解析正则性下椭圆临界值附近的非自伴托普利兹算子特征值

Nathan Reguer*

arXiv:2603.15090v1 [math.CV] 16 Mar 2026

摘要

本文确定了紧凯勒流形和复平面上实解析、非自伴的托普利兹算子的谱，研究范围为符号临界值的邻域。我们特别考察符号的海森矩阵为椭圆型的临界值，并在其邻域内推导出特征值的渐近展开，所得量子化条件类似于 Bohr-Sommerfeld 条件。为此，我们回顾并进一步发展了解析半经典工具，尤其是利用轮廓变形对复傅里叶积分算子进行符号演算。我们详细阐述了具有二次符号的算子这一广为人知的情形，并通过标准形约化处理一般情形。最后，我们证明了预解式估计，其范数所采用的权函数由符号的非实部导出。

目录

1 引言 **2**

2 二次符号 **6**
2.1 标准形.6 2.2 量子化公式.8

3 Anal解析半经典工具 1 **1**
3.1 解析伪谱.12 3.2 复相位傅里叶积分算子.13 3.3 Toeplitz 算子的符号演算.32

4 局部 研究 **43**
4.1 标准形.43 4.2 海森矩阵的条件.46 4.3 莫泽技巧.48 4.4 作用积分.50 4.5 谱描述与预解估计.53

*雷恩大学、法国国家科学研究中心、IRMAR - UMR 6625，F-35000 雷恩，法国。数学主题分类代码：81Q12、81Q20、58J40、58J50、35A20

5 多势阱符号 **67**
5.1 标准形 . 67
5.2 谱的描述 . 71

A 积分路径变形 **73**

B 参考文献 **81**

1 引言

量子力学中的一个普遍问题是求出系统的能级，也就是求算子的离散谱。目前尚无已知的系统方法能够求得算子谱的精确公式。尽管如此，我们可以利用半经典分析，得到关于参数$\hbar$的渐近等式。其核心工具是符号量子化：符号是在相空间上定义并满足特定正则性假设的函数。如果算子表示量子系统，那么符号便对应于其经典对应物。特别是，符号在半经典极限下提供了算子的相关信息。例如，若 f 属于某个特定的符号类，回顾其Weyl量子化为

$$Op_\hbar^W(f)u(x) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{\frac{i}{\hbar}(x-y)\xi} f\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) u(y) \frac{dyd\xi}{2\pi\hbar}$$

定义在 L^2($\mathbb{R}^d$)的一个定义域上。 f 可能依赖于 $\hbar$，但我们将满足 f_0使得当 $\hbar \to 0$时 $f \sim f_0 + O($ $\hbar$)的项称为主符号。在这一框架下，我们寻求准模，即状态 $u_\hbar$ 和值 $\lambda_\hbar$，使得对 $k \in \mathbb{N}$有 $Op_\hbar^W$(f) $u_\hbar = \lambda_\hbar u_\hbar + O_\hbar$($\hbar^k$)。若算子是自伴的，或仅仅是正规算子，那么对于预解集中的 z，

$$\left\| \left(Op_\hbar^W(f) - z\,\mathrm{Id}\right)^{-1} \right\| = \frac{1}{d(z, \sigma(Op_\hbar^W(f)))}. \tag{1}$$

因此，相对于 $\hbar$，拟模以较小的余项给出了谱中的元素。许多结果都基于这一思想，例如参见 [29, 36, 8, 41]。

然而，有些问题需要理解非自伴算子的谱。例如，流体动力学和金融数学中的一些模型使用具有变系数或定义域带边界的平流-扩散算子。Orr-Sommerfeld 算子和 Airy算子也出现在流体动力稳定性研究中。在涉及湍流、磁流体动力学以及某些偏微分方程数值分析稳定性的流体动力学问题中，还会出现更多算子。Trefethen 和 Embree 在 [38] 中介绍了这些例子，并为每个例子提供了参考文献。非自伴算子的问题在于，其谱并不局限于实轴上，因此(1)不再成立。

本文研究一维中的单个算子。在这一背景下，每个系统都是完全可积的。此外，我们研究托普利兹算子。这类算子很有意义，因为它既可在 $\mathbb{C}$ 上定义，也可在紧相空间上定义，而且等价于复平面上的伪微分算子。在 $\mathbb{C}$ 上，托普利兹算子定义于 Bargmann 空间

$$\mathcal{B}_\hbar = \left\{ e^{-\frac{|x|^2}{2\hbar}} u(x) \Big/ \; u \text{ holomorphic on } \mathbb{C} \right\} \cap L^2(\mathbb{C}).$$

接着，记 $\Pi_\hbar$ 为从 $L^2(\mathbb{C})$ 到 $\mathcal{B}_\hbar$ 的投影，对于定义在 $\mathbb{C}$ 上的任意有界函数 f，符号为 f 的托普利兹算子为 $T_\hbar(f)u = \Pi_\hbar(fu)$。关于 $\mathcal{B}_\hbar$ 的描述，参见 [26]；关于托普利兹算子的定义与性质，参见 [32, 43] 。若 f 属于适当的符号类，则 $T_\hbar(f)$ 与一个主符号相同的伪微分算子酉等价。对于具有适当结构的紧流形，也可以采用类似的方案，其中以基于几何考量构造的量子空间取代 $\mathcal{B}_\hbar$，例如参见 [23] 。

即使在一维，确定非自伴算子的谱也并非易事。一种方法是采用微扰方法，但它仅适用于虚部较小的符号，例如参见 [30] 。例如，考虑这个名为谐振子的显式玩具模型$-\hbar^2\Delta + x^2$。对于 $0 < \theta < \pi$，扰动 $-\hbar^2\Delta + e^{i\theta}x^2$ 沿着$e^{i\frac{\theta}{2}}[0, +\infty[$,具有纯离散谱，但对辐角属于 $[0, \theta]$的所有复数都可以找到拟模；如果$\theta = \pi$，谱便不再是离散的，参见 [9]。此外，针对自伴算子的已知方法无法直接应用于非自伴算子。例如，对于实值符号 f，一种已成熟的策略是寻找局部微分同胚 κ，将 f^{-1}（$\{E\}$）的一个邻域映到半径为 $\sqrt{E}$ 的圆的一个邻域，并将f 变换为谐振子符号的函数。下一步是将 κ 量子化为算子 $\mathfrak{U}$，并利用适当的 Egorov 定理，将 $\mathfrak{U}T_\hbar$（f）$\mathfrak{U}^{-1}$与 $T_\hbar$（$f \circ \kappa^{-1}$）联系起来。这种方法给出了所谓的 Bohr-Sommerfeld 量子化条件：存在一个函数 μ，使得在 E的一个邻域内，特征值渐近地由μ（$\hbar\mathbb{N}$）给出。许多文章针对不同框架计算了这些量子化条件，例如 [8, 6, 24]。然而，如果 f 取复值，微分同胚 κ 只有在复化空间中才有意义，这改变了 $\mathfrak{U}$和 μ的构造。

本文中，我们考虑 $M = \mathbb{C}$ 上或紧流形上的托普利兹算子。我们固定一个能量 E，目的是找到一类符号，使我们能够证明与已知自伴算子结果类似的结论。我们假设 $f^{-1}(\{E\})$ 由临界点构成，并满足椭圆性判据。我们的结果将涵盖远非自伴的算子，并得到类似于 Bohr-Sommerfeld 的量子化条件：

定理 *1.1.* 设 M 为复维数为 *1* 的紧凯勒流形，或 $\mathbb{C}$,$\mathfrak{e} \in \mathbb{C}$，且 f 为 M 上的实解析函数。我们假设假设 *5.1* 成立。这意味着 f 属于一类解析符号；记其主符号为 f_0，则存在 $k \in \mathbb{N}$ 个点 $x_1, \ldots, x_k \in M$，使得对于 $1 \leq n \leq k$, $f_0(x_n) = E$。此外，对于 $x \notin \{x_1, \ldots, x_k\}$, $df_0(x_n) = 0$，有 $f(x) \neq E$；二次型 H_n = 海森矩阵 $_{x_n} f$ 是椭圆的，即 $H_n(x, y) = 0 \Rightarrow x = 0 = y$, 并满足 $H_n(T_{x_n}M) \neq \mathbb{C}$，对所有 $n \in \{1, \ldots, k\}$ 均成立。若 $M = \mathbb{C}$，则存在 $\rho > 0$，使得 f 具有全纯延拓 $\widetilde{f}$ 在 $\{(x, \overline{y}) \in \mathbb{C}^2 / \ |x - y| \leq \rho\}$ 上，即 $f(x, \overline{x}) = f(x)$，并且存在 $c > 0$ 和一个阶函数 m，使得 $\left|\widetilde{f}\right| \leq cm$，而在 x_0 的一个邻域之外，$\left|\widetilde{f}\right| \geq \frac{m}{c}$。

那么，存在 C, A, $r > 0$ 以及实解析函数 $\mu_{j,\,n}$ 使得 $|\mu_{j,\,n}(\xi)| \leq Cj!\ A^j$对于固定邻域0内的 ξ成立，并且 $T_N(f)$ 的谱满足

$$\sigma(T_N(f)) \cap B_r(\mathfrak{e}) = \bigcup_{1 \leq n \leq k} \{\lambda_{n,l} / \ l \in \mathbb{N}^*\} \bigcap B_r(\mathfrak{e}),$$

$$\lambda_{n,l} = \mu_n^c(l) + O(e^{-\frac{c}{\hbar}}),$$

对所有 n，$l \in \mathbb{N}^2$ 以及对于足够小的 $\hbar$ 均成立。此外，存在 ρ，$C > 0$ 满足 $B_r \subset f(B_\rho)$，使得对于任意 $\lambda \in B_r \cap \sigma(T_N(f))^c$

$$\left\|(T_N(f)-\lambda)^{-1}\right\|_{L^2\left(B_\rho(x_n),e^{-\frac{\mathcal{W}_n}{\hbar}}\right)\to L^2\left(B_\rho(x_n),e^{-\frac{\mathcal{W}_{n,i}}{\hbar}}\right)} \leq \frac{C}{d(\lambda,\sigma(T_N(f)))},$$

其中，$\mathcal{W}_n$、$\mathcal{W}_{n,\,i}$ 是正函数，它们在 x_n 处的零点阶数为1，其中 $1 \leq n \leq k$。此外，$\mathcal{W}_n$ 和 $\mathcal{W}_{n,\,i}$ 在 x_n 处的零点阶数为2，当且仅当矩阵 $\Re(H_n)$ 和 $\Im(H_n)$ 共线。

由于一般而言，非自伴算子不满足 (1)，因此可以转而考察 $f(\mathbb{R}^2)$ 中预解式范数较小的子集；文献中通常称之为伪谱。Sjöstrand [33] 回顾了非自伴算子的谱问题，我们希望重新探讨其中的一些结果。[1] 证明，椭圆线性微分算子满足如下形式的估计：$\|(P-\lambda\mathrm{Id})^{-1}\| \leq \frac{c}{|\lambda|}$，当 λ 足够大且位于 $\mathbb{C}$ 的特定直线上时成立。[9] 研究了带复势的半经典薛定谔算子，并证明预解式的范数 $(Op_\hbar^W(f)-rz\,\mathrm{Id})^{-1}$ 随 $r\to\infty$ 以不同速度发散，具体取决于 $z \in \mathbb{C}$。[42]进一步细化了这一结果。[14], 研究了同一类算子，并构造函数 $u_\hbar$，使得对于满足几何条件的 $z \in f(\mathbb{R}^2)$，有$\left\|Op_\hbar^W(f)u_\hbar - zu_\hbar\right\| = O(\hbar^\infty)\|u_\hbar\|$。同一篇文章中，作者还证明，若函数取解析形式，则可将 $O(\hbar^\infty)$ 替换为 $O(e^{-\frac{c(z)}{\hbar}})$，并得到相同的结果。我们的目标是证明关于 z 的一致界，这将在定理 1.1 中给出。[15] 也针对 $\mathbb{R}$ 上带解析数据的自伴伪微分算子，在符号的正则值附近得到了这一结果，其方法是利用 $L^2(\mathbb{R})$ 与 Bargmann 空间 $\mathcal{B}_\hbar$ 之间的等距映射。

从文献中可以看出，研究非自伴算子的谱性质时，通常似乎需要对数据作解析性假设。例如，[19, 20, 30] 考虑具有实解析符号的自伴伪微分算子的微小非自伴扰动。他们在符号的正则值附近得到了特征值的渐近表达式，其余项为 $\hbar^\infty$。[17] 也针对非自伴算子，在椭圆临界能量附近计算了这样的展开。此外，他还将渐近展开的首项与符号的海森矩阵的行列式联系起来。[11] 证明了类似的结果，但他们为紧凯勒流形上的托普利兹算子得到了带有 $O\left(e^{-\frac{c}{\hbar}}\right)$ 余项的渐近展开。Hitrik 和 Zworski 在 [21] 中研究了与本文类似的问题，不过对象是 $\mathbb{R}$上的伪微分算子，并采用了略有不同的方法。他们的文章和本文都表明，主符号的海森矩阵发挥着重要作用，因为它限制了算子对角化的能力。事实上，为了将算子化为标准形，我们首先使用一个算子 $\mathfrak{U}$，使得$\mathfrak{U}T_\hbar(f) = T_\hbar(\mu(H))\,\mathfrak{U} + O\left(e^{-\frac{c}{\hbar}}\right)$，其中 $\mu(E) = \mathrm{Id} + O(E^2)$，因此 $\mathfrak{U}$接近恒等映射。接着，我们应用第二个算子 U，使得 $UT_\hbar(H) = T_\hbar(d_0(x^2+y^2))\,U + O\left(e^{-\frac{c}{\hbar}}\right)$，其中 $d_0 \in \mathbb{C}$。由于 H 可以取远离实轴的值，U 的范数可能非常大，这迫使我们在定理 1.1 中使用带权函数的 L^2 范数。

本文的组织结构如下。第 2 节中，我们考虑一个二次符号 f，并构造一个辛同胚，将其化为 $d_0(x^2+y^2)$，$d_0 \in \mathbb{C}$。这一构造是显式的，但只能在空间的复化上进行，而且需要使用函数的全纯延拓，因为符号的取值可能远离实轴。随后，我们构造一个与该辛同胚相关的傅里叶积分算子（FIO），

并证明，在对 f 作出特定假设时， $T_\hbar(f)$ 的谱由以下单特征值构成：

$$\left\{\hbar\left(\sqrt{\det(f)}\left(k+\frac{1}{2}\right)+\frac{\mathrm{Tr}(f)}{4}\right)\Big/k\in\mathbb{N}\right\}.$$

第 3 节概述了解析半经典分析所需的工具。首先，我们详细说明解析伪谱如何使我们能够得到特征值的渐近表达式，尽管预解式的规模很大。第二部分中，沿用 [37], 的思路，我们计算具有一般相位函数的傅里叶积分算子的乘积。随后，我们详细介绍 $\mathbb{C}^d$上的托普利兹算子的解析符号演算，因为流形上的情形可以归结为伯格曼核 [31, 5, 10, 16, 12]的解析性。这些计算需要对复积分进行围道变形，所需结果详见附录A。

在第 4 节中，我们考虑一个具有唯一势阱的一般符号 $f:\ M\to\mathbb{C}$ ，这意味着 $k=1$满足定理 1.1 的假设。我们使用若干算子将 $T_N(f)$共轭为其标准形。首先，我们运用解析莫尔斯引理得到一个辛同胚，将 f变为 $\mu(H)+O(\hbar)$，其中 μ是一个解析符号，再利用 [11]中的结果对其进行量子化。接着，新符号在 $\mathbb{C}$上为 $\mu(H)+O(\hbar)$，并通过托普利兹算子的共轭，在余项中提升一阶。海森矩阵上的条件在这一步作为第 2 节的一个应用出现。最后一步是对托普利兹算子的符号运用莫泽技巧，从而得到指数小余项。随后，我们结合这些算子，在 $k=1$时得到定理 1.1 的量子化条件。本节最后计算 μ^{-1} 在 $\hbar$中的一阶项。

在第 5 节中，我们将第 4 节的结果推广到定理 1.1 的一般假设。结合关于算子的相关信息，我们最终得到了谱的一般形状，见图 2。

记号

本文主要研究 $\mathbb{C}^d$ with $d\in\mathbb{N}$，记

$$y\cdot z=\sum_{1\le j\le d}y_jz_j,\quad y^2=y\cdot y,\quad |y|^2=y\cdot\overline{y},$$

对于 $(y,z)\in(\mathbb{C}^d)^2$, ，并使用距离 $|\cdot|$。设 $\rho>0$ 和 f 是定义在 $\mathbb{C}^d$ 上的 C^1 函数，则

- $B_\rho,\widetilde{B_\rho}$ are the open balls of centre 0 and radius ρ in $\mathbb{C}^d$ and $\mathbb{C}^{2d}$ respectively.
- $\mathcal{D}=\left\{(z,\overline{v})\in\mathbb{C}^{2d}\big/z=v\right\}$, and $\mathcal{D}_\rho=\mathcal{D}\cap\widetilde{B_\rho}$.
- $\partial_{x_j}f=\frac{1}{2}\left(\frac{df}{d\Re(x_j)}-i\frac{df}{d\Im(x_j)}\right)$, and $\overline{\partial_{x_j}}f=\frac{1}{2}\left(\frac{df}{d\Re(x_j)}+i\frac{df}{d\Im(x_j)}\right)$ for $1\le j\le d$.

设 f 是定义在 B_ρ 上的实解析函数，我们将 f 记为一个全纯延拓，意即~一个定义在 B_η 上的全纯函数，满足 $\eta\in]0,\rho]$，使得 $f(z,\overline{z})=f(z)$，见引理 A.13。然后，记

$$\partial_1\widetilde{f}(x,\overline{y})=\partial_x\widetilde{f}(x,\overline{y}),\quad \partial_2\widetilde{f}(x,\overline{y})=\overline{\partial_y}\widetilde{f}(x,\overline{y}).$$

我们还将 $\mathcal{P}$ 伯格曼核记作我们在命题 3.18 中引入的核。

致谢
本研究得到 ANR-24-CE40-5905-01“STENTOR”项目的支持。作者感谢 Alix Deleporte 和 San V˜u Ngo. c 在整个项目期间给予的指导以及对本文的校对。

2 二次符号

如引言中所述，对于一般符号 f，我们的策略是寻找一个傅里叶积分算子 $\mathfrak{U}$，将该符号约化为 $\mu(|z|^2)$。实际上，我们将在第 4 节看到，这一过程分为两步。首先，将 f 约化为 $\mu(H)$，其中 H 是 f 在临界点处的海森矩阵，并将其视为二次函数。接着，将 H 约化为 $|z|^2$的常数倍。从几何角度看，第一步更简单，因为相应的傅里叶积分算子在局部接近恒等映射；而第二个傅里叶积分算子的核则可以局部化在 $\mathbb{C}^2$的对角线之外。因此，本节将详细研究二次情形，从而给出使定理 1.1 成立所需的 f 的海森矩阵条件。同时，我们还将回顾一类二次算子的谱描述，尽管这方面已有相关结果，例如参见 [35, 28, 18]。

2.1 标准形

本小节中，我们考虑 $\mathbb{C}$上的二次符号托普利兹算子。回顾一下，态空间为 $\mathcal{B}_\hbar$，并且对于 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$，位于正确的符号空间中，

$$T_\hbar(f)u(x)=\int_{\mathbb{C}} e^{\frac{2x\overline{y}-|x|^2-|y|^2}{2\hbar}}F(y)u(y)\frac{dy}{\pi\hbar}.$$

特别地，对于所有 α、$\beta\in\mathbb{N}^2$，$T_\hbar(z^\alpha\overline{z}^\beta)$：$e^{-\frac{|x|^2}{2\hbar}}v(x)\mapsto\hbar^\beta e^{-\frac{|x|^2}{2\hbar}}\partial_z^\beta(z^\alpha v(z))|_{z=x}$.

本小节中，我们用实变量（p，q）表示符号，使得$z=\frac{p+iq}{\sqrt{2}}$。设 $f(p,q)=ap^2+bq^2+2cpq$，其中 $a=a_0+ia_p$、$b=b_0+ib_p$和 $c=c_0+ic_p$。回顾如何构造一个辛同胚 κ，使得在复化空间上，$f\circ\kappa^{-1}(p,q)=d(p^2+q^2)$。本小节沿用 [28], 的构造，我们希望详细说明这一点，因为谱研究中的极限条件会在计算中出现。为了使其成立，f 的虚部必须相较于实部“较小”，而恰当的条件实际上是

$$\begin{aligned}&\det(\Re f)+\det(\Im f)+i\sqrt{|\Im(\det f)^2-4\det(\Re f)\det(\Im f)|}\notin\mathbb{R}_-,\\&f(\mathbb{R}^2)\neq\mathbb{C}.\end{aligned}\tag{2}$$

下一个引理给出了一个与第一行等价、但更有意义的条件。尽管如此，我们仍保留这一表达式，因为它会直接出现在计算中。

引理 2.1. 方程 (2) 的第一行等价于 f 椭圆的，这意味着 $f(x,y)=0$ 蕴含 $x=0=y$。

证明。(2) 中的第一个方程等价于 $\det\Re(f)+\det\Im(f)>0$ 或 $(\Im\det(f))^2\neq 4\det\Re(f)\det\Im(f)$。第一个不等式等价于 $\Re(f)$ 或 $\Im(f)$ 椭圆的。第二个条件等价于 $\Re(f)$ 且 $\Im(f)$ 不共线，并且 f 椭圆的。为了证明这一点，我们写作 $f_1=a_0b_p-b_0a_p$，$f_2=a_0c_p-c_0a_p$，$f_3=b_0c_p-c_0b_p$ 和

$F = f_1^2 + 4f_2f_3 = \Im(\text{行列式 } f)^2 - 4\text{行列式}(\Re f)\ \text{行列式}(\Im f)$。采用这些记号，$f(p,q) = 0$ 蕴含

$$\begin{cases} f_2p^2 + f_3q^2 = 0 \\ f_1p^2 - 2f_3pq = 0 \\ f_1q^2 + 2f_2pq = 0 \end{cases}$$

这等价于

$$\begin{cases} f_1p = 2f_3q \\ f_1q = -2f_2p \\ Fpq = 0 \end{cases} \tag{3}$$

因此，如果 $F \neq 0$，那么要么 $f(p,q) = 0$ 意味着 $p = 0 = q$，要么系数 f_1、f_2、f_3 中有两个为零，这意味着 $\Re(f)$ 与 $\Im(f)$ 共线。反之，如果 $F = 0$，那么要么 $f_1 = f_2 = f_3 = 0$，即 $\Re(f)$ 与 $\Im(f)$ 共线；要么 f_1、f_2 和 f_3 均不为 0，此时 (3) 等价于 $f(p,q) = 0$，因此 f 不是椭圆的。 □

还可以进一步简化条件 (2)。

命题 2.2([28] 命题 2.1.1)。设 $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ 一个复值椭圆二次型。如果 $q(\mathbb{R}^2) \neq \mathbb{C}$，则存在 $\delta \in \mathbb{C}^*$ 使得 $\Re(\delta q)$ 是一个正定二次型。

我们所用的方法只有在满足这一假设时才适用。若不满足该假设，符号可能是双曲的，这将导致一种截然不同的研究，参见例如 [24]。为简单起见，我们直接假设 $\Re(f)$ 正定，这意味着$a_0, b_0, a_0b_0 - c_0^2 > 0$。

首先，考虑辛同胚

$$\kappa_1 : (p,q) \mapsto (p_1,q_1) = \left(\sqrt{\frac{a_0}{d_0}}p + \frac{c_0}{\sqrt{d_0a_0}}q, \sqrt{\frac{d_0}{a_0}}q\right)$$

其中 $d_0 = \sqrt{a_0b_0 - c_0^2} \in \mathbb{R}$，因为我们取了 $a_0b_0 - c_0^2 > 0$。利用这些新的坐标，我们得到

$$\begin{aligned} f \circ \kappa_1^{-1}(p_1,q_1) &= d_0(p_1^2 + q_1^2 + i(\alpha p_1^2 + \beta q_1^2 + 2\gamma p_1q_1)), \text{ where} \\ \alpha &= \frac{a_p}{a_0} \\ \gamma &= \frac{c_pa_0 - a_pc_0}{d_0a_0} \\ \beta &= \frac{1}{d_0^2}\left(a_0b_p - 2c_pc_0 + \frac{c_0^2a_p}{a_0}\right) \end{aligned}$$

然后，考虑酉变换

$$\kappa_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}\gamma}{\sqrt{\Delta(\Delta+\beta-\alpha)}} & \pm\frac{\sqrt{2}\gamma}{\sqrt{\Delta(\Delta-(\beta-\alpha))}} \\ \frac{\sqrt{\Delta+\beta-\alpha}}{\sqrt{2\Delta}} & \mp\frac{\sqrt{\Delta-(\beta-\alpha)}}{\sqrt{2\Delta}} \end{pmatrix}$$

其中 $\Delta = \sqrt{(\beta-\alpha)^2+(2\gamma)^2}$。$\sqrt{\Im(\text{复数域 } f)^2-4\text{行列式}(\Re f)\,\text{行列式}(\Im f)\,\text{行列式}(\Re f)}$ 并选择符号使行列式为 1。仅当 $\gamma=0$ 时，项 Δ、~~$\Delta+(\beta-\alpha)$~~ 和 ~~$\Delta-(\beta-\alpha)$~~ 才会消失；在这种情况下无需执行此步骤，我们可以取 $\kappa_2=\mathrm{Id}$。于是得到

$$f\circ(\kappa_2\circ\kappa_1)^{-1}(p_2,q_2)=d_0\left(1+i\frac{\beta+\alpha+\Delta}{2}\right)p_2^2+d_0\left(1+i\frac{\beta+\alpha-\Delta}{2}\right)q_2^2.$$

我们将 $r=d_0\left(1+i\frac{\beta+\alpha-\Delta}{2}\right)$ 和 $\zeta=\frac{1+i\frac{\beta+\alpha+\Delta}{2}}{1+i\frac{\beta+\alpha-\Delta}{2}}$ 写成使得 $f\circ(\kappa_2\circ\kappa_1)^{-1}(p_2,q_2)=r(\zeta p_2^2+q_2^2)$ 的形式。因此，自然可以考虑变换 $(p,q)\mapsto(\zeta^{\frac14}p,\zeta^{-\frac14}q)$，~~然而它不保持~~ $\mathbb{R}^2$。相反，我们考虑 f、$\widetilde{\kappa_1}$ 以及 $\widetilde{\kappa_2}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 的复化 $\mathbb{C}^2$ 上的全纯延拓，它们满足

$$\begin{aligned}\widetilde{f}(z,\overline{v})=&a\frac{(z+\overline{v})^2}{2}-b\frac{(z-\overline{v})^2}{2}+ci(z+\overline{v})(z-\overline{v}),\\ \widetilde{f}\circ(\widetilde{\kappa_2}\circ\widetilde{\kappa_1})^{-1}(z,\overline{v})=&r\left(\frac{\zeta-1}{2}z^2+\frac{\zeta-1}{2}\overline{v}^2+(\zeta+1)z\overline{v}\right).\end{aligned}$$

接下来，将对应于矩阵的 $\mathbb{C}^2$ 的全纯辛同胚记为 $\widetilde{\kappa_3}$

$$\frac12\begin{pmatrix}\zeta^{\frac14}+\zeta^{-\frac14} & \zeta^{\frac14}-\zeta^{-\frac14}\\ \zeta^{\frac14}-\zeta^{-\frac14} & \zeta^{\frac14}+\zeta^{-\frac14}\end{pmatrix}.$$

复数 $\zeta^{\frac14}$ 取正实部，这是可能的，因为

$$\begin{aligned}\zeta=\frac{1+\alpha\beta-\gamma^2+i\Delta}{1+\left(\frac{\beta+\alpha-\Delta}{2}\right)^2}&=\frac{1+\frac{\det(\Im f)}{\det(\Re f)}+i\Delta}{1+\left(\frac{\beta+\alpha-\Delta}{2}\right)^2}\\ &=\frac{\det(\Re f)+\det(\Im f)+i\sqrt{\Im(\det f)^2-4\det(\Re f)\det(\Im f)}}{\det(\Re f)\left(1+\left(\frac{\beta+\alpha-\Delta}{2}\right)^2\right)},\end{aligned}$$

并且由于 (2)。我们也可以说，$\kappa_3\colon(p,q)\mapsto(\zeta^{\frac14}p,\zeta^{-\frac14}q)$ 是从 $\mathbb{R}^2$ 定义到 $\mathbb{C}^2$ 的一个子集，而 $\widetilde{\kappa_3}$ 是其全纯延拓。因此，复合这三个~~变换，我们得到 $\widetilde{\kappa}=\widetilde{\kappa_3}\circ\widetilde{\kappa_2}\circ\widetilde{\kappa_1}$，使得 $f\circ\widetilde{\kappa}^{-1}(z,\overline{v})=2r\sqrt{\zeta}z\overline{v}=d_0z\overline{v}$，其中 $d_0=\sqrt{\det(f)}$ 是主平方根；由于我们假设 $\Re(f)$ 为正定，它是无歧义的，因此 $\det(f)\notin\mathbb{R}_-$。

这里，为简便起见，我们假设 $\Re(f)$ 正定；然而，我们已经看到，一般来说，这一性质由 δf with $\delta\in\mathbb{S}$ 满足。因此，对 δf 进行相同的构造并将结果除以 δ，即可得到 $d_0=\frac{\sqrt{\det(\delta f)}}{\delta}$。

2.2 量子化公式

我们将初始符号变换为常数乘以 $(z,\overline{v})\mapsto z\overline{v}$，它是谐振子的全纯延拓。现在，我们要对 $\widetilde{\kappa}$ 进行量子化，也就是说，构造傅里叶积分算子，使相应的共轭作用将主符号变为其与辛同胚的复合。

引理 2.3. 存在一个与 $\widetilde{\kappa}$ 相关的函数 ϕ，这意味着对于所有 $(x,y)\in\mathbb{C}^2$

$$\widetilde{\kappa}(x,\partial_x\phi(x,\overline{y}))=(\overline{\partial_y}\phi(x,\overline{y}),\overline{y}).$$

此外，ϕ 是一个相位函数，这意味着对于所有的 $x\in\mathbb{C}$，映射

$$\begin{aligned}\overline{\mathbb{C}}&\to\mathbb{R}\\ \overline{y}&\mapsto 2\Re\phi(x,\overline{y})-|y|^2,\end{aligned}$$

存在唯一的临界点 $y_0(x)\in\overline{\mathbb{C}}$，其符号为 $(0,-2)$，见定义 3.8。

证明。我们可以将 $\widetilde{\kappa}$ 写成 $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$，其中 $b\neq 0$ 且 $ad-cb=1$。于是 $\phi(x,y)=\frac{1}{2d}($ $2x\overline{y}+b\overline{y}^2-cx^2)$ 满足关于 $\widetilde{\kappa}$的等式，我们证明它是一个相位函数。事实上，$\overline{y}\mapsto 2\Re\phi(x,$ $\overline{y})-|y|^2$ 的海森矩阵为

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1+\Re\left(\frac{b}{d}\right) & \Im\left(\frac{b}{d}\right)\\ \Im\left(\frac{b}{d}\right) & -1-\Re\left(\frac{b}{d}\right)\end{pmatrix},$$

当且仅当海森矩阵的行列式为正时，它有一个符号为 $(0,-2)$ 的临界点，这等价于 $\left|\frac{b}{d}\right|<1$。对于 $\widetilde{\kappa_1}$和 $\widetilde{\kappa_2}$，该条件总是成立；而对于 $\widetilde{\kappa_3}$，该条件等价于

$$\frac{\Re\left(\left(\frac{\zeta}{|\zeta|}\right)^{\frac{1}{2}}\right)}{|\zeta^{\frac{1}{4}}-\zeta^{-\frac{1}{4}}|}>0$$

与 $\Re\left(\left(\frac{\zeta}{|\zeta|}\right)^{\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\Re\left(\frac{\zeta}{|\zeta|}\right)}$。那么，复合函数 $\widetilde{\kappa_3}\circ\widetilde{\kappa_2}\circ\widetilde{\kappa_1}$ 的海森矩阵的行列式为正，当且仅当 $\sqrt{1+{}^{\Re}(\zeta)_{|\zeta|}}>0$；由（2）可知，这一条件成立。

□

我们将在第 3.3 节详细阐述相位函数这一概念。我们想指出，这个引理给出了关于符号的一个充分条件，使得该辛同胚可量子化；这正是（2）起关键作用之处。现在，我们用这个函数 ϕ 来定义一个傅里叶积分算子，以简化 f。

定理 2.4。设 f 是定义在 $\mathbb{R}^2$ 上的椭圆二次函数，满足 $f(\mathbb{R}^2)\neq\mathbb{C}^2$，那么存在 $\delta\in\mathbb{S}$，使得 $\Re(\delta f)$ 为正定。此外，相应托普利兹算子 $T_\hbar(f)$ 的谱由孤立单特征值组成

$$\sigma(T_\hbar(f))=\sigma_d(T_\hbar(f))=\left\{\hbar\left(\frac{\sqrt{\det(\delta f)}}{\delta}\frac{2k+1}{2}+\frac{\operatorname{Tr}f}{2}\right)\Big/k\in\mathbb{N}\right\},$$

记迹 $f=a+b$ 为 f 的矩阵表示的迹。

证明。根据 ϕ 的定义，

$$I_{\hbar,\phi}u:x\mapsto\int_{\mathbb{C}}e^{\frac{2\phi(x,y)-|y|^2-|x|^2}{2\hbar}}u(y)\frac{dy}{\pi\hbar}$$

从 $\mathcal{B}_\hbar \cap L^2\left(\mathbb{C}, e^{w\frac{|y|^2}{\hbar}}dz\right)$ 到 $\mathcal{B}_\hbar$ 的映射是有界的，且具有 $w = \frac{1}{2}|\partial_y^2\phi(0,0)| < 1$。我们计算得，

$$\begin{aligned} T_\hbar(f)I_\phi u(x) &= \int_{\mathbb{C}} e^{\frac{2x\overline{y}-|y|^2-|x|^2}{2\hbar}} f(y) \int_{\mathbb{C}} e^{\frac{2\phi(y,\overline{z})-|z|^2-|y|^2}{2\hbar}} u(z) \frac{dz}{\pi\hbar}\frac{dy}{\pi\hbar} \\ &= \int_{\mathbb{C}} e^{\frac{-|z|^2-|x|^2}{2\hbar}} u(z) \int_{\mathbb{C}} e^{\frac{\phi(y,\overline{z})+x\overline{y}-|y|^2}{\hbar}} f(y) \frac{dy}{\pi\hbar}\frac{dz}{\pi\hbar} \end{aligned}$$

并注意到

$$\phi(y,\overline{z}) + x\overline{y} - |y|^2 = \phi(x,\overline{z}) - (y-x)\left(\overline{y} - \frac{\partial_x^2\phi}{2}(y-x) - \partial_x\phi(x,\overline{z})\right),$$

因此，

$$\begin{aligned} &T_\hbar(f)I_\phi u(x) \\ &= \int_{\mathbb{C}} e^{\frac{2\phi(x,\overline{z})-|z|^2-|x|^2}{2\hbar}} u(z) \int_{\mathbb{C}} e^{\frac{-(y-x)\left(\overline{y}-\frac{\partial_x^2\phi}{2}y-\frac{\partial_x^2\phi}{2}x-\partial_x\phi(x,\overline{z})\right)}{\hbar}} f(y) \frac{dy}{\pi\hbar}\frac{dz}{\pi\hbar} \\ &= \int_{\mathbb{C}} e^{\frac{2\phi(x,\overline{z})-|z|^2-|x|^2}{2\hbar}} u(z) \int_{\mathbb{C}} e^{\frac{-y\overline{y}}{\hbar}} \widetilde{f}\left(y+x, \overline{y} + \frac{\partial_x^2\phi}{2}y + 2\frac{\partial_x^2\phi}{2}x + \partial_x\phi(x,\overline{z})\right) \frac{dy}{\pi\hbar}\frac{dz}{\pi\hbar} \\ &= \int_{\mathbb{C}} e^{\frac{2\phi(x,\overline{z})-|z|^2-|x|^2}{2\hbar}} u(z) c(x,z) \frac{dz}{\pi\hbar} \end{aligned}$$

通过线性轮廓变形，见命题 A.7。然后，

$$\begin{aligned} c(x,z) =& \sum_{k=0}^{1} \frac{\hbar^k}{k!} \partial_z^k \overline{\partial_z}^k \left(\widetilde{f}\left(y+x, \overline{y} + \frac{\partial_x^2\phi}{2}y + 2\frac{\partial_x^2\phi}{2}x + \partial_x\phi(x,\overline{z})\right)\right)(0) \\ =& \widetilde{f}(x, \partial_x\phi(x,\overline{z})) + \partial_1\partial_2\widetilde{f}(x, \partial_x\phi(x,\overline{z})) + \frac{\partial_x^2\phi}{2}\partial_2^2\widetilde{f}(x, \partial_x\phi(x,\overline{z})), \end{aligned}$$

这个计算是显式的，因为 f 是二次的，但我们将在引理 3.4 中将其推广到球上的解析函数。另一方面，我们考虑算子 $T_{\hbar,\mathrm{cov}}(x\overline{y}) : u(x) \mapsto xT_\hbar(\overline{y})u(x)$，

$$\begin{aligned} I_\phi T_{\hbar,\mathrm{cov}}(x\overline{y})u(x) &= \int_{\mathbb{C}} e^{\frac{2\phi(x,\overline{y})-|y|^2-|x|^2}{2\hbar}} \int_{\mathbb{C}} e^{\frac{2y\overline{z}-|z|^2-|y|^2}{2\hbar}} y\overline{z}u(z) \frac{dz}{\pi\hbar}\frac{dy}{\pi\hbar} \\ &= \int_{\mathbb{C}} e^{\frac{-|z|^2-|x|^2}{2\hbar}} \overline{z}u(z) \int_{\mathbb{C}} e^{\frac{\phi(x,\overline{y})+y\overline{z}-|y|^2}{\hbar}} y \frac{dy}{\pi\hbar}\frac{dz}{\pi\hbar} \\ &= \int_{\mathbb{C}} e^{\frac{2\phi(x,\overline{z})-|z|^2-|x|^2}{2\hbar}} \overline{z}u(z) \int_{\mathbb{C}} e^{\frac{-\left(y-\frac{\partial_{\overline{y}}^2\phi}{2}(\overline{y}-\overline{z})-\partial_{\overline{y}}\phi(x,\overline{z})\right)(\overline{y}-\overline{z})}{\hbar}} y \frac{dy}{\pi\hbar}\frac{dz}{\pi\hbar} \\ &= \int_{\mathbb{C}} e^{\frac{2\phi(x,\overline{z})-|z|^2-|x|^2}{2\hbar}} \overline{z}u(z) \int_{\mathbb{C}} e^{\frac{-|v|^2}{\hbar}} \left(v + \frac{\partial_{\overline{y}}^2\phi}{2}\overline{v} + \partial_{\overline{y}}\phi(x,\overline{z})\right) \frac{dv}{\pi\hbar}\frac{dz}{\pi\hbar} \\ &= \int_{\mathbb{C}} e^{\frac{2\phi(x,\overline{z})-|z|^2-|x|^2}{2\hbar}} \overline{z}\partial_{\overline{y}}\phi(x,\overline{z})u(z) \frac{dz}{\pi\hbar} \end{aligned}$$

~ ~根据定义，由于 $f(x,\partial_x\phi(x,\overline{z}))=f\circ\widetilde{\kappa}(\partial_{\overline{y}}\phi(x,\overline{z})\ \overline{z})=d_0\partial_2\phi(x,\overline{z})\overline{z}$，且 $T_{\hbar,\mathrm{cov}}(x\overline{y})=T_\hbar(|y|^2-\hbar)$,

$$T_\hbar(f)I_\phi=I_\phi T_\hbar\left(d_0|y|^2-d_0\hbar+\partial_1\partial_2\widetilde{f}(x,\partial_x\phi(x,\overline{z}))+\frac{\partial_x^2\phi}{2}\partial_2^2\widetilde{f}(x,\partial_x\phi(x,\overline{z}))\right).$$

此外 ~进一步，对 $f(x,\partial_x\phi(x,\overline{y}))=d_0\overline{y}\overline{\partial_y}\phi(x,\overline{y})$ 关于 x 和 $\overline{y}$ 求导，得到 s

$$\partial_x\overline{\partial_y}\phi(x,\overline{y})(\partial_1+\partial_x^2\phi(x,\overline{y})\partial_2)\partial_2\widetilde{f}=d_0\partial_x\overline{\partial_y}\phi(x,\overline{y}),$$

并与前一个等式合并,

$$\begin{aligned}T_\hbar(f)I_\phi=&I_\phi T_\hbar\left(d_0|y|^2-d_0\hbar+\frac{1}{2}(\partial\overline{\partial}f+d_0)\right)\\=&I_\phi T_\hbar\left(d_0|y|^2+\frac{\hbar\,\mathrm{Tr}\,f}{2}-\frac{\hbar d_0}{2}\right).\end{aligned}$$

算子 $T_\hbar\left(d_0|y|^2+{}^{\hbar}\mathrm{Tr}_2{}^{f}-\frac{\hbar d}{2}\right)$ 具有纯离散谱，其简单特征值为 $\hbar\left(d_0(k+1)+{}^{\hbar}\mathrm{Tr}_2{}^{f}-\frac{d_0}{2}\right)$，其中 $k\in\mathbb{N}$，相应的特征函数为

$$e^{-\frac{|z|^2}{2\hbar}}z^k\in\mathcal{B}_\hbar\cap L^2\left(\mathbb{C},e^{w\frac{|y|^2}{\hbar}}dz\right)$$

因为 $w<1$。于是，对于每个 $k\in\mathbb{N}$，$I_\phi\left(e^{-\frac{|z|^2}{2\hbar}}z^k\right)\in\mathcal{B}_\hbar$都是 $T_\hbar(f)$ 的特征函数，且具有相同的特征值。同理，I_ϕ^{-1} 将 $T_\hbar(f)$ 的每个特征函数变为 $e^{-\frac{|z|^2}{2\hbar}}z^k$，其中 $k\in\mathbb{N}$，因此得证。

□

我们并未证明 I_ϕ 可逆，因为我们将在第3节中为更一般的框架详细说明其参数子。由于这里的 f 是二次的，计算过程是显式的。I_ϕ 的一般共轭作用将在定理 3.21 中描述，并将在第 4 节中使用。

3 解析半经典工具

在本小节中，我们揭示为何达到 $\hbar^\infty$ 余项的谱估计通常不适合研究非自伴算子，以及为何解析伪谱更为相关。为了求得这一伪谱，我们将把 $T_N(f)$ 化为谐振子的函数，误差为指数余项。为此，我们首先考虑傅里叶积分算子，然后使用托普利兹算子的符号演算。因此，我们回顾并详细介绍具有复相位且具备解析正则性的傅里叶积分算子构造。随后介绍托普利兹算子的符号演算，特别是解析符号类的拓扑。注意，伪微分算子的解析符号演算也在 [4,3] 中有所描述，而托普利兹算子和复傅里叶积分算子的解析符号演算则见于 [37, 13] 。这两个步骤都需要利用驻相位方法计算围道上的积分；本小节所使用的结果见附录A。

3.1 解析伪谱

在第 2 节中，对符号所作的假设使计算变得明确，但从现在起，我们考虑一般符号 f。一种方法是转而寻找拟模，即寻找满足以下条件的值 $\nu_\hbar$ 和状态 $u_\hbar$：

$$T_\hbar(f)u_\hbar = \nu_\hbar u_\hbar + O(\hbar^\infty).$$

然而，我们将看到，如果 f 不是实值函数，仅仅求出谱是不够的。

设 $f \in C^\infty(\mathbb{C})$ 是实值函数，且其所有导数至多呈多项式增长。那么，$T_\hbar(f)$ 是作用于 $\mathcal{B}_\hbar$ 上的自伴托普利兹算子，而一个非常有用的结果是，对于预解集中的所有 λ，均有 $T_\hbar(f)$

$$\left\|(T_\hbar(f) - \lambda\,\mathrm{Id})^{-1}\right\|_{\mathcal{B}_\hbar \to \mathcal{B}_\hbar} = \frac{1}{d(\lambda, \sigma(T_\hbar(f)))}. \tag{4}$$

因此，拟模对应于远离谱的值 $\hbar^\infty$。此外，$T_\hbar(f)$ 还满足

$$\frac{1}{\left\|(T_\hbar(f) - \lambda\,\mathrm{Id})^{-1}\right\|_{\mathcal{B}_\hbar \to \mathcal{B}_\hbar}} = \inf_{x \in M} |f(x) - \lambda| + O(\hbar^{\frac{1}{2}}) \tag{5}$$

见 [2] 定理 1.1，因此结合 (4) 可知，谱填满了经典值域 $\Sigma(f) = \{f_0(z) / \, z \in \mathbb{C}\}$，其中 $\hbar \to 0$ 是算子的主符号。注意，对于自伴算子，经典值域是 $\mathbb{R}$ 的子集。

现在，若 $T_\hbar(f)$ 不再是自伴的，则 (5) 仍然成立，但 (4) 不成立。因此，经典值域可能远大于谱，而且即使远离谱，预解算子范数也可能达到 $\hbar^{-\infty}$ 的量级。更准确地说，[2] 定理 1.1 表明，对于所有 $\lambda \in \mathbb{C}$，如果存在 $x_0 \in M$ 使得 $\lambda = f(x_0)$，且 $\{\Re(f)\ \Im(f)\}(x_0) < 0$，那么

$$\frac{1}{\left\|(T_\hbar(f) - \lambda\,\mathrm{Id})^{-1}\right\|_{\mathcal{B}_\hbar \to \mathcal{B}_\hbar}} = O(\hbar^\infty).$$

考虑复数域上的两个基本微分算子：谐振子 $H = -\hbar^2\Delta + x^2$，以及对于 $-\pi < \theta < \pi$ 而言的旋转谐振子 $H_\theta = -\hbar^2\Delta + e^{i\theta}x^2$。那么，$H$ 的谱为 $\{\hbar(2k+1) / \, k \in \mathbb{N}\}$，而 H_θ 的谱则只是后者的旋转 $\left\{e^{i\frac{\theta}{2}}\hbar(2k+1) / \, k \in \mathbb{N}\right\}$。与此同时，$H$ 的经典值域为 $\mathbb{R}_+$，但 H_θ 的经典值域为 $\{re^{is} / \, r \in \mathbb{R}_+, -\theta \le s \le \theta\}$，如图1所示。关于这些结果，参见 [28, 18]。

