \in J^{k+1}$，或者它模 J^{k+1} 属于 $\equiv \bar{\Theta}_k$。因此，同样在第一种情况下，我们得到 $\Theta_k f(\sigma) \in J^{k+2}$；而在第二种情况下，我们得到 $\Theta_k f(\sigma) \equiv \bar{\Theta}_k g(\bar{\sigma})$。最后，根据前一部分，若 $g(\bar{\sigma}) = f(\rho_k)$（有定义），则最后一条路径属于 J^{k+2}；否则，它就是 Θ_{k+1}。这表明 $(*)$ 对 $k+1$ 成立，因而对所有 $k \geqslant 2$ 都成立。□

因此，对于任意满足 $i^+ = \{\alpha, \bar{\alpha}\}$的 2-正则顶点 $i \in Q_0$，围绕 g-轨道$C_\alpha = \alpha g(\alpha) \cdots g^{n_\alpha - 1}(\alpha)$和 $C_{\bar{\alpha}} = \bar{\alpha}g(\bar{\alpha}) \cdots g^{n_{\bar{\alpha}}-1}(\bar{\alpha})$有两个回路，其中 n_α，$n_{\bar{\alpha}}$ 分别是 g和 α 的 $\bar{\alpha}$-轨道长度。由于 Λ 是对称代数，存在整数 m_α，$m_{\bar{\alpha}} \geqslant 1$ 使得$C_\alpha^{m_\alpha+1} = 0$ 和 $C_{\bar{\alpha}}^{m_{\bar{\alpha}}+1} = 0$，于是回路 $B_\alpha := C_\alpha^{m_\alpha}$和 $B_{\bar{\alpha}} := C_{\bar{\alpha}}^{m_{\bar{\alpha}}}$生成 P_i的 socle soc(P_i)。

推论 5.9. 如果 i 是具有 $i^+ = \{\alpha, \bar{\alpha}\}$的 A 型2-顶点，那么 $e_i\Lambda$ 由集合生成

$$\mathcal{B}_i := \{\Theta_k(\alpha);\ 0 \leq k \leq m_\alpha n_\alpha\} \cup \{\Theta_k(\bar{\alpha});\ 0 < k < m_{\bar{\alpha}} n_{\bar{\alpha}}\}.$$

特别地，我们有 维数$_K\, e_i\Lambda \leqslant n_\alpha m_\alpha + n_{\bar{\alpha}} m_{\bar{\alpha}}$。

最后一步是将上述结果推广到所有 2-顶点。

Le引理 5.10。 如果 i 是一个 2-顶点，那么上述推论中的集合 $\mathcal{B}_i$ 生成 $e_i\Lambda$.

证明。显然，只需证明该断言对 B 型或 C 型的 2-顶点成立。因此，设i 至少有一个 1-正则后继，记为 j，且 j,x 包含在 V_1 型或 V_2型的一个块中。那么，从 α出发的长度为 2 的唯一路径是 $\alpha g(\alpha) = \Theta_2$，而从$\bar{\alpha}$出发的路径有： $\bar{\alpha}g(\bar{\alpha}) = \Theta_2$，以及可能还有 $\bar{\alpha}f(\bar{\alpha})$，若 $f(\bar{\alpha})$存在；这等价于第二个后继 $k = t(\bar{\alpha})$ 是一个 2-顶点（我们沿用引理 5.8 证明中的记号）。注意，若 $\bar{\alpha}f(\bar{\alpha})$有定义，则 $\bar{\alpha}f(\bar{\alpha}) \prec I$，因为 $i = s(\bar{\alpha})$ 是一个 2-顶点。在这种情况下， $\bar{\alpha}f(\bar{\alpha}) = \mathbf{A}_\alpha \in J^3$或 $\bar{\alpha}f(\bar{\alpha}) \equiv \alpha g(\alpha) = \Theta_2$。两种情况下， $\Theta_2, \bar{\Theta}_2$的陪集都张成 e_iJ^2/e_iJ^3，但可能有 $\bar{\Theta}_2 \in J^3$，因此 $\bar{\Theta}_2$在¯的商中为零。例如，若 $\mathbf{A}_{\bar{\alpha}}$ 有一个长度为 2 的项，则 $\mathbf{A}_{\bar{\alpha}} \equiv \Theta_2$，于是 $\bar{\Theta}_2 \equiv \alpha g(\alpha)f(g(\alpha)) \in J^3$。

首先，假设 $t(\bar{\alpha})$ 是一个 2-顶点，即 i 是 B 型。在这种情况下， $\bar{\alpha}f(\bar{\alpha}) \prec I$，因此 $\bar{\alpha}f(\bar{\alpha}) = \mathbf{A}_\alpha$要么属于 J^3，要么是 Θ_2（模 J^3）。

情形 *a)* 设 $\bar{\alpha}f(\bar{\alpha}) \in J^3$。那么，陪集 Θ_2和 $\bar{\Theta}_2$构成商 e_iJ^2/e_iJ^3的一组基。此外，利用归纳可以证明

$$(*) \qquad \bar{\Theta}_{k-1}f(\rho_{k-1}) \in J^{k+1},$$

¯若路径有定义，则对任意 $k \geqslant 2$ 都成立。对于 $k = 2$，这是显然的；对于 $k = 3$，有 $\Theta_2f(\rho_2) = \bar{\alpha}g(\bar{\alpha})f(g(\bar{\alpha})) \in J^4$，因为 $g(\bar{\alpha})f(g(\bar{\alpha})) = \rho_2f(\rho_2) \prec I$($t(\bar{\alpha}) = s(g(\bar{\alpha}))$ 不是一个 1-顶点)，因此 $\rho_2f(\rho_2) \in J^3$ 或 $\rho_2f(\rho_2) \equiv \bar{\rho}_2g(\bar{\rho}_2)$（模 J^3），于是 $\bar{\alpha}g(\bar{\alpha})f(g(\bar{\alpha})) \equiv \bar{\alpha}f(\bar{\alpha})g(\bar{\rho}_2) \in J^4$，因为根据假设， $\bar{\alpha}f(\bar{\alpha}) \in J^3$。现在，对于 $k \geqslant 3$，我们可能有 $\rho_kf(\rho_k) \not\prec I$，但此时 $\bar{\Theta}_kf(\rho_k)$ 含有一个长度为 4 的子路径 $g^{-1}(\eta)\eta g(\eta)f(g(\eta))$，其中 $\eta = \alpha_i$、 ν_i 或 ε_i 属于 J^5，由引理 5.6 或 5.7 可知。因此，若 $\rho_kf(\rho_k) \not\prec I$，则得到 $\bar{\Theta}_kf(\rho_k) \in J^{k+2}$。否则，要么 $\rho_kf(\rho_k) \in J^3$，进而 $\bar{\Theta}_kf(\rho_k) \in J^{k+2}$；要么存在一个 C 型关系 $\rho_kf(\rho_k) \equiv \bar{\rho}_kg(\bar{\rho}_k)$，模 J^3（其中 $\bar{\rho}_k = f(\rho_{k-1})$），这同样迫使 $\bar{\Theta}_kf(\rho_k) \equiv \bar{\Theta}_{k-1}f(\rho_{k-1})g(\bar{\rho}_k) \in J^{k+2}$，因为根据归纳假设， $\bar{\Theta}_{k-1}f(\rho_{k-1}) \in J^{k+1}$。

接下来，我们证明对于任意 $k \geqslant 3$，都有 $\Theta_{k-1}f(\sigma_{k-1}) \in J^{k+1}$，或者它是 $\bar{\Theta}_k$，或者模 J^{k+1} 为 $\bar{\Theta}_{k-1}$。事实上， $k = 3$ 的情形由引理 5.6 或 5.7 得出。若 $k \geqslant 3$，则如上所述，我们可以假设 $\sigma_kf(\sigma_k) \prec I$，于是要么 $\sigma_kf(\sigma_k) \in J^3$，要么 $\sigma_kf(\sigma_k) \equiv \bar{\sigma_k}g(\bar{\sigma_k}) = f(\sigma_{k-1})g(\bar{\sigma_k})$ 模 J^3。在第一种情形下，我们得到 $\Theta_kf(\sigma_k) \in J^{k+2}$；而在第二种情形下，我们得到

$$\Theta_kf(\sigma_k) = \Theta_{k-1}f(\sigma_{k-1})g(\bar{\sigma}_k).$$

根据归纳假设，路径 $\Theta_{k-1}f(\sigma_{k-1})$ 属于 J^{k+1}，或者它是 $\bar{\Theta}_k$，或者模J^{k+1}为 $\bar{\Theta}_{k-1}$。显然，在第一种情形下， $\Theta_kf(\sigma_k) \in J^{k+2}$。在第二种情形下，我们得到 $\Theta_kf(\sigma_k) \equiv \bar{\Theta}_kg(\bar{\sigma}_k)$，根据 $(*)$，它属于 J^{k+2}，或者它是 $\bar{\Theta}_{k+1}$。在第三种情形下，我们有 $\Theta_kf(\sigma_k) \equiv \bar{\Theta}_{k-1}g(\bar{\sigma}_k)$，而且¯这只有在 $\Theta_2f(\sigma_2) \equiv \Theta_2$ 时才可能发生（此时 α 位于一个临界块中）。但此时 $\bar{\alpha}$ 是一支箭$i \to t(g(\alpha))$，它与 1-顶点构成一个三角形（形成一个长度为 3 的 g-轨道），并且 $\bar{\Theta}_2 \in J^3$，所以$\bar{\Theta}_{k-1} \in J^k$，且 $\Theta_kf(\sigma_k)$ 必须是 $\bar{\Theta}_k$，或者它是 $\bar{\Theta}_{k-1}f(\rho_{k-1})$。只需证明最后一条路径属于 J^{k+2}。为此，注意到 $\bar{\Theta}_{k-1}$ 是沿着 $\bar{\alpha}$ 的 g-轨道的一条路径，由箭 $\bar{\alpha}$、$g(\bar{\alpha}) = \nu_l$ 和 $g^2(\bar{\alpha}) = \delta_l = \gamma$ 组成（若 $\alpha = \alpha_l$）。箭 ρ_{k-1} 不可能是 ν_k，否则$f(\rho_{k-1})$ 无定义，因此我们需要考虑两种情形： $\rho_{k-1} = \bar{\alpha}$ 或 $\rho_{k-1} = \delta_k$。在第一种情形下，由于 $\bar{\alpha}f(\bar{\alpha}) \in J^4$，我们有 $\bar{\Theta}_{k-1}f(\rho_{k-1}) = \bar{\Theta}_{k-2}\bar{\alpha}f(\bar{\alpha}) \in J^{k+2}$。后者源于这样一个事实： $\bar{\alpha}f(\bar{\alpha}) = \mathbf{A}_\alpha$，而以 α 开始、以 $f(\alpha)^*$ 结束的路径长度至少为 4。现在，若 $\rho_{k-1} = \delta_l$，则 $k \geqslant 4$

$$\bar{\Theta}_{k-1}f(\rho_{k-1}) = \bar{\Theta}_{k-3}\nu_l\delta_l\alpha_l = \bar{\Theta}_{k-3}\mathbf{A}_{\bar{\nu}_l},$$

由于 Λ 中的关系（见 4.3），且 Θ_{k-3} 以 $\bar{\alpha}$结尾。此外，我们得到$\mathbf{A}_{\bar{\nu}_l} \in J^3$，因为以 $\bar{\nu}_l$ 开头并以 $\alpha_l = \alpha$ 结尾的¯路径长度为 $\geqslant 3$。因此， $\Theta_{k-1}f(\rho_{k-1})$是长度为 $\geqslant k$的路径的组合，其中包含形如 $\rho_{k-3}\bar{\nu}_l = \bar{\alpha}f(\bar{\alpha})$的子路径，而该子路径属于 J^4，故断言得证。

总结这一情形，已证明要么对于任意 $k \geqslant 3$， $e_iJ^k = \langle\Theta_k, \bar{\Theta}_k\rangle + e_iJ^{k+1}$；要么 $e_iJ^k = \langle\Theta_k, \bar{\Theta}_{k-1}\rangle + e_iJ^{k+1}$。

情形 *b)* 假设 $\bar{\alpha}f(\bar{\alpha}) = \mathbf{A}_\alpha \equiv \Theta_2$(模 J^3)。那么 $\alpha = \nu_i$属于一个临界块。在这种情形下，我们通过归纳证明

$$\Theta_{k-1}f(\sigma_{k-1}) \in J^{k+1} \text{ and } \bar{\Theta}_{k-1}f(\rho_k) \in J^{k+1} \text{ or } \equiv \Theta_k,$$

对所有 $k \geqslant 2$ 均成立。对于 $k = 2$，第一条路径未定义，因为 $t(\alpha) = j$ 是一个 1-顶点；根据假设，第二条路径满足条件。现在，对于 $k = 3$，我们有 $\Theta_2 f(\sigma_2) = \alpha g(\alpha) f(g(\alpha))$，且根据引理 5.6，这条路径属于 J^4（因为沿着g-回路、以 $\bar{\alpha}$开头并以 $f(g(\alpha))$ 结尾的最短路径长度为 $\geqslant 4$）。类似地，若 $\rho_2 f(\rho_2) \in J^3$，则 $\bar{\Theta}_2 f(\rho_2) \in J^4$；否则，我们有 $\rho_2 f(\rho_2) \prec I$（因为 $t(\bar{\alpha}) = s(\rho_2)$ 不是 1-正则），因此$\rho_2 f(\rho_2) \equiv \bar{\rho_2} g(\bar{\rho_2})$，从而 $\bar{\Theta}_2 f(\rho_2) = \bar{\alpha} f(\bar{\alpha}) g(f(\bar{\alpha})) \equiv \Theta_2 g(f(\bar{\alpha}))$，它属于 J^4，或者它是Θ_3，模 J^4。我们可以像情形 a) 中那样，对 $k \geqslant 3$ 重复类似的归纳（但 σ 与 ρ 互换）。

