arXiv:2603.15098v1 [math.CV] 16 Mar 2026

平面上的一致化问题：综述

DIMITRIOS NTALAMPEKOS

Abstract. 本文综述了复平面中若干基本（拟）共形一致化问题的历史与最新进展。 *Uniformization* 指的是通过性质良好的变换，将一个空间映射到某个典范模型的过程；这种变换既保留几何性质，又以可控的方式改变形状。该领域的一个核心问题是 Koebe 猜想。近 120 年来，这一猜想始终未获证明；它预言每个平面域都可以共形映射到一个 *circle domain*——也就是说，映射到一个补分支为点或闭圆盘的区域。我们追溯这一猜想的历史，概述近期进展，并探讨相关的唯一性问题。我们还讨论了这一问题的变体，尤其关注一个紧集能否通过平面的拟共形自映射映到一个 *Schottky set*——也就是说，映到平面中补集为互不相交的开圆盘之并的集合。

Contents

1. 引言 2 致谢 3 2. 通过圆域进行共形一致化 4 2.1. Koebe猜想 4 2.2. 通过其他类型的区域进行一致化 5 2.3. 一致化的几何条件 6 2.4. 共形刚性 10 2.5. 通过穷竭进行一致化 13 3. 通过 Schottky 集进行拟共形一致化 15 3.1. 拟共形映射 15 3.2. 拟圆盘 16 3.3. 拟共形环域 16 3.4. Schottky 集 18 3.5. Schottky集的刻画 24 3.6. 再探拟共形环域 25 参考文献 28

Date：2026年3月17日。2020 *Mathematics Subject Classification.*主分类：30C20、30C35、30C62、30C65、30F10、30F45、37F10、37F31、37F32；次分类：30L10、30F99。
Key words and phrases. 一致化、圆域、共形、Koebe 猜想、一致域、cofat域、cos preaddomain、Gromov 双曲、穷竭、共形刚性、共形可去性、拟共形、拟圆盘、拟圆、拟环域、相切拟圆、Schottky 集、Sierpi ́nski 地毯、垫片、朱利亚集、相对双曲距离。作者的部分研究经费由ERC启动基金（协议编号 101214615，GRComPaS）资助。

1. Introduction

这篇综述旨在介绍复平面上一致化问题的历史和最新进展。“一致化”一词源于 Koebe [Koe07c,Koe07a,Koe07b], 的工作，他在其中证明了经典一致化定理：每个单连通黎曼曲面都与黎曼球面、复平面或单位圆盘保角等价。该术语也出现在 Koebe 的另一项工作 [Koe08,Koe20] 中，与圆域一致化问题，也就是*Koebe* 猜想有关。该猜想断言，黎曼球面上的每个区域都与某个圆域保角等价。我们将在第 2 节详细讨论这一问题。因此，按照 Koebe 的说法，“一致化”指的是将曲面或区域共形变换为某个典范对象。

更一般地，我们可以使用超出保角映射范畴的其他类型映射。由此，对于平面或球面的子集，我们得到以下一般问题，这也是本文研究的核心对象。

问题 1.1。 我们能否将平面或球面的一个子集转化为具有更好几何性质的典范集，并以一种可控的方式进行，同时避免过度畸变？

非正式地说，这个问题是在询问：一个集合能否像由橡胶制成的一样，被变形成一个易于理解且更为光滑的集合。例如，典范集 可以是圆盘、圆、直线、环域等。

这类结果的一个例子是黎曼映射定理。该定理断言，每个作为复平面真子集的单连通域，都可以通过共形映射变换为单位圆盘。除了诸多重要推论之外，这一定理还使我们能够在任意单连通域上定义调和测度。因此，像问题 1.1 中所述的良性变换的存在性，使我们能够借助典范且更为光滑的集合中可用的工具来研究原集合。

在问题 1.1 中，我们需要明确以受控的方式变换一个集合意味着什么。这本质上就是要指定变换中所用映射的类型。最合适的映射类别取决于所考虑的集合。例如，可以使用双利普希茨映射，它们近似保持长度；也可以使用保角映射，它们保持角度。然而，对于将一个可能具有无限长度的非光滑分形集变换为更光滑的集合，这些映射并不适用。为此，我们需要转而采用更一般的映射类别。例如，可以使用拟共形映射，以受控的方式扭曲角度；也可以使用拟对称映射，以受控的方式扭曲形状。以下章节将详细介绍后两类映射。

我们从两个一般方向研究问题 1.1。在第 2 节中，我们考虑将平面中的区域保角地变换为典范区域的问题，例如圆盘、环域，或更一般地说，圆域。如前所述，这个问题称为 Koebe 猜想。我们按历史顺序介绍了若干关于该猜想的部分结果。我们还讨论这类保角变换的唯一性；这一问题与圆域的共形刚性以及 He 和 Schramm 的刚性猜想有关。最后，我们探讨解决 Koebe 猜想一般情形的可能途径。

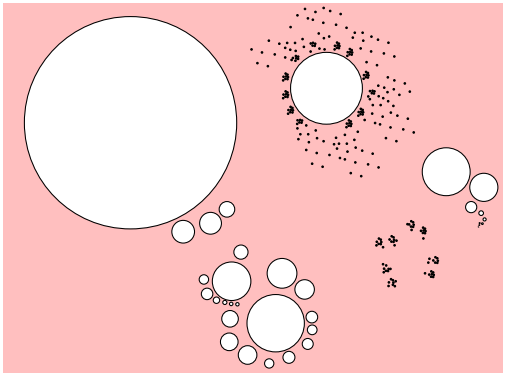

FIGURE 1. 圆域。其边界可以包含孤立的圆、收敛于点的圆、孤立点、收敛于圆的点、康托尔集等。

在第 3 节中，我们介绍将平面中的集合拟共形地变换为典范集的问题，例如圆、圆盘、直线、环域，或更一般地说，Schottky 集，也就是补分支均为圆盘的集合。我们从 Ahlfors 的经典定理谈起，该定理从几何上刻画了与圆拟共形等价的集合；最后介绍作者近期的一项结果，该结果刻画了与 Schottky 集拟共形等价的集合。