然而，我们将在第 4 节证明，按照下文的定义，$T_\hbar(f)$ 的 c-解析伪谱（其中 $c > 0$）由每个特征值周围的一组小球的并组成。

定义 3.1. 设 $P_\hbar$ 是希尔伯特空间 H 上定义域为 D 的算子，令 $c > 0$，则对于固定的 $\hbar > 0$，$P_\hbar$ 的 c-解析伪谱为

$$\sigma_c(P_\hbar) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} / \inf_{u \in D \setminus \{0\}} \frac{\left\|(P_\hbar - \lambda\,\mathrm{Id})\,u\right\|_H}{\|u\|_H} \le e^{-\frac{c}{\hbar}}\right\}.$$

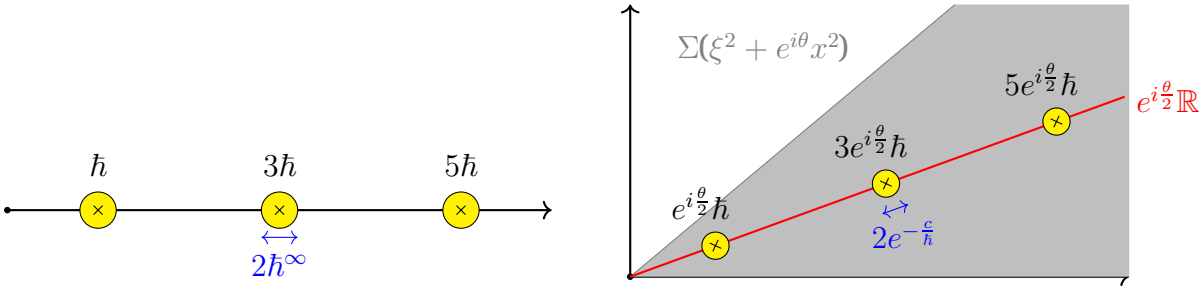

图1：左侧： H的谱，黄色球表示预解算子范数大于 $\hbar^{-\infty}$的区域。右侧： H_θ的谱，黄色球现在表示 c-解析伪谱，灰色区域则是经典值域。

因此，我们的目标是找到尽可能小的解析伪谱；理想情况下，每个连通分支都只包含一个特征值。这一预期源于对二次情形的研究，参见 [28, 40, 18]，及下文。

引理 3.2 ([38] 定理 4.3)。 设 $c > 0$， $\sigma_c(P)$的每个有界连通分支都至少包含 $\sigma(P)$的一个点。

为了以解析精度估计该算子，本文考虑的数据都具有解析正则性。

3.2 复相位傅里叶积分算子

现有结果和第 2 节表明，在处理非自伴算子时，必须考虑具有复值相位函数的傅里叶积分算子。这类算子的符号演算和有界性早已为人熟知；Melin、Sjöstrand 和 Hörmander 已在光滑正则性情形下证明了这一点 [27, 22]。Sjöstrand 也在解析正则性情形下证明了这一点 [37]。不过，我们不会采用众所周知的方式来表示傅里叶积分算子，即引入一个辅助变量并沿围道积分。事实上，近期研究 [13, 11, 15] 揭示了一种更方便的定义方式：使用无焦散的 WKB形式核，这意味着在坐标图中，它具有如下形式

$$u \mapsto \int_{\mathbb{C}^d} e^{\frac{\phi(x,y)}{\hbar}} a(x,y)u(y)dy, \text{ instead of } \int_{\Gamma} e^{\frac{\psi(x,y,\theta)}{\hbar}} b(x,y,\theta)u(y)dyd\theta,$$

取 Γ 围道，且 ϕ, ψ, a, b 为复值函数。为完整起见，本小节给出任意维数下复傅里叶积分算子的定义及符号演算，尽管本文其余部分只考虑一维情形。我们首先需要两个计算结果。

引理 3.3。 设 $0 < \eta < \rho$和 f 是定义在 B_ρ 上的解析函数，并具有定义在 B_ρ 上的全纯$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$延拓 f，则对于所有 α， $\beta \in \mathbb{N}, \epsilon \in]0$， $\rho - \eta[$，和 $z \in \overline{B_\eta}$，

$$\partial^\alpha \overline{\partial}^\beta f(z) = \frac{-\alpha!\beta!}{4\pi^2} \int_{C(z,\epsilon)} \frac{\widetilde{f}(\xi,\zeta)}{(\xi - z)^{\alpha+1}(\zeta - \overline{z})^{\beta+1}} d\xi d\zeta$$

其中 $C(z,\epsilon) = \{(\xi,\zeta) \in \mathbb{C}^2 / \ |\xi - z| = |\zeta - \overline{z}| = \epsilon\}$。因此，

$$\sup_{z \in \overline{B_\eta}} \left|\partial^\alpha \overline{\partial}^\beta f(z)\right| \leq \alpha!\beta! \left\|f\right\|_{L^\infty(\overline{B_{\eta+\epsilon}})} \epsilon^{-(\alpha+\beta)}.$$

~引理 3.4 ([37] 第 2 章). 设 $F(x,\overline{y})$ 在 B_ρ 上全纯，且 $\eta \in]0,\rho[$, 则对所有$N \in \mathbb{N}$

$$\int_{B_\eta} e^{-\frac{|y|^2}{\hbar}} F(y,\overline{y}) \frac{dy}{\pi\hbar} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\hbar^k}{k!} \left(\partial_x \partial_{\overline{y}}\right)^k F(0) + R_N(\hbar)$$

with

$$|R_N(\hbar)| = O\left(\|F\|_{L^\infty\left(\widetilde{B_{\rho-\epsilon}}\right)} N^2 N! \left(\frac{\hbar}{\min(\rho-\eta,\eta)} \right)^N \right).$$

利用斯特林公式，当 $N \to \infty$ 时，我们有

$$N^2 N! \left(\frac{\hbar}{\min(\rho-\eta,\eta)} \right)^N \sim C N^{\frac{5}{2}} \left(\frac{N\hbar}{e\min(\rho-\eta,\eta)} \right)^N$$

其中 $C > 0$ 为常数。使该余项最小的最优 N 为 $\frac{}{\min(\rho-\eta,\eta)\ \hbar}$，此时

$$R_N(\hbar) = O\left(\hbar^{-\frac{5}{2}} e^{-\frac{\min(\rho-\eta,\eta)}{\hbar}} \right).$$

因此，对于任意 $0 < \delta < 1$，我们可以取 $N = \delta \frac{\min(\rho-\eta,\eta)}{\hbar}$，从而得到指数级小的误差。

~证明。根据假设，$(z,y) \mapsto u(z)v(\overline{y})$ 在 B_ρ上全纯，因此根据引理 3.3,

$$\left|\partial_x^k \partial_{\overline{y}}^l F(0,0)\right| \leq \frac{k!l!}{\eta^{k+l}} \|F\|_{L^\infty\left(\widetilde{B_\eta}\right)},$$

因此，对所有 $|z| > \eta$

$$\left| \sum_{k+l \leq N-1} \left(\partial_x \partial_{\overline{y}}\right)^k F(0,0) \frac{z^k \overline{z}^l}{k!l!} \right| \leq \frac{N^2}{2} \left(\frac{|z|}{\eta} \right)^N \|F\|_{L^\infty\left(\widetilde{B_\eta}\right)}.$$

Sinc ~e F 在 B_ρ上全纯，若 $|z| \leq \eta$，则利用泰勒公式和引理 3.3:

$$\begin{aligned}
&\left| F(z,\overline{z}) - \sum_{k+l \leq N-1} \partial_x^k \partial_{\overline{y}}^l F(0,0) \frac{z^k \overline{z}^l}{k!l!} \right| \\
\leq &\frac{1}{N!} \sum_{k+l=N} \left\| \partial_x^k \partial_{\overline{y}}^l F \right\|_{L^\infty\left(\widetilde{B_\eta}\right)} |z|^N \\
\leq &\frac{|z|^N}{N!} \sum_{k+l=N} k!l! \|F\|_{L^\infty\left(\widetilde{B_{\rho-\epsilon}}\right)} (\rho-\eta-\epsilon)^{-k-l} \\
\leq &(N+1) \|F\|_{L^\infty\left(\widetilde{B_{\rho-\epsilon}}\right)} \left(\frac{|z|}{\rho-\eta-\epsilon} \right)^N
\end{aligned}$$

其中 $\epsilon > 0$ 满足 $\eta < \rho - \epsilon$。我们通过归纳法计算

$$\int_{\mathbb{C}} e^{-\frac{|z|^2}{\hbar}} z^k \overline{z}^l \frac{dz}{\pi\hbar} = \delta_{k=l} k! \hbar^k$$

然后，

$$\int_{\mathbb{C}} e^{-\frac{|z|^2}{\hbar}} \sum_{k+l\leq 2N-1} \partial_x^k \partial_{\overline{y}}^l F(0,0) \frac{z^k \overline{z}^l}{k!l!} \frac{dz}{\pi\hbar} = \sum_{0\leq k\leq N-1} \frac{\hbar^k}{k!} \partial_x^k \partial_{\overline{y}}^l F(0,0).$$

结合前面的计算可得

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{B_\eta} e^{-\frac{|z|^2}{\hbar}} Fz, \overline{z}) \frac{dz}{\pi\hbar} - \sum_{0\leq k\leq N-1} \frac{\hbar^k}{k!} \partial_x^k \partial_{\overline{y}}^l F(0,0) \right| \\
\leq & \int_{z\in B_\eta} \left| e^{-\frac{|z|^2}{\hbar}} F(z, (\overline{z}) - \sum_{k+l\leq 2N-1} \partial_x^k \partial_{\overline{y}}^l F(0,0) \frac{z^k \overline{z}^l}{k!l!} \right| \frac{dz}{\pi\hbar} \\
& + \int_{|z|>\eta} \left| \sum_{k+l\leq 2N-1} \partial_x^k \partial_{\overline{y}}^l F(0,0) \frac{z^k \overline{z}^l}{k!l!} \right| \frac{dz}{\pi\hbar} \\
\leq & CN^2 \left\| F \right\|_{L^\infty\left(\widetilde{B_{\rho-\epsilon}}\right)} \min(\rho-\epsilon-\eta, \eta)^{-2N} \int_{\mathbb{C}} e^{-\frac{|y|^2}{\hbar}} |y|^{2N} \frac{dy}{\pi\hbar} \\
\leq & C \left\| F \right\|_{L^\infty\left(\widetilde{B_\rho}\right)} N^2 N! \left(\frac{\hbar}{\min(\rho-\eta, \eta)} \right)^N
\end{aligned}$$

□

最终，我们得到余项 $O(e^{-c\frac{\min(\rho-\eta,\eta)}{\hbar}})$。不过，我们将其写作$O(e^{-c\frac{\min(\eta)}{\hbar}})$，因为相比于 $\eta \nearrow \rho$，我们更关注渐近 $\eta \searrow 0$。N 中的优化可得到指数小余项，它看似是一个微积分技巧，但实际上对于解析符号的定义至关重要。

回忆一下，$\mathbb{C}^d$ 的一个开集上的实值函数 W 是多重次调和的，分别严格多重次调和的，当且仅当矩阵 $\left(\partial_{x_j}\partial_{\overline{x_k}} W\right)_{1\leq j,k\leq d}$分别是半正定的，分别是正定的。

定义 3.5（函数状态空间）。令 $d \in \mathbb{N}$，我们固定 U $\mathbb{C}^d$的一个开集，并令 Φ_M为 U上的一个解析实值多重次调和函数。令 W 为一个权函数，即一个解析实值函数，我们假设 $\Phi_M - W$是严格多重次调和的。于是，修正 Bargmann 空间

$$\mathcal{H}_\hbar^{\Phi_M, W}(U) = L^2(U, e^{-\frac{W(z)}{\hbar}} dz) \bigcap \left\{ e^{-\frac{\Phi_M}{2\hbar}} f / \ f \text{ holomorphic on } U \right\}.$$

是关于 $L^2(U, e^{-\frac{W(z)}{\hbar}} dz)$ 内积的希尔伯特空间，例见 [31]。

实际上，我们将在流形 M 上使用局部坐标，而 Φ_M 将是一个凯勒势。如果凯勒势不会引起歧义，我们就省略它，改写为 $\mathcal{H}_\hbar^W(U)$。此外，若 $W = 0$，请注意，$\mathcal{H}_\hbar^0(U) = \mathcal{B}_\hbar(U)$ 就是通常的 Bargmann 空间。

回忆一下，如果 $m \geq 1$，并且存在 $C > 0$、$N \in \mathbb{N}^*$，使得对于所有 $(x, y) \in \mathbb{C}^2$，$m(x) \leq C(1 + |x-y|^2)^{\frac{N}{2}} m(y)$，那么 $m \in C^\infty(\mathbb{C})$ 是一个阶函数。如果 $M = \mathbb{C}, W$是权函数，而m是阶函数，那么我们还考虑以下空间

$$\mathcal{H}_\hbar^{W,m} = L^2(\mathbb{C}, m(z)^2 e^{-\frac{W(z)}{\hbar}} dz) \bigcap \left\{ e^{-\frac{|z|^2}{2\hbar}} f / \ f \text{ holomorphic on } U \right\}.$$

事实上， Φ_M 可以看作一个凯勒势，因为 $\mathcal{H}^{\Phi_M,\ \hbar\ \ 0}$ 与相应流形上的态空间相关联。首先，回顾流形上托普利兹算子的定义。设 M 是一个实解析、可量子化的凯勒流形，$L \to M$ 是一个预量子线丛，而 $\mathcal{H}_N = H^0(M, L^{\otimes N})$ 是 M 上对应于 $N \in \mathbb{N}^*$ 的量子空间，即 $L^{\otimes N} \to M$ 的全纯截面空间。于是，对于 $f \in L^\infty(M)$，相应的托普利兹算子为 $T_N(f)$: $u \mapsto \Pi_N(fu)$，其中 Π_N是从 $L^2(M)$ 到 $\mathcal{H}_N$ 的投影。现在，若 U 是 M 的一个开集，使得我们有局部坐标图 $l\colon U \to V \subset \mathbb{C}^d$，并且 V 上有一个凯勒势 Φ_M，那么

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_N &\hookrightarrow \mathcal{H}_\hbar^{\Phi_M,0}(V) \\ s &\mapsto s \circ l^{-1}|_V, \end{aligned}$$

是一个单射，对于 $\hbar = \frac{1}{N}$。我们还将在命题 3.18 中看到，伯格曼核是一个解析符号，这意味着存在一个符号 B，使得局部地$T_N(f)s = T_\hbar(Bf)\ (s \circ l^{-1}|_V)\ + O(e^{-\frac{c}{\hbar}}) \left\| s \right\|_{L^2(U)}$。

此外，我们将很快把问题归约到 $\mathbb{C}^d$，在这种情况下我们选择 $\Phi_M = |z|^2$。因此，从现在起，在本小节中我们考虑 $\mathbb{C}^d$ 上的数据。为清晰起见，我们回顾 $\mathbb{C}$ 的凯勒结构以及相应的量子空间。

例 3.6（$\mathbb{C}$ 的凯勒结构）。设 $M = (\mathbb{R}^2, J, \omega)$，其复结构 J 和辛形式 ω 均由矩阵表示

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

复切丛于是为 $TM \otimes \mathbb{C} = T^{1,0}M \oplus T^{0,1}M = Vect\left(\frac{(1,i)}{\sqrt{2}}\right) \oplus Vect\left(\frac{(1,-i}{\sqrt{2}}\right)$。度量由 $g(X,Y) = \omega(-JX,Y) = X^\intercal Y$ 给出。它们对应于坐标 $z = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$ 和 $\overline{z} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$。于是，预量子线丛由 $L = (\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{C}, \nabla, h)$ 给出，其度量为 $h(u,v) = u\overline{v}$。由于

$$\omega = dx \wedge d\xi = \left(\frac{dz + d\overline{z}}{\sqrt{2}}\right) \wedge \left(\frac{dz - d\overline{z}}{\sqrt{2}i}\right) = idz \wedge d\overline{z} = i\partial\overline{\partial}|z|^2,$$

必然地， ∇ 具有$d + az d\overline{z} - b\overline{z} dz$的形式，其中 $a+b=1$，但它还满足 $d(h(a,b)) = h(\nabla a, b) + h(a, \nabla b)$，因此 $a = b = 1$。于是， $\nabla^{0,\ 1} = \overline{\partial} + \frac{z}{2} d\overline{z}$，而量子空间是

$$\mathcal{H}_N = L^2 \cap \left\{ f(z) e^{-N\frac{|z|^2}{2}} / \ f \text{ holomorphic} \right\} = \mathcal{B}_\hbar$$

对于$\hbar = \frac{1}{N}$。

我们的主要目标是能够对 M 的辛同胚 $\tilde{\kappa}$ 进行量子化。基于这一点，我们考虑 $L \times L \to M \otimes \overline{M}$ 的一个小节 $\mathfrak{I}$，它将作为算子核。它必须是全纯的，因此局部具有如下形式： $\mathfrak{I} = e^{-\Phi_M(x,\overline{y}) - \Phi_M(z,\overline{v}) + \phi(x,\overline{v})}$其中 Φ_M 是凯勒势，并且需要在图 Graph($\tilde{\kappa}$) 上为常数，这等价于

$$\left\{\left(\widetilde{\nabla}\otimes \mathrm{Id}+\mathrm{Id}\otimes\widetilde{\overline{\nabla}}\right)\mathfrak{I}=0\right\}=\mathrm{Graph}\left(\widetilde{\kappa}\right),$$

因为 Graph($\widetilde{\kappa}$) 是一个拉格朗日子流形。如前所述，我们认为可以将问题归约到 $\mathbb{C}^{2d}$，因此给出如下定义。

定义 3.7。设 U,V 是复数域 $\mathbb{C}^{2d}$ 中包含 0 的邻域，且 $\widetilde{\kappa}: U\to V$ 是一个辛同胚。设 W，B 分别是 $\mathbb{C}^{2d}$ 和 $\mathbb{C}^d$ 中包含 0 的邻域，我们称全纯函数 $\phi: W\to B$ 与 $\widetilde{\kappa}$ 相关联，如果

$$\mathrm{Graph}(\widetilde{\kappa})=\{(x,\overline{y},z,\overline{v})\in U\times V/ \\ \partial_x\phi(x,\overline{v})=\partial_1\widetilde{\Phi_M}(x,\overline{y}),\ \partial_{\overline{v}}\phi(x,\overline{v})=\partial_2\widetilde{\Phi_M}(z,\overline{v})\Big\}. \quad (6)$$

这些就是所谓的哈密顿-雅可比方程。反过来，若 $\phi: W\to B$ 是一个全纯函数，则存在一个满足 (6) 的相关辛同胚，记作 $\widetilde{\kappa_\phi}$。注意，若 $\Phi_M(x)=|z|^2$，则 (6) 等价于

$$\widetilde{\kappa}(x,\partial_x\phi(x,\overline{y}))=\left(\overline{\partial_y}\phi(x,\overline{y}),\overline{y}\right),$$

对于所有 $(x\ \overline{y})\in W$。此外，$\partial_x\overline{\partial_y}\phi(x,\overline{y})\in Gl(\mathbb{C}^d)$，因为 $\widetilde{\kappa}$ 是一个辛同胚 .

函数 ϕ 并非总是存在，[11] 给出了拉格朗日图 Graph(κ) 的一个充分条件。对我们而言，这等价于 (2)。若该函数存在，则合适的算子候选为

$$I_\phi(a)u(x)=\int_{\mathbb{C}} e^{\frac{2\phi(x,\overline{y})-\Phi_M(x)-\Phi_M(y)}{2\hbar}}a(x,y)u(y)\frac{dy}{\pi\hbar}$$

与 $a\in L^\infty(\mathbb{C}\otimes\overline{\mathbb{C}})$ 相联系。为了证明其定义良好，我们需要对函数 ϕ 提出一些假设，并证明若干结论。

定义 3.8（相位函数）。设 W 是定义在 U 上的实值解析函数，且 $\phi:(x,\overline{y})\mapsto\phi(x,\overline{y})$ 是定义在 $U\times\overline{U}$ 上的全纯函数，并且处处满足 $\partial_x\overline{\partial_y}\phi\in Gl(\mathbb{C}^d)$。我们假设 Φ_M-W 是严格多重次调和的。若对于所有 $x\in M$，映射 ϕ 是 W 的相位函数，

$$\begin{aligned}&\overline{\mathbb{C}}^d\to\mathbb{R}\\ &\overline{y}\mapsto 2\Re\phi(x,\overline{y})-\Phi_M(y)+W(y),\end{aligned}$$

具有唯一的临界点 $y_0(x)\in\overline{\mathbb{C}^d}$，其符号为 $(0,-2d)$。我们记

$$\begin{aligned}W_l:\mathbb{C}^d\to&\mathbb{R}\\ x\mapsto&\mathrm{cv}_{y\in\mathbb{C}^d}\left[2\Re(\phi(x,\overline{y}))-\Phi_M(\overline{y})+W(\overline{y})\right]-\Phi_M(x)\\ =&2\Re\left(\phi\left(x,\overline{y_0(x)}\right)\right)-\Phi_M\left(\overline{y_0(x)}\right)+W\left(\overline{y_0(x)}\right)-\Phi_M(x)\end{aligned}$$

并将其称为由 ϕ得到的变换后的权函数。根据定义，对于在 $y_0(x)$附近的 y

$$2\Re\phi(x,\overline{y})-\Phi_M(y)-\Phi_M(x)+W(\overline{y})-W_t(x)\le -C\left|y-y_0(x)\right|^2. \quad (7)$$

我们采用这一记号和术语，因为 $\Phi_M + W_l$ 可以看作 $\Phi_M - W$ 的变形勒让德变换。

引理 3.9. 若 ϕ 是 W 的相位函数，则变换后的权函数 W_l 满足：$\Phi_M + W_l$ 严格多重次调和。

证明. 证明只是对 [37] 引理 3.2 的改写。我们在点 x_0 附近作局部考察，通过变量替换可将该点取为 0，因此假设这些函数为二次的。写作 $\phi(y - \sum_{k} \overline{y_j} x_k \quad x\ \overline{y} = \frac{1}{2} Y^\intercal N_a Y + Y^\intercal N_b X$ ，$) = \frac{1}{2}\sum a_{j,k}\overline{y_j y_k} + b_{j,}$

可得 $\Re\phi($, $)$，其中

$$N_a = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \iddots \\ \cdots & \begin{bmatrix} \Re(a_{j,k}) & -\Im(a_{j,k}) \\ -\Im(a_{j,k}) & -\Re(a_{j,k}) \end{bmatrix} & \cdots \\ \iddots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} \vdots \\ \Re(x_j) \\ \Im(x_j) \\ \vdots \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} \vdots \\ \Re(y_j) \\ -\Im(y_j) \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

我们略去 ϕ 的 x^2 部分，因为它不会出现在计算中，并将其写为 $\Phi_M - W(y) = Y^\intercal M Y$，其中 M 根据假设为正定，因此

$$\nabla_Y \left(2\Re\phi(x, \overline{y}) - \Phi_M(y) + W(y)\right) = 2Y^\intercal N_a + 2X^\intercal N_b - 2Y^\intercal M.$$

于是，相位条件等价于 $M - N_a$ 正定，临界点为

$$Y_c(x) = (M - N_a)^{-1} N_b X$$

且变换后的权函数 W_l 满足

$$W_l(x) + \Phi_M(x) = X^\intercal N_b^\intercal (M - N_a)^{-1} N_b X + 2\Re\phi(x, 0).$$

由于 $(b_{j,\ k}) = \partial_x \overline{\partial_y}\phi \in Gl(\mathbb{C}^d)$，我们也有 $N_b \in Gl(\mathbb{R}^{2d})$。又因为 $M - N_a$ 是正定的，所以其逆算子也是正定的。因此，$N_b^\intercal (M - N_a)^{-1} N_b$ 是正定的，$\partial\overline{\partial}(W_l + \Phi_M)$ 也同样如此。

□

我们计算一个显式的变换后的权函数，它将在定理 3.21 中发挥作用。

引理 3.10. 设 $\Phi_M(x) = |z|^2$，且 $\widetilde{\kappa}$ 是由矩阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 表示的线性辛同胚。那么，当且仅当 $d \neq 0$ 时，存在一个与 $\widetilde{\kappa}$ 相关联的函数。此外，当且仅当 $|d| > |b|$ 时，ϕ 是权函数 $W = 0$ 的相位函数；若此条件成立，则变换后的权函数为

$$W_l(x) = \frac{1 - (|d|^2 - |b|^2)}{|d|^2 - |b|^2}|x|^2 + \Re\left(\frac{a\overline{b} - \overline{d}c}{|d|^2 - |b|^2}x^2\right).$$

证明. 这里，(6) 等价于 $d\phi(x,\overline{v}) = -\frac{c}{2}x^2+x\overline{v}+\frac{b}{2}\overline{v}^2+d\phi(0,0)$，因此这就是所需条件；若其存在，则 $\phi(x,\overline{v}) = -\frac{c}{2d}x^2+\frac{1}{d}x\overline{v}+\frac{b}{2d}\overline{v}^2+\phi(0,0)$。取 $\phi(0,0)=0$，因为这只会使结果相差一个常数。$(\Re(y) \ -\Im(y)) \mapsto 2\Re\phi(x,\overline{y}) - |y|^2$的海森矩阵为

$$2\begin{pmatrix} -1+\Re\left(\frac{b}{d}\right) & -\Im\left(\frac{b}{d}\right) \\ -\Im\left(\frac{b}{d}\right) & -1-\Re\left(\frac{b}{d}\right) \end{pmatrix}$$

其行列式为 $4\left(1-\left|\frac{b}{d}\right|^2\right)$。因此，$\phi$是 0 的相位，当且仅当 $|d|>|b|$；条件满足时，$y_0(x) = \frac{\overline{d}x+b\overline{x}}{|d|^2-|b|^2}$ 且

$$\begin{aligned} W_l(x) =& \Re\left(-\frac{c}{d}x^2+\frac{2}{d}x\overline{y_0}(x)+\frac{b}{d}\overline{y_0}(x)^2\right)-|y_0(x)|^2 \\ =& \frac{1-(|d|^2-|b|^2)}{|d|^2-|b|^2}|x|^2+\Re\left(\frac{a\overline{b}-\overline{d}c}{|d|^2-|b|^2}x^2\right). \end{aligned}$$

□

例3.11。我们来看看特定辛同胚在$\Phi_M(y) = |y|^2$下的变换后的权函数。

- 若 κ 是定义在 $\mathbb{R}^2$ 上的实辛同胚，且由下式给出

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

则其解析延拓为

$$\widetilde{\kappa} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \alpha+\delta+i(\gamma-\beta) & \alpha-\delta+i(\gamma+\beta) \\ \alpha-\delta-i(\gamma+\beta) & \alpha+\delta-i(\gamma-\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

其中，对于所有 $z\in\mathbb{C}$，$\widetilde{\kappa}(z,\overline{z}) = \kappa(\Re(z) \ \Im(z))$。因此，$|d|^2-|b|^2=1$ 且 $b\overline{d}-a\overline{c}=0$，而 0 的变换后的权函数就是其本身。

- 若 $\widetilde{\kappa} = \mathrm{diag}(\theta,\theta^{-1})$，则相应的函数 ϕ 对任意权函数 W 都是一个相位，而变换后的 W_l 满足 $\partial W_l(x) = \theta(\mathrm{Id} \ -2\partial W)^{-1}(\theta x) \ -\overline{x}$。
- 我们将在定理 3.21 中计算从第2.1节的辛同胚所得到的 0 的变换后的权函数。

Let $\Phi_M = |z|^2$，并令 W 为一个权函数，使得 $I_d+\partial\overline{\partial}W$ 正定，则

$$W(z)+\Phi_M(z) = B+\Re bz+\frac{1+A}{2}|z|^2+\Re(az^2)+O(|z|^3)$$

其中 $A>-1$。然后，常数 B 并不重要，因为我们可以将 $\mathcal{H}_\hbar^W$ 乘以 $e^{\frac{2B}{\hbar}}$ 来消去它，且不会改变算子。此外，我们将主要考虑在 0 附近表示的权函数，并假设 $\partial W(0)=0$。这一性质在我们所考虑的变换下保持不变，因此可以消去 b。因此，所有信息都由拉格朗日子流形给出

$$\Lambda_W = \left\{(x,\overline{x}+\partial_x W(x)) \,/\, x\in\mathbb{C}^d\right\},$$

根据假设，它包含 (0,0)。这个拉格朗日子流形使 W_l 的计算更加容易。

引理 3.12。 设 W 为一个权函数， ϕ 为与 W 相关联的相位函数，其变换后的权函数为 W_l，则 $\widetilde{\kappa}\left(\Lambda_{W_l}\right) = D\overline{\Lambda_{-W}}$，其中 $D = \begin{pmatrix} 0 & I_d \\ I_d & 0 \end{pmatrix}$。

证明。 设 $x \in \mathbb{C}^d$，采用定义 3.8 中的记号

$$\begin{aligned}\widetilde{\kappa}\left(x, \partial W_l(x) + \overline{x}\right) =& \widetilde{\kappa}\left(x, \partial_x \phi\left(x, \overline{y_0(x)}\right)\right) \\ =& \left(\overline{\partial_y \phi}\left(x, \overline{y_0(x)}\right), \overline{y_0(x)}\right) \\ =& D\left(\overline{y_0(x)}, y_0(x) - \overline{\partial} W\left(\overline{y_0(x)}\right)\right),\end{aligned}$$

因此 $\widetilde{\kappa}(\Lambda_{W_l}) \subset D\overline{\Lambda_{-W}}$，由此可知二者相等，因为这些空间都是拉格朗日子空间。 □

命题 3.13。 设 ϕ 是 W 的一个相位，其变换后的 W_l为 $\widetilde{\kappa_\phi}$，且相应的辛同胚为 $\phi^\dagger$: $(x, \overline{y}) \mapsto \overline{\phi(y, \overline{x})}$，则它是 $-W_l$的一个相位，变换后的$-W + c$ 为 $c \in \mathbb{C}$，相应的辛同胚为 $\widetilde{\kappa_{\phi^\dagger}} = \overline{D\widetilde{\kappa_\phi}^{-1} D}$: $(x, \overline{y}) \mapsto D\widetilde{\kappa}^{-1} D(\overline{x}, y)$。总而言之

$$\begin{aligned}W_l(x) + \Phi_M(x) &= \mathrm{cv}_{\overline{y} \in \mathbb{C}^d}\left(2\Re\phi(x, \overline{y}) - \Phi_M(y) + W(y)\right), \\ -W(x) + c + \Phi_M(x) &= \mathrm{cv}_{\overline{z} \in \mathbb{C}^d}\left(2\Re\phi^\dagger(x, \overline{z}) - \Phi_M(z) - W_l(z)\right) \\ &= \mathrm{cv}_{\overline{z} \in \mathbb{C}^d}\left(2\Re\phi(z, \overline{x}) - \Phi_M(z) - W_l(z)\right) \\ &= 2\Re\phi(zl(x), \overline{x}) - \Phi_M(zl(\overline{x})) - W_l(zl(\overline{x})).\end{aligned}$$

此外，存在唯一的 $z_0(x) \in \mathbb{C}^d$ 使其取到该值，其中 $z_0(y_0(x)) = x$，因此函数 y_0 和 z_0 都是微分同胚。

证明。 我们可以对 $\overline{y} \mapsto 2\phi(x, \overline{y}) - \Phi_M(y) + W(y) - \phi(x, 0)$ 应用引理 3.9，其中 x 足够小。由此可知， $z \mapsto W_l(z) + \Phi_M(z) - 2\Re\phi(z, 0)$具有正定海森矩阵。换言之，当 $\overline{x}$ 足够小时， $z \mapsto 2\Re\phi(z, \overline{x}) - W_l(z) - \Phi_M(z)$具有负定海森矩阵，因此它有一个符号为 $(0, -2d)$ 的唯一临界点。根据引理 3.12

$$\begin{aligned}D\widetilde{\kappa_\phi}^{-1} D\overline{(x, \partial_x \phi^\dagger(x, \overline{y}))} =& D\widetilde{\kappa_\phi}^{-1}(\partial_{\overline{x}} \phi(y, \overline{x}), \overline{x}) = D(y, \partial_y \phi(y, \overline{x})) \\ =& (\partial_y \phi(y, \overline{x}), y) = \overline{(\overline{\partial_y} \phi^\dagger(x, \overline{y}), \overline{y})},\end{aligned}$$

因此，与 $\phi^\dagger$ 相关联的辛同胚是 $\overline{D\widetilde{\kappa_\phi}^{-1} D}$。现在，我们记

$$-W_2(y) = \mathrm{cv}_{z \in \mathbb{C}^d}\left(2\Re\phi(z, \overline{x}) - \Phi_M(z) - W_l(z)\right),$$

我们希望证明 $W_2 - W$ 是常数。由于 $\phi^\dagger$ 与 $\overline{D\widetilde{\kappa_\phi}^{-1} D}$相关联，并且根据引理 3.12

$$\overline{D\widetilde{\kappa_\phi}^{-1} D\overline{\Lambda_{-W_2}}} = \overline{D\Lambda_{W_l}} = \overline{D\kappa_\phi^{-1} D\overline{\Lambda_{-W}}}$$

这意味着 $\Lambda_{-W} = \Lambda_{-W_2}$。 因此， $W_2 - W$ 是一个实值反全纯函数，也就是说它是常数。于是，对所有 $x \in \mathbb{C}^d$，根据 $y_0(x)$ 的定义，

$$\begin{aligned}
\widetilde{\kappa_\phi}^{-1}\widetilde{\kappa_\phi}\left(x,\overline{x}+\partial W_l(x)\right) =&\widetilde{\kappa_\phi}^{-1}\widetilde{\kappa_\phi}\left(x,\partial_x\phi\left(x,\overline{y_0(x)}\right)\right)\\
=&\widetilde{\kappa_\phi}^{-1}\left(\overline{\partial_y}\phi\left(x,\overline{y_0(x)}\right),\overline{y_0(x)}\right)\\
=&\widetilde{\kappa_\phi}^{-1}\left(\overline{\partial_y\phi^\dagger\left(y_0(x),\overline{x}\right)},\overline{y_0(x)}\right)\\
=&\overline{\left(\widetilde{\kappa^{-1}}\right)D\left(y_0(x),\partial_y\phi^\dagger\left(y_0(x),\overline{x}\right)\right)}\\
=&D\overline{\left(\partial_{\overline{x}}\phi^\dagger\left(y_0(x),\overline{x}\right),\overline{x}\right)}\\
=&\left(x,\overline{\partial_y\phi^\dagger\left(y_0(x),\overline{x}\right)}\right)
\end{aligned}$$

这意味着 $\partial_{\overline{x}}\phi^\dagger\left(y_0(x)\ \overline{x}\right)=x+\overline{\partial}W_l(x)$，因此 x 是 $z_0(y_0(x))$ 的唯一临界点，所以$z_0\circ y_0=\mathrm{Id}$。类似的计算可得 $y_0\circ z_0=\mathrm{Id}$。 □

可以注意到， $I_\phi(a)$ 的伴随等于

$$I_{\phi^\dagger}(a^\dagger):\mathcal{H}_\hbar^{-W_l}\to\mathcal{H}_\hbar^{-W}$$

其中 $a^\dagger(x,\overline{y})=a\overline{(y,\overline{x})}$。本文不考虑傅里叶积分算子的伴随，不过在一些证明中，我们会利用 y_0,z_0 是微分同胚这一事实来进行变量替换。

定理 3.14. 设 Φ_M 是多重次调和函数， W 是权函数， ϕ 是 W 的相位函数，且 W_l 是变换后的权函数。设 $a_\hbar\in L^\infty(\mathbb{C}^{2d})$，则存在 $\rho,\sigma>0$，使得对所有 $u\in\mathcal{H}_\hbar^W(B_\rho)$，函数

$$I_{\hbar,\phi}(a_\hbar)u:x\mapsto\int_{B_\rho}e^{\frac{2\phi(x,y)-\Phi_M(y)-\Phi_M(x)}{2\hbar}}a_\hbar(x,y)u(y)\frac{dy}{(\pi\hbar)^d}$$

有良好定义且属于 $\mathcal{H}_\hbar^{W_l}(B_\sigma)$。我们称算子 $u\mapsto I_{\hbar,\phi}(a_\hbar)u$ 为复傅里叶积分算子，为简便起见，将它们记作 $I_\phi(a)$。更准确地说，存在 $C(d,\phi)>0$，使得对所有$u\in\mathcal{H}_\hbar^W(B_\rho)$

$$\left\|I_\phi(a)u\right\|_{\mathcal{H}_\hbar^{W_l}(B_\sigma)}\le C(d,\phi)\left\|a\right\|_{L^\infty(\mathbb{C}^{2d})}\left\|u\right\|_{\mathcal{H}_\hbar^W(B_\rho)}.$$

进一步，如果 $\rho'\in]0,\rho[$，存在 $c>0$ 和 $\sigma'\in]0,\sigma[$ 使得对所有 $u\in\mathcal{H}_\hbar^W(B_\rho)$

$$\begin{aligned}
&\left\|\int\chi_{\rho'\le|z|\le\rho}e^{\frac{2\phi(x,y)-\Phi_M(y)-\Phi_M(x)}{2\hbar}}a_\hbar(x,y)u(y)\frac{dy}{(\pi\hbar)^d}\right\|_{\mathcal{H}_\hbar^{W_l}(B_{\sigma'})}\\
\le&C(d,\phi)\left\|a\right\|_{L^\infty(\mathbb{C}^{2d})}\left\|u\right\|_{\mathcal{H}_\hbar^W(B_\rho)}e^{-\frac{c}{\hbar^2}}.
\end{aligned}$$

如果 ϕ 使得不等式 (7) 处处成立，例如当 ϕ、Φ_M 和 W 均为二次的时，那么对于任意 ρ 和 σ，I_ϕ（a）都是良定义的。对 $\mathbb{C}^d$、I_ϕ（a）取积分，是从 $\mathcal{H}_\hbar^W$（$\mathbb{C}^d$）到 $\mathcal{H}_\hbar^{W_l}$（$\mathbb{C}^d$）的有界算子。

*P*顶。我们将通过将其归结为Schur判别法来证明这一点。令 $u\in\mathcal{H}_\hbar^W(B_\rho)$， n

$$
\begin{aligned}
I_\phi(a)u(x) =& e^{\frac{W_l}{2\hbar}} \int_{\mathbb{C}^d} K(x,y) r(y) dy, \text{with} \\
r =& e^{\frac{-W}{2\hbar}} \chi_{B_\rho} u, \\
K(x,y) =& \chi_{B_\sigma}(x)\chi_{B_\rho}(y) e^{\frac{2\phi(x,\overline{y})-\Phi_M(y)-\Phi_M(x)+W(y)-W_l(x)}{2\hbar}} a_\hbar(x,y) \frac{1}{(\pi\hbar)^d}.
\end{aligned}
$$

因此，只需证明 $s \mapsto \int_{\mathbb{C}^d} K(x,y) r(y) dy$ 在 $L^2(\mathbb{C}^d)$上有界，这等价于证明 $\sup_x \int_{\mathbb{C}^d} |K(x,y)|\, dy$和 $\sup_y \int_{\mathbb{C}^d} |K(x,y)|\, dx$ 有界。根据假设，存在 $\rho, \sigma, C > 0$，使得对所有 $\|x\| \leq \sigma$, $\|y\| \leq \rho$,

$$
2\Re\phi(x,y) - \Phi_M(y) - \Phi_M(x) + W(y) - W_l(x) \leq -C|y - y_0(x)|^2
$$

因此,

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{C}^d} |K(x,y)|\, dy \leq& \|a\|_{L^\infty(\mathbb{C}^{2d})} \int_{\mathbb{C}^d} e^{-C\frac{|y-y_0(x)|^2}{2\hbar}} \frac{dy}{(\pi\hbar)^d} = \|a\|_{L^\infty(\mathbb{C}^{2d})} C^{-d} \\
\int_{\mathbb{C}^d} |K(x,y)|\, dx \leq& \|a\|_{L^\infty(\mathbb{C}^{2d})} \int_{B_\sigma} e^{-C\frac{|y-y_0(x)|^2}{2\hbar}} \frac{dx}{(\pi\hbar)^d} \\
\leq& \|a\|_{L^\infty(\mathbb{C}^{2d})} \sup_{y_0(B_\sigma)} \left\|\det \nabla y_0^{-1}\right\| \int_{y_0(B_\sigma)} e^{-C\frac{|x|^2}{\hbar}} \frac{dx}{(\pi\hbar)^d} \\
\leq& \|a\|_{L^\infty(\mathbb{C}^{2d})} \sup_{y_0(B_\sigma)} \left\|\det \nabla y_0^{-1}\right\| C^{-d}.
\end{aligned}
$$

这给出了关于 $I_\phi(a)$ 的以下不等式

$$
\|I_\phi(a)u\|_{\mathcal{H}_\hbar^{W_l}(B_\sigma)} \leq C^{-d} \|a\|_{L^\infty(\mathbb{C}^{2d})} \sqrt{\sup_{y_0(B_\sigma)} \left\|\det \nabla y_0^{-1}\right\|}\, \|u\|_{\mathcal{H}_\hbar^W(B_\rho)}.
$$

现在，若 $\rho' \in]0,\rho[$, 存在 $\sigma' \in]0,\sigma[$ 和 $\epsilon > 0$，使得对于所有 $|x| < \sigma', |y_0(x)| < \rho' - \epsilon$。我们再次使用 Schur判别法，不过这次

$$
K(x,y) = \chi_{B_{\sigma'}}(x)\chi_{B_\rho \setminus B_{\rho'}}(y) e^{\frac{\phi(x,y)-\Phi_M(y)-\Phi_M(x)+W(y)-W_l(x)}{\hbar}} a_\hbar(x,y) \frac{1}{(\pi\hbar)^d}
$$

这就得到了

$$
\begin{aligned}
\sup_{x\in\mathbb{C}^d} \int_{\mathbb{C}^d} |K(x,y)|\, dy \leq& \|a\|_{L^\infty(\mathbb{C}^{2d})} \sup_{z\in B_{\rho'-\epsilon}} \int_{\rho'<|y|} e^{-C\frac{|y-z|^2}{\hbar}} \frac{dy}{(\pi\hbar)^d} \\
\leq& \|a\|_{L^\infty(\mathbb{C}^{2d})} C^{-d} e^{-C\frac{\epsilon^2}{\hbar}} \\
\sup_{y\in\mathbb{C}^d} \int_{\mathbb{C}^d} |K(x,y)|\, dx \leq& \|a\|_{L^\infty(\mathbb{C}^{2d})} \sup_{\rho'<\|y\|<\rho} \int_{B_{\sigma'}} e^{-C\frac{|y-y_0(x)|^2}{\hbar}} \frac{dx}{(\pi\hbar)^d} \\
\leq& \|a\|_{L^\infty(\mathbb{C}^{2d})} \sup_{y_0(B_\sigma)} \left\|\det \nabla y_0^{-1}\right\| \sup_{\rho'<\|y\|} \int_{B_{\rho'-\epsilon}} e^{-C\frac{|y-x|^2}{\hbar}} \frac{dx}{(\pi\hbar)^d} \\
\leq& \|a\|_{L^\infty(\mathbb{C}^{2d})} \sup_{y_0(B_\sigma)} \left\|\det \nabla y_0^{-1}\right\| C^{-d} e^{-C\frac{\epsilon^2}{\hbar}}.
\end{aligned}
$$

因此，

$$\begin{aligned}&\left\|\int \chi_{\rho'\leq|z|\leq\rho} e^{\frac{\phi(x,y)-\Phi_M(y)-\Phi_M(x)}{\hbar}} a_\hbar(x,y)u(y)\frac{dy}{(\pi\hbar)^d}\right\|_{\mathcal{H}_\hbar^{W_l}(B_{\sigma'})}\\ \leq& C^{-d}\sqrt{\sup_{y_0(B_\sigma)}\left\|\det\nabla y_0^{-1}\right\|}\left\|a\right\|_{L^\infty(\mathbb{C}^{2d})}\left\|u\right\|_{\mathcal{H}_\hbar^W(B_\rho)} e^{-C\frac{\epsilon^2}{\hbar^2}}.\end{aligned}$$

□

现在定义本文其余部分将要定义的符号类。

定义 3.15（[4], [3]）。固定 $\hbar>0$，并考虑 $\mathbb{C}^d$ 上的形式符号 $\sum\hbar^k f_k$，称其为解析的，如果对每个 k，存在 C、$A>0$，使得 f_k 的全纯 $\widetilde{}$ 延拓 f_k 在 0 的邻域上满足

$$\left|\widetilde{f_k}\right|\leq CA^k k!.$$

函数 $f:\ B_\rho\to\mathbb{C}$ 是解析符号，如果它与解析形式符号 $\sum\hbar^k f_k$ 渐近等价，即存在 C、$A>0$，使得对所有 $k\in\mathbb{N}$，$\left|\widetilde{f_k}\right|\leq CA^k k!\widetilde{}$ 于 B_ρ，并且

$$f(x)=\sum_{0\leq k\leq\frac{1}{A\hbar}}\hbar^k f_k(x)$$

将其记为 $f\sim\sum\hbar^k f_k$。记 $S(B_\rho)$ 为 B_ρ 上解析符号的空间。

若 $M=\mathbb{C}$，函数 f 是全局解析符号，如果它与解析形式符号一致地等价，即存在 ρ，使得对于任意紧集 $K\subset\mathbb{C}$、$\widetilde{}$ $\widetilde{}$ $\widetilde{}$ $\widetilde{}$，存在 $A=A(K)>0$，使 $f(x,\overline{y})=\sum\hbar^k f_k$，其中 f_k 在 $K+B_\rho{}^{0\leq k\leq\frac{1}{A\hbar}}$ 上解析，且对所有 $(x,\overline{y})\in K+\widetilde{B_\rho}$，$\left|\widetilde{f_k}(x,\overline{y})\right|\leq A^{k+1}k!$。设 m 为阶函数，则全局解析符号 $\widetilde{}$ 为 m 阶，如果存在 $C>0$，使得对于所有 $\widetilde{}$ $(x,\overline{y})\in\mathcal{D}+B_\rho$，$|f(x,\overline{y})|\leq Cm(x)$。记 $S(\mathbb{C},m)$ 为 m 阶全局解析符号的空间。