最后，还需考虑 i 是 C 型顶点的情形，即 $k = t(\bar{\alpha})$ 也是一个 1-顶点。不失一般性，假设 α、$\bar{\alpha}$ 都属于 V_2 型的块。当然，$f(\alpha)$ $f(\bar{\alpha})$ 未定义，因此 $\Theta_2 = \alpha g(\alpha)$ 和 $\bar{\Theta}_2 = \bar{\alpha} g(\bar{\alpha})$ 构成 $e_i J^2$ 模 J^3 的一组基。由于 Q 不是球面箭图 Q^S（也不是三角形箭图），我们推知，在 Q 中以 α 开始并以 $f(g(\bar{\alpha}))$ 结束的最短路径长度为 $\geqslant 4$。对偶地，Q 中每条形如 $\bar{\alpha} \cdots f(g(\alpha))$ 的路径长度均为 $\geqslant 4$，因此我们有 $\mathbf{A}_\alpha$、$\mathbf{A}_{\bar{\alpha}} \in J^4$（另见第 4.3 节）。这表明 $\Theta_2 f(\sigma_2) = \alpha g(\alpha) f(g(\alpha)) = \mathbf{A}_{\bar{\alpha}} \in J^4$，且 $\bar{\Theta}_2 f(\rho_2) = \mathbf{A}_\alpha \in J^4$。按照前面情形中类似的归纳方法（使用引理 5.6），可以证明对于所有 $k \geqslant 3$，$\Theta_{k-1} f(\sigma_{k-1}) \in J^{k+1}$ 且 $\bar{\Theta}_{k-1} f(\rho_{k-1}) \in J^{k+1}$。若包含 α 或 $\bar{\alpha}$ 的块中有一个是 V_1 型，也可证明同样的结论，但此时我们使用引理 5.7 以及 Q 不同于三角形箭图 Q^T 这一假设。因此，每个商 $e_i J^k / e_i J^{k+1}$ 都由 Θ_k^- 和 Θ_k 的陪集生成，从而 $\mathcal{B}_i$ 生成射影 $P_i = e_i \Lambda$。证明至此完成。□

5.3. **基**。现在，我们可以给出投射模的基了。首先，我们证明以下结果，它给出了 2-正则情形。

引理 5.11. 若 i 是一个带有 $i^+ = \{\alpha, \bar{\alpha}\}$ 的2-顶点，则 B_α 和 $B_{\bar{\alpha}}$ 的所有初始子单项式构成 $e_i\Lambda$ 的一组基。特别地，我们有 维数$_K\, e_i\Lambda = n_\alpha m_\alpha + n_{\bar{\alpha}} m_{\bar{\alpha}}$。

证明。我们将利用根商证明 $e_i\Lambda$ 有所需的基。我们沿用前两个引理中的记号。从引理 5.8 和 5.10 的证明可知，对于 $k \geqslant 2$，每个商 $e_i J^k / e_i J^{k+1}$ 都由 B_α 的初始$^-$子单项式 Θ_k 和 $B_{\bar{\alpha}}$ 的初始子单项式 Θ_k 的（至多）两个陪集张成；但 i 为 B 型且 $\alpha g(\alpha) f(g(\alpha)) \equiv \Theta_2$ 的情形除外（此时 $e_i J^k / e_i J^{k+1}$ 由 Θ_k 和 $\bar{\Theta}_{k-1}$ 的陪集张成）。为简单起见，我们假设商由长度相同的路径生成；在其余情形下也可以重复这一证明。

在对箭进行重新标号后，不妨设 $m_\alpha n_\alpha \leqslant m_{\bar{\alpha}} n_{\bar{\alpha}}$。我们断言，对于任意 $k < m_\alpha n_\alpha$，路径 $\Theta_k, \bar{\Theta}_k$ 的陪集都是 $e_i J^k / e_i J^{k+1}$ 的线性无关生成元。事实上，先注意到 Θ_k 不属于 J^{k+1}，也就是说，Θ_k 在商中非零。反设 $\Theta_k \in J^{k+1}$。那么，模 J^{k+2} 意义下，$\Theta_k \equiv a\Theta_{k+1} + b\bar{\Theta}_{k+1}$ 对某些 $a, b \in K$ 成立，并且我们可以假设 $a = 0^-$（否则，我们得到 $\Theta_k(1 - a\sigma_{k+1}) \equiv b\Theta_k$，因此经单位元重新缩放后，就得到所需的关系）。我们可以继续考虑更长的项 $\Theta_{k+2}, \bar{\Theta}_{k+2} \in J^{k+2}$（它们生成下一个根商中的$^-$），并将所有从 Θ_k（或 $\bar{\Theta}_k$）出发的项按$^-$形式 $\Theta_k(1 + z)$，$z \in J$ 分组后，便得到实际上 $\Theta_k = \lambda\Theta_{k+1}$ 属于 Λ，其中 $\lambda \in K$；等价地，$\Theta_k - \lambda\Theta_{k+1} \in I$。但我们知道极小关系的形式：它们涉及长度为 2 或 3 的路径，以及沿 g-回路的路径 $\mathbf{A}_\eta = c_\eta \Theta_m(\eta)$。因此，不可能得到形如以下的等式

$$\Theta_k - \lambda\bar{\Theta}_{k+1} = \sum_{s \geqslant 1} \lambda_s u_s \rho_s v_s$$

在 KQ 中，其中 $\lambda_s \in K$、u_s、v_s 是路径，而 ρ_s 是极小关系。这表明确实有 $\Theta_k \notin J^{k+1}$。类似地，可以验证 $\bar{\Theta}_k \notin J^{k+1}$ 也成立，因此我们有 $e_i J^k$ 的两个（非零）生成元（模 J^{k+1}）。还需证明 Θ_k 和 $\bar{\Theta}_k$ 在 $e_i J^k / e_i J^{k+1}$ 中是线性无关的。这

¯是上述非消失性质的推论。事实上，如果 Θ_k、Θ_k 线性相关，那么模 J^{k+1} 有 $\Theta_k \equiv \bar{\Theta}_k$，从而得到 $\Theta_{k+1} = \Theta_k\sigma_{k+1} \equiv \bar{\Theta}_k f$（$\rho_k$）。但这是不可能的，因为除 $\bar{\alpha}f$（$\bar{\alpha}$）之外的所有情形中，最后一条路径都属于 J^{k+2}（见引理 5.8 和 5.10 的证明）；而在 $\bar{\alpha}f$（$\bar{\alpha}$）中，$\Theta_k f$（σ_k）$\in J^{k+2}$，这同样导致矛盾，因为 $\bar{\Theta}_{k+1} = \bar{\Theta}_k\rho_{k+1} \equiv \Theta_k f$（$\sigma_k$）。

因此，对于所有 $k \in \{1, \dots, m_\alpha n_\alpha - 1\}$，我们已证明 $\dim_K e_i J^k/J^{k+1} = 2$。现在，令 $k \geqslant m_\alpha n_\alpha$。那么路径 $\Theta_k = B_\alpha\alpha\cdots \equiv B_{\bar{\alpha}}\alpha\cdots$ 要么为零，要么为 $\equiv B_{\bar{\alpha}}$，因此我们得出 $\dim_K e_i J^k/J^{k+1} = 1$，且对于所有$k \in \{m_\alpha n_\alpha, \dots, m_{\bar{\alpha}} n_{\bar{\alpha}}\}$，商由 $\bar{\Theta}_k$ 的陪集生成。综上，计算所有维数可得

$$\dim_K e_i\Lambda = \sum_{k=0}^{m_{\bar{\alpha}} n_{\bar{\alpha}}} \dim_K e_i J^k/e_i J^{k+1} = 1 + 2(m_\alpha n_\alpha - 1) + (m_{\bar{\alpha}} n_{\bar{\alpha}} - m_\alpha n_\alpha + 1) =$$

$$= m_\alpha n_\alpha + m_{\bar{\alpha}} n_{\bar{\alpha}}.$$

证明至此完成。 □

现在，剩下要考虑的是 1-正则情形。

引理 5.12. 设 i 是 Q 中一个满足 $i^+ = \{\alpha\}$ 的1-顶点。那么，B_α 的所有初始子单项式所组成的集合 $\mathcal{B}_i$ 与 $\alpha f(\alpha)$ 构成 $e_i\Lambda$ 的一组基。特别地，我们有 维数$_K e_i\Lambda = m_\alpha n_\alpha + 2$。

证明。只需证明 $\mathcal{B}_i$ 张成 $e_i\Lambda$，因为根循环的初始子单项式总是线性无关的（且其目标顶点不同于 $t(f(\alpha))$）。我们将采用引理 5.8 的证明中为箭 σ_1、σ_2、.....、$\sigma_k = g^{k-1}(\alpha)$ 以及路径 $\Theta_k = \sigma_1\cdots\sigma_k$ 引入的记号。当然，$e_i J/e_i J^2$ 由箭 $\alpha = \Theta_1$ 的陪集张成，而 $e_i J^2/e_i J^3$ 的基由 $\alpha f(\alpha)$ 的陪集和 $\alpha g(\alpha) = \Theta_2$ 的陪集组成（如果 $\Theta_2 \notin J^3$，则情况如此；对于 $\alpha f(\alpha)g(f(\alpha)) \equiv \Theta_2$，可能出现这种情形，见下文）。

由于 i 的后继 $j = t(\alpha)$ 是 2-正则的（见引理 4.3），由引理 5.11 可知，$e_i J$ 由形如 $\alpha\Theta_{k-1}(f(\alpha))$ 和 $\alpha\Theta_{k-1}(g(\alpha)) = \Theta_k$ 的路径张成，其中 $k \geqslant 1$。现在注意，由于 I 中的关系（见第 4.3 节），有 $\alpha\Theta_2(f(\alpha)) = \alpha f(\alpha)g(f(\alpha)) = \mathsf{A}_\alpha \in J^3$。我们断言，所有路径 $p \prec \mathsf{A}\alpha$ 都以 $\alpha g(\alpha)$ 开始，因此它们的形式为 Θ_2 或 Θ_3（模 J^4）。事实上，每个以 $\alpha f(\alpha)$ 开始的项都包含子路径 $\alpha f(\alpha)g(f(\alpha))$，因此我们可以将涉及 $\alpha f(\alpha)g(f(\alpha))$ 的关系改写为 $\alpha f(\alpha)g(f(\alpha))(1 - z) = \mathsf{A}\alpha$，其中新的 $\mathsf{A}\alpha$ 仅含有以 Θ_2 开始的项，而 $1 - z$ 是局部代数 $e_x\Lambda e_x, x = s(\gamma)$ 中的单位元，其中 $\gamma\colon\ x \to i$ 是终点为 i 的唯一的箭。此外，若 $f(\sigma_2)$ 有定义，则有 $\sigma_2 f(\sigma_2) \prec I$，因为 $s(\sigma_2) = t(\sigma_1) = j$ 是 2-正则的；进而，只要 $\sigma_2 f(\sigma_2) \in J^3$，就有 $\Theta_2 f(\sigma_2) \in J^4$；否则，有 $\sigma_2 f(\sigma_2) \equiv \bar{\sigma}_2 g(\bar{\sigma}_2)$，其中 $\bar{\sigma}_2 = f(\sigma_1)$，于是得到

$$\Theta_2 f(\sigma_2) \equiv \alpha f(\alpha)g(f(\alpha))$$

根据前面的讨论，它是 Θ_2或 Θ_3。由此可知，$e_i J^3/e_i J^4$由 Θ_3 的陪集生成（或由 Θ_2 的陪集生成，进而 $\alpha = \nu_i$、$\Theta_2 = \alpha f$（α）g（α）$\in J^3$和 $\Theta_3 \in J^4$）。在第一种情况下，可以验证 $\Theta_2 f$（σ_2）$\in J^4$。事实上，否则模 J^4 有 $\Theta_2 f$（σ_2）$\equiv \Theta_3 = \Theta_2 g$（$\sigma_2$），这是不可能的，因为 f（σ_2）和 g（σ_2）$= g$（f（α））*在不同的顶点结束（我们有一个从 1-顶点指向 x 的箭，因此没有以 x 结束的重箭）。如果 Θ_2 在模 J^4 的意义下生成 $e_i J^3$，那么显然有 $\Theta_2 f$（σ_2）$\in J^4$。