第 2 节和第 3 节讨论的两类问题之间存在根本差异。首先，在共形一致化的情形下（第 2 节），我们注意到，一个单连通域可能具有极不规则甚至分形边界。然而，黎曼映射定理保证存在一个从该区域到单位圆盘的共形映射，而单位圆盘的边界是光滑的。因此，在这种情况下，我们关注的是在区域内部具有良好性质的映射，但不对边界附近施加任何控制。

另一方面，在拟共形一致化的情形下（第 3 节），我们只使用定义在整个平面或球面上的拟共形映射。因此，这些映射在全局范围内以受控的方式扭曲几何。特别地，并非每个单连通域都能通过平面的拟共形自映射映到单位圆盘。Ahlfors 在一项开创性工作中，根据边界的几何性质建立了一个充要条件，我们将在下文介绍这一条件。

最后我们指出，通过圆域或 Schottky 集进行一致化，除了对经典复分析之外，也与多个领域息息相关，包括双曲曲面理论、几何群论、复动力系统、度量空间上的分析以及概率论。我们将在接下来的章节中讨论其中一些联系。

致谢。 作者谨向 Kai Rajala、Matthew Romney 和 Malik Younsi 致谢，感谢他们提出的意见和修正，这些建议改进了本文的表述。

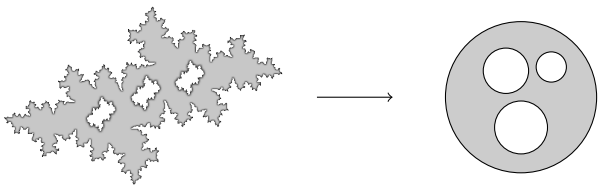

FIGURE 2.有限连通域的 Koebe 一致化定理示意图。请注意，区域之间的同胚会保留边界分支的数量。

2. CONFORMAL UNIFORMIZATION BY CIRCLE DOMAINS

2.1. **Koebe猜想**。 复平面球面记作 $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$。 $\widehat{\mathbb{C}}$ 中的一个区域是一个连通开集。若黎曼球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ 上的区域 Ω 满足 $\partial\Omega$ 的连通分支都是点或圆，则称 Ω 为圆域；见图 1。圆域最简单的例子是单位圆盘 $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$以及整个平面 $\mathbb{C}$，其边界由 ∞ 处的一个点构成。

我们称两个区域 $U, V \subset \widehat{\mathbb{C}}$若存在一个将 U 映到 V 的共形映射 f，则称它们保角等价。Koebe 提出了以下深刻的问题，这个问题称为 Koebe 猜想，或 Kreisnormierungsproblem [Koe08]。

猜想 2.1（Koebe 猜想，1908）。 黎曼球面上的每个区域都保角等价于一个圆域。

单连通域的情形下，这个猜想有肯定的答案，这一结果称为黎曼映射定理。

定理 2.2（黎曼映射定理，1851）。 每个单连通域$\Omega \subsetneq \widehat{\mathbb{C}}$ 都与 $\mathbb{D}$保角等价。此外，对于任意两个从Ω f映到 $\mathbb{D}$ 的共形映射，其复合 $f \circ g^{-1}$ 是一个莫比乌斯变换 ¨。

注意， $\widehat{\mathbb{C}}$上的莫比乌斯变换¨，即具有以下形式的函数

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

将圆映为圆，将点映为点。因此，它们将圆域映为圆域。下一个结果将黎曼映射定理推广到有限连通域的情形，该结果归功于 Koebe [Koe20]。参见图 2。

定理 2.3（Koebe 一致化定理，1920）。 每个有限连通域$\Omega \subset \widehat{\mathbb{C}}$ 都与一个圆域保角等价。此外，对于任意两个从Ω f映到圆域的共形映射，其复合 $f \circ g^{-1}$ 是一个莫比乌斯变换 ¨。

证明见 [Con95，定理 15.7。9] 另见 [Gol69，第 V 节6]。

随后，Koebe [Koe22] 对某些对称域证明了该猜想；Denneberg [Den32], Gr¨otzsch [Gr¨o35], Sario [Sar48], 、Meschowski [Mes51, Mes52], 、Strebel [Str51,Str53], 、Bers [Ber61], 、Sibner [Sib68], 、Haas [Haa84]等人则对其“极限边界分支”满足某些条件的区域证明了该猜想。

迄今为止，关于这一猜想最重要的成果发表于 He 和 Schramm 的开创性著作 [HS93]。

定理 2.4（He–Schramm一致化定理，1993年）。每个可数连通区域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 都保角等价于一个圆域。此外，对于任意两个将 Ω 映到圆域上的保角映射 f, g，其复合 $f \circ g^{-1}$是一个莫比乌斯变换。

Schramm [Sch95]和 Rajala [Raj25c]分别给出了该定理的其他证明。值得注意的是，在 [Sch95] 中，Schramm 引入了跨边界模这一概念；事实证明，这一概念对于复平面上一致化和刚性问题的近期发展至关重要。

我们注意到，在上述确立了 Koebe 猜想特殊情形的定理中，也有唯一性结论。也就是说，除去与 M¨obius 变换进行后复合，从 Ω 到某个圆域存在唯一的共形映射。然而，对于不可数连通域，唯一性可能不成立。我们将在第 2.4 节讨论这一现象。