注 3.16. 设 $a_\hbar=\sum^{\overline{A\hbar}}\hbar^k a_k(x):\ B_\rho\to\mathbb{C}$ 是解析符号，Φ_M 是多重次调和函数，W、W_l 是权重，且 ϕ 是定理 3.14 中的相位。记 ρ、σ 为该定理给出的常数。那么

$$I_\phi(a_\hbar):u\mapsto\left(x\mapsto\int_{B_\rho}e^{\frac{2\phi(x,\overline{y})-\Phi_M(y)-\Phi_M(x)}{2\hbar}}f(x,y)u(y)\frac{dy}{(\pi\hbar)^d}\right)$$

它仍然是从 $\mathcal{H}_\hbar^W(B_\rho)$ 到 $\mathcal{H}_\hbar^{W_l}(B_\sigma)$ 定义良好的。

解析符号的目的是使我们能够对傅里叶积分算子使用解析符号演算。例如，利用轮廓变形，可以用 WKB 方法计算任意形如$I_\phi(a_\hbar)\left(e^{-\frac{\Phi_M(\ y\ )}{2\hbar}}e^{\frac{\psi(y)}{\hbar}}v_\hbar(y)\right)(x)$的函数。这一方法此前已见于 [25, 11]。

引理 3.17。设 Φ_M为多重次调和函数，W 为权函数，ϕ 为相位，$a_\hbar$ 为解析符号，ψ、$v_\hbar$为全纯函数，并假设 $e^{-\frac{\Phi_M}{(y)2\hbar}} v_\hbar(y) \in \mathcal{B}_\hbar$，则

$$I_\phi(a_\hbar)\left(e^{-\frac{\Phi_M(y)}{2\hbar}} e^{\frac{\psi(y)}{\hbar}} v_\hbar(y)\right)(x) = e^{-\frac{\Phi_M(x)}{2\hbar}} e^{\frac{\sigma(x)}{\hbar}} w_\hbar(x)$$

其中 σ是一个全纯函数，且 $e^{-\frac{\Phi_M}{(y)2\hbar}} w_\hbar(y) \in \mathcal{B}_\hbar$。此外，对于所有 x，存在$y_c(x)\overline{v_c}(x)$ 满足

$$\begin{cases} \partial\psi(y_c(x)) = \partial_1\widetilde{\Phi_M}(y_c(x), \overline{v_c}(x)) \\ \partial_{\overline{v}}\phi(x, \overline{v_c}(x)) = \partial_2\widetilde{\Phi_M}(y_c(x), \overline{v_c}(x)) \end{cases}$$

且 σ 由下式定义

$$\widetilde{\kappa_\phi}(\Lambda_\sigma) = \widetilde{\kappa_\phi}\left\{\widetilde{\nabla}\left(e^{\frac{2\sigma(x)-\widetilde{\Phi_M}(x,\overline{v})}{2\hbar}}\right) = 0\right\} = \left\{\widetilde{\nabla}\left(e^{\frac{2\psi(y)-\widetilde{\Phi_M}(y,\overline{z})}{2\hbar}}\right) = 0\right\} = \Lambda_\psi,$$
$$\sigma(0) = \phi(0, \overline{v_c}(0)) + \psi(y_c(0)) - \widetilde{\Phi_M}(y_c(0), \overline{v_c}(0)).$$

此外，

$$w_0(x) = \widetilde{a_0}(x, \overline{x}, y_c(x), \overline{v_c}(x)) v_0(y_c(x)) \det \nabla K_x(0,0).$$

其中 K_x 是满足以下条件的局部微分同胚

$$\left(\phi(x, \overline{v}) + \psi(x) - \widetilde{\Phi_M}(x, \overline{v})\right)(K_x(z, \overline{v})) = -z\overline{v} + \sigma(x).$$

证明。将命题 A.15 应用于 $\phi_1(x,z) = \phi(x,\overline{z}) - \frac{1}{2}\Phi_M(z)$ 和 $\phi_2(x,z) = \psi(z) - \frac{1}{2}\Phi_M(z)$，得到

$$\begin{aligned} & I_\phi(a_\hbar)\left(e^{-\frac{\Phi_M(y)}{2\hbar}} e^{\frac{\psi(y)}{\hbar}} v_\hbar(y)\right)(x) \\ =& e^{-\frac{\Phi_M(x)}{2\hbar}} \int_{B_\rho} e^{\frac{\phi(x,\overline{z})+\psi(z)-\Phi_M(z)}{\hbar}} a_\hbar(x,z) v_\hbar(z) \frac{dz \wedge d\overline{z}}{\pi\hbar} \\ =& e^{-\frac{\Phi_M(x)}{2\hbar}} e^{\frac{\sigma(x)}{\hbar}} \left(\int_{B_\rho} e^{-\frac{|y|^2}{\hbar}} \det \nabla K_x(y, \overline{y}) \widetilde{a_\hbar}\left(x, \overline{x}, K_x(y, \overline{y})\right) v_\hbar\left(K_x(y, \overline{y})\right) \frac{dy}{\pi\hbar} + O\left(e^{-\frac{c}{\hbar}}\right)\right) \end{aligned}$$

其中 $\sigma(x) = \phi(x, \overline{v_c}(x)) + \psi(y_c(x)) - \Phi_M(y_c(x), \overline{v_c}(x))$。现在，若 $(x, \overline{y}, z, \overline{v}) \in$ 图$(\widetilde{\kappa_\phi})$ 且 $(z,\overline{v}) \in \Lambda_\psi$，则，

$$\begin{aligned} \partial_x\phi(x, \overline{v}) =& \partial_1\widetilde{\Phi_M}(x, \overline{y}) \\ \partial_{\overline{v}}\phi(x, \overline{v}) =& \partial_2\widetilde{\Phi_M}(z, \overline{v}) \\ \partial\psi(z) =& \partial_1\widetilde{\Phi_M}(z, \overline{v}) \end{aligned}$$

因此，根据构造，$z = y_c(x)$ 和 $\overline{v} = \overline{v_c}(x)$。由此可得，

$$\partial\sigma(x) = \partial_x\phi(x, \overline{v_c}(x)) = \partial_1\widetilde{\Phi_M}(x, \overline{y}),$$

换言之，$(x, \overline{y}) \in \Lambda_\sigma$，这证明了 $\widetilde{\kappa_\phi}(\Lambda_\sigma) = \Lambda_\psi$。

接下来，利用引理 3.4

$$
\begin{aligned}
&I_\phi(a_\hbar)\left(e^{-\frac{\Phi_M(y)}{2\hbar}}e^{\frac{\psi(y)}{\hbar}}v_\hbar(y)\right)(x)\\
=&e^{-\frac{\Phi_M(x)}{2\hbar}}e^{\frac{\sigma(x)}{\hbar}}\sum_{0\le k\le\frac{\rho}{\hbar}}\frac{\hbar^k}{k!}(\partial_y\overline{\partial_y})^k\Big(\det\nabla K_x(y,\overline{y})\widetilde{a_\hbar}\left(x,\overline{x},K_x(z,\overline{z})\right)v_\hbar\left(K_x(z,\overline{z})\right)\Big)(0,0)
\end{aligned}
$$

相差一个指数小余项，因此 $w_\hbar$ 是解析符号，并且

$$
w_0(x)=\widetilde{a_0}\left(x,\overline{x},y_c(x),\overline{v_c}(x)\right)v_0(y_c(x))\det\nabla K_x(0,0).
$$

□

为了将本小节的结果用于流形上的 Toeplitz 算子，需要将它们写成解析傅里叶积分算子，也就是说，将伯格曼核写成解析符号。这一结果大约在同一时期由不同团队采用不同方法证明。Rouby、Sjöstrand 和 V˜u Ngo. c [31]通过 Kuranishi 技巧证明了这一结果，而 Deleporte [10] 则使用一类特定的符号及其相应的范数证明了这一结果。Hezari 和 Xu [16], 以及 Charles[5] 简化了证明；Charles 还详细阐述了相应的符号代数。随后，Deleporte、Hitrik 和 Sjöstrand [12]采用了另一种方法。我们回顾这一结果。

$\widetilde{\quad}$命题 3.18. 设 Φ_M 是 M的凯勒势， Φ_M 是其全纯延拓。那么，在局部坐标图中，存在 $\rho,\eta>0$ 和 $\mathcal{P}\in S\left(\widetilde{B_\rho}\right)$，使得 *Bergman* 投影$\Pi_N\colon L^2(M)\to\mathcal{H}_N$ 由下式给出

$$
\begin{aligned}
\Pi_N(u)(x)=&\int_{B_\rho}e^{\frac{2\widetilde{\Phi_M}(x,\overline{z})-\Phi_M(z)-\Phi_M(x)}{2\hbar}}u(z)\mathcal{P}(x,\overline{y})\frac{dz}{\pi\hbar}+O(e^{-\frac{c}{\hbar}})\left\|u\right\|_{L^2(B_\rho)}\\
=&I_{\widetilde{\Phi_M}}(\mathcal{P})u(x)+O(e^{-\frac{c}{\hbar}})\left\|u\right\|_{L^2(B_\rho)}
\end{aligned}
$$

对于所有 $x\in B_\eta$、 $u\in L^2\left(B_\rho\right)$，且满足$\hbar=\frac{1}{N}$。

因此，Toeplitz 算子局部上是形如 $I_{\widetilde{\Phi_M}}(\mathcal{P}f)$ 的傅里叶积分算子。为此，我们在局部坐标图中表示它们，并将其视为作用于 $\mathcal{H}_\hbar^{\Phi_M}$ 上的算子。

定义 3.19。设 $f\in S(B_\rho)$，与 f 相关联的托普利兹算子为

$$
T_\hbar(f)u(x)=\int_{B_\rho}e^{\frac{2\widetilde{\Phi_M}(x,\overline{y})-\Phi_M(y)-\Phi_M(x)}{2\hbar}}\mathcal{P}(x,\overline{y})f(y)u(y)\frac{dy}{\pi\hbar}=I_{\widetilde{\Phi_M}}(Bf)u(x)
$$

在 $\mathcal{H}_\hbar^{\Phi_M}$ 上有界。考虑协变符号也很有用，换言之，即符号 $F\in S\left(\widetilde{B_\rho}\right)$ 和算子

$$
T_{\mathrm{cov},\hbar}(F)u(x)=\int_{B_\rho}e^{\frac{2\widetilde{\Phi_M}(x,\overline{y})-\Phi_M(y)-\Phi_M(x)}{2\hbar}}F(x,y)\mathcal{P}(x,\overline{y})u(y)\frac{dy}{\pi\hbar}.
$$

此外，如定理 3.14 中所述，如果 $\rho'\in]0,\ \rho[$ 和 $u\in\mathcal{B}_\hbar$

$$\left\| T_{\mathrm{cov},\hbar}(F)u(x) - \int_{B_{\rho'}} e^{\frac{2\widetilde{\Phi_M}(x,\overline{y})-\Phi_M(y)-\Phi_M(x)}{2\hbar}} F(x,y)\mathcal{P}(x,\overline{y})u(y)\frac{dy}{\pi\hbar} \right\|_{\mathcal{H}_\hbar(B_{\rho'})}$$
$$\leq Ce^{-\frac{(\rho-\rho')^2}{\hbar}} \|F\|_{L^\infty(\widetilde{B_\rho})} \|u\|_{\mathcal{H}_\hbar(B_\rho)}$$

因此，忽略指数级小的误差后，我们可以在较小的球上写出这些积分。此外，如果 f、F 分别定义在 M、M 上，这些定义就与通常的托普利兹算子一致。特别地，如果 $M=\mathbb{C}$、$\Phi_M(x)=|x|^2$，我们记

$$T_\hbar(f)u(x)=\int_{B_\rho} e^{\frac{2x\overline{y}-|y|^2-|x|^2}{2\hbar}} f(y)u(y)\frac{dy}{\pi\hbar},\ T_{\mathrm{cov},\hbar}(F)u(x)=\int_{B_\rho} e^{\frac{2x\overline{y}-|y|^2-|x|^2}{2\hbar}} F(x,y)u(y)\frac{dy}{\pi\hbar}.$$

定理 3.20。设 ϕ 是 W 的相位，W_l 是变换后的权函数；设 ψ 是 W_l 的相位，其中 $\Theta=(W_l)_l$ 是变换后的权函数；并设 a、$b\in S(B_\sigma\times B_\rho)\times S(B_\tau\times B_\sigma)$ 满足 $\widetilde{\ }$，使得 $I_\phi(a)$ $I_\psi(b)$ 有定义。我们假设 $(z,\overline{v})\mapsto\psi(0,\overline{v})+\phi(z,0)-\Phi_M(z,\overline{v})$ 的唯一临界点为 $(0,0)$。因此，存在 $\tau'\in]0,\tau[$，$\rho'\in]0,\rho[$，使得对于 $(x,\overline{y})\in B_{\tau'}\times B_{\rho'}$，存在唯一的点 $(z_c,\overline{v_c})=(z_c(x,\overline{y}),\overline{v_c}(x,\overline{y}))$，使得

$$\begin{cases} \partial_{\overline{v}}\psi(x,\overline{v_c})=\partial_2\widetilde{\Phi_M}(z_c,\overline{v_c}),\\ \partial_z\phi(z_c,\overline{y})=\partial_1\widetilde{\Phi_M}(z_c,\overline{v_c}). \end{cases}$$

那么，函数

$$\eta(x,\overline{y})=\psi(x,\overline{v_c})+\phi(z_c,\overline{y})-\widetilde{\Phi_M}(z_c,\overline{v_c})$$

是与辛同胚 $\kappa_\eta=\kappa_\phi\circ\kappa_\psi$ 相关联的 W 的相位。此外，对于所有 $u\in\mathcal{H}_\hbar^W(B_\rho)$

$$I_\psi(b)I_\phi(a)u=I_\eta(c)u+O_{\mathcal{H}_\hbar^\Theta(B_{\tau'})}(e^{-\frac{c}{\hbar}})\|u\|_{\mathcal{H}_\hbar^W(B_\rho)},$$

其中 $c\in S(\overline{B_{\tau'}\times B_{\rho'}})$。符号 c 渐近等价于

$$\sum\frac{\hbar^k}{k!}(\partial_z\overline{\partial_z})^k\left(\det\left(\nabla_{z,\overline{z}}K_{x,\overline{y}}\right)\widetilde{b}\left(x,\overline{x},K_{x,\overline{y}}(z,\overline{z})\right)\widetilde{a}\left(K_{x,\overline{y}}(z,\overline{z}),y,\overline{y}\right)\right)(0) \tag{8}$$

其中$K_{x,\ \overline{y}}$满足

$$\left((v,\overline{w})\mapsto\psi(x,\overline{w})+\phi(v,\overline{w})-\widetilde{\Phi_M}(v,\overline{w})\right)(K_{x,\overline{y}}(z,\overline{v}))=-z\overline{v}+\eta(x,\overline{y}).$$

此外，如果 $\Phi_M=|z|^2$ 且满足以下三个条件之一：$\phi=0$、$\psi=0$、ϕ 和 ψ是二次的，则

$$c_0(x,\overline{y})=\left(1-\partial_z^2\phi(z_c,\overline{y})\partial_{\overline{v}}^2\psi(x,\overline{v_c})\right)^{-\frac{1}{2}}\widetilde{b_0}\left(x,\overline{x},z_c,\overline{v_c}\right)\widetilde{a_0}\left(z_c,\overline{v_c},y,\overline{y}\right).$$

关于如何利用拉格朗日子流形构造这些傅里叶积分算子，可参见 [11],；其中他们用更具几何性的论证证明了符号演算。

证明。令 $\tau' \in]0,\tau[$, $\rho' \in]0,\rho[$ 和 $\sigma' \in]0,\sigma[$，稍后我们将固定这些量。我们考虑 $x \in B_{\tau'}$，并在 $B_{\rho'}$ 上写作 $I_\phi(a)$，在 $B_{\sigma'}$ 上写作 $I_\psi(b)$。这会引入一个指数级小的误差，我们不予写出，因为它不会改变结果，

$$\begin{aligned} I_\psi(b)I_\phi(a)u(x) =& \int_{B_{\sigma'}} e^{\frac{-\Phi_M(x)-\Phi_M(z)+2\psi(x,\overline{z})}{2\hbar}} b(x,z) \int_{B_{\rho'}} e^{\frac{-\Phi_M(z)-\Phi_M(y)+2\phi(z,\overline{y})}{2\hbar}} a(z,y)u(y)\frac{dydz}{\pi\hbar} \\ =& \int_{B_{\rho'}} e^{\frac{-\Phi_M(x)-\Phi_M(y)}{2\hbar}} u(y) \left(\int_{B_{\sigma'}} e^{\frac{\psi(x,\overline{z})+\phi(z,\overline{y})-\Phi_M(z)}{\hbar}} b(x,z)a(z,y)\frac{dz}{\sqrt{\pi\hbar}} \right) \frac{dy}{\sqrt{\pi\hbar}} \\ =& I_\eta(c)u(x). \end{aligned}$$

根据命题 3.13，$z \mapsto 2\Re\phi(z,\overline{y}) - \Phi_M(z) - W_l(z)$ 对所有 x 都有唯一的符号为 $(0,-2d)$ 的临界点，因此我们可以将命题 A.15 应用于 $\phi_1(x,\overline{y},z) = \phi(z,\overline{y}) - \frac{1}{2}\Phi_M(z) - \frac{1}{2}W_l(z)$ 和 $\phi_2(x,\overline{y},z) = \psi(x,\overline{z}) - \frac{1}{2}\Phi_M(z) + \frac{1}{2}W_l(z)$，存在$\tau',\rho',\sigma'$，使得对所有 $(x,y) \in B_{\tau'} \times B_{\rho'}$，

$$\begin{aligned} & c(x,\overline{y}) \\ =& \int_{B_{\sigma'}} e^{\frac{\psi(x,\overline{z})+\phi(z,\overline{y})-\Phi_M(z)-\eta(x,\overline{y})}{\hbar}} b(x,z)a(z,y)\frac{dz}{\sqrt{\pi\hbar}} \\ =& \int_{B_{\sigma'}} e^{-\frac{|z|^2}{\hbar}} \det\left(\nabla_{(w,\overline{w})}K_{x,\overline{y}}\right) \widetilde{b}\left(x,\overline{x},K_{x,\overline{y}}(w,\overline{w})\right) \widetilde{a}\left(K_{x,\overline{y}}(w,\overline{w}),y,\overline{y}\right) \frac{dw\wedge d\overline{w}}{\sqrt{\pi\hbar}} \\ =& \sum_{k\le\frac{1}{3D\hbar}} \frac{\hbar^k}{k!}(\partial_w\overline{\partial_w})^k \left(\det\left(\nabla_{(w,\overline{w})}K_{x,\overline{y}}\right) \widetilde{b}\left(x,\overline{x},K_{x,\overline{y}}(w,\overline{w})\right) \widetilde{a}\left(K_{x,\overline{y}}(w,\overline{w}),y,\overline{y}\right)\right)(0,0) \end{aligned}$$

根据引理 3.4，除指数小余项外，其中 $D > \sigma'$。如果 $\Phi_M = |z|^2$ 和 $\phi = 0$ 或 $\psi = 0$ 或两者都是二次的，那么 $\det\nabla_{0,\ 0}K_{x,\ \overline{y}}$ 是常数，等于

$$\begin{aligned} & \left(-\det \mathrm{Hess}_{z,\overline{v}}\left(\psi(0,\overline{v}) + \phi(z,0) - \widetilde{\Phi_M}(z,\overline{v})\right)(z_c,\overline{v_c})\right)^{-\frac{1}{2}} \\ =& \left(1 - \partial_z^2\phi(z_c,\overline{y})\partial_v^2\psi(x,\overline{v_c})\right)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

根据命题 A.15。

现在，我们证明 c 是一个解析符号。取足够大的 D，我们可以写成

$$a = \sum_{0\le k\le\frac{1}{3D\hbar}} \hbar^k a_k, \quad b = \sum_{0\le k\le\frac{1}{3D\hbar}} \hbar^k b_k$$

相差一个指数级小量。因此，$c(x,\overline{y}) = \sum \hbar^m c_m(x,\overline{y})$，其中 $c_m(x,\overline{y})_{0\le m\le\frac{1}{D\hbar}}$ 等于

$$\sum_{(j,k,l)\in S_m} \frac{1}{j!}(\partial_w\overline{\partial_w})^j \left(\det\left(\nabla_{(w,\overline{w})}K_{x,\overline{y}}\right) \widetilde{b_k}\left(x,\overline{x},K_x(w,\overline{w})\right) \widetilde{a_l}\left(K_x(w,\overline{w}),y,\overline{y}\right)\right)(0,0)$$

其中 $S_m = \left\{(j,k,l) \in \mathbb{N}^3 \middle/ j+k+l = m, j,k,l \le \frac{1}{3D\hbar}\right\}$。根据假设，存在$A,B,c>0$，使得在 $B_{\sigma'} \times \overline{B_{\sigma'}}$, $|\widetilde{a_k}| \le k$ 上 $|\det \nabla K_x| \le c!A^k$，且在 $B_{\sigma'} \times \overline{B_{\rho'}}$ 上 $|b_l| \le l!B^l$

在 $B_{\tau'} \times \overline{B_{\sigma'}}$ 上，并且根据命题 A.15， $z_c(x)\,\overline{v_c}(x)$ 对所有 $(x, y) \in B_{\tau'} \times B_{\rho'}$ 都成立。然后，记 $C = \min(\sigma - \sigma', \rho - \rho', \tau - \tau', \sigma')^{-2}$，由引理 3.3 可得

$$\begin{aligned} |c_m(x, \overline{y})| \leq & c \sum_{(j,k,l) \in S_m} j! C^j k! A^k l! B^l \\ \leq & c \max(A, B, C)^m m(m+1)! \\ \leq & c m! D^m \end{aligned}$$

若 D 取得足够大。 □

推论 3.20.1. 设 $\widetilde{\kappa}$ 是 0 的某个邻域上的辛同胚，且存在分别与 $\widetilde{\kappa}$ 和 $\widetilde{\kappa}^{-1}$ 相关联的全纯函数 ϕ、ϕ_i。假设 ϕ 是 0 的一个相位，其变换后的 W，则实解析实值函数 W_i 满足$(0) = 0$，并且

$$\overline{\partial} W_i(x) = x - \left(\mathrm{Id} + \overline{\partial} W_l\right)^{-1}(x),$$

是一个权函数，而 ϕ_i 是 W_i 的一个相位，其变换后的权函数为零。此外，若$(a, b) \in S(B_\tau \times \overline{B_\sigma}) \times S(B_\sigma \times \overline{B_\rho})$ 满足(a) $I_{\phi_i}(b)$ 有定义，则存在 $\tau' \in]0, \tau]$， $\sigma' \in]0, \sigma]$ 和 $F \in S(B_{\tau'} \times \overline{B_{\rho'}})$ 使得

$$I_\phi(a) I_{\phi_i}(b) = T_{\mathrm{cov},\hbar}(F) + O_{\mathcal{H}_\hbar^{W_i}(B_{\rho'}) \to \mathcal{H}_\hbar^{W}(B_{\tau'})}(e^{-\frac{c}{\hbar}}).$$

其中 F 的一阶表达式为

$$F_0(x, y) = \mathcal{P}_0(x, \overline{y})^{-1} \widetilde{a}(x, \overline{x}, \kappa_\phi(x, \overline{y})) \widetilde{b}(\kappa_\phi(x, \overline{y}), y, \overline{y}) \det \nabla_{0,0} K_{x,\overline{y}}.$$

此外，存在满足以下条件的 $a_i \in S(B_{\tau'} \times \overline{B_{\sigma'}})$:

$$\widetilde{a_i}(\kappa_\phi(x, \overline{y}), y, \overline{y}) = \frac{\mathcal{P}_0(x, \overline{y})}{\widetilde{a}(x, \overline{x}, \widetilde{\kappa}_\phi(x, \overline{y})) \det \nabla_{0,0} K_{x,\overline{y}}} + O(\hbar), \tag{9}$$

and

$$I_\phi(a) I_{\phi_i}(a_i) = \mathrm{Id} + O_{\mathcal{H}_\hbar^{W_i}(B_{\rho'}) \to \mathcal{H}_\hbar^{W}(B_{\tau'})}(e^{-\frac{c}{\hbar}}).$$

该结果尤其证明了 $\mathcal{H}_\hbar^{W_i}$嵌入于 $\mathcal{H}_\hbar^{W}$中。

证明。 根据引理 A.13，存在满足式 (9) 的 $a_i \in S(B_\tau \times B_\sigma)$；通过取更小的$\tau$、$\sigma$，可得 $I_\phi(a) I_{\phi_i}(a_i) = \mathrm{Id} + O(\hbar)$。不过，右侧的算子现在是一个符号为 $1 + O(\hbar)$ 的托普利兹算子，可以用通常的符号演算求逆，例如参见 [11] 或第 3.3 节。 □

Hitrik 和 Zworski 在 [21] 中使用了相同的方法，但对空间 $\mathcal{H}_\hbar^{\Phi_M}$和傅里叶积分算子采用了不同的定义。他们得到了类似的结果，但针对其带权 L^2 空间，结果中使用了 $W_i = W$。我们将在定理 4.13 中看到，可以通过局部化忽略 W 与 W_i 之间的差异。

推论 *3.20.2.* 我们在此假设 $\Phi_M(z) = |z|^2$。设 ϕ, ψ 是权函数 W 的两个相位函数，且 $(a, f, b) \in S(B_\tau \times \overline{B_\rho}) \times S(B_\rho) \times S(B_\rho \times \underline{B_\sigma})$，那么存在 $\tau' \in]0, \tau[$, $\rho' \in]0, \rho[$, $\sigma' \in]0, \sigma[$ 以及 $(c, d) \in S(B_{\tau'} \times \overline{B_{\rho'}}) \times S(B_{\rho'} \times B_{\sigma'})$，使得

$$
\begin{aligned}
I_\psi(b) T_{\mathrm{cov},\hbar}(F) &= I_\psi(c) + O_{\mathcal{H}_\hbar^W(B_{\rho'}) \to \mathcal{H}_\hbar^{W_l}(B_{\sigma'})}(e^{-\frac{c}{\hbar}}), \\
T_{\mathrm{cov},\hbar}(F) I_\phi(a) &= I_\phi(d) + O_{\mathcal{H}_\hbar^W(B_{\tau'}) \to \mathcal{H}_\hbar^{W_l}(B_{\rho'})}(e^{-\frac{c}{\hbar}}).
\end{aligned}
$$

此外，

$$
\begin{aligned}
c(x, \overline{y}) =& \sum_k \frac{\hbar^k}{k!} \partial^k \left(\overline{\partial} + \partial_{\overline{v}} \psi_q(x, \overline{y}, \overline{v}) \partial\right)^k |_{\overline{v}=0} \left(\widetilde{b}(x, \overline{x}, \cdot) \widetilde{F}(\cdot, y, \overline{y})\right) (\overline{\partial_y} \psi(x, \overline{y}), \overline{y}) \\
\psi_q(x, \overline{y}, \overline{v}) =& \frac{\psi(x, \overline{v} + \overline{y}) - \psi(x, \overline{y}) - \overline{v} \overline{\partial_y} \psi(x, \overline{y})}{\overline{v}} \\
d(x, \overline{y}) =& \sum_k \frac{\hbar^k}{k!} \left(\partial + \partial_z \phi_q(x, \overline{y}, z) \overline{\partial}\right)^k |_{z=0} \overline{\partial}^k \left(\widetilde{F}(x, \overline{x}, \cdot) \widetilde{a}(\cdot, y, \overline{y})\right) (x, \partial_x \phi(x, \overline{y})) \\
\phi_q(x, \overline{y}, z) =& \frac{\phi(z + x, \overline{y}) - \phi(x, \overline{y}) - z \partial_x \phi(x, \overline{y})}{z}.
\end{aligned}
$$

如果我们使用含有 $F = 1$ 的公式，就会得到一个复杂的条件，用来判定两个符号是否对应同一个算子

$$
I_\phi(a) = I_\phi \left(\sum_k \frac{\hbar^k}{k!} \partial_y^k (\overline{\partial_y} + \partial_{\overline{v}} \phi_q(x, \overline{y}, \overline{v}) \partial_y)^k \widetilde{a}(x, \overline{x}, \overline{\partial_y} \phi(x, \overline{y}), \overline{y}) \right). \tag{10}
$$

现在我们证明一个推广结果，它推广了我们在定理 2.4 的证明中得到的结论。我们将在定理 4.13 证明中的关键步骤使用该结果。

定理 3.21。 假设 $\Phi_M(z) = |z|^2$，并设 H 为满足 (2) 的二次函数，这意味着

$$
\begin{aligned}
&\det(\Re f) + \det(\Im f) + i\sqrt{|\Im(\det f)^2 - 4 \det(\Re f) \det(\Im f)|} \notin \mathbb{R}_-, \\
&f(\mathbb{R}^2) \neq \mathbb{C}.
\end{aligned}
$$

设 $\widetilde{\kappa}$ 为第*2.1*节中的线性辛同构，ϕ 为相应的相位函数。那么，$I_\phi = I_\phi(1) : \mathcal{B}_\hbar \to \mathcal{H}_\hbar^W$ 和 $I_{\phi_i} = I_{\phi_i}(1) : \mathcal{H}_\hbar^{W_i} \to \mathcal{B}_\hbar$ 有界，且

$$
\begin{aligned}
W(x) =& \frac{r-1}{r} |x|^2 + \frac{2j}{r} \Re(x) \Im(x) \\
W_i(x) =& \frac{1-r}{r} |x|^2 + \frac{2j}{r} \Re(x) \Im(x)
\end{aligned}
$$

并且 r，$j \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ 满足 $(r + ij)^2 = \frac{\zeta}{|\zeta|}$。此外，

$$
T_\hbar(H) I_\phi(1) = I_\phi(1) T_{\mathrm{cov},\hbar} \left(d|y|^2 + \frac{\hbar \partial \overline{\partial}}{2} (H(y) - d|y|^2) \right) + O(e^{-\frac{c}{\hbar}}).
$$

证明。我们在第2.1节中看到，$\widetilde{\kappa} = \widetilde{\kappa_3} \circ \widetilde{\kappa_2} \circ \widetilde{\kappa_1}$，其中 κ_1 和 κ_2 是实辛同胚，并且

$$\widetilde{\kappa_3} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \zeta^{\frac{1}{4}} + \zeta^{-\frac{1}{4}} & \zeta^{\frac{1}{4}} - \zeta^{-\frac{1}{4}} \\ \zeta^{\frac{1}{4}} - \zeta^{-\frac{1}{4}} & \zeta^{\frac{1}{4}} + \zeta^{-\frac{1}{4}} \end{pmatrix}.$$

根据例3.11，$\widetilde{\kappa_1}$ 和 $\widetilde{\kappa_2}$ 不会改变权函数。然后，根据引理 3.10，由 ϕ 关联到 $\widetilde{\kappa_3}$、从 0 变换而来的权函数为

$$W(x) = \frac{1-r}{r}|x|^2 + \Re\left(\frac{-ij}{r}x^2\right) = \frac{1-r}{r}|x|^2 + \frac{2j}{r}\Re(x)\Im(x)$$

其中

$$\begin{aligned} r =& \frac{|\zeta^{\frac{1}{4}} + \zeta^{-\frac{1}{4}}|^2 - |\zeta^{\frac{1}{4}} - \zeta^{-\frac{1}{4}}|^2}{4} = \Re\left(\left(\frac{\zeta}{|\zeta|}\right)^{\frac{1}{2}}\right), \\ j =& i\frac{\left(\zeta^{\frac{1}{4}} + \zeta^{-\frac{1}{4}}\right)\left(\overline{\zeta}^{\frac{1}{4}} - \overline{\zeta}^{-\frac{1}{4}}\right) - \left(\zeta^{\frac{1}{4}} - \zeta^{-\frac{1}{4}}\right)\left(\overline{\zeta}^{\frac{1}{4}} + \overline{\zeta}^{-\frac{1}{4}}\right)}{4} = \Im\left(\left(\frac{\zeta}{|\zeta|}\right)^{\frac{1}{2}}\right). \end{aligned}$$

我们要寻找一个权函数 W_i，使得 ϕ_i 是 W_i 的相位，且变换后的权函数为 0。根据引理 3.12，这等价于 $\widetilde{\kappa}^{-1}(\mathcal{D}) = D\overline{\Lambda_{-W_i}}$，这与 $\Lambda_W = D\overline{\Lambda_{-W_i}}$ 相同，因为根据定义，$\widetilde{\kappa}(\Lambda_W) = \mathcal{D}$。令 $y \in \mathbb{C}$，我们要寻找 $x \in \mathbb{C}$ 使得

$$\begin{cases} x = y - \overline{\partial} W_i(y), \\ \frac{1}{r}\overline{x} - \frac{ij}{r}x = \overline{y}. \end{cases}$$

当 $x = \frac{1}{r}y - \frac{ij}{r}\overline{y}$时条件成立，并且由于 $\frac{1-j^2}{r^2} = 1$，我们得到 $\overline{\partial} W_i(y) = -\frac{1-r}{r}y + \frac{ij}{r}\overline{y}$，因此得证。

对于算子的乘积，我们使用 (8)，其中 $K_{x,\,\overline{y}}(z, \overline{v}) = \left(z, \overline{v} + \frac{\partial_x^2\phi}{2}z\right)$

$$T_\hbar(H)I_\phi(a) = aI_\phi\left(\widetilde{H}(x, \partial_x\phi(x,\overline{y})) + \hbar\partial\overline{\partial}H + \hbar\frac{\partial_x^2\phi}{2}\overline{\partial}^2 H\right) + O(e^{-\frac{c}{\hbar}}),$$

~ ~具有 $H(x, \partial_x\phi(x,\overline{y})) = H \circ \widetilde{\kappa}(\overline{\partial_y}\phi(x,\overline{y})\ \overline{y}) = d\overline{\partial_y}\phi(x,\overline{y})\overline{y}$。另一方面

$$I_\phi(a)T_{\mathrm{cov},\hbar}(dx\overline{y}) = aI_\phi\left(d\overline{\partial_y}\phi(x,\overline{y})\overline{y}\right) + O(e^{-\frac{c}{\hbar}}),$$

根据式（10），具有 $T_\hbar(|y|^2) = T_\hbar(x\overline{y} + \hbar)$，因此

$$I_\phi(a)T_\hbar\left(|y|^2 - d\hbar + \hbar\partial\overline{\partial}H + \hbar\frac{\partial_x^2\phi}{2}\overline{\partial}^2 H\right) = T_\hbar(H)I_\phi(a) + O(e^{-\frac{c}{\hbar}}).$$

该结果来自我们在定理 2.4 的证明中得到的关系：

$$\partial\overline{\partial}H + \frac{1}{2}\partial_x^2\phi(x,\overline{y})\overline{\partial}^2 H = \frac{1}{2}(\partial\overline{\partial}H + d) = \frac{\partial\overline{\partial}}{2}(H(x) + d|x|^2).$$

□

注意，在证明中，由于 H 是二次的且 $a=1$，式 (8) 中的和是有限的；余项来自命题 A.15 的轮廓变形。

我们可以验证，定理 3.21 给出的界 $I_\phi : \mathcal{B}_\hbar \to \mathcal{H}_\hbar^{W_l}$ 是最优的。考虑 $u(y) = e^{-\frac{|y|^2}{2\hbar}} e^{\frac{i\sigma y^2}{2\hbar}} \in \mathcal{B}_\hbar$，其中 $\sigma \in]-1,1[$。根据引理 3.10，$\phi(x,\overline{y}) = -\frac{C_-}{2C_+}x^2 + \frac{1}{C_+}x\overline{y} + \frac{C_-}{2C_+}\overline{y}^2$，其中 $C_+ = \frac{\zeta^{\frac{1}{4}}+\zeta^{-\frac{1}{4}}}{2}$ 和 $C_- = \frac{\zeta^{\frac{1}{4}}-\zeta^{-\frac{1}{4}}}{2}$，于是

$$I_\phi(1)u(x) = e^{-\frac{|x|^2+\frac{C_-}{C_+}x^2}{2\hbar}} \int_{\mathbb{C}} e^{\frac{-|y|^2+\frac{1}{C_+}x\overline{y}+\frac{C_-}{2C_+}\overline{y}^2+\frac{i\sigma}{2}y^2}{\hbar}} \frac{dy}{\pi\hbar} = e^{-\frac{|x|^2+\frac{C_-}{C_+}x^2}{2\hbar}} I'_\phi(1)u(x).$$

利用 $\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{At^2}{\hbar}} t^{2k} \frac{dt}{\sqrt{\pi\hbar}} = (2k)!k \underline{\quad \frac{\hbar^k}{!4^k} \quad} A^{-k-\frac{1}{2}}$，我们计算得到 $l \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
(\hbar\partial)^l I'_\phi(1)u(0) &= C_+^{-l} \int_{\mathbb{C}} e^{-\frac{\alpha\Re(y)^2}{\hbar}} e^{-\frac{\beta\Im(y)^2}{\hbar}} e^{\frac{2\gamma\Re(y)\Im(y)}{\hbar}} \overline{y}^l \frac{dy}{\pi\hbar} \\
&= C_+^{-l} \int_{\mathbb{C}} e^{-\frac{\alpha r^2}{\hbar}} e^{-\frac{(\alpha\beta-\gamma^2)s^2}{\alpha\hbar}} \left(r + \left(\frac{\gamma}{\alpha} - i\right)s\right)^l \frac{dr\,ds}{\pi\hbar} \\
&= C_+^{-l} \sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} \left(\frac{\gamma}{\alpha} - i\right)^{l-k} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(\alpha\beta-\gamma^2)s^2}{\alpha\hbar}} \frac{dr}{\sqrt{\pi\hbar}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(\alpha\beta-\gamma^2)s^2}{\alpha\hbar}} \frac{ds}{\sqrt{\pi\hbar}} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{if } l \text{ is odd,} \\ \frac{(2l')!}{l'!} \left(\frac{\hbar}{4C_+^2}\right)^{l'} \left(\frac{\beta-\alpha-2i\gamma}{\alpha\beta-\gamma^2}\right)^{l'} (\alpha\beta-\gamma^2)^{-\frac{1}{2}} & \text{if } l = 2l', \end{cases}
\end{aligned}$$

其中 $\alpha = 1 - i\frac{\sigma}{2} - \frac{C_-}{2C_+}, \beta = 1 + i\frac{\sigma}{2} + \frac{C_-}{2C_+}$ 和 $\gamma = -i\frac{C_-}{2C_+} - \frac{\sigma}{2}$。因此，

$$\begin{aligned}
I_\phi(1)u(x) =& e^{-\frac{|x|^2}{2\hbar}} e^{-\frac{C_- x^2}{2C_+\hbar}} (\alpha\beta-\gamma^2)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{\beta-\alpha-2i\gamma}{4C_+^2(\alpha\beta-\gamma^2)}\frac{x^2}{\hbar}} \\
=& (\alpha\beta-\gamma^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{2\hbar}} e^{-\frac{C_- x^2}{2C_+\hbar}} e^{\frac{i\sigma x^2}{2C_+(C_+-iC_-\sigma)\hbar}}.
\end{aligned}$$

现在，考虑 $\tau \geq 0$ 和 $\epsilon \in [-\tau,\tau]$，使得二次型 $p(x) = \frac{\tau|x|^2}{2} + \epsilon\Re(x)\Im(x)$ 为正，

$$\begin{aligned}
\left| e^{\frac{p(x)}{\hbar}} e^{-\frac{W_l(x)}{2\hbar}} I_\phi u(x) \right| =& e^{-\frac{|x|^2}{2\hbar}\left(\frac{1}{r}-\tau\right)} e^{-\Re\left(\frac{x^2}{2\hbar}\left(-\frac{ji}{r}+\frac{C_-}{C_+}-\frac{i\sigma}{C_+(C_+-i\sigma C_-)}+i\epsilon\right)\right)} \\
=& e^{-\frac{|x|^2}{2\hbar}\left(\frac{1}{r}-\tau\right)} e^{-\Re\left(\frac{x^2}{2\hbar}\left(\frac{\overline{C_-}}{C_+ r}-\frac{i\sigma}{C_+(C_+-i\sigma C_-)}+i\epsilon\right)\right)} \\
=& e^{-\frac{q(x)}{\hbar}}
\end{aligned}$$

其中 q 是定义在 $(\Re(x)\ \Im(x))$ 上的二次型。q 的迹为 $\tau - \frac{1}{r}$，因此从现在起我们考虑 $\tau < \frac{1}{r}$。q 的行列式为

$$\left(\frac{1}{r} - \tau\right)^2 - \left|\frac{\overline{C_-}}{C_+ r} - \frac{i\sigma}{C_+(C_+ - i\sigma C_-)} + i\epsilon\right|^2.$$

我们检验得，对于 $\tau = \epsilon = 0$，行列式对所有 $-1 < \sigma < 1$ 都严格大于 0，并且在 $\sigma^2 = 1$ 时等于 0。

$$\begin{aligned}\left|\frac{\overline{C_-}}{C_+r}-\frac{i\sigma}{C_+(C_+-i\sigma C_-)}\right|^2=&\frac{|C_-|^2}{|C_+|^2r^2}+\frac{\sigma^2}{|C_+|^2|C_+-i\sigma C_-|^2}-\frac{2}{|C_+|^2r}\Re\left(\frac{i\sigma C_-}{C_+-i\sigma C_-}\right)\\=&\frac{|C_-|^2}{|C_+|^2r^2}+\frac{\sigma^2r+\sigma j+2\sigma^2|C_-|^2}{r|C_+|^2|C_+-i\sigma C_-|^2}\\=&\frac{1}{r^2|C_+|^2}\left(|C_-|^2+r\frac{\sigma^2|C_+|^2+\sigma^2|C_-|^2+\sigma j}{|C_+|^2+\sigma^2|C_-|^2+\sigma j}\right)\\=&\frac{1}{r^2|C_+|^2}\left(|C_-|^2+r+r\frac{(\sigma^2-1)|C_+|^2}{|C_+|^2+\sigma^2|C_-|^2+\sigma j}\right)\\=&\frac{1}{r^2}-\frac{(1-\sigma^2)}{r(|C_+|^2+\sigma^2|C_-|^2+\sigma j)}\end{aligned}$$

因此，行列式等于

$$\frac{(1-\sigma^2)}{r|C_+-i\sigma C_-|^2}-\frac{2\tau}{r}+\tau^2-2\epsilon\Im\left(\frac{\overline{C_-}}{C_+r}-\frac{i\sigma}{C_+(C_+-i\sigma C_-)}\right)-\epsilon^2.$$

对于 $\sigma=1$，行列式等于

$$\left(\tau^2-\frac{2\tau}{r}\right)-\epsilon^2+\frac{2\epsilon}{r}\Re\left(\left(\frac{C_+-iC_-}{|C_+-iC_-|}\right)^2\right),$$

而对于 $\sigma=-1$，它等于

$$\left(\tau^2-\frac{2\tau}{r}\right)-\epsilon^2-\frac{2\epsilon}{r}\Re\left(\left(\frac{C_++iC_-}{|C_++iC_-|}\right)^2\right).$$

这两个值中有一个为负，因此存在一个 $|\sigma|<1$，使得行列式仍为负。对于这样的 σ，函数 u_σ 属于 $\mathcal{B}_\hbar$，而 $I_\phi(u)$ 属于 $\mathcal{H}_\hbar^{W_l}$，但不属于 $\mathcal{H}_\hbar^{W_l-p}$。因此，$W_l$ 是最优权函数。

3.3 托普利兹算子的符号演算

我们回顾一下 $\mathbb{C}^d$ 上 Bargmann 空间中的解析符号演算工具。这里的解析是指，相关数据是模去指数小误差来考虑的，而非 $\hbar^\infty$。伪微分算子 [4, 3, 32], 以及 $\mathbb{C}$ [37] 上的托普利兹算子的解析符号演算早已广为人知。正如前文引入命题 3.18 时所述，得益于伯格曼核 [31, 5, 10, 16, 12] 的解析性，流形上的托普利兹算子的解析符号演算也已为人所知。

在本小节中，$M=\mathbb{C}, \Phi_M(z)=|z|^2$，并回忆一下，对于 $f\in S(B_\rho)$，与 f 相关联的托普利兹算子为

$$T_\hbar(f)u(x)=I_{z\overline{v}}(f)u(x)=\int_{B_\rho}e^{\frac{2\overline{y}x-|y|^2-|x|^2}{2\hbar}}f(y)u(y)\frac{dy}{\pi\hbar}$$

它在 $\mathcal{B}_\hbar$ 上有界。

命题 3.22。若 $f,g\in S(B_\rho)$，则对所有 $\sigma\in]0,\rho[$，存在 $f\#g\in S(B_\sigma)$ 使得$T_\hbar(f)T_\hbar(g)=T_\hbar(f\#g)+O\left(e^{-\frac{c}{\hbar}}\right)$ 在 $\mathcal{B}_\hbar(B_\sigma)$上成立，并且

$$f\#g\sim\sum_k\frac{(-\hbar)^k}{k!}\partial_z^kf\partial_{\overline{z}}^kg.$$

证明。考虑 $\sigma \in]0,\rho[$，令 $u \in \mathcal{B}_\hbar$，回忆 $u(y) = e^{-\frac{|y|^2}{2\hbar}} r(y)$，其中 r 在 $\mathbb{C}^d$ 上全纯。围道 $\Gamma(y,\overline{v}) = \left\{(z,\overline{w}) \in \mathbb{C}^{2d}, \exists t \in \mathbb{C}^d / \ \overline{w} = \overline{t} + \overline{v}, z = -t + y\right\}$ 对于 $(z,w) \mapsto (y-z)(\overline{w}-\overline{v})$ 是良好的。令 $x \in B_\sigma$，我们计算

$$
\begin{aligned}
&T_\hbar(f)T_\hbar(g)u(x) \\
&= \int_{\mathcal{D}_\rho}\int_{\mathcal{D}_\rho} e^{\frac{2\overline{v}x - z\overline{v} - |x|^2}{2\hbar}} e^{\frac{2\overline{w}z - z\overline{v} - y\overline{w}}{2\hbar}} \widetilde{f}(z,\overline{v})\widetilde{g}(y,\overline{w}) e^{-\frac{\overline{w}y}{2\hbar}} r(y) \frac{dy \wedge d\overline{w} \wedge dz \wedge d\overline{v}}{(\pi\hbar)^2} \\
&= \int_{\mathcal{D}_\rho} e^{\frac{2\overline{v}x - y\overline{v} - |x|^2}{2\hbar}} \left(\int_{\Gamma(y,\overline{v}) \cap \widetilde{B_\rho}} e^{-\frac{(y-z)(\overline{w}-\overline{v})}{\hbar}} \widetilde{f}(z,\overline{v})\widetilde{g}(y,\overline{w}) \frac{dz \wedge d\overline{w}}{\pi\hbar} \right) e^{-\frac{y\overline{v}}{2\hbar}} r(y) \frac{dy \wedge d\overline{v}}{\pi\hbar} \\
&= \int_{B_\rho} e^{\frac{2\overline{y}x - |y|^2 - |x|^2}{2\hbar}} \left(\int_{\mathcal{D} \cap \left(\widetilde{B_\rho} + (y,-\overline{y})\right)} e^{-\frac{z\overline{w}}{\hbar}} \widetilde{f}(y-z,\overline{y})\widetilde{g}(y,\overline{w}+\overline{y}) \frac{dz \wedge d\overline{w}}{\pi\hbar} \right) e^{-\frac{|y|^2}{2\hbar}} r(y) \frac{dy}{\pi\hbar}
\end{aligned}
$$