最后，可以通过归纳证明，对于任意 $k \geqslant 3$，空间 $e_i J^k/e_i J^{k+1}$由 Θ_k的陪集或 Θ_{k-1}的陪集张成（两种情况下均有 $\Theta_{k-1} f(\sigma_{k-1}) \in J^{k+1}$）。对于 $k = 3$，结论由上述论证得出。若 Θ_k生成 $e_i J^k$（模 J^{k+1}），$k \geqslant 3$，则我们得到 $e_i J^{k+1}$的两个生成元，分别为 Θ_{k+1}和 $\Theta_k f(\sigma_k)$，其中 $f(\sigma_k)$ 存在。对于后者，根据引理 5.6 或 5.7，当 $\sigma_k f(\sigma_k) \not\prec I$时，有 $\Theta_k f(\sigma_k) \in J^{k+2}$。否则，要么 $\sigma_k f(\sigma_k) \in J^3$，从而也有 $\Theta_k f(\sigma_k) \in J^{k+2}$；要么存在一个模 J^3 的 C 型关系 $\sigma_k f(\sigma_k) \equiv \bar{\sigma}_k g(\bar{\sigma}_k)$，$\bar{\sigma}_k = f(\sigma_{k-1})$。在最后一种情况下，由于根据归纳假设，$\Theta_{k-1} f(\sigma_{k-1}) \in J^{k+1}$，我们得到 $\Theta_k f(\sigma_k) \equiv \Theta_{k-1} f(\sigma_{k-1})g(\bar{\sigma}_k) \in J^{k+2}$。因此，我们得到 $\Theta_k f(\sigma_k) \in J^{k+2}$，所以 Θ_{k+1}的陪集是 $e_i J^{k+1}/e_i J^{k+2}$的一个生成元。当 $\Theta_{k-1} \in J^k$生成 $e_i J^k$时

模 J^{k+1}，容易验证 $\Theta_k \in J^{k+1}$生成 $e_i J^{k+1}$模 J^{k+2}。两种情况下，我们都得到根商所需的生成集，断言得证。□

综上所述，我们描述了投射 Λ 模的基。特别是，现在我们可以对元素 $\mathbf{A}_{\bar{\alpha}}$作进一步说明。事实上，若 i 是一个 2-顶点，且 $\alpha, \bar{\alpha}$ 是从 i出发的箭，那么 $\mathbf{A}_\alpha \in \alpha\Lambda$ 迫使 $\mathbf{A}_\alpha$ 是路径 $\Theta_k = \Theta_k(\alpha)$ 的组合，沿着 g的 α -回路（没有以另一条箭开头的项）。可以按长度对 $\mathbf{A}_\alpha$ 的各项排序，使得 $\mathbf{A}_{\bar{\alpha}} = A_{\bar{\alpha}}(1+z)$，其中 $z \in e_x \Lambda e_x$, $x = t(f(\alpha))$，且 $A_{\bar{\alpha}}$ 是 $\mathbf{A}_{\bar{\alpha}}$ 各项中最短的路径。若 $\mathbf{A}_\alpha$ 有多个项，那么 $u = 1+z$ 是局部代数 $e_x \Lambda e_x$中的一个单位元，因此存在 $c_\alpha \in K^*$ 使得 $\mathbf{A}_\alpha = c_\alpha A_\alpha$，其中 $A_{\bar{\alpha}}$ 是沿着 $\bar{\alpha}$的g-轨道的一条路径。我们可以对第二条箭 $\bar{\alpha}$ 作同样的处理，得到关系 $\alpha f(\alpha) - c_{\bar{\alpha}} A_{\bar{\alpha}}$。利用 S_i的正合列，很容易验证标量 $c_\bullet$ 沿 g-轨道相同，即$c_{g(\alpha)} = c_\alpha$ 和 $c_{\bar{\alpha}} = c_{g(\bar{\alpha})}$。这表明存在一个参数函数 $c_\bullet : Q_1 \to K^*$，它在 g-轨道上为常数。

对关系 $\rho_1^{(i)}$、.....、$\rho_6^{(i)}$ 也可以进行同样的处理，其中每个 $\mathbf{A}_\alpha$ 都具有$\mathbf{A}_\alpha = c_\alpha A_\alpha$ 的形式，其中 $c_\alpha \in K$非零，且 A_α是沿着 g-回路 α的一条路径（另见第 4.3 节）。由于 $A_\alpha \in \Lambda f(\bar{\alpha})^*$和 $f(\bar{\alpha})^* = g^{-1}(\gamma^*) = g^{-2}(\alpha)$，我们得出，对于某个 $m \leqslant m_\alpha$， $A_\alpha = (\alpha g(\alpha) \cdots g^{n_\alpha - 1}(\alpha))^{m-1} \alpha \cdots g^{n_\alpha - 2}(\alpha)$。我们将在第 6.1 节看到，事实上，对于所有箭，均有 $m = m_\alpha$，这意味着路径 A_α 属于第二 socle。

6. Proof of Main Theorem

本节给出主定理的证明。我们首先证明以下情形：代数的 Gabriel 箭图不同于球面箭图 Q^S 以及三角形（和近三角形）箭图 Q^T 和 $Q^{T'}$；见第 3 节。这部分内容将在第 6.1–6.5 节完成。在最后的第 6.6 节中，我们完成其余情形的证明。

设 Λ 是一个具有双正则 Gabriel 箭图 $Q = Q_\Lambda$ 的代数，也就是说， Q 的每个顶点都是 1-正则或 2-正则。我们始终假设 Q 至少有 3 个顶点。
蕴含关系 $(i) \Rightarrow (ii)$ 由 [26, IV. 定理 11.19] 得出。注意，根据顶点和箭的数量假设， Λ 始终是无限表示型；参见 [6, 引理 3.1]。蕴含关系 $(iii) \Rightarrow (i)$ 是结果 [13, 定理 1.1-1.3] 的直接推论。因此，剩下要证明蕴含关系 $(ii) \Rightarrow (iii)$ 成立。

因此，假设 Λ 是一个广义四元数型代数，也就是说， Λ 是温和对称且为无限表示型，并且 $\operatorname{mod}\Lambda$ 中的每个简单模都是周期 4 的周期模。我们可以假设 Q 中至少存在一个 1-正则顶点；否则，断言由定理 3.1 得出。证明的思路是直接（通过箭图和关系）构造代数 $\Lambda(\hat{m}) = KQ/I$，它取决于所选的权重集 $\hat{m}$，使得

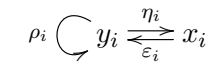
- $\hat{Q}$ 是一个 2-正则箭图，带有 $Q_0 = Q_0$，由 $Q \subset \hat{Q}$ 添加环和 2-圈得到，
- $Q = Q_{\hat{\Lambda}(\hat{m})}$，如果所有权均为 $\geqslant 2$，
- $\Lambda(\hat{m})$ 是一个具有 $\Lambda(\mathbf{1}) \cong \Lambda$ 的广义四元数型代数，其中 $\mathbf{1}$ 表示所有权均等于 1。

证明分为若干步骤，每个步骤位于一个单独的小节中。

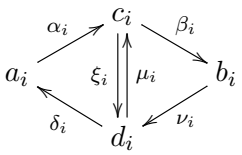
6.1. **构造** Λ。我们使用第 5 节中引入的记号。

首先，我们定义箭图 Q。其顶点集合与 Q 相同： $Q_0 = Q_0$；而 Q 的箭集合 $\hat{Q}_1$ 是在 Q_1 的基础上，为块 B_i' 中的每个顶点 y_i 添加一个环 ρ_i （对于 $i \in \{1, \ldots, q\}$），并在每个块 B_i、 $i \in \{1, \ldots, p\}$ 中添加一个 2-圈 $c_i \prec \overset{\xi_i}{\underset{\mu_i}{}} \succ d_i$ 得到的。换句话说，每个

块 B_i' 在 Q 中变成一个块



ˆ 在 Q中为 II 型，而 Q 中的每个块 B_i 都成为一种粘合



ˆˆ 在 Q中由两个三角形构成。根据构造，箭图 Q 是 2-正则的。稍后将证明，这实际上是一个三角剖分箭图。

ˆˆ 现在，我们定义 KQ的理想 I I 。首先，我们需要固定自然数 $m_i \geqslant 1$（对应 $i \in \{1,\dots,p\}$）和 $m_i' \geqslant 1$（对应 $i \in \{1,\dots,q\}$）。据此，我们按如下方式用生成元定义ˆI。由第 4.3 节可知， I由以下形式的极小关系生成： $\rho_1^{(i)},\dots,\rho_4^{(i)}$,$i \in \{1,\dots,p\}$; 关系 $\rho_5^{(i)},\rho_6^{(i)}$（其中 $i \in \{1,\dots,q\}$）；以及形如 $\alpha f(\alpha) - c_{\bar{\alpha}}A_{\bar{\alpha}}$的关系，其中箭 $\alpha \in Q_1$ 连接 2-正则顶点。令 R_0 为形如$\alpha f(\alpha) - c_{\bar{\alpha}}A_{\bar{\alpha}}$的关系集，其中 $s(\alpha)$ $t(\alpha)$均为 2-正则。这样， I由 R_0 以及关系 $\rho_1^{(i)},\dots,\rho_6^{(i)}$ 生成。

ˆ 此外，令 R_1 为 KQ 中形如以下形式的关系集

$$\alpha_i\xi_i - \mathbf{A}_{\overline{\alpha_i}},\ \xi_i\delta_i - \mathbf{A}_{\beta_i},\ \delta_i\alpha_i - (\mu_i\xi_i)^{m_i-1}\mu_i,\ \nu_i\mu_i - \mathbf{A}_{\overline{\nu_i}},\ \mu_i\beta_i - \mathbf{A}_{\delta_i},\ \beta_i\nu_i - (\xi_i\mu_i)^{m_i-1}\xi_i,$$
$$\xi_i\delta_i\overline{\alpha_i},\ \mu_i\beta_i\overline{\nu_i},\ \alpha_i\xi_i\mu_i,\ \nu_i\mu_i\xi_i,\ \xi_i\mu_i\beta_i,\ \mu_i\xi_i\delta_i,\ \delta_i^*\alpha_i\xi_i,\ \beta_i^*\nu_i\mu_i$$

对所有 $i \in \{1,\dots,p\}$。

最后，令 R_2 为关系集

$$\varepsilon_i\rho_i - A_{\overline{\varepsilon_i}},\ \rho_i\eta_i - A_{\eta_i},\ \eta_i\varepsilon_i - \rho_i^{m_i'-1},\ \rho_i\eta_i\overline{\varepsilon_i},\ \varepsilon_i\rho_i^2,\ \rho_i^2\eta_i,\ \eta_i^*\varepsilon_i\rho_i,$$

对所有 $i \in \{1,\dots,q\}$。

ˆˆ 令 I 为由 $R = R_0 \cup R_1 \cup R_2$中的关系生成的 KQ 的一个理想。容易看出，当且仅当对所有可能的 i，ˆI 是可容许的，若且唯若 $m_i \geqslant 2$， $m_i' \geqslant 3$。

由ˆI的定义可直接推出，对于任意满足 $m_i \geqslant 2$的 i （分别地，满足 $m_i' \geqslant 3$），ˆ 在 Λ中有如下零关系：

$$\beta_i\nu_i\delta_i,\ \delta_i\alpha_i\beta_i,\ \alpha_i\beta_i\nu_i \text{ and } \nu_i\delta_i\alpha_i \text{ (respectively, } \eta_j\varepsilon_j\eta_j \text{ and } \varepsilon_j\eta_j\varepsilon_j).$$

现在，我们将证明，对于平凡权，有 ˆ$\Lambda \cong \Lambda$ 。事实上，设所有 $m_i = 1$ 和 $m_i' = 2$。那么，$R_1 \cup R_2$ 中的关系迫使 $\xi_i = \beta_i\nu_i$、 $\mu_i = \delta_i\alpha_i$ 和 $\rho_j = \eta_j\varepsilon_j$ 成立，因此 Λ 的 Gabriel 箭图 ˆˆ 等于 Q。特别地，我们有 $\Lambda \cong KQ/J$，其中 J 是 KQ 的一个理想，由 R 中的关系经过将箭 ξ_i、 μ_i 和 ρ_i 分别替换为路径 $\beta_i\nu_i$、 $\delta_i\alpha_i$和 $\eta_i\varepsilon_i$而得到的关系生成。显然，理想 J 包含 R_0 中的所有关系，以及代换后来自 $R_1 \cup R_2$ 的所有关系。因此，我们有 $I \subseteq J$。

最后，我们将证明 $J \subseteq I$。显然， R_0 中的关系在I中仍然成立。此外，将 $R_1 \cup R_2$ 中的交换关系代换后得到的 J 的生成元，恰好给出 $\rho_1^{(i)}$， ……， $\rho_4^{(i)}$， $\rho_5^{(j)}$， $\rho_6^{(j)}$ 中的关系。因此，我们必须证明零关系也同样成立，即路径

$$\beta_i\nu_i\delta_i\overline{\alpha_i},\ \delta_i\alpha_i\beta_i\overline{\nu_i},\ \alpha_i\beta_i\nu_i\delta_i\alpha_i,\ \nu_i\delta_i\alpha_i\beta_i\nu_i,\ \beta_i\nu_i\delta_i\alpha_i\beta_i,\ \delta_i\alpha_i\beta_i\nu_i\delta_i,\ \delta_i^*\alpha_i\beta_i\nu_i,\ \beta_i^*\nu_i\delta_i\alpha_i,$$

and the paths

$$\eta_j\varepsilon_j\eta_j\overline{\varepsilon_j},\ \varepsilon_j\eta_j\varepsilon_j\eta_j\varepsilon_j,\ \eta_j\varepsilon_j\eta_j\varepsilon_j\eta_j,\ \eta_j^*\varepsilon_j\eta_j\varepsilon_j$$

在 Λ中为零。
为此，只需证明以下长度为三的路径：

$$\alpha_i\beta_i\nu_i,\ \beta_i\nu_i\delta_i,\ \nu_i\delta_i\alpha_i,\ \delta_i\alpha_i\beta_i$$

and

$$\eta_j\varepsilon_j\eta_j,\ \varepsilon_j\eta_j\varepsilon_j$$

属于 Λ的第二 socle。这样，所有长度为五的路径显然都为零，而长度为四的路径属于 socle，因此它们也为零，因为它们都不是回路。
本小节其余部分旨在证明上述路径属于第二 socle。我们固定一个 V_2 型的块（$\alpha\ \beta\ \nu\ \delta$），其顶点为 a，b，c，d。我们先给出以下引理。