2.2. **通过其他类型的区域进行一致化**。有若干与 Koebe 猜想精神相近的结果，它们将区域共形变换到圆域之外的特殊类型区域。我们将简要讨论其中一些结果。

区域 $\Omega \subset \widehat{\mathbb{C}}$ 若包含 ∞，且 Ω 的补分支为点或沿某个由角度指定方向的直线割缝$\theta \in [0, \pi)$，则称其为 割缝域 。Hilbert [Hil09] 证明了有限连通域的下述经典结果，随后 Gr¨otzsch[Gr¨o31]将其推广至无限连通域。证明可见 [Cou77，第 II 节3] 以及 [Gol69，定理 V.21]。

定理 2.5. 黎曼球面中的每个区域都保角等价于一个割缝域。

因此，在这种情况下，Koebe 猜想的类似命题成立。我们注意到，映到割缝域上的共形映射并不唯一。不过，定理 2.5 的证明所给出的共形映射，是某个极值问题的唯一解。这个事实促使人们尝试通过构造并求解某些极值问题来证明 Koebe 猜想，因为这些问题会自动导出所需的共形映射。Schramm [Sch93b]考虑了这样一个问题，并为可数连通情形下的猜想提供了另一种证明。

Brandt–Harrington [Bra80, Har82]证明了一个关于有限连通域的非常一般的一致化结果。该结果允许将目标区域的所有非退化补分支预先指定到位似为止，即形如 $z \mapsto az + b$ 的映射，其中 $a > 0$ 和 $b \in \mathbb{C}$。以下表述取自 [Sch95，定理 4.1]。

定理 2.6 ([Bra80,Har82])。设 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 为一个有限连通域。对于 Ω 的每个补分支 b，设 $P_b \subset \mathbb{C}$ 为一个包含不止一个点的紧集，且 $\mathbb{C} \setminus P_b$ 是连通的。那么存在一个共形映射 f，将 Ω 映到区域 D，使得若 b 是Ω的一个非退化补分支，则它在 f 下对应于 P_b 的一个位似像。

这一结果推出了 Koebe 一致化定理（定理 2.3）。此外，它还表明，每个有限连通域都可以保角映射到一个方形域，也就是说，该区域的非退化补分支是边平行于坐标轴的正方形。感谢

Schramm [Sch95, 定理 4.2]，Koebe 猜想等价于以下说法：每个区域都与一个方形域（或一个由等边三角形等围成的区域）保角等价。

因此，可以尝试通过研究方形域的共形一致化来探讨 Koebe 猜想。在极值问题中，相较于圆域，这类区域显得更为自然 [Sch93a, Sch93b, Bon16, Nta20]。具体而言，Bonk 最近的研究 [Bon16]为有限连通区域提出了一个简单的极值问题，其解给出了映射到方形域的共形映射。Solynin–Vidanage [SV20] 将这一结果推广到了边界为矩形的区域。若能将这些结果扩展到可数连通域，将会很有意义。

2.3. **一致化的几何条件**。 在满足区域的一些几何条件时，Koebe 猜想已得到证明。我们在此列举一些相关成果，但并不完整。

2.3.1. 一致域。 若存在常数 $A \geq 1$，使得对任意两点 z，$w \in \Omega$，都存在曲线γ：$[a,b] \to \Omega$，且满足 $\gamma(a) = z$, $\gamma(b) = w$, $\ell(\gamma) \leq A|z-w|$，则称区域 $\Omega \subset \mathbb{C}$为一致域，并且

$$\min\{\ell(\gamma|_{[a,t]}), \ell(\gamma|_{[t,b]})\} \leq A \operatorname{dist}(\gamma(t), \partial\Omega) \text{ for every } t \in [a,b].$$

这里我们采用欧几里得度量和拓扑，$\ell(\gamma)$表示γ的长度。一致域由 Martio–Sarvas [MS79]和 Jones [Jon81] 分别独立提出，如今出现在几何函数论的若干问题中。它们构成了一类研究充分的区域，具有良好的几何性质，与单位圆盘的强性质相似 [Geh87]。

一致域的定义意味着，任意两点都可以由一个开口角有一致正下界的扭曲锥连接。从几何上看，一致域不能有任何内尖点或外尖点。Martio 和 Sarvas [MS79, Theorem 2.24] 证明，一致域的每个非退化补集分支都是拟圆盘；拟圆盘是一类具有非常强几何性质的对象，从多个角度看都与单位圆盘相似。我们将在第 3.2 节详细定义并讨论拟圆盘。

Herron 和 Koskela[HK90], 将 Herron [Her87]早先的一项结果推广，从而证明了 Koebe 猜想对一致域成立。

定理 2.7 ([HK90,NY20])。 每个一致域$\Omega \subset \mathbb{C}$ 都共形等价于一个圆域。此外，对于任意两个将Ω 映到圆域的共形映射 f、g，它们的复合 $f \circ g^{-1}$ 是一个莫比乌斯变换¨。

该定理的唯一性部分直到最近才由作者和 Younsi [NY20] 确立，我们将在第 2.4 节讨论这一点。

2.3.2. 余胖域。 如上所述，一致域的每个非退化补分支都有良好的几何性质，尤其是拟圆盘。^拟圆盘满足以下强几何性质。若存在常数 $\tau > 0$，使得对于每个 $z \in A \cap \mathbb{C}$ 以及每个不包含 A 的球$B(z,r)$，都有：集合 $A \subset \mathbb{C}$ 称为 胖

$$\operatorname{Area}(A \cap B(z,r)) \geq \tau r^2.$$

在这种情况下，我们称 A 是 τ-胖的。注意，对所有 $\tau > 0$，每个点显然都是 τ-胖的。^若存在 $\tau > 0$，使得 $\subset \mathbb{C}$ 区域 Ω 的每个连通分支