利用命题 A.7，并忽略一个 $O(e^{-\frac{c}{\hbar}})$ 余项。现在，对于 $|y| \geq \sigma$，由于 $e^{\frac{2\overline{y}x - |y|^2 - |x|^2}{2\hbar}}$，该积分呈指数级小；而对于 $|y| < \sigma$，当 $\rho' \in]0,\rho[$ 足够小时，集合 $\mathcal{D} \cap \left(\widetilde{B_\rho} + (y,-\overline{y})\right)$ 包含 $\mathcal{D}_{\rho'}$。因此，我们可以将积分区域替换为 $\mathcal{D}_{\rho'}$，误差呈指数级小。然后，我们取一个 $D > \min(\rho - \rho', \rho')^{-1}$，并使用引理 3.4，其中 $N = \frac{1}{3D\hbar}$ 和 $(x,y) \in B_\sigma^2$，

$$
\begin{aligned}
f\#g(y) &= \int_{B_{\rho'}} e^{-\frac{|z|^2}{\hbar}} \widetilde{f}(y-z,\overline{y})\widetilde{g}(y,\overline{z}+\overline{y}) \frac{dz}{\pi\hbar} + O\left(e^{-\frac{c}{\hbar}}\right) \\
&= \sum_{0 \leq k \leq \frac{1}{3D\hbar}} \frac{\hbar^k}{k!} (\partial_z \overline{\partial_z})^k \left(\widetilde{f}(y-z,\overline{y})\widetilde{g}(y,\overline{z}+\overline{y}) \right)(0) + O\left(e^{-\frac{c}{\hbar}}\right) \\
&= \sum_{0 \leq k \leq \frac{1}{3D\hbar}} \frac{(-\hbar)^k}{k!} \partial_1^k \widetilde{f}(y,\overline{y}) \partial_2^k \widetilde{g}(y,\overline{y}) + O\left(e^{-\frac{c}{\hbar}}\right) \\
&= \sum_{0 \leq k \leq \frac{1}{3D\hbar}} \frac{(-\hbar)^k}{k!} \partial^k f(y) \overline{\partial}^k g(y) + O\left(e^{-\frac{c}{\hbar}}\right).
\end{aligned}
$$

因此，

$$
f\#g \sim \sum_{0 \leq k \leq \frac{1}{3D\hbar}} \frac{(-\hbar)^k}{k!} \partial_z^k f \partial_{\overline{z}}^k g
$$

它是定义在 B_σ 上的解析函数，下面验证它是一个解析符号。由于 f、g 是解析符号，因此存在 A、$B > 0$，使得对所有 $k \in \mathbb{N}$，$|f_k| \leq k! A^k$ 且 $|g_k| \leq k! B^k$。我们可以选取 D，使得 $D > A$、B，从而 $f = \sum_{0 \leq k \leq \frac{1}{3D\hbar}} \hbar^k f_k + O\left(e^{-\frac{c}{\hbar}}\right)$、$g = \sum_{0 \leq k \leq \frac{1}{3D\hbar}} \hbar^k g_k + O\left(e^{-\frac{c}{\hbar}}\right)$, which computes

$$
\begin{aligned}
f\#g &= \sum_{0\le j\le \frac{1}{3D\hbar}} \frac{(-\hbar)^j}{j!}\left(\sum_{0\le k\le \frac{1}{3D\hbar}} \hbar^k \partial^j f_k \sum_{0\le l\le \frac{1}{3D\hbar}} \hbar^l \overline{\partial}^k g_l\right) + O\left(e^{-\frac{c}{\hbar}}\right) \\
&= \sum_{0\le m\le \frac{1}{D\hbar}} \hbar^m \sum_{(j,k,l)\in S_m} \frac{(-1)^j}{j!} \partial^j f_k \overline{\partial}^j g_l + O\left(e^{-\frac{c}{\hbar}}\right)
\end{aligned}
$$

其中

$$
S_m = \left\{(j,k,l)\in\mathbb{N}^3 /\ j+k+l=m,\ j,k,l\le \frac{1}{3D\hbar}\right\}.
$$

记 $D' = \max\left((\rho-\sigma)^{-2},\ A,\ B\right)$，并假设 $D'<D$。利用引理 3.3 以及 f 和 g 是解析符号这一事实，对于所有 $|y|<\sigma$

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{(j,k,l)\in S_m} \frac{(-1)^j}{j!}\partial^j f_k(y)\overline{\partial}^j g_l(y)\right| &\le C\sum_{(j,k,l)\in S_m} (\rho-\sigma)^{-2j} j!k!A^k l!B^l \\
&\le C(D')^m \sum_{(j,k,l)\in S_m} j!k!l! \\
&\le Cm(m+1)!(D')^m \\
&\le Cm!D^m
\end{aligned}
$$

因此，$f\#g$ 是定义在 B_σ上的解析符号。 □

这一最后结果表明，在 $S(B_\rho)$ 上进行计算可能会变得多么复杂。我们遵循 Boutet de Monvel 和 Krée 的思想，在 $S(B_\rho)$ 上定义形式范数，以便更轻松地控制参数 ρ和 A。本小节中关于这些形式范数的结果源自他们的工作 [4, 3]。

定义 3.23。对于 $a\in S(B_\rho)$，我们定义

$$
\|a\|_\rho = \sum_{\alpha,\beta,k\in\mathbb{N}^3}\left(\frac{2(2d)^{-k}k!}{(k+|\alpha|)!(k+|\beta|)!}\right)\left|\partial^\alpha\overline{\partial}^\beta a_k(0)\right|\rho^{2k+|\alpha+\beta|}.
$$

为便于计算，我们还考虑这些部分表达式

$$
\begin{aligned}
\|a\|_{\rho,s} &= \rho^s \sum_{2k+|\alpha+\beta|=s}\left(\frac{2(2d)^{-k}k!}{(k+|\alpha|)!(k+|\beta|)!}\right)\left|\partial^\alpha\overline{\partial}^\beta a_k(0)\right| \\
\|a\|_{\rho,s-} &= \sum_{0\le r\le s}\|a\|_{\rho,r}
\end{aligned}
$$

显然，对于所有 ρ和 s，$\|\cdot\|_{\rho,\ s}$ 满足三角不等式。

引理 3.24. 若形式范数 $\|a\|_\rho$ 有界，则 a_k 在 0 处解析，且其收敛半径大于或等于 ρ，并且 $|\widetilde{a_k}|\le\frac{1}{2}\|a\|_\rho(2d)^k k!$ 对所有 $k\in\mathbb{N}$均成立。另一方面，若 a在 0 处解析，收敛半径等于 ρ，且 $|\widetilde{a_k}|\le cA^k k!$，则对所有 $\rho'\in]0,\rho[$，$\|a\|_{\rho'}$ 有界。此外，当且仅当 $a=O(e^{-\frac{c}{\hbar}})$ 在 B_ρ 上成立时，$\|a\|_\rho=0$ 成立。

证明. 首先，考虑函数序列 a_k，使得对于固定的 ρ，项 $\|a\|_\rho$ 有限。令 $\rho' \in]0、\ \rho[$ 和 $k \in \mathbb{N}$，则当 $\hbar$ 足够小时，对所有 $\alpha、\ \beta \in \mathbb{N}^2$:

$$\frac{1}{|\alpha|!|\beta|!}\hbar^k(\rho')^{|\alpha|+|\beta|} \leq \frac{(k!)^2\rho^{2k+\alpha+\beta}}{(|\alpha|+k)!(|\beta|+k)!}$$

因为左侧与右侧之比等于

$$\binom{\alpha+k}{\alpha}\left(\frac{\sqrt{\hbar}}{\rho}\right)^k\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^\alpha\binom{\beta+k}{\beta}\left(\frac{\sqrt{\hbar}}{\rho}\right)^k\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^\beta \leq \left(\frac{\sqrt{\hbar}+\rho'}{\rho}\right)^{\alpha+\beta+2k} \leq 1$$

如果 $\hbar \leq (\rho-\rho')^2$。因此,

$$\begin{aligned}
&\sum_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}^2}\hbar^k\frac{\left|\partial^\alpha\overline{\partial}^\beta a_k(0)\right|}{|\alpha|!|\beta|!}(\rho')^{|\alpha+\beta|}\\
\leq&\sum_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}^2}\frac{\left|\partial^\alpha\overline{\partial}^\beta a_k(0)\right|(k!)^2}{(|\alpha|+k)!(|\beta|+k)!}\rho^{2k+|\alpha+\beta|}\\
\leq&\frac{1}{2}k!(2d)^k\sum_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}^2}\left(\frac{2(2d)^{-k}k!}{(k+|\alpha|)!(k+|\beta|)!}\right)\left|\partial^\alpha\overline{\partial}^\beta a_k(0)\right|\rho^{2k+|\alpha+\beta|}\\
\leq&\frac{1}{2}k!(2d)^k\|a\|_\rho < +\infty
\end{aligned}$$

因此， a_k 在 0 处解析，且收敛半径大于或等于 ρ，并且对于所有 $|z|, |v| \leq \rho$，都有$|\widetilde{a_k}(z,\overline{v})| \leq \frac{1}{2}\|a\|_\rho k!(2d)^k$。

现在，假设对于所有 $k \in \mathbb{N}$， a_k 都是解析的，其收敛半径大于$\widetilde{\ }$或等于 ρ，并且在 B_ρ上满足 $|\widetilde{a_k}| \leq cA^k k!$。注意， A 可以任意取大。令$\rho' \in]0,\rho[$，然后对所有 $k \in \mathbb{N}$在 B_ρ 上使用引理 3.3,

$$\left|\partial^\alpha\overline{\partial}^\beta a_k(0)\right| \leq C\alpha!\beta!A^k k!\rho^{-|\alpha+\beta|}.$$

于是,

$$\begin{aligned}
\|a\|_{\rho'} &\leq C\sum_{\alpha,\beta,k\in\mathbb{N}^3}\frac{2(2d)^{-k}k!}{(k+|\alpha|)!(k+|\beta|)!}\alpha!\beta!k!(\rho'^2A)^k\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^{|\alpha+\beta|}\\
&\leq C\sum_{\alpha,\beta,k\in\mathbb{N}^3}\left(\frac{\rho'^2A}{2d}\right)^k\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^{|\alpha+\beta|}\\
&< +\infty
\end{aligned}$$

如果 $\rho' <$最小值 $\left(\rho, \sqrt{\frac{2d}{A}}\right)$，因此只要 A 取得足够大，该条件就得到满足。 □

$\|a\|_\rho$ 定义中的系数实际上是为了使下面的引理成立而选取的。

引理 3.25。对于所有 $f, g \in S(B_\rho)$,

$$\|fg\|_{\rho,s-} \leq \|f\#g\|_{\rho,s-} \leq \|f\|_{\rho,s-} \|g\|_{\rho,s-}.$$

证明。 第一个不等式源于 $f\#g$ 和形式范数的定义。令$k \in \mathbb{N}$，则

$$\left(\sum \frac{\hbar^j}{j!}\partial^j f \overline{\partial}^j g\right)_k = \sum_{0\leq j\leq k} \sum_{0\leq l\leq k-j} \frac{1}{j!}\partial^j f_l \overline{\partial}^j g_{k-j-l}$$

接下来我们可以计算

$$\begin{aligned}
&\|f\#g\|_{\rho,r} \\
\leq&\rho^r \sum_{S_i} \frac{2(2d)^{-k}k!}{(k+|\alpha|)!(k+|\beta|)!}\binom{\alpha}{m}\binom{\beta}{n}\frac{1}{j!}\left|\partial^{j+m}\overline{\partial}^n f_l(0)\right|\left|\partial^{\alpha-m}\overline{\partial}^{j+\beta-n} g_{k-j-l}(0)\right| \\
\leq&\sum_{S_f} \rho^{2k_2+\alpha_2+\beta_2}\rho^{2k_1+\alpha_1+\beta_1}\mu_{1,2}C_{\alpha_1,\beta_1,k_1}\left|\partial^{\alpha_1}\overline{\partial}^{\beta_1} f_{k_1}(0)\right| C_{\alpha_2,\beta_2,k_2}\left|\partial^{\alpha_2}\overline{\partial}^{\beta_2} g_{k_2}(0)\right| \\
\leq&\sum_{0\leq t\leq r} \|f\|_{\rho,t}\|g\|_{\rho,r-t}.
\end{aligned}$$

其中我们记$C_{\alpha,\ \beta,\ k} = {}^{2}\!\underline{(2d)^{-k}k!\ (k+|\alpha|)!(}$
$k+|\beta|)!$,

$$\mu_{1,2} = \frac{1}{2}\sum_{\gamma=0}^{\min(\beta_1,\alpha_2)} (2d)^{-\gamma}\binom{k_1+\gamma}{\gamma}\binom{\alpha_1+\alpha_2-\gamma}{\alpha_2-\gamma}\binom{k_2+\alpha_2+k_1+\alpha_1}{k_2+\alpha_2}^{-1}$$
$$\binom{k_2+\beta_2+k_1+\beta_1}{k_2+\beta_2}^{-1}\binom{k_1+k_2+\gamma}{k_2}\binom{\beta_1+\beta_2-\gamma}{\beta_2},$$

and

$$S_i = \left\{(k,\alpha,\beta,j,l,m,n) \in \mathbb{N}^7 /\ 2k+\alpha+\beta = r, j\leq k, l+j\leq k, m\leq\alpha, n\leq\beta\right\}$$
$$S_f = \left\{(k_1,\alpha_1,\beta_1,k_2,\alpha_2,\beta_2,\gamma) \in \mathbb{N}^7 /\ 2k_1+2k_2+\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2 = r, \gamma\leq\beta_1,\alpha_2\right\}.$$

该不等式源于两点，首先是$\mu_{1,\ 2} \leq 1$因为 $\binom{m}{k}\binom{n}{l} \leq \binom{m+n}{k+l}$，且对所有 $k \leq m$、$l \leq n$、 $l \leq k$、 m均成立。第二点是我们有以下单射

$$\begin{aligned}
S_i &\hookrightarrow S_f \\
(k,\alpha,\beta,j,l,m,n) &\mapsto (k-j-l, \alpha-m, j+\beta-n, l, j+m, n, j) \\
&= (k_1,\alpha_1,\beta_1,k_2,\alpha_2,\beta_2,\gamma).
\end{aligned}$$

然后，对 $0 \leq r \leq s$ 上的这些不等式求和，得到

$$\|f\#g\|_{\rho,s-} \leq \sum_{0\leq t+r\leq s} \|f\|_{\rho,t}\|g\|_{\rho,r} \leq \|f\|_{\rho,s-}\|g\|_{\rho,s-}.$$

□

从现在起，我们记

$$\{f,g\} = i\left(\partial g\overline{\partial} f - \overline{\partial} g\partial f\right) \tag{11}$$

泊松括号，以及 $\partial_\theta f = i\left(z\partial f - \overline{z}\overline{\partial} f\right) = \{|z|^2, f\}$。如果我们考虑 $z = \frac{x-iy}{\sqrt{2}}$，那么这一记号与通常的泊松括号一致，而 $\partial_\theta f$ 可以看作是 f 关于变量 $\theta = \arg(z)$ 的微分。我们还将符号括号记为 $[f,g]_\# = f\#g - g\#f$。现在我们将证明一系列引理，以求解形如 $(\partial\overline{\partial}\Phi_M)^{-1}\{\mu, b\} = g$、未知量 b 属于解析符号空间的上同调方程；本文中我们会多次遇到这类方程。注意，它也可以写成沿着流形上 μ 的流的输运方程，该流形的凯勒势为 Φ_M；不过，对于解析符号而言，这种观点并不方便。

引理 3.26. 设 $\rho > 0$ 和 $f \in S(B_\rho)$ 满足 $\|f\|_\rho < \infty$ 且对所有 $\alpha \in \mathbb{N}$ 都有 $\partial^\alpha\overline{\partial}^\alpha f(0) = 0$。那么对所有 $s \in \mathbb{N}$，有 $\|f\|_{\rho,s} \leq \|\partial_\theta f\|_{\rho,s}$。此外，存在唯一的 $g \in S(B_\rho)$，它是 $\partial_\theta g = f$ 的解，且对所有 $\alpha \in \mathbb{N}$ 都有 $\partial^\alpha\overline{\partial}^\alpha g(0) = 0$。记为 $\int f\frac{d\theta}{2\pi}$，于是可得

$$\left\|\int f\frac{d\theta}{2\pi}\right\|_{\rho,s} \leq \|f\|_{\rho,s}.$$

证明. 对于任意 $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^2$，我们计算

$$\begin{aligned}\partial^\alpha\overline{\partial}^\beta\partial_\theta f(0) &= i\left(\overline{\partial}^\beta\sum_{0\leq k\leq\alpha}\binom{\alpha}{k}\partial^k z\partial^{\alpha+1-k}f\right)(0) - i\left(\partial^\alpha\sum_{0\leq k\leq\beta}\binom{\beta}{k}\overline{\partial}^k\overline{z}\overline{\partial}^{\beta+1-k}f\right)(0)\\ &= i(\alpha-\beta)\partial^\alpha\overline{\partial}^\beta f(0).\end{aligned}$$

根据假设，对所有 $\alpha \in \mathbb{N}$，$\partial^\alpha\overline{\partial}^\alpha f(0) = 0 = \partial^\alpha\overline{\partial}^\alpha\partial_\theta f(0)$；若 $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^2$ 互不相同，则 $\left|\partial^\alpha\overline{\partial}^\beta f(0)\right| = \frac{1}{\alpha-\beta}\left|\partial^\alpha\overline{\partial}^\alpha\partial_\theta f(0)\right| \leq \left|\partial^\alpha\overline{\partial}^\alpha\partial_\theta f(0)\right|$，因此 $\|f\|_{\rho,s} \leq \|\partial_\theta f\|_{\rho,s}$。

根据引理 3.24，对于所有 $z \in B_\rho$

$$f(z) = \sum_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}^2}\frac{\partial^\alpha\overline{\partial}^\beta f(0)}{\alpha!\beta!}z^\alpha\overline{z}^\beta,$$

并且根据假设，$\partial^\alpha\overline{\partial}^\alpha f(0) = 0$ 对所有 $\alpha \in \mathbb{N}$ 均成立。因此，表达式

$$g(z) = \sum_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}^2}\frac{\partial^\alpha\overline{\partial}^\beta f(0)}{i(\alpha-\beta)\alpha!\beta!}z^\alpha\overline{z}^\beta,$$

在 B_ρ 上是良定义的。

□

注 3.27。可以通过取 $z \in \Omega$ 的函数来选择更一般的形式范数

$$\|a\|_\rho(z) = \sum_{\alpha,\beta,k\in\mathbb{Z}^3}\left(\frac{2(2n)^{-k}k!}{(k+|\alpha|)!(k+|\beta|)!}\right)\left|\partial^\alpha\overline{\partial}^\beta a_k(z)\right|\rho^{2k+|\alpha+\beta|}$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{C}^d$ 是一个开集。不过，这个最后的引理只有在 0 处取值时才成立。

引理 3.28。 如果 κ 是一个线性辛同胚，那么

$$\left\|\widetilde{f}\circ\widetilde{\kappa}|_{\mathcal{D}}\right\|_{\rho,s}\leq\left(2\sqrt{2}\left\|\kappa\right\|\right)^{s}\left\|f\right\|_{\rho,s}$$

因此，存在 $\tau\in]0,\ \rho[$ 使得

$$\left\|\widetilde{f}\circ\widetilde{\kappa}|_{\mathcal{D}}\right\|_{\tau,s}\leq\left\|f\right\|_{\rho,s}$$

证明。 记 $(\kappa_{j,\ k})_{1\leq j,\ k\leq 2}=(|\partial_k\widetilde{\kappa}_j(0)|)_{1\leq j,\ k\leq 2}$，则计算得

$$\left|\partial_1^{\alpha}\partial_2^{\beta}(\widetilde{f}_k\circ\widetilde{\kappa})(0)\right|\leq\sum_{0\leq j\leq\alpha}\sum_{0\leq l\leq\beta}\binom{\alpha}{j}\binom{\beta}{l}\kappa_{1,1}^{j}\kappa_{2,1}^{\alpha-j}\kappa_{1,2}^{l}\kappa_{2,2}^{\beta-l}\left|\partial_1^{j+l}\partial_2^{\alpha+\beta-j-l}\widetilde{f}_k(0)\right|,$$

thus

$$\left\|\widetilde{f}\circ\widetilde{\kappa}\right\|_{\rho,s}\leq\rho^{s}\sum_{2k+\alpha+\beta=s}\sum_{0\leq j\leq\alpha}\sum_{0\leq l\leq\beta}C_{\alpha,\beta,k}\binom{\alpha}{j}\binom{\beta}{l}\kappa_{1,1}^{j}\kappa_{2,1}^{\alpha-j}\kappa_{1,2}^{l}\kappa_{2,2}^{\beta-l}\left|\partial_1^{j+l}\partial_2^{\alpha+\beta-j-l}\widetilde{f}_k(0)\right|.$$

我们进行变量替换 $(j,l,\alpha,\beta)\mapsto(j,\beta-l,j+l,\alpha+\beta-j-l)=(j',l',\alpha',\beta')$，得到

$$\begin{aligned}&\left\|\widetilde{f}\circ\widetilde{\kappa}\right\|_{\rho,s}\\=&\rho^{s}\sum C_{\beta'+j'-l',\alpha'+l'-j',k}\binom{\beta'+j'-l'}{j'}\binom{\alpha'+l'-j'}{\alpha'-j'}\kappa_{1,1}^{j'}\kappa_{2,1}^{\beta'-l'}\kappa_{1,2}^{\alpha'-j'}\kappa_{2,2}^{l'}\left|\partial_1^{\alpha'}\partial_2^{\beta'}\widetilde{f}_k(0)\right|\end{aligned}$$

其中求和遍历满足 $2k+\alpha'+\beta'=s$、$0\leq j'\leq\alpha'$和 $0\leq l'\leq\beta'$的指标。然后我们使用不等式

$$\begin{aligned}&\binom{\beta'+j'-l'}{j'}\binom{\alpha'+l'-j'}{\alpha'-j'}\frac{C_{\beta'+j'-l',\alpha'+l'-j',k}}{C_{\alpha',\beta',k}}\\=&\binom{\alpha'}{j'}\binom{\beta'}{l'}\binom{k+\alpha'}{k}\binom{k+\alpha'+l'-j'}{k}^{-1}\binom{k+\beta'}{k}\binom{k+\beta'+j'-l'}{k}^{-1}\\\leq&\binom{\alpha'}{j'}\binom{\beta'}{l'}2^{k+\alpha'}\binom{k+\alpha'+l'-j'}{k}^{-1}2^{k+\beta'}\binom{k+\beta'+j'-l'}{k}^{-1}\\\leq&\binom{\alpha'}{j'}\binom{\beta'}{l'}2^{s}\end{aligned}$$

then

$$\begin{aligned}2^{s}\sum_{0\leq j'\leq\alpha'}\sum_{0\leq l'\leq\beta'}\binom{\alpha'}{j'}\binom{\beta'}{l'}\kappa_{1,1}^{j'}\kappa_{2,1}^{\beta'-l'}\kappa_{1,2}^{\alpha'-j'}\kappa_{2,2}^{l'}&=2^{s}(\kappa_{1,1}+\kappa_{1,2})^{\alpha'}(\kappa_{2,1}+\kappa_{2,2})^{\beta'}\\&\leq 2^{s}\left(2\left\|\kappa\right\|^{2}\right)^{\frac{\alpha'+\beta'}{2}}\\&\leq\left(2\sqrt{2}\left\|\kappa\right\|\right)^{s}\end{aligned}$$

并结合这些不等式

$$\left\|\widetilde{f}\circ\widetilde{\kappa}\right\|_{\rho,s}\leq\left(2\sqrt{2}\left\|\kappa\right\|\right)^{s}\left\|f\right\|_{\rho,s}.$$

□

引理 3.29。 设 $\rho > 0$ 和 $f \in S(B_\rho)$ 满足 $\|f\|_\rho < \infty$ 且 $f_0(0) \neq 0$，则存在 $\tau \in]0, \rho]$ 使得 $\|f^{-1}\|_\tau \leq \frac{1}{1-\|f-f_0(0)\|_\tau}$。

证明。 f^{-1} 在 0 附近有定义良好，当 $\hbar$ 足够小时，因为 $f_0(0) \neq 0$。此外，存在 $\tau \in]0, \rho]$ 使得 $\|f - f_0(0)\|_\tau < 1$，因为 $\lim_{\tau \to 0} \|f - f_0(0)\|_\tau = 0$，而该不等式来自 $x \mapsto \frac{1}{1-x}$的幂级数展开。 □

命题 3.30。 设 $\rho > 0, g \in S(B_\rho)$，$\Phi_M$ 为一个与 $\hbar$无关的实解析拟次调和函数，H 为一个非退化复二次函数，且 μ 在0附近全纯。假设 $\|g\|_\rho, \|\mu(H)\|_\rho < \infty$，且 $\mu_0 = \mathrm{Id} + O(|z|^2)$。那么存在仅分别依赖于 Φ_M和 H 的 $C_M, C > 0$，以及一个解析函数 $\tau \in]0, \rho[, r$，使得 $b \in S(B_\tau)$

$$(\partial\overline{\partial}\Phi_M)^{-1} \{\mu(H), b\} = g - r(H).$$

此外 $\|r(H)\|_{\tau,\ s} \leq C_M C^s \|g\|_{\tau,\ s}$，以及

$$\left\|\widetilde{b} \circ \widetilde{\kappa}|_{\mathcal{D}}\right\|_{\tau,s-} \leq \frac{C_M}{1 - C^s \|(\mu - \mathrm{Id})(H)\|_{\tau,s-}} \|\widetilde{g} \circ \widetilde{\kappa}|_{\mathcal{D}}\|_{\tau,s-}$$

对所有 $s \in \mathbb{N}$，当 $\tau = \rho$时有 $C = 1$，当 $H = |z|^2$时有 $C_M = 1$，且当 $\Phi_M = |z|^2$时有 $C_M = 1$。

~证明。 存在一个从 $\mathbb{C}^2$ 到 $\mathbb{C}^2$ 的辛同胚 $\widetilde{\kappa}$，使得 $H \circ \widetilde{\kappa}(z,\overline{v}) = dz\overline{v}$，因此方程变为

$$\begin{aligned}
&\left(\widetilde{\partial\overline{\partial}\Phi_M} \circ \widetilde{\kappa}\right)^{-1} \left\{\mu\left(\widetilde{H}\right), \widetilde{b}\right\} \circ \widetilde{\kappa} = \widetilde{g} \circ \widetilde{\kappa} - r(dz\overline{v}) \\
\Leftrightarrow &\left\{\mu\left(\widetilde{H} \circ \widetilde{\kappa}\right), \widetilde{b} \circ \widetilde{\kappa}\right\} = \partial_1\partial_2\widetilde{\Phi_M} \circ \widetilde{\kappa}\left(\widetilde{g} \circ \widetilde{\kappa} - r(dz\overline{v})\right) \\
\Leftrightarrow &\mu'(d|z|^2)\partial_\theta\left(\widetilde{b} \circ \widetilde{\kappa}|_{\mathcal{D}}\right) = \partial_1\partial_2\widetilde{\Phi_M} \circ \widetilde{\kappa}|_{\mathcal{D}}\left(\widetilde{g} \circ \widetilde{\kappa}|_{\mathcal{D}} - r(d|z|^2)\right) \\
\Leftrightarrow &\partial_\theta\left(\widetilde{b} \circ \widetilde{\kappa}|_{\mathcal{D}}\right) = \partial_1\partial_2\widetilde{\Phi_M} \circ \widetilde{\kappa}|_{\mathcal{D}} \frac{\widetilde{g} \circ \widetilde{\kappa}|_{\mathcal{D}} - r(d|z|^2)}{\mu'(d|z|^2)}.
\end{aligned}$$

因此，我们取

$$r(d|z|^2) = \left(\int_{|z|\mathbb{S}} \partial_1\partial_2\widetilde{\Phi_M} \circ \widetilde{\kappa}\frac{d\theta}{2\pi}\right)^{-1} \int_{|z|\mathbb{S}} \left(\partial_1\partial_2\widetilde{\Phi_M}\widetilde{g}\right) \circ \widetilde{\kappa}\frac{d\theta}{2\pi},$$

其中记 $\int_{|z|\mathbb{S}} \widetilde{f}\frac{d\theta}{2\pi} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} \frac{\partial^\alpha\overline{\partial}^\alpha f}{\alpha}_{(0)} \frac{}{(!)^2} |z|^{2\alpha}$。根据引理 3.24，$\int_{|z|\mathbb{S}} \partial_1\partial_2\widetilde{\Phi_M} \circ \widetilde{\kappa}\frac{d\theta}{2\pi}$和 $\int_{|z|\mathbb{S}} \left(\partial_1\partial_2\widetilde{\Phi_M}\widetilde{g}\right) \circ \widetilde{\kappa}\frac{d\theta}{2\pi}$对所有 $z \in B_\rho$都有定义。现在，由于 Φ_M是解析的且与 $\hbar$无关，存在 $\tau > 0$使得 $\left\|\partial\overline{\partial}\Phi_M\right\|_\tau < \infty$；又由于根据假设有 $\partial\overline{\partial}\Phi_M(0) \neq 0$，由引理 3.29，

$$\left\|\left(\int_{|z|\mathbb{S}} \partial_1\partial_2\widetilde{\Phi_M} \circ \widetilde{\kappa}\frac{d\theta}{2\pi}\right)^{-1}\right\|_\tau \leq \frac{1}{1 - \left\|\partial_1\partial_2\widetilde{\Phi_M} - \partial_1\partial_2\widetilde{\Phi_M}(0)\right\|_\tau},$$

当 $\tau \in]0, \rho[$ 足够小时。此外，根据引理 3.28，存在 $C > 0$ 使得

$$\left\|\int_{|z|\mathbb{S}}\left(\partial_1\partial_2\widetilde{\Phi_M g}\right)\circ\widetilde{\kappa}\frac{d\theta}{2\pi}\right\|_{\tau,s}\leq C^s\left\|\partial\overline{\partial}\Phi_M\right\|_{\tau,s}\|g\|_{\tau,s},$$

当 τ 足够小时。因此， $\|r(H)\|_{\tau,\ s}\leq C_M C^s\|g\|_{\tau,\ s}$ 当 τ 足够小时且取决于 Φ_M。同理，根据引理 3.26， b 也被唯一确定为

$$\begin{aligned}\left\|\widetilde{b}\circ\widetilde{\kappa}|_{\mathcal{D}}\right\|_{\tau,s-}\leq&C_M\left\|\frac{1}{\mu'(|z|^2)}\right\|_{\tau,s-}\|\widetilde{g}\circ\widetilde{\kappa}|_{\mathcal{D}}\|_{\tau,s-}\\ \leq&\frac{C_M}{1-\|(\mu'-1)(|z|^2)\|_{\tau,s-}}\|\widetilde{g}\circ\widetilde{\kappa}|_{\mathcal{D}}\|_{\tau,s-}\\ \leq&\frac{C_M}{1-\|(\mu-\mathrm{Id})(|z|^2)\|_{\tau,s-}}\|\widetilde{g}\circ\widetilde{\kappa}|_{\mathcal{D}}\|_{\tau,s-}\\ \leq&\frac{C_M}{1-C^s\|(\mu-\mathrm{Id})(H)\|_{\tau,s-}}\|\widetilde{g}\circ\widetilde{\kappa}|_{\mathcal{D}}\|_{\tau,s-}\end{aligned}$$

当 τ 足够小时（根据引理 3.29 和 3.28）。 □

引理 3.31。 令 f， $g\in S(B_\rho)$ 则 $\|[f,g]_\#\|_{\rho,\ s}=0$ 对于 $s=0$ 和 1，且若 $s\geq 2$

$$\|[f,g]_\#\|_{\rho,s}\leq 2\sum_{r=1}^{s-1}\|f\|_{\rho,r}\|g\|_{\rho,s-r}$$

此外，

$$\|[f,g]_\#-i\{f,g\}\|_{\rho,s-}\leq 2\|f\|_{\rho,(s-2)-}\|g\|_{\rho,(s-2)-}$$

特别地，对于 $g=\mu(H)$，其中 μ 是解析的，且 H 是二次的

$$\|[f,g]_\#-i\{f,g\}\|_{\rho,s-}\leq\left|\partial\overline{\partial}H\right|\rho^2\|\mu'\|_{\rho,(s-4)-}\|f\|_{\rho,(s-2)-}$$

证明。 这与引理 3.25 的证明类似，但求和所遍历的集合更加具体。令 ϵ 在第一个不等式中等于 0，在第二个不等式中等于 1，

$$\begin{aligned}&\|[f,g]_\#-\epsilon i\{f,g\}\|_{\rho,r}\\ \leq&\rho^r\sum_{S_i\cap\{j\geq 1+\epsilon\}}\frac{2(2d)^{-k}k!}{(k+|\alpha|)!(k+|\beta|)!}\binom{\alpha}{m}\binom{\beta}{n}\frac{1}{j!}\left|\partial^{j+m}\overline{\partial}^n f_l(0)\right|\left|\partial^{\alpha-m}\overline{\partial}^{j+\beta-n}g_{k-j-l}(0)\right|\\ &+\rho^r\sum_{S_i\cap\{j\geq 1+\epsilon\}}\frac{2(2d)^{-k}k!}{(k+|\alpha|)!(k+|\beta|)!}\binom{\alpha}{m}\binom{\beta}{n}\frac{1}{j!}\left|\partial^{j+m}\overline{\partial}^n g_l(0)\right|\left|\partial^{\alpha-m}\overline{\partial}^{j+\beta-n}f_{k-j-l}(0)\right|\\ \leq&2\sum_{t=1+\epsilon}^{r-1-\epsilon}\sum_{2k_1+\alpha_1+\beta_1=t}\rho^t\sum_{2k_2+\alpha_2+\beta_2=r-t}\rho^{r-t}\mu_{1,2}C_{\alpha_1,\beta_1,k_1}\left|\partial^{\alpha_1}\overline{\partial}^{\beta_1}f_{k_1}(0)\right|C_{\alpha_2,\beta_2,k_2}\left|\partial^{\alpha_2}\overline{\partial}^{\beta_2}g_{k_2}(0)\right|\\ \leq&2\sum_{t=1+\epsilon}^{r-1-\epsilon}\|f\|_{\rho,t}\|g\|_{\rho,r-t}.\end{aligned}$$

因为我们看到 $\mu_{1,\ 2}\leq 1$ 而单射现在由下式给出

$$
\begin{aligned}
S_i \cap \{j \geq 1+\epsilon\} \hookrightarrow & S_f \cap \{1+\epsilon \leq 2k_1+\alpha_1+\beta_1 \leq r-1-\epsilon\} \\
(k,\alpha,\beta,j,l,m,n) \mapsto & (k-j-l, \alpha-m, j+\beta-n, l, j+m, n, j) \\
= & (k_1,\alpha_1,\beta_1,k_2,\alpha_2,\beta_2,\gamma)
\end{aligned}
$$

其中我们仍有

$$
\begin{aligned}
S_i &= \left\{(k,\alpha,\beta,j,l,m,n) \in \mathbb{N}^7 / \ 2k+\alpha+\beta = r, j \leq k, l+j \leq k, m \leq \alpha, n \leq \beta\right\} \\
S_f &= \left\{(k_1,\alpha_1,\beta_1,k_2,\alpha_2,\beta_2,\gamma) \in \mathbb{N}^7 / \ 2k_1+2k_2+\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2 = r, \gamma \leq \beta_1, \alpha_2\right\}.
\end{aligned}
$$

然后对 $0 \leq r \leq s$ 求和可得

$$
\|[f,g]_\# - \epsilon i\{f,g\}\|_{\rho,s-} \leq 2 \sum_{1+\epsilon \leq t+r \leq s-1-\epsilon} \|f\|_{\rho,t} \|g\|_{\rho,r} \leq 2 \|f\|_{\rho,(s-1-\epsilon)-} \|g\|_{\rho,(s-1-\epsilon)-}.
$$

若 $g = \mu(H)$，则计算得

$$
\begin{aligned}
\|\mu(H)\|_{\rho,s} &= \rho^s \sum_{2k+\alpha+\beta=s} C_{\alpha,\beta,k} \left|\partial^\alpha \overline{\partial}^\beta \mu_k(H)(0)\right| \\
&= |\partial\overline{\partial} H| \rho^s \sum_{2k+\alpha+\beta=s} C_{\alpha,\beta,k} \left|\partial^{\alpha-1} \overline{\partial}^{\beta-1} \mu_k'(H)(0)\right| \\
&= |\partial\overline{\partial} H| \rho^2 \rho^{s-2} \sum_{2k+\alpha+\beta=s-2} C_{\alpha+1,\beta+1,k} \left|\partial^\alpha \overline{\partial}^\beta \mu_k'(H)(0)\right| \\
&\leq |\partial\overline{\partial} H| \rho^2 \|\mu'(H)\|_{\rho,s-2}
\end{aligned}
$$

因为

$$
\frac{C_{\alpha+1,\beta+1,k}}{C_{\alpha,\beta,k}} = \frac{1}{(k+\alpha+1)!(k+\beta+1)!} \leq 1.
$$

□

命题 3.32. 设 $a \in S(B_\rho)$ 是一个阶为 1 的符号，即 $a_0 = 0$，则存在一个符号 $(1+a)^{\#-1} = 1 + a^*$，使得 $(1+a)\#(1+a)^{\#-1} = 1$。此外，当 ρ 足够小时

$$
\begin{aligned}
\|a^*\|_{\rho,s-} &\leq 2\|a\|_{\rho,s-} \\
\left\|(1+a)^{\#-1}\right\|_\rho &\leq 2
\end{aligned}
$$

证明。通过迭代，a^* 定义为

$$
a_k^* = -a_k - (a\#a^*)_k = -a_k - \sum_{0 \leq l \leq k-2} \sum_{1 \leq j \leq k-l-1} \frac{\hbar^l}{l!} \partial^l a_j \overline{\partial}^l a_{k-l-j}^*
$$

因此 $\|a^*\|_{\rho,(s+1)-} \leq \|a\|_{\rho,(s+1)-} + \|a\|_{\rho,s-} \|a^*\|_{\rho,s-}$。由于 a 的阶为 1，$\|a\|_\rho \xrightarrow[\rho \to 0]{} 0$，所以我们可以取 ρ 使得 $\|a\|_\rho \leq \frac{1}{2}$，并通过迭代得到 $\|a^*\|_{\rho,s-} \leq 2\|a\|_{\rho,s-}$。这个不等式推出了第二个不等式。 □

1 引理 *3.33*。设 $\mu = \sum^{\frac{A}{\hbar}} \hbar^k \mu_k$ 是 $\mathbb{C}$ 中 *0* 的某个邻域上的解析符号。$k=0$那么，存在 $\mu_b \in S(B_\rho)$ 使得 $\mu(T_\hbar(|z|^2)) = T_\hbar(\mu_b(|z|^2)) + O(e^{-\frac{c}{\hbar}})$。反过来，若 $\mu_b \in S(B_\rho)$，则存在一个定义在 *0* 的某个邻域上的解析符号 μ，使得$\mu(T_\hbar(|z|^2)) = T_\hbar(\mu_b(|z|^2)) + O(e^{-\frac{c}{\hbar}})$。

证明。对于固定的 ρ，存在 $c > 0$，使得对所有 $k \in \mathbb{N}$，通过迭代 $T_\hbar(|z|^2)^k = T_\hbar\left((|z|^2)^{\#k}\right) + kO_{\mathcal{B}_\hbar(B_\rho)^\circlearrowleft}(e^{-\frac{c}{\hbar}})$。根据假设，存在 $\rho, C > 0$，使得每个 μ_k的收敛半径都大于 ρ，并且对所有 $|x| \le \rho$，$|\mu_k(x)| \le Ck!A^k$。于是，根据引理 3.3

$$\left|\mu_k(x) - \sum_{j=0}^{\frac{1}{\hbar}} \frac{\mu_k^{(j)}(0)}{j!} x^j\right| \le Ck!A^k \left(\frac{|x|}{\rho}\right)^{\frac{1}{\hbar}}$$

并且，由于 $\left\||z|^2\right\|_\rho = 2\rho^2$，取 $\rho < \frac{1}{2}$

$$\mu(T_\hbar(|z|^2)) = \sum_{k=0}^{\frac{1}{A\hbar}} \sum_{j=0}^{\frac{1}{\hbar}} \left(\hbar^k \frac{\mu_k^{(j)}(0)}{j!} T_\hbar\left((|z|^2)^{\#j}\right)\right) + O_{\mathcal{B}_\hbar(B_\rho)^\circlearrowleft}(e^{-\frac{c}{\hbar}}).$$

因此，$\mu(T_\hbar(|z|^2)) = T_\hbar(\mu_b(|z|^2))$，其中 μ_b 是由下式给出的解析函数

$$\mu_b(|z|^2) = \sum_{k=0}^{\frac{1}{A\hbar}} \sum_{j=0}^{\frac{1}{\hbar}} \hbar^k \frac{\mu_k^{(j)}(0)}{j!} (|z|^2)^{\#j}.$$

还需证明它是一个解析符号。部分形式范数有如下界

$$\begin{aligned}
\left\|\mu_b(|z|^2)\right\|_{\rho,s-} &\le \sum_{k=0}^{\frac{1}{A\hbar}} \sum_{j=0}^{\frac{1}{\hbar}} \hbar^k \frac{|\mu_k^{(j)}(0)|}{j!} \left\|(|z|^2)^{\#j}\right\|_{\rho,s-} \\
&\le \sum_{k=0}^{\frac{1}{A\hbar}} \sum_{j=0}^{\frac{1}{\hbar}} \hbar^k C A^k k! \rho^{-j} \left\|(|z|^2)\right\|_{\rho,s-}^j \\
&\le C \sum_{k=0}^{\frac{1}{A\hbar}} (\hbar A)^k k! \sum_{j=0}^{\frac{1}{\hbar}} \rho^{-j} (2\rho^2)^j
\end{aligned}$$

当 $\hbar$ 和 ρ 足够小时，该式有限。对于第二个推论，固定 μ_b，则 μ 由下式给出

$$\sum_{k=0}^{\frac{1}{A\hbar}} \sum_{j=0}^{\frac{1}{\hbar}} \hbar^k \frac{\mu_k^{(j)}(0)}{j!} (|z|^2)^{\#j} = \mu_b(|z|^2)$$

这意味着对于任意固定的 $l \le \frac{1}{A\hbar}$，

$$\mu_l(|z|^2) = \mu_{b,l}(|z|^2) - \sum_{k=0}^{l-1} \sum_{j=0}^{\frac{1}{\hbar}} \frac{\mu_k^{(j)}(0)}{j!} (|z|^2)_{l-k}^{\#j}.$$

该方程通过迭代定义 μ，且它在 0 附近是一个解析符号。 □

4 局部研究

本小节考虑以下框架:

假设 4.1。

- 或者， M 是一个实解析紧流形，并且:

  – (J, ω) 是 M的凯勒结构。– $L \to M$是一个预量子线丛，并且对于 $N \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{H}_N = H^0(M, L^{\otimes N})$ 是 M上的量子空间，意即$L^{\otimes N} \to M$的全纯截面空间。– f: $M \to \mathbb{C}$ 是一个实解析的复值函数，并且它渐近等价于 x_0的一个邻域上的解析符号。

- 或者， $M = \mathbb{C}$并且:

  – $\mathbb{C}$ 配备了例 3.6 中回顾的凯勒结构。– 存在一个阶函数 m，使得 $f \in S(\mathbb{C}, m)$。

- $\mathfrak{e} \in \mathbb{C}$ 和 $x_0 \in M$ 是满足条件 $f(x_0) = E$的唯一点。

- $df(x_0) = 0$。

此外，我们还将假设海森矩阵 $\mathrm{Hess}_{x_0}(f)$ 满足 (2)，并且在 $M = \mathbb{C}$ 时满足无穷远处的椭圆性条件，不过目前尚无此必要。

在这两种情形下， $M = \mathbb{C}$ 和 M 均为紧集，我们将 ∂ 和 $\overline{\partial}$ 分别记为外微分的全纯分量和反全纯分量，并将 $\Delta = \frac{1}{2}\Delta_g$ 记为全纯拉普拉斯算子；它与拉普拉斯-贝尔特拉米算子相差一个常数因子。

4.1 标准形

为了将符号化为标准形，我们需要莫尔斯引理来求出一个辛同胚 $\widetilde{\kappa}: \widetilde{M} \to \widetilde{\mathbb{C}}$ 和一个解析函数 μ，使得 $\widetilde{f} \circ \widetilde{\kappa}^{-1} = \mu\left(\widetilde{H}\right)$，其中 H 是 f 在 x_0处的海森矩阵，可视为 $\mathbb{C}$上的二次函数。这个结果有许多变体，例如参见 [39, 7], ; 这里我们考虑解析数据。我们提出一种证明方法，类似于莫泽技巧，有时也称为同伦方法。

引理 4.2 （莫尔斯）。 设 f 是定义在 x_0 的某个邻域上的实解析函数，且$H =$ 海森矩阵$_{x_0} f$ 非退化。则存在一个局部辛同胚 $\widetilde{\kappa}$，将$\widetilde{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$中$(x_0, \overline{x_0})$ 的某个邻域映到 $\mathbb{C}$中$(0,0)$ 的某个邻域；并且存在一个定义在0 的某个邻域上的解析函数 μ，使得

$$\widetilde{f} \circ \widetilde{\kappa}^{-1} = \mu\left(\widetilde{H}\right).$$

$\widetilde{\ }$证明。记 $f_t = (1-t)H + tf$，我们寻找一个哈密顿函数 $F_t\colon M \to \mathbb{C}$，它依赖于参数 t，以及一个函数 μ_t，使得将 $\widetilde{\kappa_t}$ 记作由 F_t生成的哈密顿流

$$\mu_t\left(\widetilde{H}\right) \circ \widetilde{\kappa_t}(x,y) = \widetilde{f}_t(x,y) \tag{12}$$