引理 6.1. 假设块周围的长度为三的路径是 $\prec I$。还假设不存在其他从顶点 a 或顶点 c 出发、且作为某个极小关系最低项的长度为 3 的路径。那么存在满足以下条件的极小关系

$$\beta\nu\delta + \beta X = 0 \quad and\ \ \nu\delta\alpha + X\alpha = 0,\ \ (X \in J^3)$$
$$\delta\alpha\beta + \delta Y = 0, \quad and\ \alpha\beta\nu + Y\nu = 0,\ \ (Y \in J^3).$$

证明. 我们可以将涉及 $\beta\nu\delta$ 的极小关系写成所述形式；注意，从顶点 b 出发的箭只有 β，于是有 $X \in e_c\Lambda e_d$。我们断言 X 必须属于 J^3，否则就会存在另一条长度为三的路径，它属于某个极小关系且终止于顶点 a。

现在考虑简单模 S_b 的正合列，这表明对于某个 $\psi \in e_c\Lambda e_a$，有 $\Omega^2(S_b) = \psi\Lambda$。极小关系给出 $\psi = \beta\delta + X$。于是 $\Omega^2(S_b) = \alpha\Lambda$，从而得到$\nu\delta\alpha + X\alpha = 0$。

第二部分类似。 □

注 6.2. 当 Q 是球面箭图时，有两个始于 1-顶点、终止于同一个 2-顶点的极小关系，这就产生了一个特殊情形；事实上，这正是高阶球面代数存在的原因。这些代数属于 GQT，但不属于 WSA。

引理 6.3. 在前述引理的假设下，类型为 V_2 的块周围的长度为三的路径属于该代数的第二 *socle*。

证明. (1) 我们从 $\beta\nu\delta$ 开始。$e_c\Lambda$ 的 socle 由 $B_\beta = (\beta\bar{\nu}\ldots\alpha)^m$ 张成。于是（由引理 5.12），模 $e_c\Lambda$ 有如下基：

$$\{[B_\beta]_t \mid 0 \le t \le \ell(B_\beta), \beta\nu\},$$

其中，$[B_\beta]_t := \Theta_t(\beta)$ 表示 B_β 的长度为 t 的初始子单项式。
现在考虑元素 $\delta\alpha \in KQ$，我们知道 $\delta\alpha \not\prec I$。这意味着 $e_d\Lambda$ 有一个因子模，它是长度为三的单列模，即 $U(S_d,\ S_a,\ S_c)$。这样的模必定同构于 $e_c\Lambda$ 的一个子模。

这意味着存在一个元素 $\psi = e_c\psi e_d$，它生成这样的子模。于是 $\psi\delta$ 属于第二 socle，即

$$\psi\delta \equiv B'_\beta$$

我们可以将 $\psi = \sum_t a_t[B_\beta]_t + \lambda\beta\nu$ 写成这样，其中和式中的各项都终止于顶点 d。因此，如果 β 的回路不经过 d，那么就不存在这样的非零和，由此可知 $\beta\nu\delta$ 属于第二 socle。

否则，可能存在一个以箭 ν 结尾的单项式 $[B_\beta]_t = [B_\beta]_t e_d$。若如此，则 $[B_\beta]_t\delta = [B_\beta]_{t+1}$，但这类元素的线性组合不属于第二 socle。
那么，只有当总和为零时，$\sum_t a_t[B_\beta]_t\delta + \lambda\beta\nu\delta$ 才属于第二 socle；此时，$\beta\nu\delta$ 属于第二 socle。

同样可以证明，$\delta\alpha\beta$ 属于该代数的第二 socle。

（2）为了证明另外两个项也属于第二 socle，我们应用前述引理。

由于 $\beta\nu\delta$ 位于第二 socle 中，元素 βX 也位于第二 socle 中。它起始于一个 1-顶点，因此 βX 是 B'_β的倍数。这说明 $\beta X\alpha$ 位于 socle 中。现在，从 B'_β 得到 socle 元素的唯一方式是 α ，因此 $B'_\beta\alpha$ 是 socle 中的非零元素，也就是说，它是 B_β的非零倍数。通过旋转， $X\alpha\beta$ 是 socle 中的非零元素。由于 β 是唯一一条起始于 c的箭，因此 $X\alpha$ 位于第二 socle 中。这说明 $\nu\delta\alpha$ 位于第二 socle 中。
类似的论证表明， $\alpha\beta\nu$ 位于第二 socle 中。 □

现在考虑 Q 中的一个 V_1 型块，其顶点为 x, y（箭为 η, ε）。假设 $|Q_0| > 2$，则 x, y处没有环，因此长度为 2 的路径为 $\not\prec I$（另见引理 4.11）。

引理 6.4. 假设路径 $\eta\varepsilon\eta$ 和 $\varepsilon\eta\varepsilon$ 是 $\prec I$。那么存在满足以下条件的极小关系

$$\eta\varepsilon\eta + \eta X = 0, \ and \ \ \varepsilon\eta\varepsilon + X\varepsilon = 0 \ (X \in J^3)$$

证明。 我们可以将 $\eta\varepsilon\eta$ 的极小关系写成所述形式。接着考察关于 S_y的正合列，模 $\Omega^2(S_y)$ 是循环的，并且可以取 $\varepsilon\eta + X$作为生成元。由于 $\Omega^3(S_y) \cong \varepsilon\Lambda$ ，存在一条箭 $\varepsilon' = \varepsilon u$ （对于 u ，它是一个单位元），且 $(\varepsilon\eta + X)\varepsilon' = 0$，于是$\varepsilon\eta\varepsilon + X\varepsilon = 0$。□

引理 6.5. 元素 $\eta\varepsilon\eta$ 和 $\varepsilon\eta\varepsilon$ 属于代数的第二 *socle*。

证明。 $e_y\Lambda$ 的 socle 由元素 $B_\eta = (\eta\bar{\varepsilon}\dots\eta^*\varepsilon)^m$张成。由引理 5.8，模 $e_y\Lambda$的基为

$$\{[B_\eta]_t \mid 0 \le t \le \ell(B_\eta)\} \cup \{\eta\varepsilon\}$$

我们知道 $\eta\varepsilon \not\prec I$，因此 $e_y\Lambda$ 有单列因子模 $U(S_y, S_x, S_y)$，它也同构于 $e_y\Lambda$的一个子模。

令 $\psi = e_y\psi e_y$ 为此类子模的一个生成元，则 $\psi\eta$ 生成第二 socle，因此

$$\psi\eta \equiv B'_\eta$$

记为

$$\psi = \sum_t [B_\eta]_t + \lambda\eta\varepsilon$$

元素 $[B_\eta]_t\eta$ 要么为零，要么等于 $[B_\eta]_{t+1}$。但若它非零，则它不会生成第二 socle（第二 socle 的生成元必须以 η^* 结尾）。由此可得，乘以 η 后的和必为零，进而 $\eta\nu\eta$ 属于第二 socle，正如所需。□

此外，我们知道每条路径 $\alpha f(\alpha) = c_{\bar{\alpha}}A_{\bar{\alpha}}$ 都属于第二 socle [12,（见命题 9.1]）。因此， $A_{\bar{\alpha}}$ 必须是一条长度为 $m_{\bar{\alpha}}n_{\bar{\alpha}} - 1$ 的路径；否则，它的长度为$k < m_{\bar{\alpha}}n_{\bar{\alpha}} - 1$，此时 $A_{\bar{\alpha}}g^k(\bar{\alpha})$ 是一个长度为 $k + 1 < m_{\bar{\alpha}}n_{\bar{\alpha}}$ 的 socle 元素，于是得到$B_{\bar{\alpha}} = 0$，矛盾。

同理，利用块 V_1 和 V_2 中长度为 3 的第二根底路径，我们可以证明其余路径 A_η 的长度也为 $m_\eta n_\eta - 1$。综上，对于任意箭 $\alpha \in Q_1$，均有$A_\alpha = \alpha g(\alpha)\cdots g^{m_\alpha n_\alpha - 2}(\alpha)$。

最后，注意对于 $\hat{} Q$ 的任意箭 α，我们有一个 f-轨道（$\alpha\ f(\alpha)\ f^2(\alpha)$），并且很容易从定义 Λ 的关系中看出，此时

$$c_{\bar{\alpha}}B_{\bar{\alpha}} = c_{\bar{\alpha}}A_{\bar{\alpha}}f^2(\alpha) = \alpha f(\alpha)f^2(\alpha) = c_{g(\alpha)}\alpha A_{g(\alpha)} = c_\alpha B_\alpha.$$

ˆ 6.2. **投射模的基** Λ。 接下来，我们描述不可分解投射 Λ 模的基。固定一个顶点 $z \in Q_0 = Q_0$ ，并考虑投射模 ˆ ˆ$P_z = e_z\Lambda$。

首先假设 z 不同于 c_i, d_i 和 y_i，即 z 在 Q中是 2-正则的。设 $\alpha, \bar{\alpha}$ 是 Q 中以 z为起点的箭。于是由引理 5.11可知， $\mathcal{B}_z$ （即 B_α 和 $B_{\bar{\alpha}}$ 的所有初始子单项式构成的集合）是 $P_z = e_z\Lambda$的一组基。

ˆ ˆ 我们断言， $\mathcal{B}$ 也是 P_z的一组基。由于 z 是 Q中的一个 2-顶点，我们可以推知， Q中任何以 z 为起点且包含箭 ξ_i, μ_i 或 ρ_i 的路径，都必然包含形如 $\alpha_i\xi_i = A_{\alpha_i}$、 ˆ$\nu_i\mu_i = A_{\nu_i}$ 或 — $\varepsilon_j\rho_j = A_{\varepsilon_j}$的子路径。因此， Q 中每一条以 z 为起点的路径，都是 ˆ Q中路径的组合，故 $\mathcal{B}$ 生成 P_z。现在只需证明 $\mathcal{B}$ 也是 ˆ ˆ ˆΛ中的线性无关集。事实上，若 $\mathcal{B}$ 中路径的一个非零组合在 Λ中为零，那么它属于 $I \setminus I$ （视为 KQ中的一个元素），因此可由 $R_1 \cup R_2$中的关系生成。但这是不可能的，因为 $R_1 \cup R_2$ 中的关系所涉及的所有路径都不是 Q中的路径。

最后，设 z 是 Q 中的一个 1-正则顶点。先考虑 $z = c_i$ 或 d_i。由于论证是对偶的，我们只对 $z = c_i$ 描述 P_z 的基。由引理 5.12 可知，模 $e_z\Lambda$ 的一组基 $\mathcal{B}$ 由 B_β 的所有初始子单项式构成，其中 $\beta = \beta_i$，以及 $\beta_i\nu_i$。与 2-正则情形一样， Q 中每条从 z 出发且包含形如 $\alpha_i\xi_i$、 $\nu_i\mu_i$ 或 $\varepsilon_j\rho_j$ 的子路径的路径，都可以写成 Q 中路径的组合。此外，在 Λ 中有 $\beta_i\nu_i = (\xi_i\mu_i)^{m_i-1}\xi_i$，因此我们得出， P_z 由 B_β 的初始子单项式和 B_ξ 的初始子单项式生成，其中 $\xi = \xi_i$ 且 $B_\xi = (\xi_i\mu_i)^{m_i}$。如上所述，可以看出该集合也是线性无关的，这是由于 $R_1 \cup R_2$ 中生成元的形状所致。

ˆ 运用类似的论证，我们得出， P_{d_i} 的一组基由 B_{δ_i} 和 $B_{\mu_i} = (\mu_i\xi_i)^{m_i} = c_{\delta_i}B_{\delta_i}$ 的所有初始子单项式构成（例如，除去 B_{μ_i}）。

ˆ 现在，只需验证对 $z = y_j$同样成立，即模 P_{y_j} 的一组基由 B_{η_j} 和 $B_{\rho_j} = \rho_j^{m'_j} \equiv c_{\eta_j}B_{\eta_j}$ 的所有初始子单项式构成（例如，除去 B_{ρ_j}）。

ˆ 因此，我们已经描述了不可分解投射 Λ-模的基。此外， Λ 中的底元诱导出投射 Λ-模的底，因此我们尤其得出， Λ是一个弱对称代数。

ˆ ˆ 6.3. **的对称化形式** Λ。现在，我们将通过展示一个由 Λ的非对称化形式诱导出的 Λ的特定对称化形式，证明代数 Λ 也是对称的。

事实上，应用 [21, 2.11], 中的结果，我们可以推得， K-线性形式 t: $A \to K$ 非退化且对称，当且仅当诱导同态 Φ : $A \to A^*, \Phi(a) = t \cdot a$ 是 (A-A)-双模的单态。我们将使用对称化的 K-线性形式，而不是对称代数定义中使用的 K-双线性形式（这两种方法是等价的，见 [26, 定理 IV.2.2]）。

由于 Λ 是对称的，我们可以固定一个非退化且对称的 K-线性形式 t（它通过 $t = (1, –)_\Lambda$ 与双线性形式相关联）。

我们要在 ˆΛ 上构造一个非退化的对称 K-线性形式 ˆt: ˆ$\Lambda \to K$ 。显然，将其限制在射影模 P_z 上时，它应与 t 一致，其中 z 是 Q 的一个 2-顶点。我们可以对来自 ˆ P_z 基的任意元素 u ，其中 z 是 Q 的一个 2-顶点，令 ˆ$t(u) = t(u)$，然后将 ˆt 延拓到位于 Q 的 1-正则顶点 z 处的射影模 ˆ P_z 。相反，我们将全局地定义 ˆt。