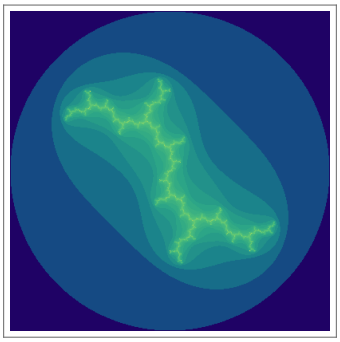

FIGURE 3. 多项式 z^2+i 的朱利亚集是一个 η-展开集的例子，因为它在所有位置和尺度上都包含 η-拟三叉体。

$\widehat{\mathbb{C}}\setminus\Omega$ 都是 τ-胖的。Schramm 证明了每个拟圆盘都是胖的 [Sch95, Corollary 2.3]。结合上文提到的 Martio–Sarvas 的结果，我们得到每个一致域都是余胖的。Schramm 推广了 Herron–Koskela 的结果，并为余胖域证明了 Koebe 猜想 [Sch95]。

定理 2.8 ([Sch95])。每个余胖域 $\Omega\subset\widehat{\mathbb{C}}$ 都保角等价于一个圆域。

与前述结果不同，我们指出，在这种情形下唯一性可能不成立。具体而言，若 $E=\widehat{\mathbb{C}}\setminus\Omega$ 是一个康托尔集，那么它显然是余胖的。此外，若 E具有正面积，则我们将在下文的命题 2.12 中证明唯一性不成立。

在同一篇著作中，Schramm 引入了跨边界模的概念，并将其与余胖域结合，给出了 He–Schramm一致化定理（定理 2.4）的另一种证明。此后，跨边界模已成为现代几何函数论中的标准工具，在复平面和度量空间中的一致化与刚性问题研究中有着诸多应用。本综述介绍的大多数结果都依赖于这一概念。

2.3.3. 余扩散域。 最近，Esmayli 和 Rajala [ER26]针对补集分支满足另一种一致几何条件的区域，对 Koebe 猜想给出了肯定的回答。在陈述定理之前，我们先给出必要的定义。度量空间之间的同胚 $\phi\colon(X,d_X)\to(Y,d_Y)$ 称为拟对称，如果存在一个同胚$\eta\colon[0,\infty)\to[0,\infty)$，使得对于任意三个互不相同的点 $x,y,z\in X$，都有

$$\frac{d_Y(\phi(x),\phi(y))}{d_Y(\phi(x),\phi(z))}\le\eta\left(\frac{d_X(x,y)}{d_X(x,z)}\right).$$

在这种情况下，我们称 ϕ 是 η-拟对称的。这个同胚 η 称为畸变函数。从几何角度来看，拟对称映射保持相对大小和形状。在某些情况下，例如当 $X=Y=\mathbb{C}$时，拟对称映射与第3.1节中定义的拟共形映射相同。一般而言，拟对称映射可视为度量空间中拟共形映射的推广。

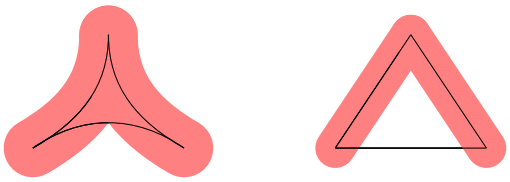

FIGURE 4. 左：Gromov 双曲空间中的一个测地三角形，其中两条边的 δ邻域包含第三条边。右：欧几里得平面中的一个测地三角形，它不是 Gromov 双曲的。

标准三叉树 $T_0 \subset \mathbb{C}$ 是从 0 到 $e^{2\pi ik/3}$、$k = 0$、1、2 的三条线段的并集。若存在一个 η-拟对称同胚映射 $\phi\colon T_0 \to T$，则称集合 $T \subset \mathbb{C}$ 为 η-拟三叉树。如果对于每个 $z \in A \cap \mathbb{C}$ 以及每个不包含 A 的球 $B(z, r)$，都存在一个 η-拟三叉树 $\sim T \subset A \cap B(z, r)$，满足 $\operatorname{diam}(T) \geq r/\eta(1)$，则称集合 $A \subset \mathbb{C}$ 为 η-余扩散集。若存在一个畸变函数 η，使得区域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 的每个连通分支都是 η-扩散集，则称区域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 为余扩散。现在陈述 [ER26，推论 1.6]。

定理 2.9 ([ER26])。 每个共扩散区域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 都保角等价于一个圆域。

我们指出，这里的唯一性可能会像上述 Schramm 定理的情形一样失效。定理 2.9 的证明依赖于 Schramm 跨边界模，而它也用于定理 2.8 的证明。不过，与非退化补分支具有正面积的余胖域不同，共扩散区域中的补分支可能非常细，且面积可能为零；参见图 3。这使得该证明比 Schramm 定理的证明复杂得多。

2.3.4. *Gromov* 双曲域。 注意，定理 2.7、2.8 和 2.9 中的几何条件并非共形不变。也就是说，如果 Ω 满足这些定理中的某个条件，那么 Ω 的共形像未必满足相同的条件。例如，如果 $\Omega = \mathbb{D}$，那么我们只能说 Ω 的共形像是单连通的，但它们未必满足任何强欧几里得几何条件。最近，Karafyllia 和作者 [KN25] 证明了 Koebe 猜想对 Gromov 双曲域这一类成立；这类区域在共形变换下不变，并且包含所有有限连通域。下面给出正式定义。

若存在 $\delta > 0$，使得对 X 中的每个测地三角形，每条边都位于另外两条边的 δ-邻域内，则称测地度量空间 X 是 *Gromov* 双曲的；见图 4。尽管这个定义很简单，Gromov[Gro87]证明，双曲空间的若干特征都可以通过这一条件得到。Gromov 双曲空间是现代几何群论中的研究对象，与一致化问题相关；参见综述文章[Bon06、Kle06、Nta25c]。