对于 (x,y)，在 $(x_0,\overline{x_0})$ 的某个邻域内。为简单起见，此处考虑 $x_0 = 0$。利用泰勒展开并比较一阶项，

- $\mu_0 = \mathrm{Id}$，$\widetilde{\kappa_0} = \mathrm{Id}$，

对于所有 $0 \le t \le 1$，• $\mu_t(E) = E + O(E^2)$，

对于所有 $0 \le t \le 1$，• $F_t(x,\overline{y}) = O(|(x,\overline{y})|^3)$。

我们考虑 0 的一个邻域，在该邻域上存在一个凯勒势 Φ_M。于是，函数 f 的哈密顿向量场为 $X_f = i\left(\partial\overline{\partial}\Phi_M\right)^{-1}\left(-\overline{\partial}f, \partial f\right)$。因此，对任意函数 g，哈密顿流满足

$$\partial_t\left(\widetilde{g}\circ\widetilde{\kappa_t}\right) = \omega\left(\widetilde{X_g}, \widetilde{X_{F_t}}\right) = \left(\partial_1\partial_2\widetilde{\Phi_M}\right)^{-1} i\left(\partial_1\widetilde{g}\partial_2 F_t - \partial_2\widetilde{g}\partial_1 F_t\right) = \left(\partial_1\partial_2\widetilde{\Phi_M}\right)^{-1}\{F_t, \widetilde{g}\}$$

其中泊松括号由 (11) 定义，记号为 $\left\{\widetilde{f}, \widetilde{g}\right\} = \widetilde{\{f,g\}}$。因此，对 (12) 关于 t 求导可得

$$\left(\left(\partial_1\partial_2\widetilde{\Phi_M}\right)^{-1}\left\{F_t, \mu_t\left(\widetilde{H}\right)\right\} + \dot{\mu}_t\left(\widetilde{H}\right)\right)\circ\widetilde{\kappa_t} = \dot{\widetilde{f}}_t = \widetilde{f} - \widetilde{H}.$$

因此，写作 $b_t = \left(\widetilde{f} - \widetilde{H}\right)\circ\widetilde{\kappa_t}^{-1}|_{\mathcal{D}}$，这些函数必须满足以下方程：

$$\left(\partial\overline{\partial}\Phi_M\right)^{-1}\{F_t|_{\mathcal{D}}, \mu_t(H)\} + \dot{\mu}_t(H) = b_t,$$
$$\partial_t b_t = -\left(\partial\overline{\partial}\Phi_M\right)^{-1}\{F_t|_{\mathcal{D}}, b_t\}.$$

固定 μ_t 和 b_t 后，命题 3.30 可求解关于 F_t 和 $\dot{\mu}_t$ 的第一个方程；固定 F_t 后，第二个方程是关于 b_t 的输运方程。因此，我们通过对 F_t、μ_t、b_t 的泰勒展开系数进行迭代，形式上求解这些方程。接着，为证明这些解定义良好且是解析符号，我们寻找一个 $\rho > 0$，使它们的形式范数 $\|\cdot\|_\rho$ 有界。这里，这些形式范数依赖于参数 t，因此必须将其加入形式范数的表达式中

$$\|a\|_{\rho,s} = \rho^s \sum_{2k+|\alpha+\beta|=s}\left(\frac{2(2n)^{-k}k!}{(k+|\alpha|)!(k+|\beta|)!}\right)\sup_{0\le t\le 1}\left|\partial^\alpha\overline{\partial}^\beta a_k(t)(0)\right|$$

但第 3.3 节的所有结果仍然成立。我们只需增加一个结果：若对所有 $0 \le t \le 1$，$f(t)$ 都是形式解析符号，则对所有 $\rho > 0$ 和 $s \in \mathbb{N}$

$$\left\|\int_0^t c(\tau)d\tau\right\|_{\rho,s} \le \|c\|_{\rho,s}.$$

若 $b_t \in S(B_\rho)$，根据命题 3.30，存在依赖于 Φ_M 的 $C > 0$，使得

$$\left\|\dot{\mu}_t(d|z|^2)\right\|_{\rho,s} \leq C \left\|\widetilde{b}_t \circ \widetilde{\kappa}_q|_{\mathcal{D}}\right\|_{\rho,s},$$

其中 $\widetilde{\kappa}_q$ 是局部辛同胚，使得 $H \circ \widetilde{\kappa}_q(z,\overline{v}) = dz\overline{v}$。若 $(\mu_t, b_t) \in S(B_\rho)^2$，根据命题 3.30，

$$\begin{aligned}
\left\|\widetilde{F}_t \circ \widetilde{\kappa}_q|_{\mathcal{D}}\right\|_{\rho,s-} \leq & \frac{C}{1 - \|(\mu_t - \mathrm{Id})(d|z|^2)\|_{\rho,s-}} \left\|\widetilde{b}_t \circ \widetilde{\kappa}_q|_{\mathcal{D}}\right\|_{\rho,s-} \\
\leq & \frac{C}{1 - \|\dot{\mu}_t(d|z|^2)\|_{\rho,s-}} \left\|\widetilde{b}_t \circ \widetilde{\kappa}|_{\mathcal{D}}\right\|_{\rho,s-} \\
\leq & \frac{C}{1 - C\left\|\widetilde{b}_t \circ \widetilde{\kappa}_q|_{\mathcal{D}}\right\|_{\rho,s-}} \left\|\widetilde{b}_t \circ \widetilde{\kappa}_q|_{\mathcal{D}}\right\|_{\rho,s-}
\end{aligned}$$

当 ρ 足够小时。现在，若 $F_t \in S(B_\rho)$，利用引理 3.31，

$$\left\|\widetilde{b}_t \circ \widetilde{\kappa}_q|_{\mathcal{D}}\right\|_{\rho,s-} \leq C \left\|\widetilde{b}_t \circ \widetilde{\kappa}_q|_{\mathcal{D}}\right\|_{\rho,(s-2)-} \left\|\widetilde{F}_t \circ \widetilde{\kappa}_q|_{\mathcal{D}}\right\|_{\rho,(s-2)-}.$$

当 $\|b_t\|_{\rho,\,s} = 0 = \|F_t\|_{\rho,\,s}$ 对 $s \leq 2$ 及所有 $t \in [0,1]$ 均成立时。令 ρ 足够小，我们可以假设

$$\left\|\widetilde{b}_t \circ \widetilde{\kappa}_q|_{\mathcal{D}}\right\|_{\rho,s-} \leq \frac{1}{C(C+1)}, \quad \left\|\widetilde{F}_t \circ \widetilde{\kappa}_{q\mathcal{D}}\right\|_{\rho,s-} \leq \frac{1}{C} \tag{13}$$

对 $s = 3$ 成立。于是，若 (13) 在给定的 $s \geq 3$ 处成立，则递归不等式表明 (13) 在 $s+1$ 处也成立。根据引理 3.28，$\|F_t\|_\tau$、$\|b_t\|_\tau$ 和 $\|\mu_t(H)\|_\tau$ 对某个 $\tau \in]0, \rho]$ 有界；特别地，对所有 $0 \leq t \leq 1$，F_t 都是解析符号。由于对所有 t，$F_t(0) = 0$，哈密顿流 $\widetilde{\kappa}_t$ 对足够小的 0 的邻域上的所有 $0 \leq t \leq 1$ 都有定义，而 $\widetilde{\kappa}_1$、μ_1 就是所需的解。 □

如果 $M = \mathbb{C}$，那么 $\widetilde{\kappa}$ 接近恒等映射；但如果 M 是一个紧流形，则有必要采用几何观点。对于这种情形，我们使用 [11], 中的结果，他们在文中从 Bohr-Sommerfeld 拉格朗日子流形 $\Gamma \subset M \times \overline{M}$ 构造了$\sim$傅里叶积分算子，该子流形在解析拓扑下接近一个$\sim\Gamma_0$，其中 Γ_0 是一个全实拉格朗日子流形。这里，拉格朗日子流形是 $\Gamma = \mathrm{Graph}(\widetilde{\kappa})$。辛同胚可写为 $\widetilde{\kappa} = \widetilde{\kappa}_1 \circ \widetilde{\eta}$，其中 η 是一个局部坐标图，将 x_0 的一个邻域映到 $\mathbb{C}$中的 0 的邻域，并且 $\widetilde{\kappa}_1 = id_{\widetilde{\mathbb{C}}} + O(|z,\overline{v}|^2)$，因此 Γ 在解析拓扑下接近 Γ_0，其中 $\Gamma_0 = \mathrm{Graph}(\eta)$ 是全实的。此外，拉格朗日子流形总是局部 Bohr-Sommerfeld 的，这已经足够，因为我们只需要局部算子。

请注意，我们本可以将莫尔斯引理与第2.1节的结果结合起来，直接得到 $f \circ \widetilde{\kappa}^{-1} = \mu(|z|^2)$，但这样会使量子化更加困难。这是因为第 2.1 节中的辛同胚并不接近任何 $\mathbb{C}$上的辛同胚的延拓。

命题 4.3。存在一个解析函数 μ和算子 I^Γ： $\mathcal{B}_\hbar(B_\rho) \to \mathcal{H}_N(U)$,$I^{\Gamma_i}$： $\mathcal{H}_N(U) \to \mathcal{B}_\hbar(B_\rho)$，使得在局部坐标中，对于 $\hbar = \frac{1}{N}$，

$$\begin{aligned}
T_N(f) I^\Gamma &= I^\Gamma T_\hbar \left(\mu_2(H) + O(\hbar)\right), \\
I^\Gamma I^{\Gamma_i} &= \mathrm{Id} + O(e^{-\frac{c}{\hbar}}).
\end{aligned} \tag{14}$$

此外，对于任意权重 W, W_i，若 $I_d - \partial\overline{\partial}W$ 为正定，则存在$\epsilon, \epsilon_i = O(|z|^3)$ 使得

$$I^\Gamma = O(1) : \mathcal{H}_\hbar^{W_i}(B_\rho) \to \mathcal{H}_\hbar^{W_i+\epsilon_i}(U), \quad I^{\Gamma_i} = O(1) : \mathcal{H}_\hbar^{W+\epsilon}(U) \to \mathcal{H}_\hbar^{W}(B_\rho).$$

证明。 我们取 $x_0 = 0$以简化记号。根据前面的结论，我们可以使用 [11]命题 4.3，因此存在有界算子 I^Γ: $\mathcal{B}_\hbar(B_\rho) \to \mathcal{H}_N(U)$ 和 I^{Γ_i}: $\mathcal{H}_N(U) \to \mathcal{B}_\hbar(B_\rho)$，使得

$$\begin{aligned} T_N(f)I^\Gamma =& I^\Gamma T_\hbar \left(f \circ \eta^{-1} + O(\hbar)\right), \\ I^\Gamma I^{\Gamma_i} =& \mathrm{Id} + O(e^{-\frac{c}{\hbar}}). \end{aligned} \tag{15}$$

由于这些算子是局部定义的，因此对于任意权函数 W，它们在 $\mathcal{H}_\hbar^W \to \mathcal{H}_\hbar^W$上也是有界的。于是， $\widetilde{\kappa_1}(x, \overline{y}) = (x, \overline{y}) + O(|x, y|^2)$，与 $\widetilde{\kappa_1}$ 相关联的相位的定义 (6) 可写为

$$(\partial_{\overline{y}}\phi(x, \overline{y}), \overline{y}) = (x, \partial_x\phi(x, \overline{y})) + O(|x, \partial_x\phi(x, \overline{y})|^2),$$

因此，在 (0, 0) 的一个足够小的邻域上，存在一个与 $\widetilde{\kappa_1}$ 相关联的函数 ϕ，且 $\phi(x, \overline{y}) = x\overline{y} + O(|x, \overline{y}|^3)$。特别地，对于任意符号 g

$$\begin{aligned} T_\hbar(g)I_\phi =& I_\phi T_\hbar \left(\widetilde{g} \circ {\widetilde{\kappa_1}}^{-1} + O(\hbar)\right), \\ I_\phi I_{\phi_i} =& \mathrm{Id} + O(e^{-\frac{c}{\hbar}}). \end{aligned} \tag{16}$$

对于任意权函数 W，经 ϕ 变换后的权函数具有形式 $W + O(|z|^3)$。最后， $I_\Gamma I_\phi$ 和 $I_{\phi_i} I_{\Gamma_i}$ 满足 (14)。一般而言，算子的范数呈指数级增长；但由于 $\widetilde{\kappa} = \widetilde{\kappa_1} \circ \widetilde{\eta}$，它们的大小为 $O(e^{\frac{c\rho^3}{\hbar}})$，因此可以由按 $|z|^3$增长的权函数加以补偿。

□

注 4.4。来自 [11] 的构造与我们在第3节中介绍的傅里叶积分算子类似，不同之处在于，它们在算子的定义域和值域中考虑了不同的流形。例如，如果 Γ 是 $M \times \overline{M}$ 的一个拉格朗日子流形，那么对于右侧的 ϕ 和 a，$I^\Gamma = I_{\Phi_M,\, \phi}(a)$。我们决定在这一步采用 [11] 的结果，并且为简化后续研究，在其余部分考虑不改变环境流形的傅里叶积分算子。

4.2 海森矩阵条件

现在，问题已归结为定义在 $B_\rho \subset \mathbb{C}$ 上、符号为 $f \in S(B_\rho)$ 的托普利兹算子，其形式为 $f = \mu(H) + \hbar g + O(\hbar^2)$。下一步是在 $\hbar$ 中再提高一阶，即将符号化简为 $\mu_2(H) + O(\hbar^2)$。然而， $T_\hbar(\mu(H))$ 的谱很难用 μ 和 H 表示；与此同时， $\mu(T_\hbar(H))$ 的谱则简单地是 $\mu(\sigma(H))$。因此，我们寻找一个 $a \in S(B_\rho)$ 阶为 0，使得

$$T_\hbar \left(\mu(H) + \hbar g + O(\hbar^2)\right) T_\hbar(a) = T_\hbar(a)(\mu + \hbar r)\left(T_\hbar(H)\right) + O_{\mathcal{B}_\hbar(B_\rho)^\circlearrowleft}(\hbar^2).$$

注意，对于所有解析符号 H 和解析函数 F，

$$F(T_\hbar(H)) = T_\hbar\left(F(H) - \frac{\hbar}{2}\partial H\overline{\partial}HF''(H)\right) + O_{\mathcal{B}_\hbar\circlearrowleft}(\hbar^2).$$

因此，符号 a 必须满足

$$\begin{aligned}&\left(\mu(H) + \hbar g + O(\hbar^2)\right)\#a\\ =&a\#\left(\mu(H) + \hbar\left(r(H) - \partial H\overline{\partial}H\mu''(H)\right) + O(\hbar^2)\right).\end{aligned}$$

这个等式在 0 阶时总是成立的，我们来看 1 阶项

$$\partial\left(\mu(H)\right)\overline{\partial}a + ag = \overline{\partial}\left(\mu(H)\right)\partial a + \left(r(H) - \partial H\overline{\partial}H\mu''(H)\right)a$$

它可以写成

$$\{\mu(H), a\} = i\left(g + \partial H\overline{\partial}H\mu''(H) - r(H)\right)a.$$

根据命题 3.30，存在 $\rho' \in]0、\ \rho[$, $r \in S(B_{\rho'})$ 和 $b \in S(B_{\rho'})$，使得

$$\{\mu(H), b\} = g + \partial H\overline{\partial}H\mu''(H) - r(H).$$

实际上，由于 g 不依赖于 $\hbar$，r 和 b 只是定义在 $B_{\rho'}$ 上的解析函数，而 $a = e^{ib}$ 是定义在 $B_{\rho'}$ 上的良定义解析函数，并满足该方程。注意，这一计算只用到了 H 是非退化的，尚未用到椭圆性。

因此，所研究的算子具有 $\mu(T_\hbar(H)) + \hbar^2 T_\hbar(g)$ 的形式，并且我们从现在起假设 H 满足 (2)。我们要寻找一个符号 a，使得

$$\left(\mu(T_\hbar(H)) + \hbar^2 T_\hbar(g)\right)T_\hbar(1+a) = T_\hbar(1+a)(\mu + \hbar^2 r)(T_\hbar(H)) + O_{\mathcal{B}_\hbar(B_\rho)\circlearrowleft}(e^{-\frac{c}{\hbar}}). \quad (17)$$

在计算中，我们使用定理 3.21 中的算子 $I_\phi = I_\phi(1) = O(1): \mathcal{B}_\hbar \to \mathcal{H}_\hbar^{W_l}$，它满足

$$I_\phi T_\hbar(H) = T_\hbar(|z|^2 + C\hbar)I_\phi + O_{\mathcal{B}_\hbar(B_\rho)\to\mathcal{H}_\hbar^{W_l}(B_\rho)}(e^{-\frac{c}{\hbar}})$$

对任意 $\rho > 0$ 均成立。因此，根据 $\mu(T_\hbar(H))$ 的定义，用 I_ϕ 共轭方程 (17) 可得

$$\begin{aligned}&\left(\mu(T_\hbar(|z|^2 + C\hbar)) + \hbar^2 T_\hbar(g_2)\right)T_\hbar(1+a_c)\\ &\qquad = T_\hbar(1+a_c)(\mu + \hbar^2 r)(T_\hbar(|z|^2 + C\hbar)) + O_{\mathcal{H}_\hbar^{W_l}(B_\rho)\circlearrowleft}(e^{-\frac{c}{\hbar}})\end{aligned}$$

其中 $\rho' \in]0、\ \rho[$, 和 $1 + a_c \in S(B_{\rho'})$ 由 $T_\hbar(1+a_c) = I_\phi T_\hbar(1+a)I_{\phi_i}$ 定义。然后，根据引理 3.33，该等式等价于

$$T_\hbar(\mu_b(|z|^2) + \hbar^2 g_2)T_\hbar(1+a_c) = T_\hbar(1+a_c)T_\hbar(\mu_b(|z|^2) + \hbar^2 r_b(|z|^2)) + O_{\mathcal{H}_\hbar^{W_l}(B_\sigma)\circlearrowleft}(e^{-\frac{c}{\hbar}}). \quad (18)$$

得益于这一简化，求出满足 (17) 的 a 和 r，等价于求出满足 (18) 的 a_c和 r_b。注意，对于满足 $a \sim b$ 的两个符号 a、b，根据定义，$T_\hbar(a) = T_\hbar(b) + O_{\mathcal{B}_\hbar(B_\rho)\circlearrowleft}(e^{-\frac{c}{\hbar}})$，但 $O_{\mathcal{B}_\hbar(B_\rho)\circlearrowleft}(e^{-\frac{c}{\hbar}})$ 可以替换为 $O_{\mathcal{H}_\hbar^{W_l}(B_\rho)\circlearrowleft}(e^{-\frac{c}{\hbar}})$，因为对于任意权函数 W_l 及其变换后的 W_l，$(x, \overline{y})$ 都是一个相位。因此，我们可以用符号演算求解 (18)。

4.3 莫泽技巧

为了求解 (18)，我们采用与第4.1节类似的莫泽技巧。对于定义在 0 的邻域上的解析符号 μ、 g，我们要寻找依赖于时间的符号 $a(t)$、 $r(t)$，使得

$$\left(\mu(|z|^2)+t\hbar^2 g\right)\#(1+a(t))=(1+a(t))\#\left(\mu(|z|^2)+\hbar^2 r(t)(|z|^2)\right). \tag{19}$$

注4.5。请注意，如果余项的阶为 $\hbar$，则无法应用此方法，因为符号演算会要求固定 r_0，使得 $r_0(|z|^2) = g_0$，这通常是不可能的。

通过按 $\hbar$ 的阶逐阶求解方程，我们注意到会得到关于 t 的更高阶项，因此必须用 $r(t)(|z|^2)$ 来平衡，而不能只用 t 中的线性项。为简洁起见，我们将写作 $r(t)$，而非 $r(t)(|z|^2)$。

我们寻找 $a(t)$ 作为下式的解析符号解

$$\begin{cases} \partial_t a(t)=\hbar i b(t)\#(1+a(t)), \\ a(0)=0 \end{cases} \tag{20}$$

并且 r 将由方程确定，且 $r(0) = 0$。若方程 (19) 成立，对其关于 t 求导可得

$$\begin{aligned} \hbar^2 g &= \left[\hbar i b,\mu(|z|^2)+t\hbar^2 g\right]_\# + \hbar^2(1+a(t))\#\dot r(t)\#(1+a(t))^{\#-1} \\ \Leftrightarrow \hbar^{-1}\left[\mu(|z|^2),ib\right]_\# &= -g+\hbar i t\,[b,g]_\# + R(t) \end{aligned}$$

with

$$R(t)=(1+a(t))\#\dot r(t)(|z|^2)\#(1+a(t))^{\#-1}=\dot r + a\#\dot r + \dot r\#a^* + a\#\dot r\#a^*.$$

我们注意到这些符号的 k 阶系数

$$\hbar^{-1}[\mu(|z|^2),ib]_\# - \left\{b,\mu(|z|^2)\right\}, \quad \hbar i t\,[g,b]_\#, \quad \dot r - R$$

只取决于 b_j 和 r_j，适用于 $j<k$。因此，方程可写成

$$\mu'(|z|^2)\partial_\theta b = g+\hbar i t\,[g,b]_\# + (\dot r - R) + \left(\hbar^{-1}[\mu(|z|^2),ib]_\# - \left\{b,\mu(|z|^2)\right\}\right) - \dot r \tag{21}$$

并可由命题 3.30 求解。然后，通过迭代方程对这些函数进行形式化定义

$$\begin{aligned} \dot r_k(|z|^2) &= \int_{|z|\mathbb{S}} g_k + it\,[g,b]_{\#,k-1} + (\dot r - R)_k + \left(\hbar^{-1}[\mu(|z|^2),ib]_\# - \left\{b,\mu(|z|^2)\right\}\right)_k \frac{d\theta}{2\pi}, \\ b_k &= \frac{1}{\mu'(|z|^2)}\int g_k + it\,[g,b]_{\#,k-1} + (\dot r - R)_k + \left(\hbar^{-1}[\mu(|z|^2),ib]_\# - \left\{b,\mu(|z|^2)\right\}\right)_k - \dot r_k\frac{d\theta}{2\pi}. \end{aligned}$$

并且对所有 s，形式范数均有界，其界为

$$\begin{aligned}\|\dot r\|_{\rho,s-} \le{}& \|g\|_{\rho,s-} + \rho^2\left(t\|g\|_{\rho,(s-1)-} + \left\|\mu'(|z|^2)\right\|_{\rho,(s-3)-}\right)\|b\|_{\rho,(s-1)-}\\ &+\left(\|a\|_{\rho,(s-1)-} + \|a^*\|_{\rho,(s-1)-} + \|a\|_{\rho,(s-1)-}\|a^*\|_{\rho,(s-1)-}\right)\|\dot r\|_{\rho,(s-1)-},\end{aligned}$$

and

$$\|b\|_{\rho,s-} \le \frac{\|g\|_{\rho,s-} + \|R\|_{\rho,s-} + \rho^2\left(t\|g\|_{\rho,(s-1)-} + \|\mu'(|z|^2)\|_{\rho,(s-3)-}\right)\|b\|_{\rho,(s-1)-}}{1-\|(\mu-\mathrm{Id})(|z|^2)\|_{\rho,(s+2)-}}.$$

总而言之，系数由以下方程给出

$$\begin{aligned}b_k &= \frac{1}{\mu'(|z|^2)}\int g_k + it\,[g,b]_{\#,k-1} - R_k + \left(\hbar^{-1}[\mu(|z|^2),ib]_\# - \left\{b,\mu(|z|^2)\right\}\right)_k\frac{d\theta}{2\pi},\\ R_k &= \dot r_k + \left(a\#\dot r + \dot r\#a^* + a\#\dot r\#a^*\right)_k,\\ \dot r_k &= \int_0^{2\pi} g_k + it\,[g,b]_{\#,k-1} + (\dot r - R)_k + \left(\hbar^{-1}[\mu(|z|^2),ib]_\# - \left\{b,\mu(|z|^2)\right\}\right)_k\frac{d\theta}{2\pi},\\ a_k(t) &= i\int_0^t \left(b\#(1+a(s))\right)_{k-1}ds,\end{aligned}\tag{22}$$

与小节开头一样，我们考虑依赖参数 t 的形式范数，并利用 3.3 节的结果对其进行估计。由于 a 是 1 阶的，若 ρ 足够小，则 $\|a\|_\rho \le 1$，并且

$$\begin{aligned}\|R\|_{\rho,s-} &\le \left(1+2\|a\|_{\rho,s-}+2\|a\|_{\rho,s-}^2\right)\|\dot r\|_{\rho,s-} \le \left(1+4\|a\|_{\rho,s-}\right)\|\dot r\|_{\rho,s-}\\ \|\dot r\|_{\rho,s-} &\le C\left(1+2\rho^2\|b\|_{\rho,(s-1)-}\right)+3\|a\|_{\rho,s-}\|\dot r\|_{\rho,(s-1)-}\\ \|a\|_{\rho,s-} &\le 2\rho^2\|b\|_{\rho,(s-1)-}\|1+a\|_{\rho,(s-1)-} \le 2\rho^2\|b\|_{\rho,(s-1)-}\left(1+\|a\|_{\rho,(s-1)-}\right)\\ \|b\|_{\rho,s-} &\le C\left(1+\|R\|_{\rho,s-}+2\rho^2\|b\|_{\rho,(s-1)-}\right)\end{aligned}$$

其中 $C = \max\left(1, \frac{1}{1-\|\mu-\text{单位算子}\|_\rho}\right)\max\left(\|g\|_\rho, \|\mu'(|z|^2)\|_\rho\right)$。下面证明，当 ρ 足够小时，这些形式范数有界。我们对 $s\in\mathbb{N}$ 作归纳法，证明

$$\|a\|_{\rho,s-} \le \frac{1}{8},\quad \|R\|_{\rho,s-} \le \frac{8}{3}C,\quad \|\dot r\|_{\rho,s-} \le \frac{16}{9}C,\quad \|b\|_{\rho,s-} \le 4C(1+C).$$

对于 $s=0$，我们有

$$\|a\|_{\rho,0} = 0,\quad \|R\|_{\rho,0} = \|\dot r\|_{\rho,0},\quad \|\dot r\|_{\rho,0} = \|g\|_{\rho,0},\quad \|b\|_{\rho,0} = 0$$

因此，根据关于 C 的假设，这些不等式成立。现在我们考虑 $s\ge 0$，并假设它们对所有 $s'<s$ 都成立。由此可得

$$\|a\|_{\rho,s-} \le 2\rho^2\|b\|_{\rho,(s-1)-}\left(1+\|a\|_{\rho,(s-1)-}\right) \le 8C(1+C)\rho^2\frac{9}{8}$$

因此，取 $\rho^2 \leq \frac{1}{9}\frac{1}{8C}\frac{1}{\cancel{(1+C)}}$，可得 $\|a\|_\rho \leq \frac{1}{8}$。接下来只需检查余项

$$\begin{aligned}\|b\|_{\rho,s-} &\leq C\left(1+\|R\|_{\rho,s-}+\rho^2\|b\|_{\rho,(s-2)-}\right)\\ &\leq C\left(1+\frac{8}{3}C+\rho^2 4C(1+C)\right)\\ &\leq C\left(1+\frac{8}{3}C+\frac{1}{18}\right)\\ &\leq 4C(1+C)\end{aligned}\qquad\begin{aligned}\|R\|_{\rho,s-} &\leq \left(1+4\|a\|_{\rho,s-}\right)\|\dot{r}\|_{\rho,s-}\\ &\leq \left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{16}{9}C\\ &\leq \frac{8}{3}C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\dot{r}\|_{\rho,s-} &\leq C\left(1+2\rho^2\|b\|_{\rho,(s-1)-}\right)+3\|a\|_{\rho,s-}\|\dot{r}\|_{\rho,(s-1)-}\\ &\leq C\left(1+\frac{1}{9}\right)+\frac{3}{8}\frac{16}{9}C\\ &\leq \frac{16}{9}C\end{aligned}$$

注意，通过取足够接近 0 的 ρ，$\|a\|_\rho$ 可以任意小。采用与第4.2节相同的记号，我们因而证明了存在满足 (19) 的 $\rho > 0$ 以及 $a_c, r_b(|z|^2) \in S(B(0,\rho))$，因此它们也满足 (18)。最后，这些符号满足

$$\left(\mu(T_\hbar(H))+\hbar^2 T_\hbar(g)\right)T_\hbar(1+a) = T_\hbar(1+a)(\mu+\hbar^2 r)(T_\hbar(H)) + O_{\mathcal{H}_\hbar^{W_l}(B_\sigma)^\circlearrowleft}(e^{-\frac{c}{\hbar}}).$$

4.4 作用积分

本小节致力于研究标准形 $\mu(T_\hbar(|z|^2))$ 的谱。其特征值为 $\mu(\hbar\mathbb{N})$；若其预解式在 $\lambda \in \mathbb{C}$ 处的范数大于 $e^{\frac{c}{\hbar}}$，则 λ 与某个特征值呈指数接近。此外，$T_N(f)$ 的特征值将由一个类似于 Bohr-Sommerfeld 的量子化条件给出，但该条件位于复化空间中。特别地，函数 μ_0 是所研究符号的主项 f_0 的作用积分的逆函数。回顾在自伴情形中，作用积分定义为 $A(E) = \int_{\gamma_E}\xi dx$ 其中 $\gamma_E = \{(x,\xi)/\ f_0(x,\xi) = E\}$。在非自伴情形中，由于这些函数定义在复化空间上，因此需要更多步骤。~~回顾~~，存在一个辛同胚 $\widetilde{\kappa}$，它将 M 中 $(x_0, \overline{x_0})$ 的一个邻域映到 $\widetilde{\mathbb{C}}$ 中 0 的一个邻域，使得 $\widetilde{f_0}\circ\widetilde{\kappa}^{-1} = \mu_0\left(\widetilde{H}\right)$，其中 H 是 f 在 x_0 处的海森矩阵，μ_0 是全纯的，且 $\mu_0(0) = f_0(x_0)$ $\mu_0'(0) = 1$。我们遵循 [21] 的策略。

引理 *4.6.* 设 μ 是 $\mathbb{C}$ 上的解析符号，则 $\mu(T_\hbar(|z|^2))$ 的谱为 $\mu(\hbar\mathbb{N}^*)$，且特征值均为单特征值，其特征函数为 $\left(e^{-\frac{|z|^2}{2\hbar}}z^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$。此外，对于 $c > 0$，存在 $c' > 0$，使得对所有 $\lambda \in \mathbb{C}$ 和 $u \in \mathcal{B}_\hbar$，若 $(\mu(T_\hbar(|z|^2)) - \lambda)\,u = O_{\mathcal{B}_\hbar}(e^{-\frac{c}{\hbar}})$ 且 $\|u\|_{\mathcal{B}_\hbar} \geq C > 0$，则存在 $j \in \mathbb{N}^*$，使得 $\lambda = \mu(j\hbar) + O(e^{-\frac{c'}{\hbar}})$。

证明。 根据定义，存在 C、$A > 0$ 和解析函数 μ_j，使得 $|\mu_j| \leq_{\overline{1A\hbar}} CA^j j!$ 在 0 的邻域内成立，且 $\mu = \sum \hbar^j \mu_j$。令 $u \in \mathcal{B}_\hbar$，它可写为 $u(z) =_{j=0} e^{-\frac{|z|^2}{2\hbar}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{u^{(k)}(0)}{k!}z^k$ 在 0 附近成立，且

$$\begin{aligned}\mu(T_\hbar(|z|^2))u &= \sum_{j=0}^{\frac{1}{A\hbar}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\hbar^j\frac{\mu_j^{(k)}(0)}{k!}\frac{u^{(l)}(0)}{l!}T_\hbar(|z|^2)^k\left(e^{-\frac{|z|^2}{2\hbar}}z^l\right)\\ &= \sum_{j=0}^{\frac{1}{A\hbar}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\hbar^j\frac{\mu_j^{(k)}(0)}{k!}\frac{u^{(l)}(0)}{l!}(\hbar(l+1))^k\left(e^{-\frac{|z|^2}{2\hbar}}z^l\right)\\ &= \sum_{j=0}^{\frac{1}{A\hbar}}\sum_{l=0}^{\infty}\hbar^j\mu_j(\hbar(l+1))\frac{u^{(l)}(0)}{l!}\left(e^{-\frac{|z|^2}{2\hbar}}z^l\right)\\ &= \sum_{l=0}^{\infty}\mu(\hbar(l+1))\frac{u^{(l)}(0)}{l!}\left(e^{-\frac{|z|^2}{2\hbar}}z^l\right).\end{aligned}$$

由于 $\left(e^{-\frac{|z|^2}{2\hbar}}z^l\right)$ 是 $\mathcal{B}_\hbar$ 的希尔伯特基，$\mu(T_\hbar(|z|^2))u=\lambda u$ 等价于 $\lambda=\mu((l+1)\hbar)$，其中 $l\in\mathbb{N}$ 且 $u=e^{-\frac{|z|^2}{2\hbar}}z^l$。现在，方程 $(\mu(T_\hbar(|z|^2))-\lambda)\ u=O_{\mathcal{B}_\hbar}(e^{-\frac{c}{\hbar}})$ 等价于

$$\begin{aligned}&\sum_{l=0}^{\infty}\left(\mu(\hbar(l+1))-\lambda\right)\frac{u^{(l)}(0)}{l!}\left(e^{-\frac{|z|^2}{2\hbar}}z^l\right)=O_{\mathcal{B}_\hbar}(e^{-\frac{c}{\hbar}})\\ \Leftrightarrow&\sum_{l=0}^{\infty}\left|\mu(\hbar(l+1))-\lambda\right|^2\frac{|u^{(l)}(0)|^2}{l!}=O(e^{-\frac{c}{\hbar}})\end{aligned}$$

并且由于 $\sum_{l=0}^{\infty}\frac{|u^{(l)}(0)|^2}{l!}=\|u\|_{\mathcal{B}_\hbar}^2\geq C^2>0$，存在 $l\in\mathbb{N}$，使得 $|\mu(\hbar(l+1))-\lambda|=O(e^{-\frac{c'}{\hbar}})$，其中 $c'<c$。

□

借助一个微分同胚来定义作用积分会更方便，该微分同胚将 f_0 化为 $H=$海森矩阵$_{x_0}f_0=$海森矩阵$_{x_0,\overline{x_0}}f_0$，并将辛形式乘以一个关于 H的函数。

引理 *4.7*。存在一个局部微分同胚 $\widetilde{\eta}$，将 M 中 $(x_0,\overline{x_0})$ 的某个邻域映到 $\mathbb{C}$ 中 $(0,0)$ 的某个邻域，使得 $f_0\circ\widetilde{\eta}^{-1}(z,\overline{v})=\widetilde{H}(z,\overline{v})$ 且 $(\widetilde{\eta}^{-1})^*\widetilde{\omega}=G\left(\widetilde{H}(z,\overline{v})\right)idz\wedge d\overline{v}$，其中 G 在 0 附近全纯。此外，在 0 附近，$\mu_0'(\xi)=\frac{1}{G\circ\mu_0(\xi)}$。

证明。我们要寻找一个局部微分同胚 δ，其定义在 $\mathbb{C}$ 中 0 的邻域上，使得$\widetilde{H}\circ\widetilde{\delta}=\mu_0\left(\widetilde{H}\right)$ 且 $\widetilde{\delta}^*\left(G\left(\widetilde{H}\right)idz\wedge d\overline{z}\right)=idz\wedge d\overline{v}$。令

$$\widetilde{\delta}(x,\overline{y})=\left(\sqrt{a\left(\widetilde{H}(x,\overline{y})\right)}x,\sqrt{a\left(\widetilde{H}(x,\overline{y})\right)}\overline{y}\right),$$

于是 $\widetilde{\delta}^*\widetilde{H}=a\left(\widetilde{H}\right)\widetilde{H}$ 且

$$\widetilde{\delta}^*\left(G\left(\widetilde{H}\right)idz\wedge d\overline{v}\right)=G\left(a\left(\widetilde{H}\right)\widetilde{H}\right)\left(a\left(\widetilde{H}\right)+\widetilde{H}a'\left(\widetilde{H}\right)\right)idz\wedge d\overline{v}.$$

由于 μ_0 是全纯的，且 $\mu_0(0)=0$ 和 $\mu_0'(0)=1$，我们可以取 $a(\xi)=\frac{\mu_0(\xi)}{\xi}$，并且存在全纯的 G，使得 $G(\mu_0(\xi))\mu_0'(\xi)=1$。因此，解为 $\widetilde{\eta}=\delta\circ\widetilde{\kappa}$。

□

根据第2.1节，存在 $\alpha \in \mathbb{C}$，使得 $\Re(\alpha H)$ 正定；并且存在一个局部辛同胚 $\widetilde{\kappa_q}$，使得 $H \circ \widetilde{\kappa_q}^{-1} = d_0 x\overline{y}$，其中 $d_0 = \frac{\sqrt{\det(\alpha H)}}{\alpha}$。于是，对于接近 $f(x_0)$ 的 $E \neq f(x_0)$，我们定义

$$\gamma_E = (\widetilde{\kappa_q} \circ \widetilde{\eta})^{-1} \left\{ x = \sqrt{\frac{E}{d_0}} e^{it},\ \overline{y} = \sqrt{\frac{E}{d_0}} e^{-it} \middle/ \ t \in [0, 2\pi] \right\} = (\widetilde{\kappa_q} \circ \widetilde{\eta})^{-1} \left(\sqrt{\frac{E}{d_0}} \mathbb{S} \right),$$

and

$$A(E) = \int_{\gamma_E} \alpha, \tag{23}$$

其中 α 是 M上的辛形式 $\widetilde{\omega}$ 的原函数。

命题 4.8。由(23) 定义的作用积分满足 $A \circ \mu_0(z) = \frac{2\pi}{d_0} z$，其中 z 位于 x_0的某个邻域内，且不同于 x_0。

证明。利用变量替换公式和斯托克斯定理，当 $t \neq 0$ 接近 0 时，我们得到

$$\begin{aligned} A(td_0) &= \int_{t\mathbb{S}} \left((\widetilde{\kappa_q} \circ \widetilde{\eta})^{-1} \right)^* (\alpha) \\ &= \int_{t\mathbb{B}} \left((\widetilde{\kappa_q} \circ \widetilde{\eta})^{-1} \right)^* (\widetilde{\omega}) \\ &= \int_{t\mathbb{B}} G(d_0 x\overline{y}) i dx \wedge d\overline{y} \\ &= 2\pi \int_0^t G(d_0 r) dr \end{aligned}$$

因此 $d_0 A'(td_0) = 2\pi G(td_0)$。根据引理 A.13，$A$ 在 0 附近全纯，且对所有接近 0 的 $z \in \mathbb{C}$，都有 $d_0 A'(z) = 2\pi G(z)$。因此，

$$d_0 (A \circ \mu_0)'(z) = d_0 \mu_0'(z) A' \circ \mu_0(z) = 2\pi \left(\mu_0' G \circ \mu_0 \right)(z) = 2\pi$$

因此 $A \circ \mu_0(\xi) = \frac{2\pi}{d_0} \xi$。 □

实际上，A的定义不依赖于 $\{f_0 = E\}$中围道的选择，因为根据第3节中的结果，该围道可以变形。例如，若 $f(x, \overline{y}) = dx\overline{y}$，则 $\mathbb{C}$ 中的任意闭合轮廓 $\gamma(t)$ 都可作为可能的围道 $(x, \overline{y}) = \left(\gamma(t) \ \frac{E}{d\gamma}(t) \right)$。在这种情况下

$$\begin{aligned} A(E) &= -i \int_0^{2\pi} \frac{E\gamma'(t)}{d\gamma(t)} dt \\ &= \frac{E}{di} \int_\gamma \frac{1}{z} dz \\ &= \frac{2\pi E}{d} \operatorname{Wind}(0, \gamma) \end{aligned}$$

利用留数定理。两个轮廓（$x_1(t)$ $\overline{y_1}(t)$）、（$x_2(t)$ $\overline{y_2}(t)$）给出相同的结- 果，当且仅当它们在 $\{(x, \overline{y}) \in \mathbb{C}^2 / \ dx\overline{y} = E\}$ 中属于同一同伦类。事- 实上，这两个环路同伦，当且仅当 x_1 和 x_2 在 $\mathbb{C}\backslash\{0\}$中同伦，这等价于 $\operatorname{Wind}(0, x_1) = \operatorname{Wind}(0, x_2)$。

~命题 4.9。 设 $E \neq f(x_0)$ 接近于 $f(x_0)$，且 $\gamma_{E,\,1}$ 是在 $f^{-1}(E)$ 中的一条闭合轮廓，与 γ_E 同伦，则

$$A(E) = -i \int_{\gamma_{E,1}} \alpha$$

证明。 设 $\rho_{E,0} = \widetilde{\kappa_q} \circ \widetilde{\eta}(\gamma_E)$，且 $\rho_{E,1} = \widetilde{\kappa_q} \circ \widetilde{\eta}(\gamma_{E,1})$，则 $\rho_{E,0}$,$\rho_{E,1}$ 在 $\{(x,\overline{y}) \in \mathbb{C}^2 / \; dx\overline{y} = E\}$ 中同伦。因此，我们可以选取一个同伦 $\gamma_{E,t}$，使得对所有 $t \in [0,1]$ 以及所有 $(x,\overline{y}) \in \rho_{E,t}$，都有 $dx\overline{y} = E$。现在，应用变量替换 $\widetilde{\kappa_q} \circ \widetilde{\eta}$ 并以两种方式应用斯托克斯定理

$$\begin{aligned}
\int_{\widetilde{\kappa_q} \circ \widetilde{\eta}(\rho_{E,1})} \alpha - \int_{\widetilde{\kappa_q} \circ \widetilde{\eta}(\rho_{E,0})} \alpha &= \int_{\rho_{E,1}} \left((\widetilde{\kappa_q} \circ \widetilde{\eta})^{-1} \right)^* (\alpha) - \int_{\rho_{E,0}} \left((\widetilde{\kappa_q} \circ \widetilde{\eta})^{-1} \right)^* (\alpha) \\
&= \int_{\bigcup_t \gamma_{E,t}} \left((\widetilde{\kappa_q} \circ \widetilde{\eta})^{-1} \right)^* (\omega) \\
&= \int_{\bigcup_t \gamma_{E,t}} G\left(dx\overline{y}\right) d\overline{y} \wedge dx \\
&= G(E) \int_{\bigcup_t \gamma_{E,t}} d\overline{y} \wedge dx \\
&= G(E) \left(\int_{\rho_{E,1}} \overline{y} dx - \int_{\rho_{E,0}} \overline{y} dx \right) = 0.
\end{aligned}$$

□

在下一小节中，我们将得到 $T_N(f)$ 的特征值的一个类似于 Bohr-Sommerfeld 量子化条件的渐近表达式，并将使用前面的结果。我们已经知道 μ 在 $\hbar$ 中的 0 阶结果，但将说明如何使用 WKB 方法计算其 1 阶结果。

4.5 谱描述与预解估计

我们来总结一下目前所做的工作。回顾一下，我们考虑定义在 M 上的符号 f，满足 $f'(x_0) = 0$，且 f 在 x_0 处的海森矩阵 H 满足 (2)。我们通过四个算子的共轭变换化简了该符号：

- I^Γ 来自命题 4.3，给出 $\mu_0(H) + O(\hbar)$,
- $T_\hbar(a_1)$ 给出 $\mu_2(H) + O(\hbar^2)$,
- $T_\hbar(1 + a_2)$ 给出 $\mu(H) + O\left(e^{-\frac{c}{\hbar}}\right)$,
- I_ϕ： 由定理 3.21， $\mathcal{H}^W_\hbar(B_\rho) \to \mathcal{B}_\hbar(B_\rho)$，其逆算子为 I_{ϕ_i}： $\mathcal{B}_\hbar(B_\rho) \to \mathcal{H}^{W_i}_\hbar(B_\rho)$，共轭变换为 H 和 $|z|^2$。

最后，根据命题 4.3，存在权重 w、$\mathrm{w}_i = O(|z|^3)$，使得 $\mathfrak{U} = I^\Gamma T_\hbar(a_1) T_\hbar(1 + a_2) I_{\phi_i}$ 可从 $\mathcal{B}_\hbar(B_\rho)$ 有界映射到 $\mathcal{H}^{W_i + \mathrm{w}_\hbar}{}_{i}(U)$，它具有一个局部逆算子 $\mathfrak{U}_i$，可从 $\mathcal{H}^{W + \mathrm{w}\hbar}(U)$ 有界映射到 $\mathcal{B}_\hbar(B_\sigma)$，并且它们满足

$$
\begin{aligned}
T_N(f)\mathfrak{U} =& \mathfrak{U}\mu\left(T_\hbar\left(\frac{\sqrt{\det(\alpha H)}}{\alpha}\left(|z|^2-\frac{\hbar}{2}\right)+\frac{\hbar\partial\overline{\partial}H}{2}\right)\right)+O_{\mathcal{B}_\hbar(B_\rho)\to\mathcal{H}_\hbar^{W_i+\epsilon_i}(U)}\left(e^{-\frac{c}{\hbar}}\right)\\
=& \mathfrak{U}\mu\left(T_\hbar(H_0)\right)+O_{\mathcal{B}_\hbar(B_\rho)\to\mathcal{H}_\hbar^{W_i+\epsilon_i}(U)}\left(e^{-\frac{c}{\hbar}}\right),\\
\mathfrak{UU}_i =& id+O_{\mathcal{H}_\hbar^{W+\epsilon}(U)\to\mathcal{H}_\hbar^{W_i+\epsilon_i}(U)}(e^{-\frac{c}{\hbar}}).
\end{aligned}
$$

我们已经看到，$\mu(T_\hbar(|z|^2))$ 的特征函数是 $\left(e^{-\frac{|z|^2}{2\hbar}}z^k\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$，它们在 $\mathcal{B}_\hbar$ 中局部集中于 $\left\{|z|=\sqrt{k\hbar}\right\}$。对于 $T_N(f)$，我们利用假设 4.1 应用以下结果。

命题 4.10 （[10] 定理 C）。设 f 是定义在 M 上的实解析函数，且 $E\in\mathbb{C}$。设 u_N 是关于 $T_N(f)$ 的一列特征函数，其特征值为 λ_N，满足 $\lambda_N\to E$。那么，对于所有与 $\{f=E\}$ 保持正距离的开集 V，

$$
\|u_N\|_{L^2(V)}=O\left(e^{-cN}\right).
$$

当 $M=\mathbb{C}$ 时，结果略有不同，因为它不是紧集。回顾一下，在这种情况下，我们假设 $f\in S(\mathbb{C},m)$，其中 m 为阶函数；现在我们要求 f 是椭圆的，即存在 ρ、C、$R>0$，使得对于所有 $(x,\overline{y})\in\mathcal{D}+B_\rho$ 且满足 $|x|\geq R$，都有 $|\widetilde{f}(x,\overline{y})|\geq\frac{1}{C}m(x)$。