ˆ 首先，令 $\mathcal{B}_z$ 表示在 6.2 中构造的 P_z 的基。特别地，如果 z 是 Q 的一个 2-顶点，则 $\mathcal{B}_z$ 与投射 Λ-模 P_z 的基重合；否则， $\mathcal{B}_z$ 由 B_η 和 $B_{\bar{\eta}}$ 的初始子单项式组成，除去 $B_{\bar{\eta}}$，其中 η 是 Q_1 中起始于 z 的唯一的箭，而 $\bar{\eta} = \xi_i$， μ_i 或 ρ_j。

最后，我们定义 $\hat{}t : \hat{}\Lambda \to K$，它将路径 $u \in \mathcal{B} = \bigcup_{z\in Q_0} \mathcal{B}_z$ 的陪集 $u + \hat{}I$ 映射为以下元素

$$\hat{t}(u+I) = \begin{cases} c_\alpha^{-1}, & \text{if } u = B_\alpha \text{ for an arrow } \alpha \in \hat{Q}_1, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

并作线性延拓。

容易看出，这是定义良好的 K-线性形式，因为等式 $c_\alpha B_\alpha = c_{\bar{\alpha}} B_{\bar{\alpha}}$, $\hat{}\hat{}$ 对任意箭 $\alpha \in Q_1$均成立；它也是对称的，因为函数 $c_\bullet$ 在 Q中的 g-轨道上为常数。此外，对任意 $\alpha \in Q_1$，均有 $\hat{}t(B_\alpha) = t(B_\alpha)$（初始子单项式也同样如此）。

$\hat{}$ 尚需证明 t是非退化的，即其核不包含非零右理想。$\hat{}\hat{}\hat{}$ 根据 [21, 引理 2.11.4], ，这等价于说诱导同态 $\Phi : \Lambda \to \Lambda^*, \hat{}\Phi(u) = \hat{}t \cdot u$ 是内射的。另一方面，由 $\hat{}\hat{}\hat{}$ 6.2 中所构造基的形式可知，任意投射模 P_z 都是内射的，甚至同构于 $I_z = D(Ae_z)$（特别地，$\hat{}\hat{}\Lambda$ 是弱对称的）。因此，要证明 Φ 是单态，只需验证对每个 $\mathrm{soc}(P_z)$中的底元 $u \in$， $\Phi(u + I)$ 均非零。但这由 $\hat{}t$ 和 $\hat{}\Phi$的定义立即可得，证毕。

$\hat{}$ 6.4. **简单 Λ模的投射分解**。本部分将证明， Λ 上的所有简单模都是周期为 4 的周期模。令 z 为 Q 的任意顶点。根据假设， S_z 作为 Λ-模是周期为 4 的周期模，因此我们在 $\mathrm{mod}\,\Lambda$中有以下正合列

$$(\dagger) \qquad 0 \longrightarrow S_z \longrightarrow P_z \xrightarrow{d_3} P_z^- \xrightarrow{d_2} P_z^+ \xrightarrow{d_1} P_z \longrightarrow S_z \longrightarrow 0\ ,$$

其中 $\mathrm{im}(d_s) \cong \Omega^s_\Lambda(S_z)$；参见第 2 节。正合列（†）由“中间映射” d_2确定，其各列是 $\Omega^2_\Lambda(S_z)$的生成元。我们将利用$\hat{}I$ 中的关系证明，在 $\mathrm{mod}\,\Lambda$ 中存在一个类似的正合列，从而给出 S_z的周期 4 投射分解。

$\hat{}$ 首先，根据构造，每个 z 都是 Q的一个 2-顶点，因此存在两条箭 $\alpha : z \to j\hat{}$ 和 $\bar{\alpha} : z \to k$，以及 Q中的两条箭 $\gamma : x \to z$ 和 $\gamma^* : y \to z$。因此，我们总能得到 $\mathrm{mod}\,\Lambda$ 中 S_z 的投射分解的一部分，如下所示

$$\hat{P}_z^+ \xrightarrow{\hat{d_1}} \hat{P}_z \longrightarrow S_z \longrightarrow 0$$

其中 $\ker(\hat{}d_1) \cong \Omega^1_{\hat{\Lambda}}(S_z)$，其中 $\hat{}P_z^+ = \hat{}P_j \oplus \hat{}P_k$ 且 $\hat{}d_1 = [\alpha\ \bar{\alpha}]$。由于 $\hat{}\Lambda$ 的对称性（第6.3节），我们得到如下形式的内射分解的一部分（另见 [12,引理 4.1]）：

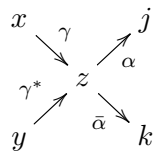
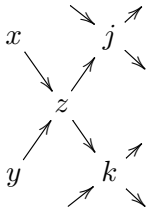
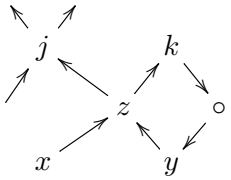
$$0 \longrightarrow S_z \longrightarrow \hat{P}_z \xrightarrow{\hat{d_3}} \hat{P}_z^-$$

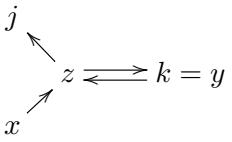
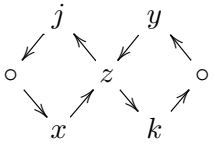
其中 $\mathrm{im}(\hat{}d_3) \cong \Omega^{-1}{}_{\hat{\Lambda}}(S_z)$，其中 $\hat{}P_z^- = \hat{}P_x \oplus \hat{}P_y$ 且 $\hat{}d_3 = \left[\begin{smallmatrix}\gamma\\ \gamma^*\end{smallmatrix}\right]$。下面我们将分几步证明，存在如下形式的正合列 $\mathrm{mod}\,\Lambda$

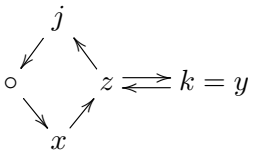
$$(\hat{\dagger}) \qquad 0 \longrightarrow S_z \longrightarrow \hat{P}_z \xrightarrow{\hat{d_3}} \hat{P}_x \oplus \hat{P}_y \xrightarrow{\hat{d_2}} \hat{P}_j \oplus \hat{P}_k \xrightarrow{\hat{d_1}} \hat{P}_z \longrightarrow S_z \longrightarrow 0$$

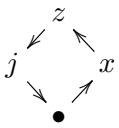
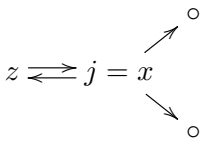
$\hat{}\hat{}\hat{}$ 其中 $\mathrm{im}(d_s) \simeq \Omega^s_{\hat{\Lambda}}(S_z)$。由于 d_1 和 d_3 已知，我们只需指定 $\mathrm{mod}\ \hat{}\Lambda$中的“中间映射” $\hat{}d_2$，即 $\mathrm{mod}\ \hat{}\Lambda$ 中的一个同态 $\hat{}d_2 : \hat{}P_z^- \to \hat{}P_z^+$，满足 $\ker(\hat{}d_2) = \mathrm{im}(\hat{}d_3)$，且 $\hat{}\hat{}\,\mathrm{im}(d_2) = \ker(d_1)$。

我们将其余部分分为两种主要情形： z 是 2-顶点， z 是（ Q的）1-顶点。在每种情形下，我们都会构造正确的“中间映射” d_2 ，以得到正合列（†）。下表简要总结了这两种情形的内容。

<table>
<tr>
<td>CASE I
z 是一个 2-顶点

</td>
<td>步骤1
z 是 A型

</td>
<td>步骤2
z 是 B 型（k 是 1-正则）
(a) $\hat{d}_2$ 对于 k 属于 V_2型的块


(b) $\hat{d}_2$ 对于 k 属于 V_1型的块

</td>
<td>步骤3
z 是 C 型
(a) $j \in V_2$ 和 $k \in V_2$


(b) $j \in V_2$ 和 $k \in V_1$


(c) $j \in V_1$ 和 $k \in V_1$
$j = x \rightleftarrows z \rightleftarrows k = y$</td>
</tr>
<tr>
<td>CASE II
z 是一个 1-顶点</td>
<td>步骤 1. $z = c_i$ 或 d_i

</td>
<td>步骤 2. $z = y_i$

</td>
<td></td>
</tr>
</table>

CASE I. 在第一种情形下，我们假设 z 是 Q的 2-顶点。那么，以 z 为终点的箭 γ，γ^* 以及以 z 为起点的箭 α，$\bar{\alpha}$，都是 Q 和 Q的箭。因此，特别地，$P_z^- = P_x \oplus P_y$、$P_z^+ = P_j \oplus P_k$以及 $d_1 = [\alpha\ \bar{\alpha}]$、$d_3 = \left[\begin{smallmatrix}\gamma\\ \gamma^*\end{smallmatrix}\right]$ 分别由与$\hat{}$ d_1 和$\hat{}$ d_3相同的公式给出，只是它们被视为不同代数上的模同态。下面我们根据顶点 z的类型分三步进行。

步骤 *1*。首先假设 z 是一个 A 型顶点，即 x、y 都是 2-顶点。根据 1-顶点附近局部形状的描述可知，j、k 也都是 2-顶点；参见命题 4.7。于是，模 $\hat{}P_z^{\pm}$的不可分解直和项与模 $P_z^{\pm}$的相应直和项具有相同的基。因此，映射 d_s 的像和核与诱导映射 d_s 在投射 Λ-模之间的像和核相同，因此只需取$\hat{}$ $d_2 = d_2$ （另见第 6.2 节中给出的论证）。至此，这一步得证。

步骤 *2*。现在，设 i 是一个 B 型顶点，例如 y 是一个 1-顶点而 x 是一个 2-顶点（另一种情况类似）。那么 k 也是一个 1-顶点，并且顶点 y、k 属于一个 V_2 型或 V_1 型的块（后一种情况下 $y = k$）。特别地，j 也是一个 2-顶点。

(a) 设 k，y 是 V_2 型块中的顶点。不失一般性，假设 $\bar{\alpha} = \alpha_i$，其中 $i \in \{1, \dots, p\}$。于是，$\gamma^* = \delta_i$ 和 $\alpha_i\beta_i\nu_i$ 也参与关系 $\rho_1^{(i)} \in I$。为简单起见，假设所有参数 c_α 均为 1（这不会影响用于计算所需维数的矩阵的秩）。

在$\hat{}$ $I \cap \hat{}I$ 中存在关系 $\alpha f(\alpha) - \bar{\alpha}('A_{\bar{\alpha}})$，在$\hat{}I$ 中存在如下形式的关系：$\alpha_i\xi_i - A_\alpha = \alpha(-'A_\alpha) + \bar{\alpha}\xi_i$。因此，我们得出结论，映射$\hat{}$ $d_2 : \hat{}$ $P_x \oplus \hat{}P_y \to \hat{}P_j \oplus \hat{}P_k$ 由下列矩阵给出

$$\hat{M} = \begin{bmatrix} f(\alpha) & -'A_\alpha \\ -'A_{\bar{\alpha}} & \xi_i \end{bmatrix}$$

$\hat{}\hat{}\hat{}\hat{}$ 满足 $d_1d_2 = 0$。利用第 4.3 节中描述的性质，我们还可得到 $d_2d_3 = 0$。换言之，我们有 im(d_3) $\subseteq$ 核(d_2)，且 im(d_2) $\subseteq$ 核(d_1)。我们将证明这些包含关系实际上是等式。

考虑任意元素 $\left[\begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix}\right] \in$核($\hat{}d_2$)，其中 $X \in \hat{}P_x$ 和 $Y \in \hat{}P_y$ 按如下方式用基表示

$$X = \sum_{s\geqslant 0} \lambda_s [B_\gamma]_s + \sum_{s\geqslant 1} \lambda'_s [B_{\bar{\gamma}}]_s \quad \text{and} \quad Y = \sum_{s\geqslant 0} \sigma_s [B_{\delta_i}]_s + \sum_{s\geqslant 1} \sigma'_s [B_{\mu_i}]_s$$

重写 $\hat{} M \cdot \left[\begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix}\right] = 0$，我们得到以下两个方程

$$f(\alpha)X = {}'A_\alpha Y \tag{1}$$

$$\xi_i Y = {}'A_{\bar{\alpha}} X \tag{2}$$

现在，注意到 $f(\alpha)\gamma = A_{g(\alpha)}$，且该元素属于 P_j的第二 socle。因此，$f(\alpha)\gamma g(\gamma) \in \mathrm{soc}(\Lambda) \cap (e_j \Lambda e_k)$为零。类似地，${}'A_\alpha \mu_i$具有 $\cdots \nu_i \mu_i = \cdots A_{\nu_i} \in e_j \hat{} \Lambda e_k$的形式，因此 ${}'A_\alpha [B_{\mu_i}]_s = 0$，对于 $s \geqslant 2$，由$\hat{}\mathcal{I}$中的零关系可知，且 ${}'A_\alpha \mu_i = 0$ 除 ${}'A_\alpha = \nu_i$外，于是它是 $A_{\nu_i} = A_{f(\alpha)}$，而 B_i 是临界的，且 $\alpha = g^{-1}(\nu_i)$。