Bonk、Heinonen 和 Koskela [BHK01] 研究了黎曼球面上的区域，这些区域在赋予准双曲度量后是 Gromov 双曲的。设 $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ 为一个区域，并赋予球面度量。准双曲度量

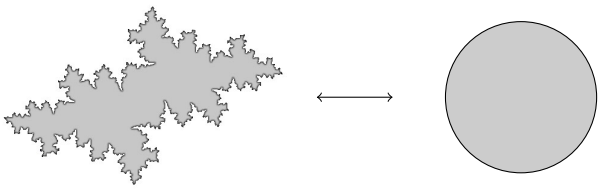

FIGURE 5. 得益于黎曼映射定理，单连通域具有良好的双曲几何性质，但其欧几里得几何可能极不规则。另一方面，单位圆盘兼具良好的欧几里得几何和双曲几何。根据定理 2.11，这种类比也适用于 Gromov 双曲域和一致域。

Ω 上的度量定义为

$$k_\Omega(z,w) = \inf_\gamma \int_\gamma \frac{1}{\operatorname{dist}_\sigma(z,\partial\Omega)} \frac{2|dz|}{1+|z|^2},$$

其中下确界取遍所有端点为 z, w 的可求长曲线 γ；这里σ 表示球面度量。若度量空间 (Ω k_Ω) 是 Gromov 双曲的，我们就称 Ω 为 Gromov 双曲。根据 Buckley 和 Herron 的结果 [BH20，定理 B]，，对于复平面 $\mathbb{C}$ 中的双曲域（即其边界在 $\mathbb{C}$ 中至少含有两个点），一个等价条件是空间 (Ω h_Ω) 为 Gromov 双曲，其中h_Ω 是 Ω 上的双曲度量。由此我们立即得到 Gromov 双曲性的共形不变性；另见 [KN25，定理 41]，其中给出了另一种证明方法。

Gromov 双曲区域的例子包括所有单连通域、所有有限连通域以及所有一致域。直观地说，Gromov 双曲域未必具有良好的欧几里得几何性质（例如，可以想象一个任意的单连通域），但它们具有良好的双曲几何性质。例如，文献 [BHK01 的第 7] 节证明，每个 Gromov 双曲区域 Ω 都具有*Gehring–Hayman* 性质：存在一个常数 $C \geq 1$，使得如果 γ 是空间 (Ω k_Ω) 中的一条测地线，那么 Ω 中任意一条与其端点相同的曲线 β，其球面长度

$$\ell_\sigma(\beta) \geq C^{-1}\ell_\sigma(\gamma).$$

因此，拟双曲测地线的长度几乎是最小的。Balogh 和 Buckley 在文献 [BB03] 中建立了 Gromov 双曲域的一个刻画，该刻画涉及 Gehring–Hayman 性质和分离性质。

现在我们陈述 Karafyllia 与作者近期工作 [KN25], 的主要定理，该定理在 Gromov 双曲域中证明了 Koebe 猜想。

定理 2.10 ([KN25])**.** 每个 *Gromov* 双曲区域Ω $\subset \mathbb{C}$ 都保角等价于一个一致圆域。此外，对于从Ω 映到圆域的任意两个共形映射 f, g，其复合 $f \circ g^{-1}$ 是一个 *M¨obius* 变换。

唯一性结论可由 [NY20] 得出，与定理 2.7 中一致域的情形相同。该定理还提供了进一步的见解：尽管 Gromov 双曲区域不一定具有良好的欧几里得几何性质，但它们可以经共形变换成为一致域，而一致域具有非常强的几何性质，正如

区域类型	存在性	唯一性
单连通	✓黎曼	✓
有限连通	✓Koebe [Koe20]	✓Koebe [Koe20]
可数连通	✓He–Schramm [He–Schramm93]	✓He–Schramm [He–Schramm93]
一致	✓Herron–Koskela [她87]	✓Ntalampekos–Younsi [NY20]
余有限	✓Schramm [Sch95]	✗命题 2.12
余扩散	✓Esmayli–Rajala [ER26]	✗命题 2.12
Gromov 双曲	✓Karafyllia–Ntalampekos [KN25]	✓Ntalampekos–Younsi [NY20]

TABLE 1. 关于 Koebe 猜想的存在性与唯一性结果。

第 2.3.1 节所述；参见图 5。反过来，Bonk– Heinonen–Koskela [BHK01, 定理 1.11] 早先已证明，一致域及其共形像都是 Gromov 双曲的。因此，我们得到以下推论。

定理 2.11 ([BHK01,KN25])。 $\mathbb{C}$ 中的 *Gromov* 双曲域恰好是一致域的共形像。

值得注意的是，Koebe 猜想的类似结果已在包含于度量曲面中的区域上得到研究；度量曲面即配备了度量的拓扑曲面[MW13,RR21,Reh22,HL23,LR25]。这些结果超出了本文综述的范围。

我们在表 1 中总结本节介绍的结果。

2.4. **共形刚性**。 若圆域 D 满足：任何从 Ω 到另一个圆域的保角映射都是某个 M¨obius 变换的限制，则称其为共形刚性的。注意，如果存在一个从区域 Ω 到圆域 D的保角映射 f，那么，当且仅当该圆域 D 具有共形刚性时，该映射在 M¨obius 变换后复合的意义下唯一；见图 6。因此，共形刚性圆域与 Koebe 猜想中保角映射的唯一性密切相关。

根据定理 2.4，每个可数连通圆域都具有共形刚性。然而，并非所有圆域都具有共形刚性。接下来的命题表明，边界为正面积康托尔集的圆域不具有刚性。

命题 2.12. 设 $E \subset \mathbb{C}$ 是一个正面积的全不连通紧集。存在一个同胚 $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$，它在 $\mathbb{C} \setminus E$ 上是共形的，但不是 *M¨obius* 变换。