命题 4.11。设 $f\in S(\mathbb{C},m)$，m' 为阶函数，且 W 为权函数，使得 $|z|^2+W$ 一致多重次调和，W，$\nabla^2W\in L^\infty$，并且 $\|\nabla W\|_{L^\infty}\leq\epsilon$，其中 $\epsilon>0$ 足够小，且其大小取决于 f。那么，存在 $p_\hbar\in S(\mathbb{C},m)$，使得

$$
T_\hbar(f)u(x)=Op^W(p_\hbar)u(x)=\int_\Gamma e^{\frac{-|x|^2+2(x-y)\overline{v}+|y|^2}{2\hbar}}\widetilde{p_\hbar}\left(\frac{x+y}{2},\overline{v}\right)u(y)\frac{dy\wedge d\overline{v}}{2\pi\hbar}
$$

对所有的 $u\in\mathcal{H}^{W,\hbar}$，其中 $\Gamma=\left\{\left(y,\frac{\overline{x}+\overline{y}}{2}-\delta\left(\frac{\overline{x}-\overline{y}}{2\langle x-y\rangle}\right)\right)\Big/\ y\in\mathbb{C}\right\}$ 是 $\mathbb{C}^2$ 中的一条围道，并且该算子在 $\mathcal{H}^{W,m'}\to\mathcal{H}^{W,\frac{m'}{m}}$ 上关于 $\hbar$ 一致有界。此外，$p_\hbar=e^{\frac{\hbar}{2}\partial\overline{\partial}}f_\hbar\sim\sum\frac{\hbar^k}{2^kk!}\left(\partial\overline{\partial}\right)^kf_\hbar$，其中 $e^{\frac{\hbar}{2}\partial\overline{\partial}}$ 是时刻 1 的热核，并且若 $f_\hbar$ 是椭圆的，则 $p_\hbar$ 也是椭圆的。

证明。$Op^W(p)$ 在 $p\in S(\mathbb{C},m)$ 上的有界性已在 [21] 命题 4.1 中证明。我们遵循 [32] 命题 1.3 的思路，证明这种量子化与托普利兹算子之间的关系。设 $u(y)=e^{-\frac{|y|^2}{2\hbar}}r(y)\in\mathcal{H}^{W,\hbar}$，其中 r 是全纯的，

$$
\begin{aligned}
Op_t^W(p_{\hbar,t})u(x)=&e^{-\frac{|x|^2}{2\hbar}}\int_{\Gamma_t}e^{\frac{(x-y)\overline{v}}{\hbar}}\widetilde{p_{\hbar,t}}\left(y+t\frac{x-y}{2},\overline{v}\right)r(y)\frac{dy\wedge d\overline{v}}{\pi\hbar}\\
=&e^{-\frac{|x|^2}{2\hbar}}\int_{\mathbb{C}}e^{\frac{(x-y)\overline{v_t}(y)}{\hbar}}\widetilde{p_{\hbar,t}}\left(y+t\frac{x-y}{2},\overline{v_t}(y)\right)r(y)\overline{\partial}\overline{v_t}(y)\frac{dy\wedge d\overline{y}}{\pi\hbar}
\end{aligned}
$$

其中 $\Gamma_t=\left\{\left(y,\overline{y}+t\frac{\overline{x}-\overline{y}}{2}-\delta\left(\frac{\overline{x}-\overline{y}}{2\langle x-y\rangle}\right)\right)\Big/\ y\in\mathbb{C}\right\}=\left\{(y,\overline{v_t(y)})\Big/\ y\in\mathbb{C}\right\}$ 和 $p_{\hbar,0}=f_\hbar$，特别是利用 Γ_0 和 $\mathcal{D}$ 之间的命题 A.10 可得 $Op_0^W(p_{\hbar,0})=T_\hbar(f_\hbar)$。因此，我们要寻找 $p_{\hbar,t}$，使得该算子与 t 无关，而解为 $p_\hbar=p_{\hbar,1}$。对 $e^{\frac{|x|^2}{2\hbar}}Op_t^W(p_{\hbar,t})u(x)$ 关于 t 求导，得到

$$\int_{\mathbb{C}} e^{\frac{(x-y)\overline{v_t}(y)}{\hbar}} \left[\overline{\partial v_t}\left(\frac{(\overline{x}-\overline{y})(x-y)}{2\hbar}\widetilde{p_{\hbar,t}} + \partial_t\widetilde{p_{\hbar,t}} \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{x-y}{2}\partial_1\widetilde{p_{\hbar,t}} + \frac{\overline{x}-\overline{y}}{2}\partial_2\widetilde{p_{\hbar,t}}\right) - \frac{1}{2}\widetilde{p_{\hbar,t}}\right]\frac{dy\wedge d\overline{y}}{\pi\hbar}.$$

现在，注意到

$$\partial_{\overline{y}}\left(e^{\frac{(x-y)\overline{v_t}}{\hbar}}\frac{\overline{x}-\overline{y}}{2}\widetilde{p_{\hbar,t}}\right) = e^{\frac{(x-y)\overline{v_t}}{\hbar}}\left((x-y)\overline{\partial v_t}(y)\frac{\overline{x}-\overline{y}}{2\hbar}\widetilde{p_{\hbar,t}} - \frac{1}{2}\widetilde{p_{\hbar,t}} + \overline{\partial v_t}\frac{\overline{x}-\overline{y}}{2}\partial_2\widetilde{p_{\hbar,t}}\right),$$
$$\partial_{\overline{y}}\left(\frac{\hbar}{2}e^{\frac{(x-y)\overline{v_t}}{\hbar}}\partial_1\widetilde{p_{\hbar,t}}\right) = e^{\frac{(x-y)\overline{v_t}}{\hbar}}\overline{\partial v_t}\left(\frac{x-y}{2}\partial_1\widetilde{p_{\hbar,t}} + \frac{\hbar}{2}\partial_1\partial_2\widetilde{p_{\hbar,t}}\right),$$

并且，由于对于任何积分收敛的解析函数 F，都有 $\int_{\mathbb{C}}\partial_{\overline{y}}F(x,y,\overline{y})dy\wedge d\overline{y}=0$，我们可以对 t 中导数公式进行分部积分，从而得到

$$\int_{\mathbb{C}} e^{\frac{(x-y)\overline{v_t}}{\hbar}}\left(\partial_t\widetilde{p_{\hbar,t}} - \frac{\hbar}{2}\partial_1\partial_2\widetilde{p_{\hbar,t}}\right)\overline{\partial v_t}\frac{dy\wedge d\overline{y}}{\pi\hbar}.$$

现在我们证明，对于所有 $t\in\left[0,\frac{\hbar}{2}\right]$，都有 $e^{t\partial\overline{\partial}}f_\hbar\in S(\mathbb{C},m)$，这意味着 $Op_t^W\left(e^{t\partial\overline{\partial}}f_\hbar\right)$是良定义的，而且我们所做的形式计算是合理的，因此结论成立。记 $\mathcal{K}_t(x,y) = \frac{e^{-\frac{x^2+y^2}{4t}}}{4\pi t}$ 为 $\mathbb{R}^2\simeq\mathbb{C}$ 上的热核，我们证明，对于所有 $(x,\overline{y})\in\mathcal{D}+B_\rho$，都有 $\left|\widetilde{\mathcal{K}_t\star f_\hbar}(x,\overline{y})\right| \leq \sim Cm(x)$。

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{m(x)}\widetilde{\mathcal{K}_t\star f_\hbar}(x,\overline{y})\right| \leq& \int_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{m(x)}\left|\mathcal{K}_t(p,q)\right|\left|\widetilde{f_\hbar}\left(x-(p+iq),\overline{y}-(p-iq)\right)\right|dpdq\\ \leq& C\int_{\mathbb{R}^2}(1+p^2+q^2)^{\frac{N}{2}}e^{-\frac{p^2+q^2}{4t}}\frac{dpdq}{4\pi t}\\ \leq& C\int_{\mathbb{R}^2}(1+2t(p^2+q^2))^{\frac{N}{2}}e^{-\frac{p^2+q^2}{2}}\frac{dpdq}{2\pi}\\ \leq& C\frac{N!}{1-4t}\end{aligned}$$

由 m 的定义可得 $N\in\mathbb{N}$，并且当 t 足够小时，$p_\hbar$ 的阶为 m。现在，令 $\sim$ $\rho>0$ 满足 $f_\hbar\leq Cm$ 于 $\mathcal{D}+B_\rho$ 上，且 $\sigma\in]0,\ \rho[$。令 $K\subset\mathcal{D}$ 为一个紧集，则 $\sim$

$$p_\hbar(x,\overline{y}) = \int_{B_\sigma}\mathcal{K}_t(p,q)\widetilde{f_\hbar}\left(x-(p+iq),\overline{y}-(p-iq)\right)dpdq + O(e^{-\frac{\sigma^2}{2\hbar}}),$$

$\sim$对 $(x,\overline{y})\in K+B_\rho$一致地成立。事实上，两个表达式之差为

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{B_\sigma^c} \mathcal{K}_{\frac{\hbar}{2}}(p,q)\widetilde{f_\hbar}\left(x-(p+iq),\overline{y}-(p-iq)\right)dpdq\right| \\
\leq &\int_{B_\sigma^c} e^{-\frac{p^2+q^2}{2\hbar}}\left|\widetilde{f_\hbar}\left(x-(p+iq),\overline{y}-(p-iq)\right)\right|dpdq \\
\leq &Cm(x)\int_{\mathbb{R}^2}(1+p^2+q^2)^{\frac{N}{2}}e^{-\frac{p^2+q^2}{2\hbar}}\frac{dpdq}{2\pi\hbar} \\
\leq &C_\sigma m(x)e^{-\frac{\sigma^2}{2\hbar}},
\end{aligned}
$$

并且由于 m 是 C^∞， $m(x)$ 在 x属于一个紧集时一致有界。于是，

$$
\begin{aligned}
p_\hbar(x,\overline{y}) &= \int_{B_\sigma} e^{-\frac{p^2+q^2}{2\hbar}}\widetilde{f_\hbar}\left(x-(p+iq),\overline{y}-(p-iq)\right)dpdq + O(e^{-\frac{\sigma^2}{2\hbar}}) \\
&= \sum_{0\leq k\leq\frac{\min(\rho-\sigma,\sigma)}{\hbar}} \frac{\hbar^k}{k!}(\partial\overline{\partial})^k\widetilde{f_\hbar}\left(x,\overline{y}\right) + O(e^{-\frac{c}{\hbar}}),
\end{aligned}
$$

根据引理 3.4，对所有 $(x,\overline{y}) \in K+B_\sigma$一致地成立。然后，采用与命题 3.22 的证明中类似的论证，可得 $p_\hbar \sim \sum \hbar^k p_k$在 $K+B_\sigma$上一致成立，其中 $\widetilde{p_k} \leq B^{k+1}k!$ 因此， $p_\hbar$ 是一个阶为 m的全局解析符号。

根据前面的计算 $p_\hbar(x,\overline{y})$ 在 $(x,\overline{y}) \neq B_\sigma$上一致地，且根据假设， $f_\hbar$ 是椭圆的，因此当 $\hbar$ 足够小时， $p_\hbar$ 也是椭圆的。 □

正如前面所见，我们构造的算子定义在带有类似于$W+\mathbf{w}$ 和 $W_i+\mathbf{w}_i$这类权函数的空间上。不过，这两个权函数都只在局部定义，而我们需要在无穷远处的特定界，因此有下面的结果。

引理 4.12。 存在 $\mathcal{W}, \mathcal{W}_i$ 在 M 上，使得

- $\mathcal{W}=W+\mathbf{w}$ 和 $\mathcal{W}_i=W_i+\mathbf{w}_i$ 在 $B_\rho(x_0)$ 上，当 ρ 足够小时成立，其中 W, W_i 由定理 *3.21* 给出，且$\mathbf{w}, \mathbf{w}_i = O(|x|^3)$。
- $|x|^2+\mathcal{W}(x)$ 和 $|x|^2+\mathcal{W}_i(x)$ 是一致多重次调和的。
- $\mathcal{W}$, $\nabla^2\mathcal{W}$, $\mathcal{W}_i$, $\nabla^2\mathcal{W}_i \in L^\infty(\mathbb{C})$
- $\|\nabla\mathcal{W}\|_{L^\infty}$, $\|\nabla\mathcal{W}_i\|_{L^\infty} \leq \epsilon$。其中 $\epsilon>0$ 足够小，且取决于假设 *4.1* 中的 δ 。

证明。 考虑一个函数 $\chi:\mathbb{C}\to[0,1]$，满足 $\chi=1$ 在 B_ρ上、在 $B_{\tau\epsilon}$之外满足 $\chi=0$，其中 $\tau>0$，则 $\mathcal{W}(x)=\chi(x)(W(x)+\epsilon(x))$ $\mathcal{W}(x)=\chi(x)(W_i(x)+\epsilon_i(x))$ 在 ρ 和 τ 足够小时满足该假设。 □

推论 4.12.1. 在命题 *4.11* 的假设和记号下，假设 $\widetilde{f_\hbar}$ 在 B_R 外满足椭圆性条件，且 $R>0$，则存在 $C>0$，使得对所有 $u\in\mathcal{H}_{\hbar,m}^{\mathcal{W}}$

$$
\|u\|_{\mathcal{H}_\hbar^{\mathcal{W},m}(B_{2R}^c)} \leq C\left\|T_\hbar(f_\hbar)u\right\|_{\mathcal{H}_\hbar^{\mathcal{W},m}(B_{2R}^c)} + \|u\|_{\mathcal{H}_\hbar^{\mathcal{W},m}(\mathbb{C})}O(e^{-\frac{c}{\hbar}}),
$$

当 $\hbar$ 足够小时。

证明。 根据命题 4.11，将 $f_\hbar$ 替换为 $p_\hbar = e^{\frac{\hbar}{2}\partial\overline{\partial}} f_\hbar$后，问题仍然相同且 $p_\hbar = e^{\frac{\hbar}{2}\partial\overline{\partial}} f_\hbar$仍是椭圆的，而 [21]中的命题 4.3给出了所需结果。 □

定理 *4.13*。假设假设 *4.1* 成立。若 $M = \mathbb{C}$，这意味着存在一个阶函数 m，使得 $f \in S(\mathbb{C}, m)$，并且我们还假设 f 是椭圆的，即存在 $\rho, C, R > 0$，使得对于所有满足 $|x| \geq R$ 的 $(x, \overline{y}) \in \mathcal{D} + \widetilde{B_\rho}$，都有 $\left|\widetilde{f}(x, \overline{y})\right| \geq Cm(x)$。此外，假设 f_0 在 x_0 处的海森矩阵（记为 H）作为二次型满足 *(2)*。因此，存在 $\alpha \in \mathbb{S}$，使得 αH 是正定的。于是，存在 $C, A, r > 0$ 和实解析函数 μ_k，使得对于所有 x，$|\mu_k(x)| \leq Ck!A^k$，并且 $T_N(f)$ 的谱满足

$$\sigma(T_N(f)) \cap B_r(f_0(x_0)) = (\lambda_l)_{l\in\mathbb{N}^*} \bigcap B_r(f_0(x_0))$$
$$\lambda_l = \sum_{k=0}^{\frac{1}{A\hbar}} \hbar^k \mu_k \left(\hbar \left(\frac{\sqrt{\det(\alpha H)}}{\alpha} \frac{2l+1}{2} + \frac{\partial\overline{\partial} H}{2} \right) \right) + O(e^{-\frac{c}{\hbar}}),$$

其中每个 λ_l 都是单特征值。此外，存在 $C > 0$，使得对于任意$\lambda \in B_r$（f_0（x_0）$\cap \sigma$（T_N（f）^{c}

$$\left\|(T_N(f) - \lambda)^{-1}\right\|_{\mathcal{H}_\hbar^{\mathcal{W}}(M) \to \mathcal{H}_\hbar^{\mathcal{W}_i}(M)} \leq \frac{C}{d(\lambda, \sigma(T_N(f)))}$$

其中权重 $\mathcal{W}$，$\mathcal{W}_i$ 在引理 *4.12* 中有描述，特别是在0的邻域内

$$\mathcal{W}(x) = \frac{r-1}{r}|x|^2 + \frac{2j}{r}\Re(x)\Im(x) + O(|x|^3),$$
$$\mathcal{W}_i(x) = \frac{1-r}{r}|x|^2 + \frac{2j}{r}\Re(x)\Im(x) + O(|x|^3),$$

其中 r，$j \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ 满足（$r + ij$）$^2 = \frac{\zeta}{|\zeta|}$，其中

$$\zeta = \det(\Re(\alpha H)) + \det(\Im(\alpha H)) - i\sqrt{|\Im(\det(\alpha H)^2 - 4\det(\Re(\alpha H))\det(\Im(\alpha H))|} \notin \mathbb{R}_-.$$

证明。 我们回顾一下，存在 $\rho > 0$、x_0 的一个邻域 U 以及有界算子 $\mathfrak{U}$、$\mathfrak{U}_i$，使得

$$T_N(f)\mathfrak{U} = \mathfrak{U}\mu\left(T_\hbar(H_0)\right) + O_{\mathcal{B}_\hbar(B_\rho) \to \mathcal{H}_\hbar^{\mathcal{W}_i}(U)}\left(e^{-\frac{c}{\hbar}}\right),$$
$$\mathfrak{U}\mathfrak{U}_i = id_{\mathcal{H}_\hbar^{\mathcal{W}}(U)} + O_{\mathcal{H}_\hbar^{\mathcal{W}}(U) \to \mathcal{H}_\hbar^{\mathcal{W}_i}(U)}(e^{-\frac{c}{\hbar}}).$$

因此，存在 $c' > 0$，使得 $T_N(f)$ 的解析 c'-伪谱具有如下形式：$\cup_{l\in\mathbb{N}} V_l$，其中 V_l 是一个邻域

$$\nu_l = \sum_{k=0}^{\frac{1}{A\hbar}} \hbar^k \mu_k \left(\hbar \left(\frac{\sqrt{\det(\alpha H)}}{\alpha} \left(j + \frac{1}{2} \right) + \frac{\partial\overline{\partial} H}{2} \right) \right)$$

其大小为 $O\left(e^{-\frac{c}{\hbar}}\right)$。这意味着 V_l 是不连通的，因为根据命题 4.8，两个相邻 ν_l 之间的距离为 $C\hbar + O(\hbar^2)$，其中 $C > 0$。根据引理 3.2，每个 V_l 中至少存在一个特征值 λ_l。我们先证明 λ_l 是 V_l 中唯一的特征值，且其几何重数为 1。设 u_l、$v_l \in \mathcal{B}_\hbar$ 是 $T_N(f)$ 对应于 λ_l、$\lambda'_l \in V_j$ 的特征函数。则 $\lambda'_l = \lambda_l + O(e^{-\frac{c}{\hbar}}) = \nu_l + O(e^{-\frac{c}{\hbar}})$，且 u_l、v_l 都是 ν_l 的解析准模态。我们采用反证法，假设 $u_l \neq v_l$。根据命题 4.10 和推论 4.12.1，由于 u_l、v_l 在 x_0 的某个邻域之外都很小，我们可以将它们视为 $\mathcal{H}_\hbar^{\mathcal{W}}(U)$ 中的函数，并在该空间中对它们进行正交归一化，同时保持准模态性质。然后，记 $u'_l = \mathfrak{U}_i u_l$ 和 $v'_l = \mathfrak{U}_i v_l$,

$$\mu(T_\hbar(H_0))u'_l = \nu_l u'_l + O_{\mathcal{B}_\hbar(B_\rho)}(e^{-\frac{c}{\hbar}}), \quad \mu(T_\hbar(H_0))v'_l = \nu_l v'_l + O_{\mathcal{B}_\hbar(B_\rho)}(e^{-\frac{c}{\hbar}}). \tag{24}$$

根据 $\mathcal{B}_\hbar$ 的定义，存在 $(\alpha_j, \beta_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 使得 $u'_l = e^{-\frac{|z|^2}{2\hbar}} \sum \alpha_j z^j + O(e^{-\frac{c}{\hbar}})$，$v'_l =_{j\in\mathbb{N}}$

$e^{-\frac{|z|^2}{2\hbar}} \sum \beta_j z^j + O(e^{-\frac{c}{\hbar}})$，并且根据引理 4.6，(24) 变为$_{j\in\mathbb{N}}$

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} |\nu_j - \nu_l|^2 |\alpha_j|^2 = O(e^{-\frac{c}{\hbar}}), \quad \sum_{j\in\mathbb{N}} |\nu_j - \nu_l|^2 |\beta_j|^2 = O(e^{-\frac{c}{\hbar}}).$$

由于两个不同的 ν_j 之间的距离至少为 $\hbar$，我们计算

$$\left\| u'_l - \alpha_l e^{-\frac{|z|^2}{2\hbar}} z^l \right\|_{\mathcal{B}_\hbar} = \sum_{j\neq l} |\alpha_j|^2 = O(\hbar^{-1}) \sum_{j\in\mathbb{N}} |\nu_j - \nu_l|^2 |\alpha_j|^2 = O(e^{-\frac{c'}{\hbar}}),$$

其中 $c' \in]0$、$c[$，对 v'_l 也同样成立，因此 $u'_l = v'_l + O_{\mathcal{B}_\hbar}(e^{-\frac{c'}{\hbar}})$。接着，利用 $\mathfrak{U}$,

$$u_l = v_l + O_{\mathcal{H}_\hbar^{\mathcal{W}_i}(U)}(e^{-\frac{c'}{\hbar}}).$$

尽管 $\mathcal{W} \leq \mathcal{W}_i$，但对于 $c > 0$，存在 x_0 的一个邻域，在该邻域上 $\mathcal{W}_i - c' \leq \mathcal{W}$。因此，如果我们取足够小的 U，

$$u_l = v_l + O_{\mathcal{H}_\hbar^{\mathcal{W}}(U)}(e^{-\frac{c'}{\hbar}}),$$

因此，命题 4.10 和推论 4.12.1 给出 $u_l = v_l + O_{\mathcal{H}_\hbar^{\mathcal{W}}}(e^{-\frac{c'}{\hbar}})$，这显然矛盾，因为 u_l、v_l 是正交归一的。接着，$u_l = v_l$ 且 $\lambda_l = \lambda'_l$，所以 λ_l 是 V_l 中唯一的特征值，且其几何重数为 1。现在，我们证明其代数重数也等于 1。我们同样用反证法证明：对于 $l \in \mathbb{N}^*$，令 $a \in \mathbb{N}^*$ 和 $v_l \in \mathcal{H}_\hbar^{\mathcal{W}}$ 满足 $(T_N(f) - \lambda_l)^a v_l = 0$。假设 v_l 与特征值为 λ_l 的特征函数 u_l 不同，因此我们可以构造正交归一族 v_l、w_l，使得 $(T_N(f) - \lambda_k)^a w_l = 0$。于是，函数 $v'_l = I_i v_l$、$w'_l = I_i w_l$ 满足

$$(\mu(T_\hbar(H_0)) - \lambda_l)^a u'_l = O_{\mathcal{B}_\hbar}(e^{-\frac{c}{\hbar}}), \quad (\mu(T_\hbar(H_0)) - \lambda_l)^a w'_l = O_{\mathcal{B}_\hbar}(e^{-\frac{c}{\hbar}}).$$

由与前面相同的论证可知，$v'_l = w'_l + O_{\mathcal{B}_\hbar}(e^{-\frac{c}{\hbar}})$，进而得到 $v_l =_{} w_l + O_{\mathcal{H}_\hbar^{\mathcal{W}_i}}(e^{-\frac{c}{\hbar}})$，这显然矛盾。因此，$v_l = u_l$，且特征值 λ_l 是简单的。这证明离散谱具有预期的形式。如果 M 是紧流形，那么量子空间的维数有限，因此无论如何谱都是纯点谱。

现在，如果 $M = \mathbb{C}$ 我们证明谱中只包含特征值。为简化记号，这里取$x_0 = 0 = f_0(x_0)$。根据假设，H 是椭圆的，因此它的增长至少与某个常数乘以 $M = \mathbb{C}$ 一样快

。此外， $H(\mathbb{R}^2) \neq \mathbb{C}$ 因此存在 θ 和 $\delta, \epsilon > 0$，使得对所有 $|z| \leq \delta$，都有 $|H(z) + \frac{\epsilon}{2} e^{i\theta}| > \epsilon m(z)$。因此，对于可能更小的 δ，将 H 替换为 f 后，同一不等式仍成立。接着利用 f 的椭圆性，并在必要时进一步缩小 C_c^∞ $\mathbb{C}$ $\chi\ z\ = \frac{\epsilon}{2} e^{i\theta}$ $z \in B_\delta$ $|\chi| \leq \frac{\epsilon}{2}$ $|f_0\ z\ + \chi\ z\ | > \epsilon m\ z\ $，对所有 $z \in \mathbb{C}$ 都有 $|f_0(\ ) + \frac{\epsilon}{2} e^{i\theta}| > \epsilon m(\ )$。同理，若 $(\ )$ 满足对所有 , 和 , 都有 $(\ )$，则对所有 $z \in \mathbb{C}$ 都有 $(\ )(\ )(\ )$。根据第 5 小节，若算子 $Op^W(p)$ 中的 $p \in S(\mathbb{C}, m)$ 是椭圆的，则该算子可逆；根据命题 4.11，托普利兹算子也同样如此。因此，$(T_\hbar(f) + T_\hbar(\chi) - z)^{-1}$ 在 0 的某个邻域内是全纯的。这意味着，对于 0 的某个邻域内且属于 $T_\hbar(f)$ 的预解集的 z，

$$(T_\hbar(f) - z)^{-1} = (T_\hbar(f) + T_\hbar(\chi) - z)^{-1} \left(\mathrm{Id} - T_\hbar(\chi)(T_\hbar(f) + T_\hbar(\chi) - z)^{-1}\right)^{-1}.$$

此外， $F_\hbar(z) = \mathrm{Id} - T_\hbar(\chi)(T_\hbar(f) + T_\hbar(\chi) - z)^{-1}$ 是 Fredholm 的，因为 $T_\hbar(\chi)$ 是紧集。由于 $T_\hbar(f) + \frac{\epsilon}{2} e^{i\theta}$ 可逆，因此 $F_\hbar\left(\frac{\epsilon}{2} e^{i\theta}\right)$ 也可逆。因此，利用 Fredholm理论 的结果（例如参见 [43] 定理D.4），这意味着 $F_\hbar(z)^{-1}$ 在 0 的某个邻域内是亚纯的，$(T_\hbar(f) - z)^{-1}$ 也如此。因此， $T_\hbar(f)$ 的谱仅由有限重数的特征值构成。

至于预解估计，根据引理 4.6， $\mu(T_\hbar(H_0))$ 可对角化，因此满足关于 L^2 的通常估计。对于所有 $u \in \mathcal{H}_\hbar^{\mathcal{W}_i}$，利用关于 $\mathfrak{U}$、$\mathfrak{U}_i$ 的信息，

$$\begin{aligned}
\frac{\|(T_N(f) - \lambda)u\|_{\mathcal{H}_\hbar^{\mathcal{W}}(U)}}{\|u\|_{\mathcal{H}_\hbar^{\mathcal{W}_i}(U)}} &= \frac{\|\mathfrak{U}(\mu(T_\hbar(H_0)) - \lambda)\mathfrak{U}_i u\|_{\mathcal{H}_\hbar^{\mathcal{W}}(U)}}{\|u\|_{\mathcal{H}_\hbar^{\mathcal{W}_i}(U)}} + O(e^{-\frac{c}{\hbar}}) \\
&\geq \frac{\|\mathfrak{U}_i\mathfrak{U}(\mu(T_\hbar(H_0)) - \lambda)\mathfrak{U}_i u\|_{\mathcal{B}_\hbar(B_\rho)}}{\|\mathfrak{U}_i u\|_{\mathcal{B}_\hbar(B_\rho)}} + O(e^{-\frac{c}{\hbar}}) \\
&\geq \frac{\|(\mu(T_\hbar(H_0)) - \lambda)\mathfrak{U}_i u\|_{\mathcal{B}_\hbar(B_\rho)}}{\|\mathfrak{U}_i u\|_{\mathcal{B}_\hbar(B_\rho)}} + O(e^{-\frac{c'}{\hbar}})
\end{aligned}$$

当 $c' > 0$ 且 ρ 足够小时，如前所述。于是，

$$\begin{aligned}
\frac{\|(T_N(f) - \lambda)u\|_{\mathcal{H}_\hbar^{\mathcal{W}}(U)}}{\|u\|_{\mathcal{H}_\hbar^{\mathcal{W}_i}(U)}} &\geq \frac{1}{\|(\mu(T_\hbar(H_0)) - \lambda)^{-1}\|} + O(e^{-\frac{c'}{\hbar}}) \\
&\geq d(\lambda, \sigma(\mu(T_\hbar(H_0)))) + O(e^{-\frac{c'}{\hbar}}) \\
&= d(\lambda, \sigma(T_N(f))) + O(e^{-\frac{c'}{\hbar}})
\end{aligned}$$

这证明了 x_0附近的估计。在 U之外， f 与 λ始终保持正距离。对于M 紧集上的情形，这是由 f的连续性得出的；对于 $M = \mathbb{C}$，则是由无穷远处的增长假设得出的。在这两种情况下， U 之外的估计均由通常的符号演算给出。 □

对于 $M = \mathbb{C}$，我们改编了证明 [21] 命题4.5中的论证。 .

实际上，定理 4.13 的方程可以写成类似 Bohr-Sommerfeld 的量子化条件。与自伴算子不同，符号 $\left\{\widetilde{f}_0 = E\right\}$ 的等值集是 $\widetilde{M}$ 的子集，而作用积分由命题 4.8 定义。对于与 $f_0(x_0)$ 接近但不相等的 $E \in \mathbb{C}$，我们可以通过 WKB

方法像通常情形那样构造一个准模 S，但这次是在复化空间 $\gamma_E:[0,1]\to\left\{\widetilde{f}_0=E\right\}$ 中沿一条闭曲线进行。于是，S 是沿着 γ_E 的 $L\boxtimes\overline{L}\to\widetilde{M}$ 的一个截面，并且 $S(\gamma_E(1))$ $S(\gamma_E(0))$ 相等，当且仅当 E 是一个特征值。一般而言，两者的商具有 $e^{2i\pi I(E)}$ 的形式，而条件 $I(E)\in\mathbb{Z}$ 给出了 E 成为特征值的一个必要条件。这个方程涉及某些曲线的 玻尔-索末菲类，下面我们将回顾其定义。

关于分别应用于自伴算子和非自伴算子、且都位于非临界值附近的 WKB 方法，请参见 [25] 和 [11]。

$\widetilde{\ }$定义4.14。设 $L\to M$ 是一个线丛，Γ 是 M中的一个拉格朗日子流形，$\widetilde{\ }$则对于任意闭曲线 γ：$[0,1]\to\Gamma$，以及沿着 γ 的 $L\boxtimes\overline{L}\to M$ 的截面 S，使得$\widetilde{\nabla}_{\gamma'}S=0$，商 $S_{(1)}\ S(0)$ 是相对于 L的$\overline{\ }\gamma$ 的 Bohr-Sommerfeld 类。此外，使该类可写为 $e^{2i\pi I(\gamma)}$ 的数 $I(\gamma)$是 Bohr-Sommerfeld 类的生成元。

请注意，命题 4.8 中的作用积分泛函对应于相对于 M的预量子线丛的 $\left\{\widetilde{f}_0=E\right\}$ 中闭曲线的 Bohr-Sommerfeld 指标。

为使用 WKB 方法，我们现在计算托普利兹算子在局部坐标中作用于一般截面的像的形状。

命题 *4.15.* 设 $x_0\in M$, $\rho>0$, $f\in S(B_\rho(x_0))$, ψ 是 $B_\rho(x_0)$ 上与 $\hbar$ 无关的全纯函数，并且 a 满足 $e^{-\frac{\Phi_M}{2\hbar}}e^{\frac{\psi}{\hbar}}a\in\mathcal{H}_\hbar^{\Phi_M}$。记 $\overline{v_c}(x)$ 为满足如下条件的函数：局部有 $\widetilde{\ }\ \partial\psi(x)$ $=\partial_1\Phi_M(x,\overline{v_c}(x))$。那么存在 $\eta>0$ 和 $b\in S(B_\eta(x_0))$，使得对所有 $x\in B_\eta(x_0)$，都有 $T_N(f)\left(e^{-\frac{\Phi_M}{2\hbar}}e^{\frac{\psi}{\hbar}}a\right)(x)=e^{-\Phi_M}\overline{\left(\frac{x}{2\hbar}e^{\frac{\psi(x)}{\hbar}}b\right)}(x)$。此外，

$$
\begin{aligned}
b_0(x)=&\widetilde{f}_0(x,\overline{v_c}(x))a_0(x),\\
b_1(x)=&\left(f_1+Q\left(\overline{\partial}\widetilde{f}_0\right)\right)(x,\overline{v_c}(x))a_0(x)+i\widetilde{X_{f_0}}(x,\overline{v_c}(x))\cdot a_0(x)+\widetilde{f}_0(x,\overline{v_c}(x))a_1(x),
\end{aligned}
$$

其中 Q 是一阶线性微分算子，而 X_{f_0} 是 f_0 的哈密顿向量场，$\widetilde{\ }$ 由 $df_0(\cdot)=\omega(X_{f_0},\cdot)$ 定义。若 X_{f_0} 与拉格朗日子流形 $\mathcal{L}_\psi=\{(x,\overline{v_c}(x))\}$ 相切，则

$$
\begin{aligned}
b_1(x)=&\left(\left(\widetilde{f}a\right)_1+i\widetilde{X_{f_0}}a_0\right)(x,\overline{v_c}(x))\\
&+a_0(x)\left[\left(\partial_1\partial_2\widetilde{\Phi_M}\right)^{-1}\left(\frac{1}{2}\partial_2\log\widetilde{B_0}\partial_1\widetilde{f}_0-\partial_1\log\widetilde{B_0}\partial_2\widetilde{f}_0\right)\right.\\
&\left.+\frac{1}{2}\widetilde{\Delta f_0}+\frac{i}{2}\operatorname{div}_{\mathcal{L}_\psi}\left(\widetilde{X_{f_0}}\right)\right](x,\overline{v_c}(x)).
\end{aligned}
$$

其中 B_0 是 M 上伯格曼核 B 的主项。

证明。为简化记号，我们取 $x_0=0$。根据命题 3.18，存在 ρ、$\eta>0$ 和 $B\in S\left(\widetilde{B_\rho}\right)$，使得

$$
T_N(f)u(x)=\int_{B_\rho}e^{\frac{F(x,z,\overline{z})}{\hbar}}\mathcal{P}(x,\overline{z})f(z)a(z)\frac{dz}{\pi\hbar}+O_{\mathcal{H}_\hbar^{\Phi_M}(B_\rho)}(e^{-cN})
$$

对所有 $u \in \mathcal{H}_\hbar^{\Phi_M}(B_\rho)$ 和 $x \in B_\eta$，均有

$$F(x,z,\overline{v}) = \widetilde{\Phi_M}(x,\overline{v}) - \widetilde{\Phi_M}(z,\overline{v}) + \psi(z) - \frac{1}{2}\Phi_M(x).$$

那么，对于所有 x，$(z,\overline{v}) \mapsto F(x,z,\overline{v})$ 的唯一临界点为 $(x,\overline{v_c}(x))$。我们将采用不同于引理 3.17 的方法计算此积分：对于 $x \in B_\eta$，我们不对角化F，而是考虑满足下式的微分同胚 K_x

$$\mathrm{Hess}_{z\overline{v}}\, F\left(x,x,\overline{v_c}(x)\right)\Big(K_x(z,\overline{v}) - \left(x,\overline{v_c}(x)\right)\Big) = -z\overline{v}.$$

因此 K_x 是仿射的，且 ∇K_x 是满足 $K_x(z,\overline{v}) = (x,\overline{v_c}(x)) + \nabla K_x \times (z,\overline{v})$ 的常矩阵。记

$$\begin{aligned} G(x,z,\overline{v}) =& F(x,z,\overline{v}) - F(x,x,\overline{v_c}(x)) \\ & - \mathrm{Hess}_{z\overline{v}}\, F(x,x,\overline{v_c}(x))\left(z-x,\overline{v}-\overline{v_c}(x)\right), \end{aligned}$$

那么 $G(x,\cdot)$ 在 0 处三阶消失。对于 $x \in B_\eta$，利用引理 A.13 和变量替换 K_x

$$\begin{aligned} &\int_{B_\rho} e^{\frac{\phi_1(x,z)+\phi_2(x,z)}{\hbar}} \mathcal{P}(x,\overline{z}) f(z) a(z) dz \\ =& e^{\frac{F(x,z_c(x),\overline{v_c}(x))}{\hbar}} s(x) \int_\Gamma e^{-\frac{y\overline{v}}{\hbar}} e^{\frac{G(x,K_x(y,\overline{v}))}{\hbar}} \mathcal{P}\left(x,K_x(y,\overline{v})\right) \widetilde{f}\left(K_x(y,\overline{v})\right) a\left(K_x(y,\overline{v})\right) dy \wedge d\overline{v}, \end{aligned}$$

其中 $\Gamma = K_x^{-1}(\mathcal{D}_\rho - (x,\overline{v_c}(x)))$，且 $s(x) =$ 行列式 ∇K_x。不过，对于足够小的 η, ρ，存在 τ，使得对所有 $x \in B_\eta$,

$$\Gamma \supset K_x^{-1}\left(\mathcal{D} - (x,\overline{v_c}(x))\right) \cap \widetilde{B_\tau},$$

并且由于 G 在 0 处以 3 阶消失，因此与 0 附近的 $z\overline{v}$ 相比，它可以任意小；所以，只要$\sim \tau$ 足够小，积分在 B_τ之外便可忽略。由于 $\mathcal{D}$ 是$-z\overline{v}$的良好轮廓，我们可以应用命题 A.7

$$\begin{aligned} &\int_\Gamma e^{-\frac{y\overline{v}}{\hbar}} e^{\frac{G(x,K_x(y,\overline{v}))}{\hbar}} B\left(x,K_x(y,\overline{v})\right) \widetilde{f}\left(K_x(y,\overline{v})\right) a\left(K_x(y,\overline{v})\right) dy \wedge d\overline{v} \\ =& \int_{B_\tau} e^{-\frac{|y|^2}{\hbar}} e^{\frac{G(x,K_x(y,\overline{y}))}{\hbar}} B\left(x,K_x(y,\overline{y})\right) \widetilde{f}\left(K_x(y,\overline{y})\right) a\left(K_x(y,\overline{y})\right) dy + \left\| e^{\frac{G}{\hbar}} \right\|_{L^\infty(B_\tau)} O(e^{-\frac{c\tau^2}{\hbar}}). \end{aligned}$$

接着，我们应用引理 3.4，余项为 $\left\| e^{\frac{G}{\hbar}} \right\|_{L^\infty(B_\tau)} O\left(e^{-\frac{c\tau}{\hbar}}\right)$。由于 G在 0 处以 3 阶消失，只要 τ足够小，两个余项便是 $O\left(e^{-\frac{c'\tau}{\hbar}}\right)$。因此，$T_\hbar(f)\left(e^{-\frac{\Phi_M}{\hbar}} e^{\frac{\psi}{\hbar}} a\right) = e^{-\frac{\Phi_M}{2\hbar}} e^{\frac{\psi}{\hbar}} \left(b + O(e^{-\frac{c'}{\hbar}})\right)$在 B_η上成立，其中

$$b(x) \sim s(x) \sum_k \frac{\hbar^k}{k!} \left(\partial_y \overline{\partial_y}\right)^k \left(e^{\frac{G(x,K_x(y,\overline{y}))}{\hbar}} B\left(x,K_x(y,\overline{y})\right) \widetilde{f}\left(K_x(y,\overline{y})\right) a\left(K_x(y,\overline{y})\right)\right)(0,0).$$

特别地,

$$
\begin{aligned}
b_0(x) =& s(x)B_0(x,\overline{v_c}(x))\widetilde{f}_0(x,\overline{v_c}(x))a_0(x)\\
b_1(x) =& s(x)\Bigg[\left(B\widetilde{f}a\right)_1+\partial_{K_x}\overline{\partial}_{K_x}\left(B_0\widetilde{f}_0a_0\right)+\frac{1}{2}(\partial_{K_x}\overline{\partial}_{K_x})^2(G)B_0\widetilde{f}_0a_0 \qquad (25)\\
&+\partial_{K_x}\overline{\partial}^2_{K_x}(G)\partial_{K_x}(B_0\widetilde{f}_0a_0)+\partial^2_{K_x}\overline{\partial}_{K_x}(G)\overline{\partial}_{K_x}(B_0\widetilde{f}_0a_0)\Bigg](x,\overline{v_c}(x)),
\end{aligned}
$$

其中我们记 $\partial_{K_x}=\partial K_x^{\intercal}\cdot D$、 $\overline{\partial}_{K_x}=\overline{\partial}K_x^{\intercal}\cdot D$和 $D=\begin{pmatrix}\partial_1\\ \partial_2\end{pmatrix}$。对于 $f=1$，我们知道 $b=a$，因此 $b_0=a_0$ 和 $s(x)B_0(x,\overline{v_c}(x))=1$。实际上，我们还可以计算 F的海森矩阵，从而得到 $s(x)=\left(\partial_1\partial_2\widetilde{\Phi_M}\right)^{-1}$，并识别出伯格曼核的主项$B_0$。现在，根据定义，我们确定 ∂_{K_x}的表达式

$$
\nabla K_x^{\intercal}\operatorname{Hess}F\nabla K_x=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}, \qquad (26)
$$

其中,

$$
\operatorname{Hess}F\left(x,\overline{v_c}(x)\right)=\begin{pmatrix}\partial^2\psi(x)-\partial_1^2\widetilde{\Phi_M}&-\partial_1\partial_2\widetilde{\Phi_M}\\-\partial_1\partial_2\widetilde{\Phi_M}&0\end{pmatrix}(x,\overline{v_c}(x))=\begin{pmatrix}iAd^2&-d\\-d&0\end{pmatrix},
$$

其中 $d=\partial_1\partial_2\widetilde{\Phi_M}(x,\overline{v_c}(x))$ 且 $A=-id^{-2}\left(\partial^2\psi(x)-\partial_1^2\widetilde{\Phi_M}(x,\overline{v_c}(x))\right)$。那么，一个解为

$$
\nabla K_x=\begin{pmatrix}1&0\\\frac{1}{2}iAd&d^{-1}\end{pmatrix}
$$

由此得到 $\partial_{K_x}=\partial_1+\frac{1}{2}iAd\partial_2$, $\overline{\partial}_{K_x}=d^{-1}\partial_2$，特别是 $\overline{\partial}_{K_x}a=0$。再次考虑 $f=1$的情形，我们知道 $b_1=a_1$，因此

$$
\begin{aligned}
0=&\Bigg[B_1a_0+\partial_{K_x}\overline{\partial}_{K_x}(B_0a_0)+\frac{1}{2}(\partial_{K_x}\overline{\partial}_{K_x})^2(G)B_0a_0\\
&+\partial_{K_x}\overline{\partial}^2_{K_x}(G)\partial_{K_x}(B_0a_0)+\partial^2_{K_x}\overline{\partial}_{K_x}(G)\overline{\partial}_{K_x}(B_0a_0)\Bigg](x,\overline{v_c}(x)).
\end{aligned}
$$

~因此，从现在起，我们只考虑在（25）中 b_1 的表达式里至少有一个导数作用于 f_0 的项。公式变为

$$
\begin{aligned}
b_1=&\Bigg[(fa)_1+sd^{-1}\left(\partial_1+\frac{1}{2}iAd\partial_2\right)\partial_2\left(B_0\widetilde{f}_0a_0\right)\\
&+d^{-2}\left(\partial_1+\frac{1}{2}iAd\partial_2\right)\partial_2^2G\left(\partial_1+\frac{1}{2}iAd\partial_2\right)\widetilde{f}_0a_0\\
&+d^{-2}\left(\partial_1+\frac{1}{2}iAd\partial_2\right)^2\partial_2G\partial_2\widetilde{f}_0a_0\Bigg](x,\overline{v_c}(x)).
\end{aligned}
$$

此外，如果 f 是全纯的，我们知道 $b_1 = (fa)_1$ 因此

$$\left(sd^{-1}\partial_2 B_0 + d^{-2}\left(\partial_1 + \frac{1}{2}iAd\partial_2\right)\partial_2^2 G\right)(x, \overline{v_c}(x)) = 0.$$

因此方程变为

$$\begin{aligned} b_1(x) = &\left(\widetilde{fa}\right)_1 (x, \overline{v_c}(x)) + d^{-1}\partial_2\widetilde{f_0}\partial_1 a_0\,(x, \overline{v_c}(x)) \\ &+ a_0(x)\Bigg[\widetilde{\Delta f_0} + iA\partial_2 \log B_0 \partial_2\widetilde{f_0} + \frac{1}{2}iA\partial_2^2\widetilde{f_0} + \frac{1}{2}iAd^{-1}\left(\partial_1 + \frac{1}{2}iAd\partial_2\right)\partial_2^2 G\partial_2\widetilde{f_0} \\ &\qquad + d^{-2}\left(\partial_1 + \frac{1}{2}iAd\partial_2\right)^2\partial_2 G\partial_2\widetilde{f_0}\Bigg](x, \overline{v_c}(x)) \end{aligned}$$

根据 d 的定义，$\Delta = d^{-1}\partial\overline{\partial}$ 是全纯拉普拉斯算子，而

$$\partial_2 \log(B_0)\,(x, \overline{v_c}(x)) = \frac{\partial_2 B_0}{B_0}\,(x, \overline{v_c}(x)) = s(x)\partial_2 B_0\,(x, \overline{v_c}(x))\,.$$

现在，假设 $\widetilde{X_{f_0}} = \left(\partial_1\partial_2\widetilde{\Phi_M}\right)^{-1}\left(-i\partial_2\widetilde{f_0}, i\partial_1\widetilde{f_0}\right)$ 与 $\mathcal{L}_\psi$ 相切，由于其切丛为 $T\mathcal{L}_\psi = \{(1, \partial\overline{v_c}(x))\}$，$X_{f_0}|_{\mathcal{L}_\psi}$ 的坐标为

$$-i\left(\partial_1\partial_2\widetilde{\Phi_M}\right)^{-1}\partial_2\widetilde{f_0}\,(x, \overline{v_c}(x))\,,$$