—

因此，方程 (1) 给出

$$\lambda_0 f(\alpha) + \lambda_1 f(\alpha)\gamma + \sum_{s\geqslant 1} \lambda'_s [B_{f(\alpha)}]_{s+1} = \sigma_0 A'_{g(\alpha)} + \sigma_1 A_{g(\alpha)} + \sigma_2 B_{g(\alpha)}$$

当 B_i 非临界时（否则，右边还多出一项$\sigma'_1 A_{f(\alpha)}$），我们得到以下线性方程组

$$(*) \qquad \begin{cases} \sigma_1 = \lambda_1,\ \lambda'_{m_{f(\alpha)} n_{f(\alpha)} - 1} c_{g(\alpha)} = \sigma_2 c_{f(\alpha)}, \\ \sigma_0 = \lambda_0 = \lambda'_1 = \cdots = \lambda'_{m_{f(\alpha)} n_{f(\alpha)} - 2} = 0 \end{cases}$$

or

$$(*) \qquad \begin{cases} \sigma_1 = \lambda_1,\ \lambda'_{m_{f(\alpha)} n_{f(\alpha)} - 1} c_{g(\alpha)} = \sigma_2 c_{f(\alpha)}, \\ \sigma_0 = \lambda_0 = \lambda'_1 = \cdots = \lambda'_{m_{f(\alpha)} n_{f(\alpha)} - 3} = 0 \text{ and } \lambda'_{m_{f(\alpha)} n_{f(\alpha)} - 2} = \sigma'_1 \end{cases}$$

当 B_i 是临界的。

另一方面，我们有 $({}'A_{\bar{\alpha}})\bar{\gamma} = A'_{\beta_i}\bar{\gamma}$，且这条路径以形如$\theta f(\theta)$的路径结尾，其中 $f(\theta) = \bar{\gamma}$。我们知道这条路径属于第二 socle，因此 $A'_{\beta_i}\bar{\gamma} \in \mathrm{soc}(\Lambda)$。由此可得 $A'_{\beta_i}\bar{\gamma} = 0$，因为这条路径不是回路。因此，利用关系 $\xi_i \delta_i = A_{\beta_i}$和 $\xi_i \delta_i g(\delta_i) = 0$，我们将方程 (2) 改写为

$$\sigma_0 \xi_i + \sigma_1 A_{\beta_i} + \sum_{s=1}^{2m_i - 1} \sigma'_s [B_{\xi_i}]_{s+1} = \lambda_0 A'_{\beta_i} + \lambda_1 A_{\beta_i} + \lambda_2 B_{\beta_i},$$

这给出以下线性方程组

$$(**) \qquad \begin{cases} \sigma_1 = \lambda_1,\ \sigma'_{2m_i - 1} c_{\beta_i} = \lambda_2 c_{\xi_i}, \\ \lambda_0 = \sigma_0 = \sigma'_1 = \cdots = \sigma'_{2m_i - 1} = 0. \end{cases}$$

结合 (∗∗) 和 (∗)，我们得到（在两种情况下）一个线性方程组，其矩阵 $\hat{}$ 的秩为 $m_{\bar{\gamma}} n_{\bar{\gamma}} + 2m_i + 1 = \dim_K \mathrm{im}(d_2)$。因此，其零空间的维数为

$$\dim_K \ker(\hat{d}_2) = m_\gamma n_\gamma + m_{\bar{\gamma}} n_{\bar{\gamma}} + m_{\delta_i} n_{\delta_i} + 2m_i - (m_{\bar{\gamma}} n_{\bar{\gamma}} + 2m_i + 1) = m_\gamma n_\gamma + m_{\delta_i} n_{\delta_i} - 1 =$$

$$m_{\bar{\alpha}} n_{\bar{\alpha}} + m_\alpha n_\alpha - 1 = \dim_K \hat{P}_z - 1 = \dim_K \Omega^{-1}_{\hat{\Lambda}}(S_z) = \dim_K \mathrm{im}(\hat{d}_3).$$

$\hat{}\hat{}$ 这表明理想 I 的核等于理想 I 的像。

$\hat{}\hat{}$ 最后，通过比较维数，我们可以类似地证明 $\mathrm{im}(d_2) = \ker(d_1)$。事实上，对于每个元素 $\left[\begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix}\right] \in \hat{}P_j \oplus \hat{}P_k$，都可以用基表示为：

$$X = \sum_{s\geqslant 0} \lambda_s [B_{f(\alpha)}]_s + \sum_{s\geqslant 1} \lambda'_s [B_{g(\alpha)}]_s \quad \text{and} \quad Y = \sum_{s\geqslant 0} \sigma_s [B_{\beta_i}]_s + \sum_{s\geqslant 1} \sigma'_s [B_{\xi_i}]_s.$$

那么 $\hat{}\ d_1\left(\left[\begin{smallmatrix}X\\Y\end{smallmatrix}\right]\right)=0$ 等价于 $\alpha X+\bar{\alpha}Y=0$，由此得到以下等式

$$\lambda_0\alpha+\lambda_1 A_{\bar{\alpha}}+\sum_{s\geqslant 1}\lambda'_s[B_\alpha]_{s+1}+\sum_{s\geqslant 0}\sigma_s[B_{\bar{\alpha}}]_{s+1}+\sigma'_1 A_\alpha=0.$$

因此，我们得到以下线性方程组

$$\begin{cases}\lambda'_{m_\alpha n_\alpha-2}+\sigma'_1=0,\ \sigma_{m_{\beta_i}n_{\beta_i}-2}+\lambda_1=0,\ \sigma_{m_{\beta_i}n_{\beta_i}-1}c_{\bar{\alpha}}+\lambda'_{m_\alpha n_\alpha-1}c_\alpha=0\\ \lambda_0=\lambda'_1=\cdots=\lambda'_{m_\alpha n_\alpha-3}=0,\ \sigma_0=\sigma_1=\cdots=\sigma_{m_{\beta_i}n_{\beta_i}-3}=0\end{cases}$$

其矩阵的秩为 $m_\alpha n_\alpha+m_{\beta_i}n_{\beta_i}-1$，因此我们得到

$$\dim_K\ker(\hat{d}_1)=m_{\bar{\gamma}}n_{\bar{\gamma}}+2m_i+1,$$

$\hat{}$ 这恰好是 $\mathsf{im}(d_2)$ 的维数。

$\hat{}$这给出了情形（a）中的 d_2。

在情形（b）及所有后续情形中，我们采用相同的策略，但省略计算的技术细节。我们只给出适当的 d_2，使得 $d_1d_2=d_2d_3=0$，并列出计算 $\mathsf{ker}(d_2)$ 和 $\mathsf{ker}(d_1)$ 的维数所需的关系，以及确认其余的包含关系。

(b) 若 $k=y$ 是 V_1, 型块中的一个 1-顶点，记作 $\bar{\alpha}=\varepsilon_i$，对于 $i\in\{1,\dots,q\}$，则中间映射 $d_2\colon P_x\oplus P_{y_i}\oplus P_j\to P_{y_i}$ 由矩阵给出

$$\left[\begin{smallmatrix}f(\alpha) & -'A_\alpha\\ -'A_{\bar{\alpha}} & \rho_i\end{smallmatrix}\right].$$

$\hat{}\,\hat{}\,\hat{}$ 为了计算 $\mathsf{ker}(d_2)$ 和 $\mathsf{ker}(d_1)$ 的维数，我们需要使用 Λ 中的以下关系:

$$f(\alpha)\gamma g(\gamma)=0=\alpha f(\alpha)\gamma,\ \varepsilon_j\rho_i^2,'A_\alpha\rho=0,\quad\text{and}\quad A'_{\eta_i}\bar{\gamma}=0,$$

前两个关系成立，这是因为 $\alpha f(\alpha)$ 和 $f(\alpha)\gamma=f(\alpha)f^2(\alpha)$ 都包含在第二 socle 中，因此我们得到路径 $f(\alpha)\gamma g(\gamma)$ 和 $\alpha f(\alpha)\gamma$，它们属于 socle，但不是回路。因此它们必为零。接下来注意到，$'A_\alpha=A'_{g(\alpha)}$ 的长度为 $\geqslant 3$，所以 $'A_\alpha\rho$ 必为 $\hat{}$ 零，因为它包含子路径 $\gamma g(\gamma)$ $\rho_i=\eta_i^*\varepsilon_i\rho_i$，而该子路径在 Λ 中为零（它是 R_2 中的一个关系）。同样，路径 $'A_{\bar{\alpha}}=A'_{\eta_i}$ 的长度为 $\geqslant 3$，因此我们得到路径 $A'_{\eta_i}\bar{\gamma}$ 为零，因为它包含形如 $g^{-1}(\gamma)\bar{\gamma}=g^{-1}(\gamma)f(g^{-1}(\gamma))$ 的子路径，该子路径位于第二 socle 中。

这就完成了 Case I中的第二步。

步骤 *3*。在此情形的最后一步中，我们假设 x,y 在 Q中都是1-正则的。这里有三种子情形，取决于包含 x,j和 y,k的块的类型（忽略标记）。(a) 首先假设 j,x 和 y,k 都包含在类型为 V_2的块中，等价地，$j\neq x$和 $k\neq y$。在此情形下，j 和 k 也都是1-正则的，并且不失一般性，我们可以假设 $\bar{\alpha}=\alpha_i$和$\alpha=\alpha_j$，其中 $i,j\in\{1,\dots,p\}$。

$\hat{}\,\hat{}\,\hat{}$ 利用涉及 $\alpha_i\xi_i$ 和 $\alpha_j\xi_j$的关系，我们仿照步骤 2 推得，由矩阵给出的映射 d_2: $P_x\oplus P_y\to\hat{}\,\hat{}P_j\oplus P_k$

$$\hat{M}=\left[\begin{smallmatrix}\xi_j & -'A_\alpha\\ -'A_{\bar{\alpha}} & \xi_i\end{smallmatrix}\right]$$

$\hat{}\,\hat{}\,\hat{}\,\hat{}$ 满足 $d_2d_3=d_1d_2=0$。

利用 $\hat{}\Lambda$ 中的零关系 $\xi_j\delta_j\bar{\alpha}_j=\beta_i^*\nu_i\mu_i=0$ 以及恒等式 $'A_{\alpha_j}\mu_i=' A_{\alpha_i}\mu_j=0\hat{}$（另见步骤 2），可计算得 $\mathsf{ker}(d_2)$ 的维数为 $m_\alpha n_\alpha+m_{\bar{\alpha}}n_{\bar{\alpha}}-1$，这 $\hat{}\,\hat{}$ 与 $\dim_K\mathsf{im}(d_3)=\dim_K P_z-1$ 一致。此外，我们由计算所得的秩推得 $\dim_K\mathsf{im}(\hat{}d_2)$ 为 $2m_i+2m_j+1$。利用 $\hat{}I$ 中的零关系，可以验证

$$\dim_K\ker(\hat{d}_1)=2m_j+2m_i+1,$$

$\hat{}\,\hat{}$ 恰好等于 $\mathsf{im}(d_2)$ 的维数，因此序列 (†) 是正合的。

(b) 设一对顶点，例如 j, x，包含在一个 V_2, 型块中，即 $\alpha = \alpha_j, j \in \{1, \dots, p\}$；而 $k = y$ 则包含在一个 V_1 型块中，即 $\bar{\alpha} = \varepsilon_i,\ i \in \{1, \dots, q\}$。那么，正确的"中间映射" $\hat{d}_2 : P_{d_j} \oplus P_{y_i} \to P_{c_j} \oplus P_{y_i}$ 由下列矩阵给出

$$\hat{M} = \begin{bmatrix} \beta_j \nu_j & -' A_\alpha \\ -' A_{\bar{\alpha}} & \rho_i \end{bmatrix}.$$

$\hat{d}_2$ 计算 $\dim_K \ker(d_2)$ 和 $\dim_K \ker(d_1)$ 所需的 I 中的关系为

$$\beta_j \nu_j \delta_j,\ \beta_j^* \nu_j \mu_j,\ \eta_i^* \varepsilon_i \rho_i,\ \rho_i \eta_i \bar{\varepsilon}_i,\ \alpha_j \xi_j \mu_j,\ \varepsilon_i \rho_i^2,$$

并且 $\beta_j \nu_j \mu_j = B_{\xi_j} = (\xi_j \mu_j)^{m_j}$ 属于 socle。

(c) 如果 $j,\ x$ 和 $y,\ k$ 都属于 V_1, 型块，那么 Q 就是三角形箭图 Q^T，而这在证明的这一部分中不予考虑。我们略去此情形，它将在最后的第 6.6 部分单独处理。

Case II. 最后，还需考虑这样的情形：z 是 Q 的一个 1-顶点。此时 P_z^+ 的维数为 $m_\alpha n_\alpha + 2m$ 或 $m_\alpha n_\alpha + m + 1$，其中 $m = m_i$ 或 m_i'。在这种情况下，j 和 x 都是 Q 的 2-正则顶点，因此特别地，我们有 $\dim_K P_j = \dim_K P_j$，且 $\dim_K P_x = \dim_K P_x$（见第 6.2 节）。这里，根据包含 z 的块的类型，有两种可能。