证明. 根据 Uy [Uy79]，的一个结果，如果 E 具有正面积，那么存在一个非恒定有界解析函数 $g\colon \mathbb{C} \setminus E \to \mathbb{C}$，它是利普希茨连续的；特别地，存在 $L > 0$，使得对于所有 $z, w \in \mathbb{C} \setminus E$，$|g(z) - g(w)| \le L|z - w|$。由于 E 是全不连通的，g 可连续延拓为 $\mathbb{C}$ 中满足 $|g(z) - g(w)| \le L|z - w|$ 的函数。现在我们定义

$$f(z) = z + \frac{1}{2L} g(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

显然，f 在 $\mathbb{C} \setminus E$中是解析的。如果 f 是一个莫比乌斯变换，那么 g 将在 $\mathbb{C}$中解析，因此根据刘维尔定理，它是常数，这就产生了矛盾。因此，

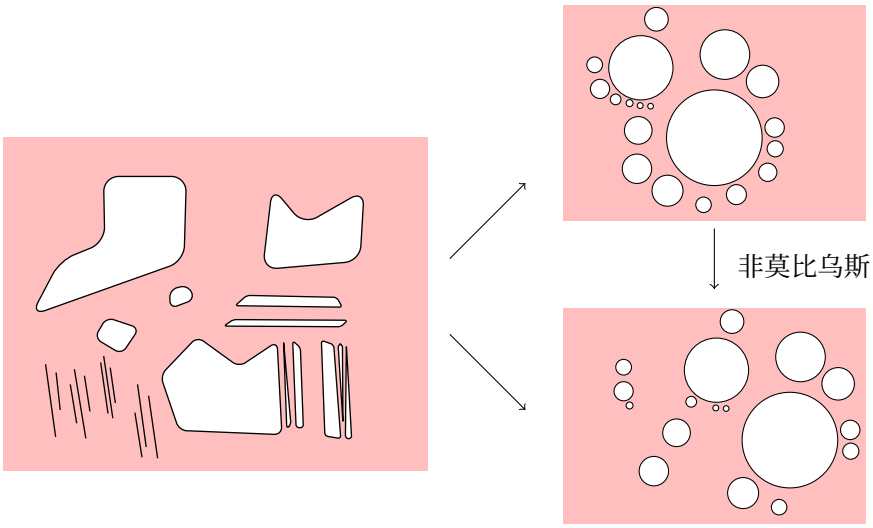

FIGURE 6. 从区域到圆域的两个共形映射。若且唯若这些圆域不具备共形刚性，这两个共形映射才不会相差一个莫比乌斯变换。

f 不是一个莫比乌斯变换。注意，

$$|f(z)-f(w)| \geq |z-w| - \frac{1}{2L}|g(z)-g(w)| \geq \frac{1}{2}|z-w|$$

对于 z, $w \in \mathbb{C}$，因此 f 是单射，事实上它是 $\mathbb{C}$的一个同胚。 □

更一般地，利用 Sibner [Sib68], 提出的施托基群拟共形变形技巧，可以证明，任何边界具有正面积的圆域都不具备共形刚性。另请参见 [You16，Lemma 18], 其中给出了另一种基于 Sibner 技巧的证明。

He 和 Schramm[HS94], 对共形刚性问题进行了深入研究，并给出了一个充分条件，该条件涉及圆域边界的大小。

定理 2.13 ([HS94])。 如果$\Omega \subset \mathbb{C}$ 是一个边界具有 σ-有限长度的圆域，那么Ω是共形刚性的。

这里，集合的长度是豪斯多夫一维测度；关于定义，参见 [Fol99，第 11 节2] 或 [Hei01，第 8 节3]。显然，圆域的边界中至多有可数多个圆，因此它们的总长度是 σ-有限的。然而，圆域边界中的点分支可以构成一个非常大的集合；例如，一个正面积的康托尔集可能是边界的一部分。因此，圆域刚性的障碍似乎在于这个集合的大小。He 和 Schramm 提出了以下猜想。

猜想 2.14 (刚性猜想，1994年)。 圆域Ω 是共形刚性的，当且仅当其边界 $\partial\Omega$是共形可去的。

这里，若紧集 $E \subset \mathbb{C}$ 满足以下条件，则称其为共形可去：每个在 $\mathbb{C}\backslash E$ 上共形的$\mathbb{C}$ 同胚都是莫比乌斯变换。共形可去集

包括 Besicovitch [Bes31] 证明的具有 σ有限长度的集合，以及 Jones [Jon95]证明的一致域的边界。另请参阅 [JS00、KN05、You16、Nta23b、Nta25a]，了解其他充分的几何条件。不可去集包括谢尔宾斯基垫片和谢尔宾斯基地毯 [Nta19、Nta21]。关于可去性的更多详情和未解决问题，请参阅综述[You15、Bis26] 。

Younsi [You16]为猜想 2.14提供了一些积极证据。作者和Younsi [NY20]则提供了进一步的证据。

定理2.15 ([NY20])。 设$\Omega \subset \mathbb{C}$ 是一个圆域，并假设对于某个点 $z_0 \in \Omega$，有 $\int_\Omega k_\Omega(z_0, z)^2 \, d\Sigma(z) < \infty$。那么$\Omega$ 具有共形刚性。

这里 Σ 表示球面Lebesgue测度。Jones和Smirnov [JS00] 已证明，定理中的条件可推出 $\partial\Omega$具有共形可去性。此外，一致圆域满足该条件，因此定理 2.15推出了定理 2.7和定理 2.10中的唯一性结论。