并且散度计算得，

$$\begin{aligned} \mathrm{div}_{\mathcal{L}_\psi}(X_{f_0}) =& \frac{-i}{B_0}\partial\left(B_0\left(\partial_1\partial_2\widetilde{\Phi_M}\right)^{-1}\partial_2 f_0\,(x, \overline{v_c}(x))\right) \\ =& \frac{-i}{B_0}\left(\partial_1 + \partial\overline{v_c}(x)\partial_2\right)\left(B_0\left(\partial_1\partial_2\widetilde{\Phi_M}\right)^{-1}\partial_2 f_0\right)(x, \overline{v_c}(x))\,. \end{aligned}$$

注意，根据 $\overline{v_c}(x)$ 的定义，

$$\partial^2\psi(x) = \partial_1^2\widetilde{\Phi_M}(x, \overline{v_c}(x)) + \partial\overline{v_c}(x)\partial_1\partial_2\widetilde{\Phi_M}(x, \overline{v_c}(x))$$

因此 $\partial\overline{v_c}(x) = iAd$，并且

$$\begin{aligned} \mathrm{div}_{\mathcal{L}_\psi}(X_{f_0}) = -i\Bigg(&\partial_1 \log B_0 d^{-1}\partial_2 f_0 + iAd\partial_2 \log B_0 d^{-1}\partial_2 f_0 \\ &- \partial_1^2\partial_2\widetilde{\Phi_M}d^{-2}\partial_2 f_0 - iAd\partial_1\partial_2^2\widetilde{\Phi_M}d^{-2}\partial_2 f_0 \\ &+ d^{-1}\partial_1\partial_2 f_0 + iA\partial_2^2 f_0\Bigg)(x, \overline{v_c}(x))\,. \end{aligned}$$

此外，根据 G 的定义

$$\begin{aligned} &\partial_2^3 G = \partial_2^3 F = 0, \\ &\partial_1\partial_2^2 G = \partial_1\partial_2^2 F = -\partial_1\partial_2^2\widetilde{\Phi_M}, \\ &\partial_1^2\partial_2 G = \partial_1^2\partial_2 F = -\partial_1^2\partial_2\widetilde{\Phi_M}, \end{aligned}$$

因此，结合最后几个方程，我们得到 b_1 的如下表达式，

$$\begin{aligned} b_1(x) = &\left(\left(\widetilde{f}a\right)_1 + i\widetilde{X_{f_0}}a_0\right)(x,\overline{v_c}(x)) \\ &+ a_0(x)\left[\frac{1}{2}\widetilde{\Delta f_0} + \frac{1}{2}iA\partial_2 \log B_0 \partial_2 \widetilde{f}_0 - \frac{d^{-1}}{2}\partial_1 \log B_0 \partial_2 \widetilde{f}_0\right. \\ &\left. + \frac{i}{2}\operatorname{div}_{\mathcal{L}_\psi}\left(\widetilde{X_{f_0}}\right) - \left(\frac{d^{-2}}{2}\partial_1^2 + iAd^{-1}\partial_2\partial_1\right)\partial_2\left(\widetilde{\Phi_M}\right)\partial_2\widetilde{f}_0\right](x,\overline{v_c}(x)). \end{aligned}$$

注意，$\partial_1 \log B_0 = d^{-1}\partial_1^2\partial_2\Phi_M$、$\partial_2 \log B_0 = d^{-1}\partial_1\partial_2^2\Phi_M$，并且由于 $f_0(x,\overline{v_c}(x))$ 是常数

$$\partial_1 \widetilde{f}_0\,(x,\overline{v_c}(x)) = -\partial\overline{v_c}(x)\partial_2\widetilde{f}_0\,(x,\overline{v_c}(x)) = -iAd\partial_2\widetilde{f}_0\,(x,\overline{v_c}(x)).$$

最后，将这些方程与 b_1 的表达式结合，得到

$$\begin{aligned} b_1(x) = &\left(\left(\widetilde{f}a\right)_1 + i\widetilde{X_{f_0}}a_0\right)(x,\overline{v_c}(x)) \\ &+ a_0(x)\left[\frac{1}{2}\widetilde{\Delta f_0} + \frac{d^{-1}}{2}\partial_2 \log \widetilde{B_0}\partial_1\widetilde{f}_0 - d^{-1}\partial_1 \log \widetilde{B_0}\partial_2\widetilde{f}_0\right. \\ &\left. + \frac{i}{2}\operatorname{div}_{\mathcal{L}_\psi}\left(\widetilde{X_{f_0}}\right)\right](x,\overline{v_c}(x)). \end{aligned}$$

□

命题 4.16. 设 $\widetilde{\kappa}$ 是满足 $f_0 \circ \widetilde{\kappa}(z,\ \overline{v}) = \mu_0(d_0 z\overline{v})$ 的局部辛同胚，且 $d_0 \in \mathbb{C}$，并设围道为 $L_E = \widetilde{\kappa}^{-1}\left(\sqrt{\frac{E}{d_0}}\{(e^{it},\ e^{-it})\ \ 0 \le t < 2\pi\}\right)$。当 E 足够小时，L_E 接近 f_0 的椭圆临界点，但不会穿过该点，因此 X_{f_0} f_0 的哈密顿向量场在此围道上不消失。记 β 为 L_E 上满足 $\beta\left(\widetilde{X_{f_0}}\right) = 1$ 的唯一1-形式。采用定理 ***4.13*** 中的记号，解析符号

$$\mu^c(\xi) = \sum_{k=0}^{\frac{1}{A\hbar}} \hbar^k \mu_k\left(\hbar\left(\frac{\sqrt{\det(\alpha H)}}{\alpha}\left(\xi + \frac{1}{2}\right) + \frac{\partial\overline{\partial}H}{2}\right)\right)$$

对于邻域 $f(x_0)$ 中的所有 $E \neq f(x_0)$，均满足

$$(\mu^c)^{-1}(E) = \frac{A(E)}{2\pi\hbar} + \int_{L_E}\left(\widetilde{f}_1 + \frac{1}{2}\widetilde{\Delta f_0}\right)\frac{\beta}{2\pi} - I_{\mathrm{sub}}(L_E) - \frac{1}{2} + O(\hbar).$$

这里，A 是命题 ***4.8*** 中的作用积分，而 I_{sub}（L_E）是相对于拓扑平凡的半形式丛 δ，L_E 的 ***Bohr-Sommerfeld*** 类的生成元。此外，注意 $-\frac{1}{2}$ 就是所谓的马斯洛夫指标。因此，两个特征值之差为

$$\frac{\sqrt{\det(\alpha H)}}{\alpha A'(0)}\hbar + O(\hbar^2).$$

此外，由于 f 是解析符号，$\sqrt{\det(\alpha_H)}\,\alpha$ 在 $\hbar$ 中有展开式，我们将 d_0 记为其主项。于是，在 $f(x_0)$ 的一个邻域内，$\mu_0(d_0\mathbb{R})$ 的元素是满足以下条件的数值：E 使得 $\left\{(z,\overline{v})\in M^2/\ \widetilde{f_0}(z,\overline{v})=E\right\}$ 是一个全实拉格朗日子流形。换言之，对于 $\mu_0(d_0\mathbb{R})$ 中任意接近 $f(x_0)$ 的 E，$\left\{\widetilde{f_0}=E\right\}$ 沿预量子化丛 L 的 *Bohr-Sommerfeld* 类是酉的。

证明。我们遵循命题 6.7 的证明思路。设 E 与特征函数 λ_l 接近但不相同，并设 $\rho:[0,1]\to M$ 为闭曲线，使得 $L_E(t)$ 具有 $(\rho(t)\ \rho_2(t))$ 的形式。我们考虑 $T_N(f)$ 的一个准模 u，对应值 E，并将其视为 $\mathcal{H}_\hbar^{\mathcal{W}}(U)$ 中的元素，其中 U 是 x_0 的一个邻域；这得益于命题 4.10 和推论 4.12.1。于是，$u(\rho(1))$ 与 $u(\rho(0))$ 可相差一个形如 $e^{2i\pi s}$ 的数，我们称之为 $s\in\mathbb{C}$ 相移。实际上，u 沿 ρ 定义良好，因此 s 是一个整数，但用两种方式计算它将得到一个涉及 $(\mu^c)^{-1}(E)$ 的等式。首先，根据构造，$v=\mathfrak{U}^{-1}u$ 是 $\mu^c\left(T_\hbar\left(\frac{|z|^2}{\hbar}-1\right)\right)$ 的准模，对应值为 $(\mu^c)^{-1}(E)$。这等价于说，v 是 $T_\hbar(|z|^2)$ 的准模，对应值为 $\hbar((\mu^c)^{-1}(E)+1)$。根据引理 4.6，$v(x)=e^{-\frac{|x|^2}{2\hbar}}x^j$，其中 $j\in\mathbb{N}$，且 $j=(\mu^c)^{-1}(E)+O(e^{-\frac{c}{\hbar}})$。于是，$v$ 沿 $\sqrt{\frac{E}{d_0}}e^{it}$ 的相移为 $(\mu^c)^{-1}(E)+O(e^{-\frac{c}{\hbar}})$。

使用命题 4.8 的记号，$\sqrt{\frac{E}{d_0}}(e^{it},e^{-it})$ 是 $\mu_0(d_0z\overline{v})$ 的哈密顿流，只不过时间取为复时间。因此，L_E 也是 f 在复时间下的哈密顿流。由于 $\mathfrak{U}$ 与辛同胚 $\widetilde{\kappa}$ 相关，在 $\mathfrak{U}$ 两侧分别应用 L_E^{-1} 和 ρ 的拉回，只会使其乘上一个依赖于时间的数。因此，v 沿 $\sqrt{\frac{E}{d_0}}e^{it}$ 的相移与 u 沿 $\rho(t)$ 的相移相差一个整数，这意味着 $s=l+(\mu^c)^{-1}(E)+O(e^{-\frac{c}{\hbar}})$，其中 $l\in\mathbb{Z}$。

现在，写作 $u=e^{-\frac{\Phi_M}{2\hbar}}e^{\frac{\psi}{\hbar}}a$，并根据命题 4.15，

$$T_N(f)\left(e^{-\frac{\Phi_M}{2\hbar}}e^{\frac{\psi}{\hbar}}a\right)(x)=e^{-\frac{\Phi_M(x)}{2\hbar}}e^{\frac{\psi(x)}{\hbar}}b(x)$$

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$，其中 $b_0(x)=f_0(x,\overline{v_c}(x))a_0(x)$，以及满足 $\partial\psi(x)=\partial_1\Phi_M(x,\overline{v_c}(x))$ 的 $\overline{v_c}(x)$。根据假设 $b_0=Ea_0$，因此存在 0 的邻域 U，使得

$$\mathcal{L}_\psi\cap(U\times\mathbb{C})=\{(z,\overline{v_c}(z))/\ z\in U\}\subset\left\{(z,\overline{v})\Big/\ \widetilde{f_0}(z,\overline{v})=E\right\}$$

含义为 $L_E=\{(\rho(t)\,\overline{v_c}(\rho(t)))\ /\ t\in[0,1]\}$。那么，使用命题 4.8 中的记号，

$$A(E)=-i\int_{L_E}\alpha=i\int_{L_E}\partial_1\widetilde{\Phi_M}dz=i\int_\rho\partial_1\widetilde{\Phi_M}\,(x,\overline{v_c}(x))\,dx=i\int_\rho\partial\psi(x)dx$$

因此，$e^{\frac{\psi}{\hbar}}$ 的相移为 $^A\,(E)\ 2\pi\hbar$。现在，由于 $\widetilde{f_0}$ 在 $\mathcal{L}_\psi$ 上为常数，其哈密顿向量$\widetilde{\ }$场 X_{f_0} 与之相切，因此由命题 4.15 可得

$$\begin{aligned}b_1=&\left(\left(\widetilde{f}a\right)_1+i\widetilde{X_{f_0}}a_0\right)(x,\overline{v_c}(x))\\&+a_0(x)\left(\frac{1}{2}\widetilde{\Delta f_0}+\frac{d^{-1}}{2}\partial_2\log\widetilde{B_0}\partial_1\widetilde{f_0}-d^{-1}\partial_1\log\widetilde{B_0}\partial_2\widetilde{f_0}+\frac{i}{2}\operatorname{div}_{\mathcal{L}_\psi}\left(\widetilde{X_{f_0}}\right)\right)(x,\overline{v_c}(x))\,.\end{aligned}$$

那么， $b_1 = Ea_1$ 当且仅当 a_0 满足以下输运方程

$$
\begin{aligned}
&-i\widetilde{X_{f_0}}a_0\left(x,\overline{v_c}(x)\right) = \\
&\left(\widetilde{f_1}+\frac{1}{2}\widetilde{\Delta f_0}+\frac{d^{-1}}{2}\partial_2\log B_0\partial_1\widetilde{f_0}-d^{-1}\partial_1\log B_0\partial_2\widetilde{f_0}+\frac{i}{2}\operatorname{div}_{\mathcal{L}_\psi}\left(\widetilde{X_{f_0}}\right)\right)\left(x,\overline{v_c}(x)\right)a_0(x).
\end{aligned}
$$

由于 $L_E=\{(\rho(t)\overline{v_c}(\rho(t)))\ /\ t\in[0,1]\}$ 是 f_0 在复时间下的哈密顿流，因此前面的方程等价于

$$
\begin{aligned}
&-i\partial_t\left(a_0(L_E(t))\right)\\
&=\left[\left(\widetilde{f_1}+\frac{1}{2}\widetilde{\Delta f_0}+\frac{d^{-1}}{2}\overline{\partial}\log\widetilde{B_0}\partial\widetilde{f_0}-d^{-1}\partial\log\widetilde{B_0}\overline{\partial}\widetilde{f_0}+\frac{i}{2}\operatorname{div}_{\mathcal{L}_\psi}\left(\widetilde{X_{f_0}}\right)\right)a_0\right](L_E(t))\\
&=\left[\left(\widetilde{f_1}+\frac{1}{2}\widetilde{\Delta f_0}+\frac{d^{-1}}{2}\partial_2\log\widetilde{B_0}\partial_1\widetilde{f_0}-\frac{d^{-1}}{2}\partial_1\log\widetilde{B_0}\partial_2\widetilde{f_0}\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.+\frac{i}{2}\partial\left(-i\partial_1\partial_2\left(2\widetilde{\Phi_M}\right)^{-1}\partial_2\widetilde{f_0}\right)\right)a_0\right](L_E(t))
\end{aligned}
$$

解的形式为

$$
\begin{aligned}
a_0(x,\overline{v_c}(x)) = \alpha_0&\left(\partial_1\partial_2\left(2\widetilde{\Phi_M}\right)^{-1}\partial_2\widetilde{f_0}(x,\overline{v_c}(x))\right)^{-\frac{1}{2}}\times\\
&\exp\left(i\int_{-t}^{0}\left(\widetilde{f_1}+\frac{1}{2}\widetilde{\Delta f_0}+\frac{d^{-1}}{2}\partial_2\log B_0\partial_1\widetilde{f_0}-\frac{d^{-1}}{2}\partial_1\log B_0\partial_2\widetilde{f_0}\right)(L_E(s))ds\right)
\end{aligned}
$$

其中 $\alpha_0\in\mathbb{C}$ 固定。因此， a_0 的相移为

$$
\int_{L_E}\left(\widetilde{f_1}+\frac{1}{2}\widetilde{\Delta f_0}+\frac{d^{-1}}{2}\partial_2\log\widetilde{B_0}\partial_1\widetilde{f_0}-\frac{d^{-1}}{2}\partial_1\log\widetilde{B_0}\partial_2\widetilde{f_0}\right)\frac{\beta}{2\pi}-\frac{k}{2}
$$

其中 $k\in\mathbb{Z}$。现在，积分

$$
-\int_{L_E}\frac{d^{-1}}{2}\left(\partial_2\log\widetilde{B_0}\partial_1\widetilde{f_0}-\partial_2\widetilde{f_0}\partial_1\log\widetilde{B_0}\right)\frac{\beta}{2\pi}=I_{\mathrm{sub}}(\gamma_E)
$$

是相对于半丛 δ的 $\mathcal{L}_\psi$ 的 Bohr-Sommerfeld 类的生成元。事实上，平凡化截面 t（属于 δ）沿 X_{f_0} 的协变导数，限制在 $\mathcal{L}_\psi$ 上为

$$
-\frac{d^{-1}}{2}\left(\partial_2\log\widetilde{B_0}\partial_1\widetilde{f_0}-\partial_1\log\widetilde{B_0}\partial_2\widetilde{f_0}\right)\left(x,\overline{v_c}(x)\right)t(x),
$$

因为 $B_0=\partial_1\partial_2\Phi_M$。最后，将各相移合并可得

$$
(\mu^c)^{-1}(E)=l+\frac{A(E)}{2\pi\hbar}+\int_{L_E}\left(\widetilde{f_1}+\frac{1}{2}\widetilde{\Delta f_0}\right)\frac{\beta}{2\pi}-I_{\mathrm{sub}}\left(L_E\right)-\frac{k}{2}+O(\hbar),
$$

其中 k、$l\in\mathbb{Z}$。如果 f 是二次的，则第 2.2 节中的公式在 $k=1$、$l=0$ 的情况下相同，因此通过扰动论证，对于任意 f， k 等于 1， l 等于 0，从而证明了该结果。

设 E 接近但不同于 $f(x_0)$，且 $\gamma\colon [0,1]\to\left\{(z,\overline{v})\in\mathbb{C}^d/\widetilde{f_0}(z,\overline{v})=E\right\}$ 是一条闭曲线。那么，在 $\mathbb{C}$ 上存在一条闭曲线 ρ，使得

$$\gamma=\widetilde{\kappa_0}^{-1}\left\{\left(\rho(t),\frac{\xi}{\rho(t)}\right)/\,t\in[0,1]\right\}\subset\widetilde{\mathbb{C}}$$

其中 $\xi=\frac{\mu_0^{-1}(E)}{d_0}$，$\widetilde{\kappa_0}$ 是满足 $\widetilde{f_0}\circ\widetilde{\kappa_0}^{-1}(z,\overline{v})=\mu_0(d_0z\overline{v})$ 的辛同胚。$\widetilde{\kappa_0}$ 由辛同胚 $\widetilde{\kappa}$ 的主项直接给出，使得

$$\widetilde{f}\circ\widetilde{\kappa}(z,\overline{v})=\mu\left(\frac{\sqrt{\det(\alpha\,\mathrm{Hess}_{x_0}f)}}{\alpha}z\overline{v}\right).$$

考虑预量子线丛沿 γ的一个平坦截面 S，则

$$\left(\partial S-\widetilde{\partial\Phi_M}S\right)(\gamma')=0,$$
$$\left(\overline{\partial}S+\widetilde{\overline{\partial}\Phi_M}S\right)(\gamma')=0.$$

因此，记 $\widetilde{\kappa_0}=(\widetilde{\kappa_1},\widetilde{\kappa_2})$，

$$\begin{aligned}\partial_t\left(S(\gamma_E(t))\right)&=\left(\dot\rho(t)\partial-\xi\frac{\dot\rho(t)}{\rho^2(t)}\overline{\partial}\right)\widetilde{\kappa_1}\partial S(\gamma_E(t))+\left(\dot\rho(t)\partial-\xi\frac{\dot\rho(t)}{\rho^2(t)}\overline{\partial}\right)\widetilde{\kappa_2}\overline{\partial}S(\gamma_E(t))\\&=\left[\left(\dot\rho(t)\partial-\xi\frac{\dot\rho(t)}{\rho^2(t)}\overline{\partial}\right)\widetilde{\kappa_1}\widetilde{\partial\Phi_M}-\left(\dot\rho(t)\partial-\xi\frac{\dot\rho(t)}{\rho^2(t)}\overline{\partial}\right)\widetilde{\kappa_2}\widetilde{\overline{\partial}\Phi_M}\right]S(\gamma_E(t)).\end{aligned}$$

因此，$S(z,\overline{v})=e^{F(z,\overline{v})}S_0$，且作用为实数当且仅当 $F(\gamma_E(2\pi))-F(\gamma_E(0))\in i\mathbb{R}$，其中

$$F(\gamma_E(t))=\sum_j a_j(\rho(t))^j+\left(\int_0^t\frac{\dot\rho}{\rho}(s)ds\right)2\xi\widetilde{\partial\overline{\partial}\Phi_M}(0,0)\det\nabla\widetilde{\kappa}(0,0),$$

对某个 $a_j\in\mathbb{C}$，将这些函数写成幂级数。因此，该条件等价于

$$2\xi\,\mathrm{Wind}_0(\rho)\partial_1\partial_2\widetilde{\Phi_M}(0,0)\det\nabla\widetilde{\kappa}(0,0)\in\mathbb{R}.$$

根据定义，$\mathrm{Wind}_0(\rho)$、$\partial_1\partial_2\Phi_M(0,0)$ 均为实数，且 $\det\nabla\widetilde{\kappa}(0,0)=1$，因此，能级 $\{f_0=E\}$是全实的当且仅当 $\xi\in\mathbb{R}\Leftrightarrow E\in\mu_0(d_0\mathbb{R})$。 □

因此，在 0 阶下，解析伪谱接近于直线 $\mu_0(\mathbb{R}_+)$；当 $f_0(\mathbb{C})$ 的内部为空时，$\mu_0(\mathbb{R}_+)=f_0(\mathbb{C})$；否则，$\mu_0(\mathbb{R}_+)$ 位于 $f_0(\mathbb{R})$ 的内部。此外，$\mu_0(\mathbb{R})$ 恰好对应于满足 $\{f_0=E\}$ 是一个全实拉格朗日子流形的数 E。

5 多势阱符号

5.1 标准形

在本小节中，我们考虑更一般的假设。我们仍然认为 M 要么是紧凯勒流形，要么是 $\mathbb{C}$，而 $\mathcal{H}_N$ 是相应的量子空间。然而，

我们不再假设符号的能级仅对应一个临界点。如果 M 是紧流形，那么 f 仅有有限个临界点；但对于 $M=\mathbb{C}$，我们将施加这一条件。我们作出如下假设

假设 5.1。

- $\mathfrak{e}\in\mathbb{C}$ 并且恰好存在 $k\in\mathbb{N}^*$ 个点 $x_1,\dots,x_k\in M$，使得 $f(x_n)=\mathfrak{e},1\le n\le k$。

- 对于 $1\le n\le k$，$df(x_n)=0$，且二次型 $H_n=$ 海森矩阵$_{x_n}(f_0)$是椭圆的，并满足 $H_n(T_{x_n}M)\neq\mathbb{C}$。

- 若 M 是紧流形：$f:\ M\to\mathbb{C}$ 是实解析的复值函数，并且在每个 x_n的邻域上，它渐近等价于一个解析符号。

- 若 $M=\mathbb{C}$: 存在一个阶函数 m，使得 $f\in S(\mathbb{C},m)$，并且 f 在每个 x_n之外都是椭圆的，具体来说，存在 $\rho,C,R>0$，使得对所有满足 $\min_{1\le n\le k}|x-x_n|\ge R$ 的 $(x,\overline{y})\in\mathcal{D}+\widetilde{B_\rho}$，均有 $\left|\widetilde{f}(x,\overline{y})\right|\ge Cm(x)$。此外，$\bigcup_{1\le n\le k}H_n(\mathbb{R}^2)\neq\mathbb{C}$。

根据第 4 节，对于每个 $1\le n\le k$，存在有界的傅里叶积分算子 $\mathfrak{U}_n:\mathcal{B}_\hbar(B_{\rho_n})\to\mathcal{H}_\hbar^{\mathcal{W}_{n,i}}(U_n)$，以及 $\mathfrak{U}_{n,i}:\ \mathcal{H}_\hbar^{\mathcal{W}_n}(U_n)\to\mathcal{B}_\hbar(B_{\rho_n})$，其中 U_n是 x_n的一个邻域，且 $\mathcal{W}_n,\mathcal{W}_{n,i}$ 与引理 4.12 中相同，但这里的 W,W_i 是针对每个 $1\le n\le k$，由定理 3.21 和 $H=$ 海森矩阵$_{x_n}f$ 构造的。它们满足

$$\begin{aligned}T_N(f)\mathfrak{U}_n=&\mathfrak{U}_n\mu_n\left(T_\hbar(|z|^2)\right)+O_{\mathcal{B}_\hbar(B_{\rho_n})\to\mathcal{H}_\hbar^{\mathcal{W}_n}(U_n)}\left(e^{-\frac{c}{\hbar}}\right),\\ \mathfrak{U}_n\mathfrak{U}_{n,i}=&id+O_{\mathcal{H}_\hbar^{\mathcal{W}_n}(U_n)\to\mathcal{H}_\hbar^{\mathcal{W}_n}(U_n)}(e^{-\frac{c}{\hbar}}).\end{aligned}$$

我们遵循 [11] 第 7 节的策略和记号。

命题 5.2。对于 $c>0$，存在 $c'>0$ 以及 $\mathbb{C}$ 中 $\mathfrak{e}$ 的一个邻域 $\mathcal{E}$，使得对于每个 $\lambda\in\mathcal{E}$和 $u\in\mathcal{B}_\hbar(M)$，若 $\|u\|_{\mathcal{B}_\hbar}=1$且 $(T_N(f)-\lambda)u=O_{\mathcal{B}_\hbar}(e^{-\frac{c}{\hbar}})$，则存在 $1\le n\le k$ 和 $j\in\mathbb{N}^*$，使得 $\lambda=\mu_n(j\hbar)+O(e^{-\frac{c'}{\hbar}})$。

证明。根据假设 5.1 以及命题 4.10 或推论 4.12.1，u集中在 $\{f=\lambda\}$上；当 λ 足够接近 $\mathfrak{e}$ 且 $\hbar$ 足够小时，$\{f=\lambda\}$是 $\cup_{1\le n\le k}U_n$ 的子集。因此，如果 $\mathcal{E}$ 足够小，对于任意这样的 u，

$$u=\sum_{1\le n\le k}u_n+O_{\mathcal{H}_\hbar^{\mathcal{W},m}}(e^{-\frac{c}{\hbar}})$$

其中，对 $1\le n\le k$ 有 $u_n=\Pi_N(\chi_{U_n}u)$。开集 $(U_n)_{1\le n\le k}$ 彼此之间相距正距离，并且 $T_N(f)-\lambda$是一个局部算子，因此对每个n，都有 $(T_N(f)-\lambda)u_n=O_{\mathcal{B}_\hbar}(e^{-\frac{c}{\hbar}})$。由于 u 已归一化，存在 $1\le n\le k$ 使得$\|u_n\|_{\mathcal{H}_\hbar^{\mathcal{W}}(U_n)}>\frac{1}{2N}$。于是，应用与定理 4.13 的证明中相同的论证，可得存在 $c'>0$ 和 $j\in\mathbb{N}^*$使得 $\lambda=\mu_n(j\hbar)+O(e^{-\frac{c'}{\hbar}})$。

□

命题 5.3。 对 $c>0$，存在 $c'>0$ 以及 $\mathbb{C}$ 中 $\mathfrak{e}$ 的一个邻域 $\mathcal{E}$，使得对每个 $\lambda\in\mathcal{E}$，若对每个 $1\leq n\leq k$ 和 $l\in\mathbb{N}^*$，都有 $|\lambda-\mu_n(l\hbar)|>e^{-\frac{c'}{\hbar}}$，则

$$(T_N(f)-\lambda)^{-1}\chi_{U_n}=\mathfrak{U}_{n,i}(\mu_n(T_\hbar(H_n))-\lambda)^{-1}\mathfrak{U}_n\chi_{U_n}+O_{\mathcal{H}_\hbar^{\mathcal{W}_n}\to\mathcal{H}_\hbar^{\mathcal{W}_{n,i}}}(e^{-\frac{c}{\hbar}}),$$

对所有 $1\leq n\leq k$。

证明。 我们采用 [11] 命题 7.3 的证明策略。固定 $1\leq n\leq k$，并记

$$\begin{aligned}P&=(T_N(f)-\lambda),\\ Q&=\mathfrak{U}_n(\mu_n(T_\hbar(H_n))-\lambda)\mathfrak{U}_{n,i}\chi_{U_n},\\ Q_i&=\mathfrak{U}_n(\mu_n(T_\hbar(H_n))-\lambda)^{-1}\mathfrak{U}_{n,i}\chi_{U_n}.\end{aligned}$$

设 $c>0$，由于 $\mathfrak{U}_{n,\ i}(\mu_n(T_\hbar(H_n))-\lambda)\mathfrak{U}_n$ 是一个局部算子，因此存在 $U_n\subset W_n$ 使得

$$(1-\chi_{W_n})Q_i=O_{\mathcal{H}_\hbar^{\mathcal{W}_n}\to\mathcal{H}_\hbar^{\mathcal{W}_{n,i}}}(e^{-\frac{c}{\hbar}}),$$

并且当 U_n,W_n 足够小时，

$$(P-Q)\chi_{W_n}=O_{\mathcal{H}_\hbar^{\mathcal{W}_n}\to\mathcal{H}_\hbar^{\mathcal{W}_{n,i}}}(e^{-\frac{c}{\hbar}}).$$

根据构造，

$$\begin{aligned}QQ_i\chi_{U_n}=&\chi_{U_n}+O_{\mathcal{H}_\hbar^{\mathcal{W}_n}\to\mathcal{H}_\hbar^{\mathcal{W}_{n,i}}}(e^{-\frac{c}{\hbar}}),\\ Q_iQ\chi_{U_n}=&\chi_{U_n}+O_{\mathcal{H}_\hbar^{\mathcal{W}_n}\to\mathcal{H}_\hbar^{\mathcal{W}_{n,i}}}(e^{-\frac{c}{\hbar}}),\end{aligned}$$

并且 P,P^{-1},Q 和 Q_i 均有界，其范数大小为 $O(e^{\frac{\epsilon}{\hbar}})$，其中通过根据命题 5.2 限制 $\mathcal{E}$ 和 U_n，并使用与定理 4.13 的证明相同的论证，可以使 ϵ 任意小。结合这些等式

$$\begin{aligned}&(P^{-1}-Q_i)\chi_{U_n}\\ =&P^{-1}(1-PQ_i)\chi_{U_n}\\ =&P^{-1}(1-P\chi_{W_n}Q_i)\chi_{U_n}+O_{\mathcal{H}_\hbar^{\mathcal{W}_n}\to\mathcal{H}_\hbar^{\mathcal{W}_{n,i}}}(e^{\frac{2\epsilon-c}{\hbar}})\\ =&P^{-1}(1-Q\chi_{W_n}Q_i)\chi_{U_n}+O_{\mathcal{H}_\hbar^{\mathcal{W}_n}\to\mathcal{H}_\hbar^{\mathcal{W}_{n,i}}}(e^{\frac{2\epsilon-c}{\hbar}})\\ =&P^{-1}(1-QQ_i)\chi_{U_n}+O_{\mathcal{H}_\hbar^{\mathcal{W}_n}\to\mathcal{H}_\hbar^{\mathcal{W}_{n,i}}}(e^{\frac{2\epsilon-c}{\hbar}})\\ =&O_{\mathcal{H}_\hbar^{\mathcal{W}_n}\to\mathcal{H}_\hbar^{\mathcal{W}_{n,i}}}(e^{\frac{2\epsilon-c}{\hbar}}),\end{aligned}$$

由此，当 ϵ 足够小时，得到结果 $c'=c-2\epsilon>0$。 □

定理 5.4。 假设假设 *5.1* 成立，并且对所有 $1\leq n\leq k$，记 $\alpha_n\in\mathbb{S}$为一个复数，使得 α_nH_n 是正定的。那么，存在 $C,A,r>0$ 以及实解析函数 $\mu_{j,n}$，使得 $|\mu_{j,n}(\xi)|\leq Cj!A^j$ 对于 ξ 属于固定的0邻域内成立，并且 $T_N(f)$ 的谱满足

$$\sigma(T_N(f))\cap B_r(\mathfrak{e})=\bigcup_{1\le n\le k}\{\lambda_{n,l}/\ l\in\mathbb{N}^*\}\bigcap B_r(\mathfrak{e}),$$

$$\lambda_{n,l}=\mu_n^c(l)+O(e^{-\frac{c}{\hbar}}),$$

$$\mu_n^c(\xi)=\sum_{j=0}^{\frac{1}{A\hbar}}\hbar^j\mu_{j,n}\left(\hbar\left(\frac{\sqrt{\det(\alpha_nH_n)}}{\alpha_n}\left(\xi+\frac{1}{2}\right)+\frac{\partial\overline{\partial}H_n}{2}\right)\right),$$

对于所有 $n,l\in\mathbb{N}^2$，且当 $\hbar$ 足够小时成立。计数时考虑重数；对于每个$l\in\mathbb{N}$，某些 $\lambda_{n,l}$ 可能彼此相等，这对应于一个大小至多为 k、指数级小的若尔当块，也就是说，一个形如以下形式的矩阵

$$\begin{pmatrix}\lambda_{n,l} & O\left(e^{-\frac{c}{\hbar}}\right) & & (0)\\ & \ddots & \ddots & \\ & (0) & \ddots & O\left(e^{-\frac{c}{\hbar}}\right)\\ & & & \lambda_{n,l}\end{pmatrix}.$$

最后，存在 ρ，$C>0$满足 $B_r\subset f\left(B_\rho\right)$，使得对于任意 $\lambda\in B_r\left(\mathfrak{e}\right)\cap\sigma\left(T_N\left(f\right)\right)^c$和 $1\le n\le k$,

$$\left\|(T_N(f)-\lambda)^{-1}\right\|_{\mathcal{H}_\hbar^{\mathcal{W}_n}(U_n)\to\mathcal{H}_\hbar^{\mathcal{W}_{n,i}}(U_n)}\le\frac{C}{d(\lambda,\sigma(T_N(f)))}.$$

证明。根据命题 5.2，存在 $c'>0$，使得在 $\mathfrak{e}$ 的某个邻域内，$T_N(f)$ 的解析 c'-伪谱具有如下形式：$\sigma_{c'}(f)=\bigcup_{1\le n\le k,\ l\in\mathbb{N}^*}U_{l,\ n}$其中每个$U_{l,\ n}$都是$\lambda_n$的一个邻域，$_l$其大小为 $O\left(e^{-\frac{c}{\hbar}}\right)$。这对应于图 2 中的黄色球。我们已经知道，每个连通分支都至少包含一个特征值。现在，设 W 是 $\sigma_{c'}(f)$ 的一个连通分支，我们来检查 W 中按重数计的特征值个数是否为

$$|\{(l,n)\in\mathbb{N}^*\times[1,\dots,k]/\ \lambda_{n,l}\in W\}|=|\mathcal{N}(W)|.$$

记

$$\Pi_W=\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma(T_N(f)-\lambda)^{-1}\,d\lambda$$

其中 γ 是 $\mathbb{C}\backslash\sigma_{c'}(f)$ 中围绕 W 的一条闭曲线。对于邻域 $\mathfrak{e}$ 中的 λ，$f-\lambda$ 在 $M\backslash(U_1\cup\cdots\cup U_k)$ 上不消失，因此，若 M 是紧集，则利用第 3.3 节中的符号演算；若 $M=\mathbb{C}$，则结合 [21] 与命题 4.11 中的结果，可得到一个符号 $r_\lambda(f)$，它关于 λ 全纯，满足

$$T_\hbar(r_\lambda(f))\chi_{\mathbb{C}/(U_1\cup\cdots\cup U_k)}=(T_N(f)-\lambda)^{-1}\chi_{\mathbb{C}/(U_1\cup\cdots\cup U_k)}+O(e^{-\frac{c}{\hbar}}),$$

然后 $\Pi_W\chi_{\mathbb{C}/(U_1\cup\cdots\cup U_k)}=O(e^{-\frac{c}{\hbar}})$。

现在，令 $1\le n\le k$，由于 γ属于 $\mathbb{C}\backslash\sigma_{c'}(f)$，且根据命题 5.3

$$\Pi_W\chi_{U_n}=\mathfrak{U}_{n,i}\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma(\mu_n(T_\hbar(H_n))-\lambda)^{-1}d\lambda\mathfrak{U}_n\chi_{U_n}+O_{\mathcal{H}_\hbar^{W_n+\epsilon_n}\to\mathcal{H}_\hbar^{W_{n,i}+\epsilon_{n,i}}}(e^{-\frac{c}{\hbar}}).$$

如果 W 中不存在形如 $\mu_n^c(l)+O(e^{-\frac{c}{\hbar}})$ 的元素，那么 $\int_\gamma(\mu_n(T_\hbar(H_n))-\lambda)^{-1}d\lambda=0$和 $\Pi_W\chi_{U_n}=O_{\mathcal{H}_\hbar^{W_n+\epsilon_n}\to\mathcal{H}^{W_{n,\ i}+\epsilon_{n,\ \hbar}}}{}_i(e^{-\frac{c}{\hbar}})$。否则，存在唯一的 $l\in\mathbb{N}^*$ 使其满足条件，并且

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma(\mu_n(T_\hbar(H_n))-\lambda)^{-1}d\lambda=\Pi_{\mathbb{C}e_l}$$

取 $e_l=e^{-\frac{|z|^2}{2\hbar}}z^{l-1}$。因此，记 $d_{n,l}=\mathfrak{U}_{n,i}e_l$，我们得到

$$\Pi_W\chi_{U_n}=\Pi_{\mathbb{C}d_{n,l}}\chi_{U_n}+O_{\mathcal{H}_\hbar^{\mathcal{W}_n}\to\mathcal{H}_\hbar^{\mathcal{W}_{n,i}}}(e^{-\frac{c}{\hbar}})=\Pi_{\mathbb{C}d_{n,l}}+O_{\mathcal{H}_\hbar^{\mathcal{W}_n}\to\mathcal{H}_\hbar^{\mathcal{W}_{n,i}}}(e^{-\frac{c}{\hbar}})$$

因为根据定义，$d_{n,l}$ 已经集中在 U_n 上。最后，

$$\begin{aligned}\Pi_W&=\sum_{n\in\mathcal{N}(W)}\Pi_W\chi_{U_n}+O_{\mathcal{H}_\hbar^{\mathcal{W}_n}\to\mathcal{H}_\hbar^{\mathcal{W}_{n,i}}}(e^{-\frac{c}{\hbar}})\\&=\sum_{n\in\mathcal{N}(W)}\Pi_{\mathbb{C}d_{n,l}}+O_{\mathcal{H}_\hbar^{\mathcal{W}_n}\to\mathcal{H}_\hbar^{\mathcal{W}_{n,i}}}(e^{-\frac{c}{\hbar}}).\end{aligned}$$

由于这些算子是投影，当 U_n 足够小时，余项消失，而 W中的特征值个数为 rank(Π_W) $=|\mathcal{N}(W)|$。因此，我们得到所需形状的离散谱。若 M 是紧集，证明便完成了。

若 $M=\mathbb{C}$，我们调整定理 4.13 证明中的论证。为调整该证明，需要证明存在与 n无关的 θ 和 $\delta,\epsilon>0$，使得对于所有 $|z|\le\delta$ 和 $1\le n\le k$，均有 $|H_n(z)+\frac{\epsilon}{2}e^{i\theta}|>\epsilon m(z)$。对于每个 $1\le n\le k$，当 $\theta\in-H_n(\mathbb{R}^2)^c$ 且 δ,ϵ 足够小时，不等式成立；并且我们假设$\bigcup H_n(\mathbb{R}^2)\neq\mathbb{C}$。因此，对于所有满足 $|z-x_n|\le\delta$ for$_{1\le n\le k}$all $n\in\{1,\dots,k\}$的 z，均有 $\left|f_0(z)-\mathfrak{e}+\frac{\epsilon}{2}e^{i\theta}\right|>\epsilon m(z)$；根据假设 5.1 的最后一项，该结论对所有 $z\in\mathbb{C}$ 仍然成立。接着，论证与定理 4.13 中的相同。 □

5.2 谱的描述

定理 5.4 中对谱的描述总结于图 2。解析伪谱由围绕每个 $\mu_n^c(l)$、大小为 $O(e^{-\frac{c}{\hbar}})$ 的开集构成。对于固定的 $1\le n\le k$，$(\mu_n^c(l))_{l\in\mathbb{N}^*}$ 的元素彼此间的距离为 $O(\hbar)$；此外，$\mu_n^c(0)$ 到 $\mathfrak{e}$ 的距离为 $O(\hbar)$。然而，对于固定的 $l\in\mathbb{N}^*$，围绕 $(\mu_n^c(l))_{1\le n\le k}$ 的两个或多个球可能彼此相交，从而形成一个若尔当块。记 $\widetilde{\eta_n}$ 为满足 $\widetilde{f}\circ\widetilde{\eta_n}=\widetilde{H_n}$ 在 0 附近的辛同胚，由于 $\frac{\sqrt{\det(\alpha_nH_n)}}{\alpha_n}\mathbb{R}+\hbar\frac{\partial\overline{\partial}H_n}{2}\subset\overline{H(\mathbb{R}^2)}$，我们得到，当 σ,ρ 足够小时

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sqrt{\det(\alpha_nH_n)}}{\alpha_n}\mathbb{R}+\hbar\frac{\partial\overline{\partial}H_n}{2}\right)\cap B_\rho&\subset\left(\widetilde{H_n}\circ\widetilde{\eta_n}(\mathcal{D})\right)\cap B_\rho\\&\subset\widetilde{H_n}\circ\widetilde{\eta_n}\left(\mathcal{D}\cap\widetilde{B_\sigma}(x_n,\overline{x_n})\right).\end{aligned}$$

因此，当 r 足够小时

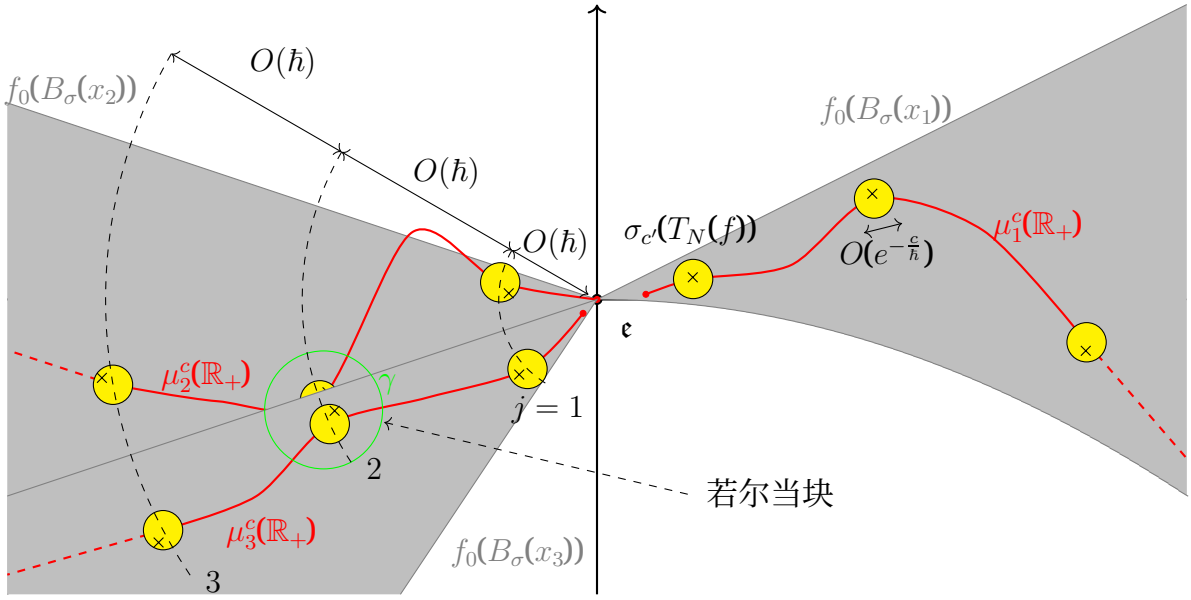

图 2： $T_N(f)$的谱：黄色球构成 $\sigma_{c'}(T_N(f))$。对于 $r \neq s$层级$j=r$ 的一个球，它与层级 s 的球不相交；但在同一层级上，一个连通分支可以由多个球组成。

$$\begin{aligned}\mu_{n,0}\left(\frac{\sqrt{\det(\alpha_n H_n)}}{\alpha_n}\mathbb{R}+\hbar\frac{\partial\overline{\partial}H_n}{2}\right)\cap B_r \subset &\mu_{n,0}\left(\widetilde{H_n}\right)\circ\widetilde{\eta_n}\left(\mathcal{D}\cap\widetilde{B_\sigma}(x_n,\overline{x_n})\right)\\ &=\widetilde{f_0}\left(\mathcal{D}\cap\widetilde{B_\sigma}(x_n,\overline{x_n})\right)\\ &=f_0(B_\sigma(x_n)),\end{aligned}$$

因此，曲线 $\mu_n(\mathbb{R}_+)\cap B_r$ 始终位于 $f_0(B_\sigma(x_n))$ 内，误差为 $O(\hbar)$ 项。此外，当 σ 足够小时， $f(B_\sigma(x_n))\cap B_r(\mathfrak{e})$ 接近 $\Sigma(H_n)\cap B_\sigma(\mathfrak{e})$，后者是一个截锥。

与定理 4.13 中类似，可以用 WKB 方法得到$(\mu_n^c)_{1\leq n\leq k}$ 的表达式，并将曲线 $\mu_n^c(\mathbb{R})$ 与 f对应等值集的 Bohr-Sommerfeld 指标联系起来。

命题 5.5。 我们沿用定理 *5.4* 的记号和结论。对于所有 $1\leq n\leq k$，考虑函数 $A_n(E)=-i\int_{\gamma_E}\alpha$ ，如(23) 所示，但其中

$$\gamma_{E,n}=\widetilde{\kappa_n}^{-1}\left\{x=y=\sqrt{\frac{E}{d_n}}e^{it}/\ t\in[0,2\pi]\right\}=\widetilde{\kappa_n}^{-1}\left(\frac{E}{d_n}\mathbb{S}\right),$$

其中 $\widetilde{\kappa_n}$是一个辛同胚，使得 $\widetilde{f_0}\circ\widetilde{\kappa_n}^{-1}(x,\ \overline{y})=d_n x\overline{y}$在 x_n， $\overline{x_n}$附近()。设 $1\leq n\leq k$，且 $E\neq\mathfrak{e}$ 属于 $\mathfrak{e}$的一个邻域，则

$$(\mu_n^c)^{-1}(E)=\frac{A_n(E)}{2\pi\hbar}+\int_{\gamma_{E,n}}\left(\widetilde{f_1}+\frac{1}{2}\widetilde{\Delta f_0}\right)\frac{\beta}{2\pi}-I_{\mathrm{sub}}(\gamma_{E,n})-\frac{1}{2}+O(\hbar),$$