步骤 *1.* 首先假设 z 属于一个 V_2 型块 B_i；对于 $z = d_i$，计算类似。在这种情况下，我们有 $\hat{d}_1 = [\beta_i\ \xi_i]$ 和 $\hat{d}_3 = \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \mu_i \end{bmatrix}$。
Usi从 $z = c_i$ 出发，利用 R_1 中的两个交换关系，我们可以定义矩 p
由矩阵 $\begin{bmatrix} -' A_{\beta_i} & \nu_i \\ \delta_i & -\mu_i \xi_i \end{bmatrix}^{m_i - 1}$ 给出，并满足 $\hat{d}_1 \hat{d}_2 = \hat{d}_2 \hat{d}_3 = 0$。 $\hat{d}_2 : \hat{P}_{a_i} \oplus \hat{P}_{d_i} \to \hat{P}_{b_i} \oplus \hat{P}_{d_i}$

现在回想一下，在 Case I 中，$A'_{\bar{\nu}_i} \bar{\alpha}_i = ' A_{\beta_i} \bar{\gamma} = 0$ 与步骤 1a) 中一样，并且根据权的假设，包含 z 的块周围的所有长度为 3 的路径（在 Q 中）在 $\hat{\Lambda}$ 中均为零；另见 6.1。这些再加上 R_2 中的零关系可推出

$$\dim_K \ker(\hat{d}_2) = m_{\beta_i} n_{\beta_i} + 2m_i - 1,$$

$\hat{d}_2$ 这与 $\dim_K P_z - 1 = \dim_K \operatorname{im}(d_3)$ 一致，并且

$$\dim_K \ker(\hat{d}_1) = m_{\nu_i} n_{\nu_i} + m_{\bar{\alpha}_i} n_{\bar{\alpha}_i} + 1,$$

$\hat{d}_2$ 这恰好是 $\dim_K \operatorname{im}(d_2)$。

步骤 *2*。最后，设 $z = y_i, i \in \{1, \dots, q\}$ 属于一个 V_1型块。在这种情况下，我们有 $\hat{\alpha} = \eta_i, \gamma = \varepsilon_i$，以及 $\bar{\alpha} = \gamma^* = \rho_i$。映射 $d_2 : P_{y_i} \oplus P_{x_i} \to P_{x_i} \oplus P_{y_i}$ 由下列矩阵给出

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_i & -' A_\alpha \\ -\rho_i^{m_i' - 2} & \eta_i \end{bmatrix}$$

这是正确的"中间映射"，因为关系 $\varepsilon_i \rho_i^2 = \rho_i^2 \eta_i = 0$ 和 $A'_{\bar{\varepsilon}_i} \bar{\varepsilon}_i = 0$。后一个关系与上文 b) 部分中的推导相同，因为我们有 $A'_{\bar{\varepsilon}_i} \bar{\varepsilon}_i$ 的一个真子路径 $\eta_i^* f(\eta_i^*)$，$\hat{\Lambda}$ 它属于 Λ 的第二 socle。

$\hat{\Lambda}$ 6.5. **温和性**。在本部分中，我们将证明 Λ 也是温和的。总体策略是找到 Λ 到某个（对称）特殊双串代数 B 的退化；已知该代数是温和的（参见 $\hat{\Lambda}$[27]），因此根据 Geiss [19] 的结果，Λ 也是温和的。

$\hat{\Lambda}$ 为此，我们将在 d 维 K 代数的簇 $\operatorname{alg}_d(K)$ 中定义一个代数族 $\Lambda(t)$、$t \in K$，使得对于任意箭 $\alpha \in Q_1$，以下关系在 $\hat{\Lambda} = \hat{\Lambda}(t) = KQ/I(t)$ 中成立：

(1) $\alpha f(\alpha) = c_{\bar{\alpha}} t^{v(\alpha)} A_{\bar{\alpha}}$，其中 $v(\alpha) \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$；
(2) $c_\alpha B_\alpha = c_{\bar{\alpha}} B_{\bar{\alpha}}$；以及 (3) 来自 I的所有零
关系。

ˆ 我们注意到，置换 g 定义在 Q 上，并通过添加包含箭 ξ_i、μ_i 或 ρ_j的长度为 2 或 1 的轨道，将其扩展到 Q上。另一方面，置换 f 仅部分定义在 Q 上（对于目标顶点为 1-正则的箭尚未确定），但可以将其扩展为 Q中箭的一个ˆˆ置换。于是， Q 是一个 2-正则箭图，并且根据构造，我们有 f 和 $g = \bar{f}$ 这两个ˆ Q_1的置换，使得 f^3 在ˆ Q_1上是恒等式；对于任意 $\alpha \in \hat{}Q_1$ ，路径 ˆ$\alpha f(\alpha)$ 都涉及 I 的一个形如以下的极小关系

$$(q) \qquad \alpha f(\alpha) = c_{\bar{\alpha}} A_{\bar{\alpha}}.$$

ˆˆ 暂且假设我们有如上所述的代数族 $\Lambda(t)$、$t \in K$，其中 $v\colon\ Q_1 \to \mathbb{N}$ˆˆˆˆ，且对所有 $\alpha \in Q_1$， $v(\alpha) \geqslant 1$。由此可知，代数 $\Lambda(0)$ 是 $\Lambda = \Lambda(1)$ 的退化（在ˆˆˆ 几何意义下），因此特别有 $\dim_K \Lambda(0) = \dim_K \Lambda$。但是，对于任意 $\alpha \in Q_1$，ˆˆ 存在零关系 $\alpha f(\alpha) \in I(0)$，而 $\alpha g(\alpha) \notin I(0)$，因为否则我们将得到维数跃迁 $\dim_K \Lambda(0) < \dim_K \Lambda$。在这种情况下，我们得出结论： $\Lambda(0)$ 是一个特殊双串代数。

现在，我们将构造一个满足 $v(\alpha) \geqslant 1$ 的代数族。取 $u\colon\ \mathcal{P}_{\hat{Q}} \to \mathbb{N}^*$ˆˆ 在 Q 上的度函数，也就是说，对箭 $\alpha \in Q_1$ 任取 $u(\alpha) \geqslant 1$ ，并将其对路径$\mu = \alpha_1 \dots \alpha_r \in \mathcal{P}_{\cdot Q}$: $u(\mu) = \sum_{i=1}^{r} u(\alpha_i)$ 作加性扩展。对于固定的 $t \in K^*$，我们定义同态f_t ：ˆ$\Lambda \to K\hat{}Q$ ，其对箭 $\alpha \in \hat{}Q_1$ 的定义为 $f_t(\alpha) = t^{u(\alpha)}\alpha$，并将其扩展到乘积和线性组合。于是得到代数 $\varphi_t\colon\ \Lambda \to \Lambda(t)$ 的诱导同构，其中ˆˆˆˆˆˆˆ$\Lambda(t) := KQ/I_t$，对于 $I_t = f_t(I)$。特别地， Λ 中每个类型为 (q) 的关系都给出 I_t 的如下生成元

$$\alpha f(\alpha) - c_{\bar{\alpha}} t^{v(\alpha)} A_{\bar{\alpha}}$$

其中 $v(\alpha) = u(A_{\bar{\alpha}}) - u(\alpha) - u(f(\alpha))$。因此，只需找出一个度函数 uˆ，使相应的函数 v 满足 $v(\alpha) \geqslant 1$，对所有箭 $\alpha \in Q_1$均成立。

ˆ 回忆一下，函数 $m\colon Q_1 \to \mathbb{N}^*$ 在 g-轨道上为常数，因此它在 $\mathcal{O}(g) \to \mathbb{N}^*$ˆ 上诱导出一个函数 m；这里 $\mathcal{O}(g)$ 是 Q_1 中 g-轨道的集合。按照 [13, 第 6] 节中的做法，取 $M = lcm\{m_{\mathcal{O}} n_{\mathcal{O}};\ \ \mathcal{O} \in \mathcal{O}(g)\}$ ，并对任意箭，令 $q(\alpha) = m_\alpha n_\alpha$。接着取由 $u(\alpha) = M/q(\alpha)$ 定义的度函数 u 。它在 g-轨道上也为常数，因此有

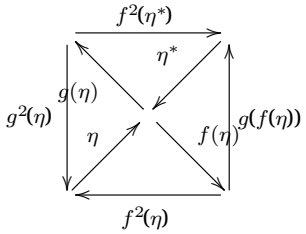
$$u(B_{\bar{\alpha}}) = m_{\bar{\alpha}} n_{\bar{\alpha}} u(\bar{\alpha}) = M.$$

另一方面，我们有 $f^2(\alpha) = g^{-1}(\bar{\alpha})$，因此 $u(B_{\bar{\alpha}}) = u(A_{\bar{\alpha}} f^2(\alpha)) = u(A_{\bar{\alpha}}) + u(f^2(\alpha))$。于是，利用这个 u，可得

$$v(\alpha) = u(A_{\bar{\alpha}}) - u(\alpha) - u(f(\alpha)) = M - u(\alpha) - u(f(\alpha)) - u(f^2(\alpha)) =$$
$$= M\left(1 - \frac{1}{q(\alpha)} - \frac{1}{q(f(\alpha))} - \frac{1}{q(f^2(\alpha))}\right).$$

ˆ 我们将在下文证明，对于任意箭 $\alpha \in Q_1$， $v(\alpha) \geqslant 1$。
事实上，若 α 是箭 ξ_i、μ_i 或 ρ_i 之一，则 $m_\alpha n_\alpha = 2m_i$ 或 m_i'，因此根据假设， $m_\alpha n_\alpha \geqslant 3$。若 α 不同于 ξ_i、μ_i、ρ_j，则它是连接 2-正则顶点的箭，而 α 是 Q 的一支箭。因此，要么 t（$\bar{\alpha}$）是一个 2-顶点，此时 $\bar{\alpha} f$（$\bar{\alpha}$）$= c_\alpha A_\alpha$，其中 A_α 是沿着 α 的 g-轨道、长度为 $m_\alpha n_\alpha - 1$ 的路径；要么 $\bar{\alpha} = \xi_i$、μ_i 或 ρ_j，此时同样有 $\bar{\alpha} f$（$\bar{\alpha}$）$= c_\alpha A_\alpha$（在ˆΛ 中）。两种情况下， A_α 的长度都是 $\geqslant 2$，否则我们将得到 α 属于 Λ （或 Λ）的雅各布森根的ˆˆ 平方，这对于箭 $\alpha \in Q_1 \subset Q_1$ 而言是不可能的。ˆ 因此，对于所有箭 $\alpha \in Q_1$，都有 q（α）$= m_\alpha n_\alpha \geqslant 3$。
最后，注意到 $v(\alpha) \leqslant 0$ 当且仅当 $q\ ^1_\alpha(\ ) + q\ f\ ^1_\alpha(\ (\ )) + q\ f^2\ (\ (\alpha)) \geqslant 1$。我们知道所有分母均为 $\geqslant 3$，因此只有当 $q(\alpha) = q(f(\alpha)) = q(f^2(\alpha)) = 3$时，这种情况才会发生。如果其中一个轨道的长度为 1，例如 $n_\alpha = 1$ (and $m_\alpha = 3$)，那么 $n_{f(\alpha)} = n_{f^2}(\alpha) = 3$ ，且 Q 有两个顶点、两个环和一个 2-圈，这与假设（$|Q_0| \geqslant 3$）矛盾。因此，$m_\alpha = m_{f(\alpha)} = m_{f^2}(\alpha) = 1$，且所有箭 $\alpha, f(\alpha)$ $f^2(\alpha)$ 都属于长度为 3 的 g-圈。

由于 $g = \bar{f}$以及箭 $\alpha, f(\alpha)$ $f^2(\alpha)$ 分别属于彼此不同的长度为 3 的 g-圈，我们推断每个 $\eta \in \{\alpha, f(\alpha)\ f^2(\alpha)\}$都属于一个三角形（$\eta\ g(\eta)\ g^2(\eta)$），其中 $t(g^2(\eta)) = s(\eta)$，且 $f(g^2(\eta)) = \bar{\eta}$。根据定义，有 $g(\eta) = f(\eta)$，且 $f(g(\eta)) = g^2(\eta)$。特别地，存在一个由以下箭构成的 f-三角形：$\eta^* = g^2(f(\eta))$：$s(g^2(f(\eta))) \to t(\alpha)$，$f(\eta^*) = f^{-}(\eta) = g(\eta)$：$t(\eta) \to t(g(\eta))$，以及 $f^2(\eta^*) = f(g(\eta)) = g^2(\eta)$：$t(g(\eta)) \to s(g^2(f(\eta)))$。由此可知，每个 $\eta = \alpha, f(\alpha)$ 或 $f^2(\alpha)$ 都给出两个“相邻”的 f-轨道和 g-轨道（长度均为 3），如下所示



ˆˆ因此， Q 由四个 f轨道组成。由此，上述箭不包含 Qˆ中的任何箭（因为它是2-正则的），于是 Q 由四个长度为3的 g圈（以及四个 f三角形）组成，ˆ因而它就是第3节中提到的四面体箭图。在这种情况下，箭图 Q是一个有6个顶点且没有2-圈和环的2-正则箭图。然而，根据构造ˆ 6.1，我们得到 $Q = Q$ 是2-正则的，这与假设矛盾（我们假设 Q 至少有一个1-顶点）。

6.6. **最终结论**。综合6.1—6.5节的讨论，已经证明，对于任意具有双正则 Gabriel 箭图 Q （至少有三个顶点，且不同于球面箭图和三角形箭图）的GQT代数 $\Lambda = KQ/I$，存在代数 $\Lambda = \Lambda(\hat{}m) =_K \hat{}Q/\hat{}I$，它们取决于所选的权ˆ$m = \{m_1, \ldots, m_p, m'_1, \ldots, m'_q\}$，使得ˆΛ(1)≅ Λ，其中 $\mathbf{1} = \{m_i = 1, m'_i = 2\}$；对于 $m_i \geqslant 2$， $m'_i \geqslant 3$，代数ˆΛ 是温和对称代数，其简单模具有周期4。进一步，在这种情况下， Λ 的 Gabriel 箭图为 Q，且它是2-正则的。特别地，由此可知ˆΛ 是无限表示型 [11, ，见第ˆ10], 节，因此 Λ是一个GQT代数。