在 [Nta23b] 中，作者引入了「对极值距离可数忽略」集的概念，简称为对极值距离可数忽略集（共形零长度可延拓 集），并证明这类集合具有共形可去性。这一概念与经典的「对极值距离忽略」集相似，并对其进行了推广；这类集合简称为对极值距离忽略集（*NED* 集），曾由Ahlfors和Beurling [AB50]研究。为避免繁琐的技术细节，我们不定义这些概念。在 [Nta24] 中，作者证明共形零长度可延拓 集类包含长度为 σ-有限的集合，以及满足定理 2.15条件的区域的边界。最后，在 [Nta23c], 中，他证明了边界为共形零长度可延拓 集的圆域具有刚性，下面陈述这一结果。

定理 2.16 ([Nta23c])。 设$\Omega \subset \mathbb{C}$ 是一个圆域，其边界为共形零长度可延拓集。则Ω具有共形刚性。

这一结果推出了定理 2.13 和定理 2.15，并为猜想 2.14 提供了有力证据。然而，Rajala [Raj25b]随后否定了猜想 2.14。

定理 2.17 ([Raj25b])。 存在一个具有共形刚性的圆域，其边界并非共形可去。

我们注意到，若 Ω 是一个具有全不连通边界的共形刚性圆域，则根据定义可立即得出，其边界是可去的。因此，任何反驳该猜想这一方向的例子（例如 Rajala 给出的例子），其边界都必须同时包含圆和点。

Rajala 构造的圆域之刚性涉及作者 [Nta23b] 建立的共形映射的度量刻画。其边界不可去这一事实，则源于 Wu 的一个定理 [Wu98], : 两个康托尔集的笛卡尔积（其中一个足够厚）不可去。

我们指出，猜想 2.14 的逆向仍未解决。作者在 [Nta24] 中猜想，共形可去性等价于共形零长度可延拓 条件。若这一猜想成立，那么在猜想 2.14 中， $\partial\Omega$ 的可去性意味着 Ω 的刚性。

在表 2 中，我们总结了若干与圆域 Ω 的共形刚性以及 $\partial\Omega$ 的可去性相关的结果。

圆域类型	Ω 刚性的	∂Ω 可移除的
单连通	✓	✓莫雷拉
有限连通	✓Koebe [Koe20]	✓莫雷拉
可数连通	✓He–Schramm [HS93]	✓Besicovitch [Bes31]
边界具有 σ-有限长度	✓He–Schramm [HS94]	✓Besicovitch [Bes31]
一致	✓Ntalampekos–Younsi [NY20]	✓Jones [Jon95]
L^2中的拟双曲距离	✓Ntalampekos–Younsi [NY20]	✓Jones–Smirnov [JS00]
边界是 *CNED*	✓Ntalampekos [Nta23c]	✓Ntalampekos [Nta23b]
边界具有正面积	✗Sibner [Sib68]	✗命题 2.12
Rajala 的例子	✓Rajala [Raj25b]	✗吴 [吴98]

TABLE 2. 与圆域的共形刚性及其边界可去性相关的结果。

2.5. **通过穷竭进行一致化。** 我们将讨论一些关于 Koebe 猜想一般情形的研究方法。

证明该猜想若干情形时所采用的核心思路，是用一列有限连通圆域 $\{\Omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 逼近给定区域 Ω，然后利用 Koebe一致化定理（定理 2.3），找出一列从 Ω_n 到有限连通圆域 D_n, $n \in \mathbb{N}$ 的共形映射 f_n 。

圆域 Ω_n, $n \in \mathbb{N}$ 的选取使其相对于固定基点，按照*Carath´eodory* 核收敛的意义收敛到原区域 Ω。我们回顾这一收敛概念。设 $z_0 \in\Omega$，且 $\{\Omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是一列区域，使得对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $z_0 \in \Omega_n$ 。如果 Ω 是 $\{\Omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的最大区域，满足 $z_0 \in\Omega$，且每个紧集 $K \subset \Omega$ 对所有充分大的 $n \in \mathbb{N}$ 都包含在 Ω_n 中，则称 Ω 为 z_0-核 。如果 Ω 是 $\{\Omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的每个子列的 z_0-核，则称 $\{\Omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛到 Ω，且以 ´ 为基点按 *Carath* z_0 *eodory* 意义收敛。

现在，假设 $\{\Omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 如上所述，并且对每个 $n \in \mathbb{N}$，都有一个共形映射 f_n: Ω $_n \to D_n$ 到一个有限连通圆域 D_n。如果序列$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 经过适当的归一化，那么根据正规性判据，我们可以取一个子列，使其局部一致收敛到 Ω 上的共形映射 f 。根据 Carath´eodory 关于多连通区域的核收敛定理的一个版本（参见 [Gol69, Theorem V.5.1]），我们有 $f(\Omega) = D$，其中 D 是以 $f(z_0)$ 为基点的 $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的 Carath´ eodory 极限。证明 Koebe 猜想的最后一步，是验证区域 D 为圆域。

这实际上是一项极其艰巨的任务，简单的方法行不通，因为圆域序列未必会在 Carath´eodory 意义下收敛到一个圆域！图 7 展示了这一现象。

因此，为了确保极限 D 是一个圆域，需要对逼近原始区域 Ω 的序列 $\{\Omega$ $_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 施加进一步的要求。He–Schramm [HS93]和 Schramm [Sch95]证明可数连通域的 Koebe 猜想时，采用外部逼近区域 Ω；也就是说，对每个 $n \in \mathbb{N}$，逼近序列 $\{\Omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 都满足 $\Omega_n \supset\Omega$。即便满足这一条件，圆域序列 $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$也未必收敛到一个圆域，因此还需要施加进一步的条件。例如，在 Karafyllia 与作者证明定理 2.10 的工作中，