其中 β 是 γ_E 上的 *1*-形式，满足 $\widetilde{\beta}\left(\widetilde{X_{f_0}}\right)=1$，而 $\widetilde{X_{f_0}}$ 是 $\sim f_0$ 的哈密顿向量场。

由于 f 是解析符号，$\sqrt{det}(\alpha_n H_n)\alpha_n$ 在 $\hbar$ 中有展开式，我们将 d_n 记为其主项。于是，在 $\mathfrak{e}$ 附近，μ_n,$0(d_n\mathbb{R})$ 的元素是满足以下条件的数： $P_n(E)$ 的连通分支 $\{f^{-1}(E)\}$ 保持在 x_n 的一个邻域内时，是一个全实拉格朗日子流形。换言之，对于 μ_n,$0(d_n\mathbb{R})$ 中任意接近 $\mathfrak{e}$ 的 E，沿预量子化丛 L 的 $P_n(E)$ 的 *Bohr-Sommerfeld* 类是酉的。

定理 5.4 考虑原像仅由椭圆临界点构成的能量。一般而言，原像还可能包含双曲临界点，甚至正则点。因此，要建立一个普适框架，就需要对这些不同情形进行综合研究。一种思路是将我们的结果与 [11, 15]结合起来，利用双方各自的预解式估计将它们衔接起来。

A 积分路径变形

对傅里叶积分算子的计算涉及积分轮廓的变换，以便应用驻相法。这些计算在 [27, 34], 中有所描述，并依赖于将斯托克斯定理应用于适当的轮廓族。

本小节将在一般框架下详细介绍轮廓变形的方法，并给出其在特定结构中的应用。设 n、$d \in \mathbb{N}^*$、$U \times V \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^d$是 0 的邻域，且 F是定义在 $U \times V$上的全纯函数，使得

$$\begin{aligned} &\forall x \in U,\ \exists! y_0(x) \in V / \ \partial_y F(x, y_0(x)) = 0, \\ &\det\left(\mathrm{Hess}_y\, F(x, y_0(x))\right) \neq 0, \\ &y_0(0) = 0 \end{aligned} \tag{27}$$

定义 A.1. 设 U、W 分别是 $\mathbb{C}^n$ 和 $\mathbb{R}^d$ 的开集。称围道为一族 $(\Gamma(x))_{x\in U}$，由 $\mathbb{C}^d$中的实维数为 d 的子流形组成，且存在实解析函数 γ，使得对所有 $x \in U$，函数 $w \mapsto \gamma($ $x, w)$ 都是一个嵌入，并且 $\Gamma(x)$ $=\{\gamma(x, w)/w \in W\}$。此外，我们在 $\Gamma(x)$ 上考虑由 $d_w\gamma$ (x, w) 将 $\mathbb{R}^d$ 的典范定向映射所得的定向。

设 V是 $\mathbb{C}^n$ 的一个开集，且 F在 $U \times V$上全纯并满足 (27)。若存在 $C > 0$，使得对所有 $\rho > 0$，都存在 $\eta > 0$，满足 $\forall x \in U \cap B_\eta, \forall y \in V \cap \Gamma(x)$ with $|y| \geq \rho$，则称围道 $(\Gamma(x))_{x\in U}$ 对 F是良好的。

$$\Re\left(F(x, y) - F(x, y_0(x))\right) \leq -C|y - y_0(x)|^2.$$

F的良轮廓的同伦是一族围道

$$\Gamma_t(x) = \left\{\gamma(t, x, w) / \ w \in \mathbb{R}^d\right\}$$

满足 γ： $[0,1] \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}^d$ 实解析，且对所有 $0 \leq t \leq 1$， Γ_λ 都是 F 的良好轮廓，并且对所有 $\rho > 0$，$(\Gamma_0 \cap B_\rho) \bigcup (\Gamma_1 \cap B_\rho) \bigcup \left[\left(\bigcup_{0\leq\lambda\leq 1} \Gamma_\lambda(x)\right) \bigcap \partial B_\rho\right]$ 是一个维数为 d 的定向闭实流形。

注意，良好轮廓的定义可以替换为

$$\Re\left(F(x, y) - F(x, y_0(x))\right) \leq -C|y - y_0(x)|,$$

但局部而言，二次公式更为方便，因为借助莫尔斯引理，我们将把问题化简为F二次的情形。

良好轮廓的这一定义是 Sjöstrand 所用概念的一种变体，参见 [37]第 3 章。我们将看到，对同伦良好轮廓上的积分相等，这将简化下一小节中的计算。

例 A.2. 设 F 满足 (27)。根据全纯莫尔斯引理，对于足够小的 $x \in U$，存在一个微分同胚 K_x，使得 y

$$F(x,y) = F(x,y_0(x)) - \left(K_x\left(y - y_0(x)\right)\right)^{\intercal}\left(K_x\left(y - y_0(x)\right)\right).$$

由于依赖于 x，这实际上是一个参数化莫尔斯引理，确切结果将在引理 A.9 中给出。现在，$\Gamma(x) = K_x^{-1}\mathbb{R} + y_0(x)$ 是 $y_0(x)$ 的一个邻域中的良好轮廓。如果该邻域覆盖所有 V，那么 $\Gamma(x)$ 就是一个良好轮廓。此外，对于任意良好轮廓 $\Gamma(x)$，当 $b(x)$ 足够小时，轮廓 $\Gamma(x) + b(x)$ 也是良好的，且 $b(0) = 0$。

命题 A.3. 设 F满足 (27)，且 a 是 $\mathbb{C}^{d+n}$上的全纯函数。若 Γ_0、Γ_1 是关于 F的同伦良好轮廓，则存在 $c > 0$，使得对所有 $\rho > 0$，都存在$\eta > 0$ 和 $\rho > \epsilon > 0$，使得对所有 $x \in B_\eta$

$$e^{-\frac{F(x,y_0(x))}{\hbar}}\int_{\Gamma_0(x)\cap B_\rho} e^{\frac{F(x,y)}{\hbar}}a(x,y)dy = e^{-\frac{F(x,y_0(x))}{\hbar}}\int_{\Gamma_1(x)\cap B_\rho} e^{\frac{F(x,y)}{\hbar}}a(x,y)dy + O\left(e^{-\frac{c(\rho-\epsilon)^2}{\hbar}}\right).$$

证明。 根据假设，存在良好轮廓的同伦 $(\Gamma_t)_{0\le t\le 1}$。我们记

$$L = (\Gamma_0 \cap B_\rho)\bigcup(\Gamma_1 \cap B_\rho)\bigcup\left[\left(\bigcup_{0\le\lambda\le 1}\Gamma_\lambda(x)\right)\bigcap\partial B_\rho\right],$$

那么 L 是一个维数为 d 的定向闭分段光滑实流形。于是，根据斯托克斯定理，对于任意实维数为 $n+1$ 的流形 Ω，只要 $\partial\Omega = L$，

$$\int_\Omega d\left(e^{\frac{F(x,y)}{\hbar}}a(x,y)dy\right) = \int_{\partial\Omega} e^{\frac{F(x,y)}{\hbar}}a(x,y)dy.$$

但是，由于 F 和 a 是全纯的

$$d\left(e^{\frac{F(x,y)}{\hbar}}a(x,y)dy\right) = 0.$$

并且沿着 Γ_λ 定向保持不变，因此

$$\int_{\Gamma_0\cap B_\rho} e^{\frac{F(x,y)}{\hbar}}a(x,y)dy - \int_{\Gamma_1\cap B_\rho} e^{\frac{F(x,y)}{\hbar}}a(x,y)dy = \pm\int_{\left(\cup_{0\le\lambda\le 1}\Gamma_\lambda(x)\right)\bigcap\partial B_\rho} e^{\frac{F(x,y)}{\hbar}}a(x,y)dy.$$

现在，根据良好轮廓的定义，存在 $c > 0$，使得对于所有 $\rho > 0$，都存在 $\eta_1 > 0$，使得对于所有 $x \in B_{\eta_1}$，$|y| \ge \rho$

$$\Re F(x,y) - \Re F(x,y_0(x)) \le -c|y - y_0(x)|^2.$$

此外，由于 $y_0(0) = 0$，对于所有 $\epsilon \in]0,\rho[$，存在 $\eta_2 > 0$，使得对于所有 $x \in B_{\eta_2}$，$|y_0(x)| < \epsilon$。于是，取 $\eta = \min(\eta_1,\eta_2)$，对于所有 $x \in B_\eta$, $y \in \partial B_\rho$

$$\left|e^{\frac{F(x,y)-F(x,y_0(x))}{\hbar}}\right| \leq e^{-C\frac{(\rho-\epsilon)^2}{\hbar}}.$$

因此，根据三角不等式，对于所有 $x \in B_\eta$

$$\left|e^{-\frac{F(x,y_0(x))}{\hbar}}\left(\int_{\Gamma_0\cap B_\rho} e^{\frac{F(x,y)}{\hbar}}a(x,y)dy - \int_{\Gamma_1\cap B_\rho} e^{\frac{F(x,y)}{\hbar}}a(x,y)dy\right)\right| \leq 2\pi\rho\,\|a\|\,e^{-C\frac{(\rho-\epsilon)^2}{\hbar}}.$$

□

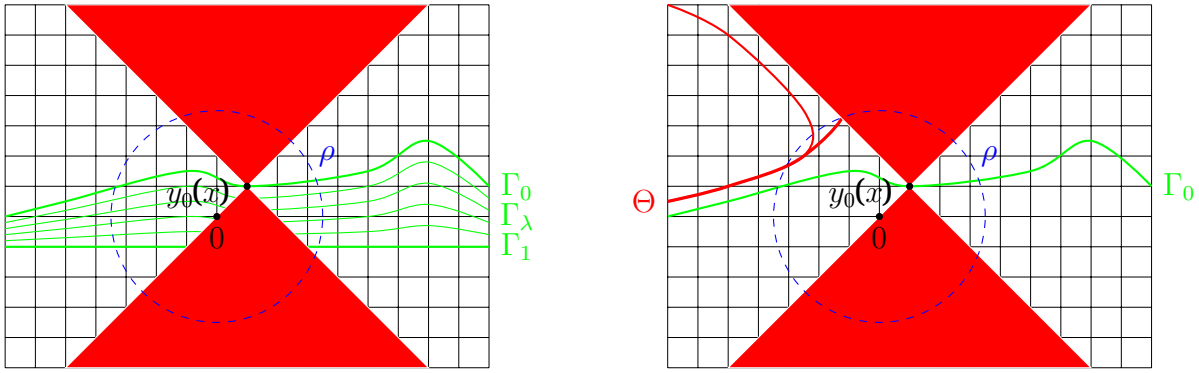

图 3：对于 $F(x,y) = -(y-y_0(x))^2$ 和 $y_0(x) \neq 0$ 的轮廓示例。

图 3 展示了 $F(x,y) = -(y-y_0(x))^2$ 和 $y_0(x) \neq 0$ 的良好轮廓。这里，若一个围道在远离 0 的地方始终位于红色部分之外，则称其为良好围道。例如，在左图中，Γ_t 是良好轮廓的一个同伦。在右图中，Γ_0 和 Θ 都是良好轮廓，但它们不同伦，因为它们之间的任何同伦都会穿过红色部分。

定义 A.4（仿射轮廓）。我们称围道 $\Gamma(x) = \{U(x,w) / \ w \in \mathbb{R}^d\}$ 为仿射的，若对所有 $x \in \mathbb{C}^n$，都存在 $A(x) \in Gl_d(\mathbb{C})$ 和 $b(x) \in \mathbb{C}^d$，使得 $U(x,w) = A(x)w + b(x)$，对所有 $w \in \mathbb{R}^d$均成立。

为了给出关于 $A(x)$ $b(x)$ 的一个等价条件，使仿射轮廓 $\gamma(x) = \{A(x)w + b(x) \ / \ w \in \mathbb{R}^d\}$ 对函数 F 是良好的，我们证明以下引理。

引理 A.5. 设 $H \in Gl_d(\mathbb{C})$ 是实对称的，即 $H^\intercal = H$，则存在$P \in Gl_d(\mathbb{C})$ 对称，使得 $P^\intercal P = P^2 = H$。

证明。记 $(\lambda_j)_{1\leq j\leq k}$ 为 H 的特征值，$(m_j)_{1\leq j\leq k}$ 为其重数，则存在一个多项式 p，使得 p 的前 $m_j - 1$ 阶导数在每个 $j \in \{1,\dots,k\}$ 处都与 $\sqrt{z}$ 的某个分支一致。这意味着 $p^2(X) - X$ 在每个 $j \in \{1,\dots,k\}$ 处都以 m_j 阶消失；根据凯莱–哈密顿定理，$p(H)^2 = H$。由于 H 是对称的，$p(H)$ 也对称，因此有等式 $P = p(H)$。 □

命题 *A.6.* 设 F 是 $\mathbb{C}^{d+n}$ 上次数至多为 *2* 的多项式，并满足 *(27)*。注意，$y \mapsto -F(x,y)$ 的海森矩阵不再依赖于 x，因此设 $P \in Gl_d(\mathbb{C})$ 的海森矩阵为 $P^\intercal P$。设 $\Gamma(x) = A(x)\mathbb{R}^d + b$ 为一个围道。$\Gamma(x)$ 是 F 的良好轮廓，当且仅当存在 $C < 1, \eta > 0$，使得对所有 $|x| < \eta$，实矩阵 $M(x)$ 和$N(x)$ 满足 $M(x) + iN(x) = PA(x)$，且在算子范数意义下有 $\|N(x)M(x)^{-1}\| \leq C$，并且$y_0(0) \in \Gamma(0)$。根据构造，M, N 是解析的，因此这等价于 $\|N(0)M(0)^{-1}\| < 1$，并且 $y_0(0) \in \Gamma(0)$。

证明。根据定义，$F(x,y) = F(x,y_c(x)) - (P(y-y_0(x)))^2,$，并回忆

$$\Re(y^2) = \Re\left(\sum_{1\le j\le d} y_j^2\right) = \sum_{1\le j\le d} \Re(y_j)^2 - \Im(y_j)^2.$$

假设 $\|N(0)M(0)^{-1}\| \ge 1$，那么存在 $t_0 \in \mathbb{R}^d$，使得 $(N(0)t_0)^2 \ge (M(0)t_0)^2,$，因此对于 $l \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
&\Re\left(F(0,A(0)lt_0+b(0)) - F(0,y_0(0))\right)\\
=&-\Re\left(\left[\left(M(0)+iN(0)\right)lt_0 + P(0)(b(0)-y_0(0))\right]^2\right)\\
=&l^2\left((N(0)t_0)^2-(M(0)t_0)^2\right) - l2\Re\left\langle (M(0)+iN(0))t_0, P(0)(b(0)-y_0(0))\right\rangle\\
&-\Re\left(\left[P(0)(b(0)-y_0(0))\right]^2\right),
\end{aligned}$$

这个量要么对某个 l 为正，要么为常数。这两种情况都与良好轮廓的定义矛盾。现在，假设 $\|N(0)M(0)^{-1}\| < 1$，但 $y_0(0) \notin \Gamma(0)$，那么我们总可以通过 $A(x)\mathbb{R}^d$ 的元素将 $b(0)$ 平移，使得 $P(0)(b(0)-y_0(0)) \neq 0$ 与 $P(0)A(0)\mathbb{R}^d$ 在 $\mathbb{C}^d$ 中正交。于是，对于所有 $t \in \mathbb{R}^d$，都有 $\Re\left((P(0)A(0)t)^2\right) > 0$，且由正交性可知 $\Re\left(\left[P(0)(b(0)-y_0(0))\right]^2\right) < 0$，那么

$$\begin{aligned}
&\Re\left(F(0,A(0)t+b(0)) - F(0,y_0(0))\right)\\
=&-\Re\left(\left[P(0)A(0)t + P(0)(b(0)-y_0(0))\right]^2\right)\\
=&\Re\left((P(0)A(0)t)^2\right) - \Re\left(\left[P(0)(b(0)-y_0(0))\right]^2\right)\\
>&0.
\end{aligned}$$

这与良好轮廓的定义矛盾。根据逆否命题，我们证明了任意良好轮廓都满足 $\|N(0)M(0)^{-1}\| < 1$ 且 $y_0(0) \in \Gamma(0)$。

现在，假设 M, N满足 $\|N(0)M(0)^{-1}\| < 1$，且 $y_0(0) \in \Gamma(0)$，那么由于 b是解析的，我们可以将其写成 $b(x) = y_0(x) + d(x)$，其中 $|d(x)| \to 0$ 为 $|x| \to 0$。我们固定

$$0 < C < \frac{1-\|N(0)M(0)^{-1}\|^2}{8\left(1+\|N(0)M(0)^{-1}\|^2\right)}\|P(0)\|^{-2}.$$

令 $\rho > 0$，则对于所有满足 $|A(x)t+b(x)| \ge \rho$ 的 $t \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned}
&\Re\left(F(x,A(x)t+b(x)) - F(x,y_0(x))\right)\\
=&\Re\left((N(x)t)^2-(M(x)t)^2\right) - 2\Re\langle (M(x)+iN(x))t, P(x)d(x)\rangle\\
&-\Re\left(\left[P(x)d(x)\right]^2\right)\\
\le&-\left(1-\left\|N(x)M(x)^{-1}\right\|^2\right)|M(x)t|^2\\
&+2\left|(M(x)+iN(x))t\right|\left|P(x)d(x)\right| - \Re\left(\left[P(x)d(x)\right]^2\right)\\
\le&-\frac{1-\|N(x)M(x)^{-1}\|^2}{1+\|N(x)M(x)^{-1}\|^2}\|P(x)\|^{-2}|A(x)t|^2\\
&+2\|P(x)\|^{-1}|A(x)t|\,|P(x)d(x)| - \Re\left(\left[P(x)d(x)\right]^2\right).
\end{aligned}$$

于是，由于 $|A(x)t+b(x)| = |A(x)t+y_0(x)+d(x)| \geq \rho$，且 $|y_0(x)| \to 0$，当 $|x| \to 0$ 时，$|d(x)| \to 0$，因此存在 η，使得对于所有 $|x| \leq \eta$,

- $C \leq \frac{1-\left\|N(x)M(x)^{-1}\right\|^2}{8\left(1+\|N(x)M(x)^{-1}\|^2\right)} \|P(x)\|^{-2}$,
- $|A(x)t| \geq \frac{\rho}{2}$,
- $|d(x)| \leq |A(x)t|$,
- $4C|y|^2 \geq 2\|P(x)\|^{-1}|P(x)d(x)||y| - \Re\left([P(x)d(x)]^2\right)$ for all $|y| \geq \frac{\rho}{2}$.

最后，我们得到

$$\begin{aligned}
&\Re\left(F(x,A(x)t+b(x)) - F(x,y_0(x))\right)\\
\leq& -8C|A(x)t|^2 + 2\|P(x)\|^{-1}|P(x)d(x)||y| - \Re\left([P(x)d(x)]^2\right)\\
\leq& -4C|A(x)t|^2\\
\leq& -C\left|A(x)t+d(x)\right|^2\\
=& -C\left|A(x)t+b(x)-y_0(x)\right|^2
\end{aligned}$$

因此，$\Gamma(x)$ 是一条良好轮廓。 □

命题 *A.7.* 设 F 在 $\mathbb{C}^{d+n}$ 上是二次的且满足 *(27)*，则所有仿射良好轮廓在忽略方向改变的意义下彼此同伦。更确切地说，设 a 在 $\mathbb{C}^{d+n}$ 上全纯，$\Gamma_0(x) = A_0(x)\mathbb{R}^d + b_0(x)$ 且 $\Gamma_1(x) = A_1(x)\mathbb{R}^d + b_1(x)$，其中 $A_0(x)\ A_1(x) \in Gl_d(\mathbb{C})$。分别记 $d_0(x)$ 和 $d_1(x)$ 为 $\det(\Re(PA_0(x)))$ 和 $\det(\Re(PA_1(x)))$ 的符号，其中 $P(x) \in Gl_d(\mathbb{C})$ 满足：$P(x)^\intercal P(x)$ 是 $y \mapsto -F(x,y)$ 的海森矩阵。那么，存在 $c>0$，使得对所有 $\rho>0$，都存在 $\eta>0$，使得对所有 $|x|<\eta$,

$$d_0 \int_{\Gamma_0 \cap B_\rho} e^{F(x,y)-F(x,y_0(x))} a(x,y)dy = d_1 \int_{\Gamma_1 \cap B_\rho} e^{F(x,y)-F(x,y_0(x))} a(x,y)dy + O(e^{-\frac{c}{\hbar}}).$$

证明。我们只考虑一个仿射良好轮廓 $\Gamma(x) = A(x)\mathbb{R}^d + b(x)$，并将证明它与 $P(x)^{-1}\mathbb{R}^d + y_0(x)$ 同伦。根据命题 A.6，$A(x) = P(x)^{-1}(M(x) + iN(x))$，其中 $\|N(0)M(0)^{-1}\| < 1$，算子范数满足此条件，且 $y_0(0) \in \Gamma(0)$。随后可分四部分构造该同伦，

1 $A(x)\mathbb{R}^d + (1-t)b(x) + \lambda y_0(x)$。

2 $P(x)^{-1}(M(x) + i(1-t)N(x))\mathbb{R}^d + y_0(x)$.

3 如果 $M(x)$ 和 I_d 不在 $Gl_d(\mathbb{R})$ 的同一连通分支中，就乘以系数为 $(-1,1,\ldots,1)$ 的对角矩阵；否则不做任何操作。

4 $P^{-1}M_t(x)\mathbb{R}^d + y_0(x)$，其中 $M_t(x)$ 是从 $M(x)$ 到 Id_d 在 $Gl_d(\mathbb{R})$ 中的同伦。

根据命题 A.6，步骤 1、2 和 4 均成立。因此，对步骤 1、2 和 4 应用命题 A.3，即可得到等式。步骤 3 通过变量替换完成：将一个变量乘以 $\frac{d_1}{d_0}$，这相应地改变了积分的符号。

图 4 展示了一维情形下的步骤 1 和 2。步骤 3 只需改变积分方向，而步骤 4 仅在更高维情形下才有必要。

□

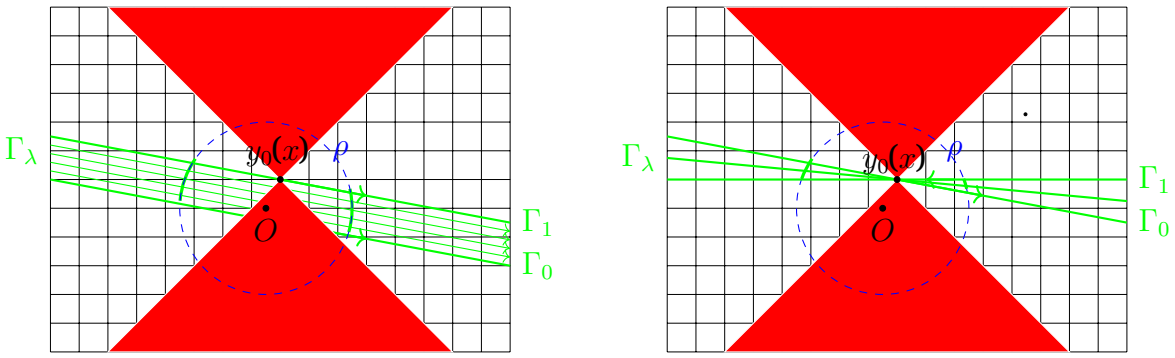

图 4：命题 A.7 证明的步骤 1 和 2。

引理 A.8。 若 $F = -y^2$，对于任意良好轮廓 $\Gamma_x = \{\gamma_x(t) \in U / \ t \in \mathbb{R}^d\}$ 使得 $\gamma_0 = 0$ $\gamma_x' \ 0 \ \mathbb{R}^d + \gamma_x \ 0$ F Γ_x (0)，围道 $()()$ 对 也同样是良好的，并且它与 同伦。

证明。 根据假设，存在 $C > 0$，使得对于所有满足 $\gamma_x(v) \in U$ 的 $v \in \mathbb{R}^d$，

$$-\Re(\gamma_0(v)^2) \leq -C|\gamma_0(v)|^2$$

且由于 $\gamma_0(0) = 0$，当 v 足够小时

$$(\Im(\gamma_0'(0))v)^2 - (\Re(\gamma_0'(0))v)^2 + O(|v|^3) \leq 0.$$

因此 $\|\Im(\gamma_0'(0))\Re(\gamma_0'(0))^{-1}\| < 1$，由连续性可知，当 x 足够小时，这一结论仍然成立，所以 $\gamma_x'(0)\mathbb{R}^d + \gamma_x(0)$ 根据命题 A.6 是一个良好轮廓。因此，存在 $\alpha > 1$，使得对于所有 $0 \leq t \leq 1$ 和 $v \in \mathbb{R}^d$，若 $y = \lambda(\gamma_0'(0)v + \gamma_0(0)) + (1-t)\gamma_0(t)$，则 $\Re(y) \geq \alpha\Im(y)$，从而 $-\Re(y^2) \leq -\frac{\alpha^2-1}{\alpha^2+1}|y|^2$。因此，由连续性可知，对于所有 $0 \leq t \leq 1$，只要 x 足够小，$(t(\gamma_x'(0) \cdot + \gamma_x(0)) + (1-t)\gamma_x) \ \mathbb{R}^d$ 就是一个良好轮廓。□

引理 A.9 （参数化莫尔斯引理）。 设 F 为全纯函数并满足 （27）。则存在 η、$\rho > 0$ 以及定义在 $B_\eta \times B_\rho$ 上的全纯函数 K，使得

$$F(x, K_x(y)) = F(x, y_0(x)) - y^2.$$

此外，对于所有 $x \in B_\eta$，函数 K_x 都是局部微分同胚。

证明。根据定义，在固定 $x \in U$ 时，函数 $y \mapsto F(x, y + y_0(x)) - F(x, y_0(x))$ 在 0 处有一个非退化临界点，因此根据泰勒定理，存在全纯函数 $(g_j)_{1\leq j\leq d}$，使得 $F(x, y + y_0(x)) - F(x, y_0(x)) = -\sum g_{j,k}(x,y)y_j y_k$ 对于 $1\leq j, k\leq d$ 所有 $(x, y) \in U \times V$。此外，$g_{j,k}(x, 0) = -\frac{1}{2}\partial^2_{y_j,y_k}F(x, y_0(x))$ 构成一个非退化矩阵，因此存在 $\eta, \rho > 0$，使得二次型 $\xi \mapsto \sum g_{j,k}(x,y)\xi_j\xi_k$ 对于所有 $(x, y) \in B_\eta \times B_\rho$ 都是 $1\leq j,k\leq d$ 非退化的。对于这样的 x, y，存在一个线性映射 $M_{x,y}$，将二次型化为 $\sum \xi_j^2$，并且关于 $x^{1\leq j\leq d}$ 和 y 是全纯的，其中 η, ρ 足够小。于是，对于所有 $x \in B_\eta$，利用局部反函数定理，

$$G_x : y \mapsto M^{-1}_{x,y}(y)$$

是一个局部全纯变量变换，使得 $F(x, G_x^{-1}(y) + y_0(x)) = F(x, y_0(x)) - y^2$，因此 $K_x(y) = G_x^{-1}(y) + y_0(x)$。□

命题 A.10。 设 F 是满足(27) 的全纯函数，并且对 $j = 0,1$，令$\Gamma_j = \{\gamma_j(x,y)\}$ 为良好轮廓，使得 $\gamma_j(0,0) = y_0(0)$。那么 Γ_0 和 Γ_1 在方向改变意义下同伦。

证明。 根据引理 A.9，存在 ρ、$\eta > 0$ 和 K，使得对于所有 $x \in B_\eta$，我们都可以在 B_ρ 上应用变量替换 $y \mapsto K_x(y)$，将 F 变为 $-y^2$，并使 F 的良好轮廓局部变为 $-y^2$ 的良好轮廓，其形式为 $\{\mu_j(x,y)\}$，且 $\mu_j(0,0) = 0$。因此，从现在起可以假设 $F = -y^2$。接着，根据引理 A.8，对于 $j = 0$，1，Γ_j 与 $\Gamma'_j = \partial_y\gamma_j(x,0)\mathbb{R}^d + \gamma_j(x,0)$ 同伦。最后，根据命题 A.7，轮廓 Γ'_j 在方向改变后彼此同伦。 □

注释 A.11。我们证明了，如果两条良好轮廓对于 $x = 0$ 都经过 $y_0(0)$，那么它们同伦，因此相应的积分在相差一个小余项的意义下相等。现在，如果它们始终远离 $y_0(x)$，相应的积分就会指数级小，因此这些积分仍在相差一个小余项的意义下相等。

实际上，其他小节中出现的积分会有更具体的设定。我们主要考虑在 $\mathbb{C}^d$ 上对实解析函数进行积分。因此，我们考虑以下框架。

定义 A.12. 设 (M,J) 是一个复流形，其复化 M 是 $M\times\overline{M}$ 中对角线的一个小邻域，并赋有复结构 $(J,-J)$。在局部坐标中，我们用 $f(x,\overline{y})$ 表示 M 上的全纯函数。设 f 是 M 上的一个实解析函数，且 $x_0 \in M$，则存在唯一的全纯函数 f，定义在 M 中 $(x_0,\overline{x_0})$ 的某个邻域上，使得 $f(x,\overline{x}) = f(x)$，称为 f 的全纯延拓。关于这些对象的详细构造，参见 [11]；我们总是可以使用局部坐标，以及下文所述的在 $\mathbb{C}^d$ 上的构造。

引理 A.13。 考虑 $M = \mathbb{C}^d$，若 f 是定义在 B_ρ 上的实解析函数，且满足 $\rho > 0$，那么存在 $\eta \in]0,\ \rho]$，并且存在定义在 B_η 上的唯一全纯函数 f，使得 $f|_{\mathcal{D}_\eta} = f$。

证明。 根据定义，存在 $\eta \in]0,\ \rho]$，使得 $f(z) = \sum_{k,\ l=0}^{+\infty} \frac{\partial^k\overline{\partial}^l f_{(0)}}{k!l!} z^k\overline{z}^l$ 对所有 $z \in B_\eta$ 均成立，并且该级数一致收敛。因此，$\widetilde{f}(z,\overline{w}) = \sum_{k,\ l=0}^{+\infty} \frac{\partial^k\overline{\partial}^l f_{(0)}}{k!l!} z^k\overline{w}^l$ 可行。 □

引理 *A.14*。设 ϕ_1、ϕ_2 是定义在 $\mathbb{C}^{d+n}$ 上的实解析函数，使得对于 x 在 *0* 的某个邻域内且$j = 1$，*2*，函数 $z \mapsto \Re\phi_j(x,z)$ 有唯一的临界点 $z_j(x)$，其符号为 $(0,-2n)$，且 $z_j(0) = 0$。进一步假设 $\partial_z(\phi_1+\phi_2)(0,0) = 0$，$\partial_z(\phi_1+\phi_2)(0,0) = 0$，那么记 $F(x,z,\overline{v}) = \left(\widetilde{\phi_1} + \widetilde{\phi_2}\right)(x,\overline{x},z,\overline{v})$，则存在 ρ、$\sigma > 0$，使得将 F 限制在$B_\sigma \times B_\rho$ 上后满足 *(27)*。

证明。 根据假设，$\mathrm{Hess}_z\,\Re(\phi_1+\phi_2)(0,0)$ 非退化，因此 $\mathrm{Hess}_{z,\overline{v}}F(0,0)$ 也非退化。由隐函数定理，存在 $\rho,\sigma > 0$，使得对于所有 $|x| \leq \sigma$，$F(x,\cdot)$ 在 B_ρ 上都有唯一的临界点 $(z_c(x)\ \overline{v_c}(x))$。根据假设，$z_0(0) = 0$，$\overline{v_c}(0) = 0$。因此，限制在 $B_\sigma \times B_\rho$ 上的 F 满足 (27)。 □

命题 *A.15.* 设 ϕ_1、ϕ_2 在 $\mathbb{C}^{d+n}$ 上实解析，使得对于 x，在 *0* 的某个邻域内且 $j = 1$，函数 $z \mapsto \Re\phi_j(x,z)$ 有唯一的临界点 $z_j(x)$，其符号为 $(0,-2n)$，并且 $z_j(0) = 0$。进一步假设 $\partial_z(\phi_1+\phi_2)(0,0) = 0$，$\overline{\partial}_z(\phi_1+\phi_2)(0,0) = 0$，并采用引理 *A.14* 的记号。那么，

$$\begin{aligned}&\int_{B_\rho} e^{\frac{\phi_1(x,z)+\phi_2(x,z)}{\hbar}} a(x,z)dz\\ =&e^{\frac{F(x,z_c(x),\overline{v_c}(x))}{\hbar}}\left(\int_{B_\rho} e^{-\frac{|y|^2}{\hbar}} s(y,\overline{y})\widetilde{a}\left(x,\overline{x},K_x(y,\overline{y})\right)dy+O(e^{-\frac{c}{\hbar}})\right),\end{aligned}$$

其中 K_x 满足 $F(x,\ K_x(z,\ \overline{v}))\ =\ F(x,\ z_c(x)\ \overline{v_c}(x))\ -\ z\overline{v}$, 特别是 $K_x(0,\ 0)\ =(z_c(x)\overline{v_c}(x))$，并且

$$s(0,0)=\left(-\det \mathrm{Hess}_{y,\overline{v}} F\left(x,z_c(x),\overline{v_c}(x)\right)\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

证明。根据引理 A.14，存在 $\rho,\sigma\ >\ 0$，使得 F 在$B_\sigma\times B_\rho$上满足 (27)，这等价于存在 $(z_c(x)\overline{v_c}(x))$。由于 $z_j(x)$ 是符号为 $(0,-2n)$ 的临界点，我们可以取更小的 σ,ρ，使得

$$\Re(\phi_j(x,z)-\phi_j(x,z_j(x)))\le -c_j|z-z_j(x)|$$

对所有 $|x|\le\sigma$ 和 $|z|\le\rho$，其中 $c_j>0$。于是，记 $c=\min(c_1,c_2)/4$，并考虑$\rho'\in]0,\rho[$，则对于 $|z|\ge\rho'$

$$\begin{aligned}&\Re F(x,z,\overline{z})-\Re F(x,z_c(x),\overline{v_c}(x))\\ \le&-c_1|z-z_1(x)|^2-c_2|z-z_2(x)|^2+\Re\phi_1(x,z_1(x))+\Re\phi_2(x,z_2(x))-\Re F(x,z_c(x),\overline{v_c}(x))\\ \le&-\frac{c_1}{2}|z-z_c(x)|^2-\frac{c_2}{2}|z-v_c(x)|^2+c_1|z_1(x)-z_c(x)|^2+c_2|z_2(x)-v_c(x)|^2\\ &+\Re\phi_1(x,z_1(x))+\Re\phi_2(x,z_2(x))-\Re F(x,z_c(x),\overline{v_c}(x))\\ \le&-c\left(|z-z_c|^2+|v-v_c|^2\right)\end{aligned}$$

当 x 足够小时，由于 $|z_1(x)|,|z_2(x)|,|z_c(x)|,|v_c(x)|\to 0$，当 $|x|\to 0$ 时。这意味着 $\mathcal{D}$ 是 F 的良好轮廓。根据引理 A.9，存在一个微分同胚 K_x，使得当 $(z,\overline{v})$ 足够小时

$$F\left(x,K_x(z,\overline{v})\right)=F(x,z_c(x),\overline{v_c}(x))-z\overline{v}.$$

对于 $x\in B_\eta$，利用引理 A.13 和变量替换 K_x

$$\begin{aligned}&\int_{B_\rho} e^{\frac{\phi_1(x,z)+\phi_2(x,z)}{\hbar}} a(x,z)dz\\ =&\int_{\mathcal{D}_\rho} e^{\frac{F(x,z,\overline{v})}{\hbar}}\widetilde{a}(x,z,\overline{v})dz\wedge d\overline{v}\\ =&e^{\frac{F(x,z_c(x),\overline{v_c}(x))}{\hbar}}\int_\Gamma e^{-\frac{y\overline{w}}{\hbar}} s(y,\overline{w})\widetilde{a}\left(x,\overline{x},K_x(y,\overline{w})\right)dy\wedge d\overline{w},\end{aligned}$$

其中 $\Gamma\ =\ K_x^{-1}(\mathcal{D}_\rho)$ 和 $s(z,\overline{v})\ =$行列式 $\nabla_{z,\ \overline{v}}K_{x\circ}$ 不过，对于 σ，当 ρ 足够小时，存在 ρ'，使得对所有 $x\in B_\eta$

$$\Gamma\supset K_x^{-1}\left(\mathcal{D}-(z_c(x),\overline{v_c}(x))\right)\cap B_{\rho'},$$

并且由于这个新集合之外的积分可以忽略，且 $\mathcal{D}$ 是$-z\overline{v}$的良好轮廓，我们可以应用命题 A.10

$$\begin{aligned}&\int_{\Gamma} e^{-\frac{y\overline{w}}{\hbar}} s(y,\overline{w})\widetilde{a}\left(x,\overline{x},K_x(y,\overline{w})\right)dy\wedge d\overline{w}\\ &=\pm\int_{B_{\rho'}} e^{-\frac{|y|^2}{\hbar}} s(y,\overline{y})\widetilde{a}\left(x,\overline{x},K_x(y,\overline{y})\right)dy+O(e^{-\frac{c}{\hbar}}).\end{aligned}$$

那么，可以选择 K_x 使符号为正；此时它与恒等映射同伦，且由于

$$\left(\nabla_{0,0}K_x\right)^{\intercal}\operatorname{Hess}_{y,\overline{v}}F\left(x,z_c(x),\overline{v_c}(x)\right)\nabla_{0,0}K_x=\begin{pmatrix}0 & -I_d\\ -I_d & 0\end{pmatrix},$$

这意味着 $\det\nabla_{0,\ 0}K_x=(-\det$ 海森矩阵$_{y,\ \overline{v}}F(x,z_c(x)\ \overline{v_c}(x)))^{-\frac{1}{2}}$。 □

B 参考文献

[1] S. Agmon. 关于一般椭圆边值问题的特征函数与特征值。《纯粹与应用数学通讯》, 15(2):119–147, 1962 年。doi: 10.1002/cpa.3160150203.[2] D. Borthwick and A. Uribe. 关于 Berezin–Toeplitz 算子的伪谱。《分析方法与应用》, 10:031–066, 2003年。url: https://api.seman ticscholar.org/CorpusID:2081225.[3] L. Boutet De Monvel. 解析伪微分算子与无穷阶算子。《傅里叶研究所年刊》, 22(3):229–268, 1972年。doi: 10.5802/a if.429.[4] L. Boutet De Monvel and P. Krée. 伪微分算子与 Gevrey 类。《傅里叶研究所年刊》, 17(1):295–323, 1967年。doi: 10.5802/aif.258.[5] L. Charles. 解析 Berezin–Toeplitz 算子。《数学杂志》, 299:1015–1035, 2019年。url: https : / / api . semanticscholar . org / CorpusID : 209376780.[6] L. Charles. Toeplitz 算子的拟模与玻尔–索末菲条件。《纯粹与应用数学通讯》, 28:1527–1566, 2003年。doi: 10.1081/PDE-120024521.[7] Y. Colin de Verdiere and J. Vey. 等容莫尔斯引理。《拓扑学》, 18(4):283–293, 1979年。doi: 10.1016/0040-9383(79)90019-3.[8] Y. Colin de Verdière and B. Parisse. 半经典状态下的不稳定平衡。II. 玻尔–索末菲条件。《亨利·庞加莱研究所理论物理年刊》, 61(3):347–367, 1994 年。url: https : / / www . numdam .org / item /AIHPA _1994__61_3_347_0/.[9] B. Davies. 非自伴薛定谔算子的半经典态。《数学物理通讯, 200(1):35–41, 1999 年。doi: 10.1007/s002200 050521.

[10] A. Deleporte. 具有解析符号的 Toeplitz 算子。《几何分析杂志》, 31(4):3915–3967, 2021年。doi: 10.1007/s12220-020-00419-w.[11] A. Deleporte and Y. Le Floch. 非自伴 Berezin–Toeplitz 算子的正则玻尔–索末菲规则与复拉格朗日态, 2025年。arXiv: 2504.00965 [math.SP]。url: https://arxiv.org/abs/2504.00965.[12] A. Deleporte and S. V˜u Ngo. c. 相空间闭环上半经典势阱的谱渐近一致性。《数学研究》, 32, 2020年。doi: 10.1016/j .indag.2020.06.007.[13] A. Deleporte and S. Zelditch. Mabuchi 空间凯勒度量的实解析测地线与量子化，2024年。arXiv: 2210.00763 [math.DG]。[14] N. Dencker, J. Sjöstrand, and M. Zworski. 半经典（伪）微分算子的伪谱，2003年。arXiv: math /0301242。url: https ://arxiv.org/abs/math/0301242.[15] A. Duraffour. 即将发表的文章，2025年。[16] H. Hezari and H. Xu. 关于凯勒势为解析函数时伯格曼核的一种性质。《太平洋数学杂志》, 313(2):413–432, 2021 年。doi: 10.214 0/pjm.2021.313.413.[17] M. Hitrik. 一维半经典算子的边界谱行为。《国际数学研究通讯》, 2004(64):3417–3438, 2004年。doi: 10.1155/S1073792804140233.[18] M. Hitrik, J. Sjostrand, and J. Viola. 椭圆二次微分算子的预解估计。《分析与偏微分方程》, 6, 2011年。doi: 10.2140/apde.2013.6.181.[19] M. Hitrik and J. Sjöstrand. 二维自伴算子的非自伴扰动 I。《亨利·庞加莱年刊》, 5:1–73, 2003 年。url: https://api.sema nticscholar.org/CorpusID:2713314.[20] M. Hitrik, J. Sjöstrand, and S. V˜u Ngo. c. 非自伴算子的丢番图环面与谱渐近, 2005年。arXiv: math/0502032。url: https://a rxiv.org/abs/math/0502032.[21] M. Hitrik and M. Zworski. 史瓦西黑洞的过阻尼准正规模，2024年。arXiv: 2406.15924 [math-ph]。[22] L. Hörmander. 具有复相位的傅里叶积分算子的 L2 估计。《数学档案》, 21(1–2):283–307, 1983年。doi: 10.1007/BF02384316.[23] Y. Le Floch. 紧凯勒流形上 *Berezin–Toeplitz* 算子简明导论。CRM 短期课程。Springer Nature Switzerland AG 2018，第一版，2018年。140页。isbn: 978-3-319-94681-8。doi: 10.1007/978-3-319-9468 2-5.[24] Y. Le Floch. 一维托普利兹算子的奇异玻尔–索末菲条件：椭圆情形。《纯粹与应用数学通讯》, 39(2):213–243, 2014年。doi: 10.1080/03605302.2013.845045.[25] Y. Le Floch. 一维托普利兹算子的奇异玻尔–索末菲条件：双曲情形。《分析与偏微分方程》, 7(7):1595–1637, 2014年。doi: 10.2140/apde.2014 .7.1595.

[26] A. Martinez。《半经典分析与微局部分析导论》。Univer- sitext。Springer Science+Business Media New York，2002年，第1版，2002年。191页。isbn：978-1-4419-2961-7。doi：10.1007/978-1-4757-4495-8。[27] A. Melin 和 J. Sjöstrand。带复值相位函数的傅里叶积分算子。载于 J. Chazarain（编），《傅里叶积分算子与偏微分方程》，第120–223页，柏林、海德堡。Springer Berlin Heidelberg，1975年。isbn：978-3-540-37521-0。doi：10.1007/BFb0074195。[28] K. Pravda-Starov。椭圆二次微分算子的伪谱。《杜克数学杂志》，145，2007年。doi：10.1215/00127094-2008-051。[29] D. Robert 和 B. Helffer。椭圆量子哈密顿量谱的半经典行为。《傅里叶研究所年刊》，31(3)：169–223，1981年。doi：10.5802/aif.844。[30] O. Rouby。非自伴半经典算子的 Bohr-Sommerfeld 量子化条件。博士论文，雷恩第一大学，2016年。221页。[31] O. Rouby、J. Sjöstrand 和 S. V˜u Ngo。c。半经典极限下的解析伯格曼算子。《杜克数学杂志》，169(16)：3033–3097，2020年。doi：10.12 15/00127094-2020-0022。[32] J. Sjöstrand。与全局 i-拉格朗日流形相关的函数空间。载于《微分方程解的结构：片田／京都，1995》，新加坡，第369–423页。世界科学出版社，1996年。isbn：978-981-4549-04-2。[33] J. Sjöstrand。讲义：非自伴算子的谱性质。偏微分方程研讨会，2009年。doi：10.5802/jedp.54。[34] J. Sjöstrand。《非自伴微分算子、谱渐近与随机扰动》，《伪微分算子》第14卷。Birkhäuser Cham，第1版，2019年。X，496页。isbn：978-3-030-10818-2。url：https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-030-10819-9。[35] J. Sjöstrand。具有多个特征的伪微分算子的参数子。《数学档案》，12(1-2)：85–130，1974年。doi：10.1007/BF02384749。[36] J. Sjöstrand。非退化势阱中的半激发态。《渐近分析》，6(1)：29–43，1992年。doi：10.3233/ASY-1992-6102。[37] J. Sjöstrand。微局部解析奇点，《Astérisque》第95号。法国数学学会，1982年。url：http://www.numdam.org/item/AST_1982__95__R3_0/。[38] L. Trefethen 和 M. Embree。《谱与伪谱：非正规矩阵与算子的行为》。2005年。isbn：978-0-691-11946-5。doi：10.2307/j.ctv zxx9kj。[39] J. Vey。关于 Morse 引理。《数学发明》，40(1)：1–9，1977年。doi：10.1007/BF01389858。[40] J. Viola。部分椭圆二次微分算子的谱投影与预解算子界。《伪微分算子与应用杂志》，4：145–221，2013年。doi：10.1007/s11868-013-0066-0。

[41] S. V˜u Ngo。c。完全可积系统在动量映射临界点邻域的半经典正规形。《渐近分析》，24(3-4)：319–342，2000年。doi：10.3233/ASY-2000-419。[42] M. Zworski。关于 E. B. Davies 一篇论文的评论。《美国数学学会会刊》，129(10)：2955–2957，2001年。JSTOR：2668829。url：http://www.jstor.org/stable/2668829（访问日期：2025年6月27日）。[43] M. Zworski。《半经典分析》，《研究生数学》第138卷。美国数学学会，2012年。isbn：978-0-8218-8320-4。