ˆˆ现在，应用 [12], 的主结果，我们推得 $\Lambda = \Lambda(\hat{}m)$ 是一个加权曲面代数，且不同于奇异四面体代数，或者它是高阶四面体代数。后一种情况ˆ不可能发生，因为那样 $Q = Q$ 就是一个 2-正则箭图，这与假设矛盾。因此，我们得出结论，按照构造， Λ 是一个加权曲面代数，正如所要求的。此外， Q 由三角剖分箭图 Q 去除虚箭后得到，而 ˆm 是将权函数ˆ限制到 Λ 的虚箭上所得的函数）。

这就证明了在 Q 不同于 Q^S 或 $Q^T, Q^{T'}$ 的情况下，主定理成立。 $Q = Q^S$ 的情形由定理 3.2 涵盖。因此，剩下要证明的是，每个满足 $Q = Q^T$ 或 $Q^{T'}$ 的 GQT 代数 $\Lambda = KQ/I$ 都是加权曲面代数（且不同于奇异三角代数）。在这种情况下， Q 是一种粘合

$$\rho' \circlearrowright 1 \underset{\varepsilon'}{\overset{\eta'}{\rightleftarrows}} 2 \underset{\eta}{\overset{\varepsilon}{\rightleftarrows}} 3$$

由两个 $\mathbf{V}_1$ 型（然后为 $Q = Q^T$型）块组成，或由一个 II 型块和一个 V_1 型（然后为 $Q = Q^{T'}$ 型）块组成。

首先注意到，在 $Q = Q^{T'}$的情形下，我们可以应用引理 4.11，并得出路径$\varepsilon\eta\varepsilon$，$\eta\varepsilon\eta$涉及形如 $\rho_i^{(5)}$，$\rho_i^{(6)}$ 的极小关系。因此，若 $\varepsilon\eta\varepsilon \in J^4$，我们可以假设引理 5.7 也成立（唯一使用 $Q \neq Q^{T'}$的结果），然后便可重复 6.1–6.3 和 6.5 中的ˆˆ论证，并构造由 $Q = Q \cup \{\rho$ 给出的 Λ：$3 \to 3\}$，且具有相同的ˆ性质。为了在此情形下获得简单 Λ-模的周期性，我们需要选择三个中间

ˆˆ映射。事实上，mod Λ 中的简单模 S_1 具有形如（†）的正合列，其中ˆˆˆˆˆ中间映射 d_2： $P_1 \oplus P_2 \to P_1 \oplus P_2$ 由矩阵给出

$$\hat{M} = \begin{bmatrix} (\rho')^{m'-2} & \eta' \\ -\varepsilon' & -'A_{\eta'} \end{bmatrix}.$$

也可以为 1-正则顶点 3 处的简单模构造类似的正合列。最后，可以验证，模 Λ 中的简单模 S_2 也存在形如 (†) 的正合列，其中中间映射 d_2： $P_3 \oplus P_1 \to P_3 \oplus P_1$ 由矩阵定义

$$\hat{M} = \begin{bmatrix} \rho & -'A_{\varepsilon} \\ -'A_{\varepsilon'} & \rho' \end{bmatrix}.$$

因此，在 $Q = Q^{T'}$ 和 $\varepsilon\eta\varepsilon \in J^4$ 的情况下，存在一个 GQT 代数 ˆΛ = ˆΛ(ˆm)，其 Gabriel 箭图是 2-正则的，并且 $\Lambda(bf1) \cong \Lambda$。与之前一样，我们得出结论： Λ，因此 Λ 必须是由带有一个虚环的三角剖分箭图给出的加权曲面代数。

现在注意，引理 5.8 和 5.10 的证明中的论证也适用于 $\varepsilon\eta\varepsilon \notin J^4$ 的情形。确实，若 $Q = Q^{T'}$，但 $\varepsilon\eta\varepsilon \notin J^4$，那么只需证明 $g^{-1}(\varepsilon)\varepsilon\eta\varepsilon \in J^5$。由引理 5.7 的证明可知， $\varepsilon\eta\varepsilon \notin J^4$ 仅当 $\varepsilon\eta\varepsilon = A_{\varepsilon'} = \varepsilon'\eta'\varepsilon = \Theta_3(\varepsilon')$（模 J^4）时成立，接着

$$g^{-1}(\varepsilon)\varepsilon\eta\varepsilon \equiv \eta'\varepsilon'\eta'\varepsilon,$$

模 J^5。但是 $\eta'\varepsilon' = \eta' f(\eta') \in J^3$，或者它是模 3，于是 $\eta'\varepsilon'\eta' = \rho'\rho'\eta' \in J^4$，因为$\rho'\eta' = \rho' f(\rho') \in J^3$。这就完成了 $Q = Q^{T'}$ 情形下的证明。

最后，假设 $Q = Q^T$。如果 $\varepsilon\eta\varepsilon$， $\varepsilon'\eta'\varepsilon' \in J^4$ 均成立，那么可以重复上述论证，证明 Λ 是一个 WSA，其三角剖分箭图带有两个虚环 [13, ，见例 3.4]。如果 $\varepsilon\eta\varepsilon$， $\varepsilon'\eta'\varepsilon' \prec I$，但其中一个不属于 J^4，不妨设为 $\varepsilon\eta\varepsilon$，那么通过考察 $e_1\Lambda$ 的根商可知 $\eta'\varepsilon\eta\varepsilon \in J^5$。由此可以证明，射影 Λ-模ˆ 的基如引理 5.11 和 5.12 所述，随后可以重复构造 Λ 。这里略去细节。

剩下的情形是 $\varepsilon\eta\varepsilon \not\prec I$ 或 $\varepsilon'\eta'\varepsilon' \not\prec I$。第二种情形类似，因此我们只处理第一种情形。假设 $\varepsilon\eta\varepsilon \not\prec I$，这等价于 $\eta\varepsilon\eta \not\prec I$（见引理 4.11 的证明，或使用关于 S_1的正合列）。由引理 4.11 证明中的论证可知，此时 $\eta'\varepsilon\eta \prec I$。由于我们有一个交换方形（$\varepsilon'\ \eta'\ \varepsilon\ \eta$），由引理 4.5 可知，以下旋转也

$$\varepsilon\eta\varepsilon',\ \eta\varepsilon'\eta',\ \text{and}\ \varepsilon'\eta'\varepsilon$$

涉及极小关系（也可以直接利用所有单模 S_1， S_2 和 S_3对应的正合列看出这一点）。

有了这一点，我们就可以像之前一样继续。具体而言，我们利用根商为 $e_2\Lambda$ 构造一个基；根据上述关系，这很容易做到。可以看出， $e_2\Lambda$的基由 $B_\varepsilon = (\varepsilon\eta)^a$ 和 $(\varepsilon'\eta')^b = B_{\varepsilon'}$ 的初始子单项式组成（可能不包括 $B_{\varepsilon'}$）。同样可以证明， $e_1\Lambda$ 的基由 $B_{\eta'} = (\eta'\varepsilon')^b$的初始子单项式以及 $\eta'\varepsilon$ 组成，而 $e_3\Lambda$ 的基由 $B_\eta = (\eta\varepsilon)^a$ 的初始子单项式以及 $\eta\varepsilon'$组成。从关系的形式可以直接看出，Λ 是一个由三角剖分箭图 ˆ Q 给出的 WSA，该箭图由两个 f-三角形（$\eta\ \varepsilon'\ \varepsilon''$）和（$\eta'\ \varepsilon\ \eta''$）粘合而成，使得 η''， ε'' 构成一个由虚箭组成的 2-圈（并且我们有三个长度为 2 的 g-圈）。特别地， Λ 是一个非奇异三角形代数 [13, 见例 3.3]。注意，这恰好给出了 [5, 第 304]页上的代数 $Q(3A)_1$ 。

或者，可以将 Q 视为一个 V_2 型的单个块，并将 2-顶点 a 和 b 识别起来。ˆˆ 然后应用 Λ 的构造，进而得到如上所述的 Q ；按照 6.2–6.5 中相同的策略，可以直接证明 ˆˆΛ 是一个 GQT 代数，随后 Λ （因此 Λ）必定是所需的 WSA。

Acknowledgements

这项研究始于第一作者于 2024年11月 访问尼古拉·哥白尼大学数学与计算机科学学院，并在奥伯沃尔法赫数学研究所的“成对研究”项目（2025年2月至3月）期间继续进行。第一作者和最后一位作者谨向奥伯沃尔法赫数学研究所致谢，感谢其提供的支持。部分结果是在最后一位作者访问牛津数学研究所（2025年4月和11月）期间证明的。所有作者感谢牛津数学研究所和托伦的数学与计算机科学学院的热情接待。

References

[1] I. Assem、D. Simson、A. Skowro ´nski, 《结合代数表示论要论 1：表示论技巧》，伦敦数学学会学生教材，第65卷，剑桥大学出版社，剑桥，2006年。[2] J. Bialkowski、K. Erdmann、A. Hajduk、A. Skowro ´nski、K. Yamagata, 《加权曲面代数的底等价》。J. Pure and Appl. Algebra 226 (2022) 106886。[3] W. Crawley-Boevey, 《论温和代数与BOC代数》。Proc. London Math. Soc. 56 (1988), 451–483。[4] Y. A. Drozd, 《温和与野矩阵问题》，载于：表示论II，载于：数学讲义，第832卷，施普林格出版社，柏林、海德堡，1980年，第242–258页。[5] K. Erdmann, 《驯表示型块及相关代数》。施普林格数学讲义1428（1990）。[6] K. Erdmann, 《关于表示有限型对称代数的一则注记》。arXiv:2304.11877v1。[7] K. Erdmann、A. Skowyrski, 《关于球面代数的一则注记》。arXiv:2512.14224v1。[8] K. Erdmann、A. Hajduk、A. Skowyrski, 《周期四的温和对称代数》。Archiv der Math. 122 (2024), 249–264。[9]K. Erdmann、A. Hajduk、A. Skowyrski, 《周期四温和对称代数的局部结构》。已投稿至代数杂志，arXiv:2411。01235[math.RT].[10] K. Erdmann、A. Skowro ´nski, 《群代数块的周期性猜想》，Colloq. Math. 138 (2015), 283–294。[11] K. Erdmann、A. Skowro ´nski, 《加权曲面代数》。代数杂志 505 (2018), 490–558。[12]K. Erdmann、A. Skowro ´nski, 《广义四元数型代数》。Adv. Math. 349(2019), 1036–1116, [13] K. Erdmann、A. Skowro ´nski, 《加权曲面代数：一般版本》。OWP-2019-07。代数杂志 544 (2020), 170–227。[14] K. Erdmann、A. Skowro ´nski, 《高阶四面体代数》。Algebras and Representation Theory, 22(2019), no. 2, 387–406。[15] K. Erdmann、A. Skowro ´nski, 《高阶球面代数》。Archiv Math. 114 (2020), 25–39。[16]K. Erdmann、A. Skowro ´nski, 《广义二面体型代数》。Nagoya Math. J. 240(2020), 181–236。[17] K. Erdmann、A. Skowro ´nski, 《加权曲面代数：一般版本，勘误》。代数杂志 569 (2021), 875–889。[18]K. Erdmann、A. Skowro ´nski, 《从Brauer图代数到双串加权曲面代数》。J. Algebraic Combinatorics 51 (2020), 51–88。[19] C. Geiss, 《关于温和代数与野性代数的退化》，Arch. Math. (Basel) 64 (1995), 11–16。[20] T. Holm、A. Skowro ´nski、A. Skowyrski, 《加权曲面代数的虚变异》。代数杂志 619 (2023), 822–859。[21] M. Linckelmann, 《有限群代数的块理论》第I卷，伦敦数学学会学生教材91（2018）。剑桥大学出版社。

[22]C.M. Ringel, 《温驯代数》。表示论 I，会议论文集，渥太华，卡尔顿大学，1979年，施普林格数学讲义，第831卷，第137-287页。[23] A. Skowro ´nski, 《自内射代数：有限型与温驯型》。当代数学406 (2006), 169–238。[24] A. Skowyrski, 《高阶球面代数的两次倾斜》。代数与表示论25 (2021), 237–254。[25] A. Skowyrski、A. Skowro ´nski, 《广义加权曲面代数》。arXiv:2106.15218v3。[26]A. Skowro ´nski、K. Yamagata, 《弗罗贝尼乌斯代数 I：基础表示论》。EMS 数学教材。欧洲数学学会（EMS），苏黎世，2011年。¨B. Wald、J. Waschb[27] usch, 《温驯双串代数》，代数杂志95 (1985), 480–500。（Karin Erdmann）¨,
Mathematical Institute, University of Oxford, ROQ, Oxford OX2 6GG, UnitedKingdom
Email address: erdmann@maths.ox.ac.uk (Adam Hajduk)
Faculty of Mathematics and Computer Science, Nicolaus Copernicus University,Chopina 12/18, 87-100 Toruń, Poland*Email address*: ahajduk@mat.umk.pl (AdamSkowyrski)
Faculty of Mathematics and Computer Science, Nicolaus Copernicus University,Chopina 12/18, 87-100 Toruń, Poland*Email address*: skowyr@mat.umk.pl