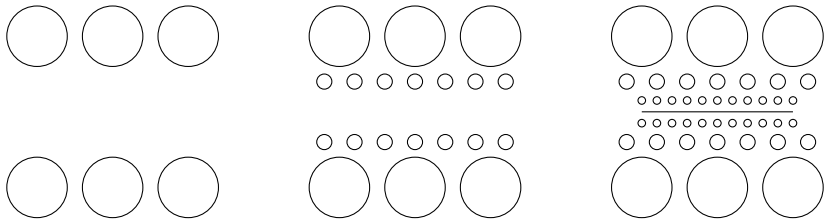

FIGURE 7. 一列圆域收敛到一个边界含有线段、因而不是圆域的区域。

逼近区域 $\{\Omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足一个称为内一致性的强几何条件。

最近，Rajala [Raj25c] 转而采用内部逼近，或称对 Ω 的穷竭，来研究这一猜想。Ω 的穷竭是一个区域序列$\{\Omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$：其中每个区域的边界由有限条包含于 Ω 中的 Jordan 曲线组成，并且满足

$$\Omega_n \subset \Omega_{n+1} \subset \Omega \text{ for each } n \in \mathbb{N} \text{ and } \Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n.$$

Rajala 利用穷竭给出了 He–Schramm一致化定理（定理 2.4）的另一种证明。

利用穷竭的方法出现在将一个区域共形映射到一个由水平割缝围成的区域这一问题中，正如定理 2.5 所示。具体而言，如果 $\{\Omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是区域 Ω 的任意穷竭，并且对每个 $n \in \mathbb{N}$， f_n 都是将 Ω_n 共形映射到一个由有限条水平割缝围成的区域的共形映射，那么经过适当的规范化并取一个子列后， $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛于一个将 Ω 共形映射到水平割缝域 [的共形映射（Cou77，定理 2.1，第 54] 页）。

与此形成鲜明对比的是，采用圆域进行一致化时，Rajala 注意到必须谨慎选择穷竭，因为图 7 所示的现象在这种情形下也可能出现。作者和 Rajala [NR25] 推广了 Rajala 的方法，并证明穷竭方法可用于所有满足 Koebe 猜想的区域；换言之，如果该猜想成立，就可以通过穷竭来证明。

定理 2.18 ([NR25]). 设$\Omega \subset \mathbb{C}$ 是一个与圆域保角等价的区域。那么，存在 Ω 的一个穷竭 $\{\Omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，并且对每个 $n \in \mathbb{N}$，存在一个从Ω_n 映到一个有限连通圆域 D_n 的共形映射 f_n，使得序列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在Ω 上局部一致收敛于一个映到圆域的共形映射。

Rajala [Raj25a]研究了满足 Koebe 猜想的区域必须具备的其他特殊条件。因此，为了尝试推翻该猜想，只需找到一个不满足定理 2.18 的结论或 Rajala [Raj25a]所述条件的区域。

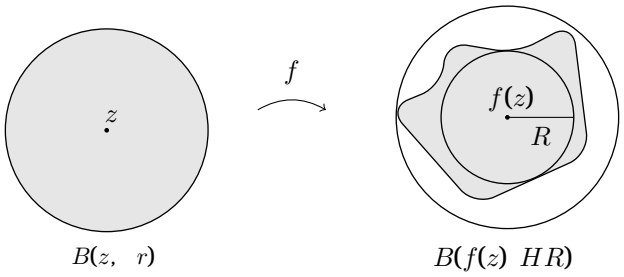

FIGURE 8. 拟共形性的度量定义。

3. QUASICONFORMAL UNIFORMIZATION BY SCHOTTKY SETS

3.1. 拟共形映射。 复平面中开子集之间的保向同胚 $f\colon U \to V$ 是拟共形的，如果 f 属于索伯列夫空间 $W^{1,2\,\mathrm{loc}}(U)$，并且存在 $K \geq 1$ 使得

$$\|Df(z)\|^2 \leq K J_f(z) \tag{3.1}$$

对几乎处处的 $z \in U$；这里，$\|Df(z)\|$ 表示 f 在 z 处的微分的算子范数，而 J_f 是 Df 的雅可比行列式。在这种情况下，我们称 f 为 K-拟共形映射。这称为拟共形性的解析 定义。

从黎曼球面上的一个开子集到另一个开子集的同胚 $f\colon U \to V$ 如果 $f|_{U\setminus\{\infty, f^{-1}(\infty)\}}$ 在上述意义下是拟共形的，则 $\widehat{\mathbb{C}}$ 是拟共形的。

拟共形映射有若干种等价定义。根据拟共形性的度量定义，若保向同胚 $f\colon U \to V$ 是 $\mathbb{C}$ 的开子集之间的映射，则当对每个 $z \in U$ 以及任意充分小的 $r > 0$（其大小取决于 z），都存在 $R > 0$ 使得

$$B(f(z), R) \subset f(B(z, r)) \subset B(f(z), HR),$$

其中 $H \geq 1$ 是一致常数；见图 8。通俗地说，f 将无穷小球映射为偏心率有界的集合。将这一性质与保角映射的相应性质进行比较：保角映射将无穷小球映射为无穷小球。光滑拟共形映射的另一种几何解释是，它们以有界的方式扭曲角度；而保角映射则保持角度不变。因此，我们可以将拟共形映射视为比保角映射更灵活的一类映射，但它们仍受到一定的畸变控制。

我们列举拟共形映射的一些基本性质。每个 1-拟共形映射都是共形映射，反之亦然。不过请注意，拟共形映射通常并非解析或光滑映射。K-拟共形映射的逆映射是 K-拟共形映射。此外，K_1-拟共形映射与 K_2-拟共形映射的复合是 K_1K_2-拟共形映射。特别地，K-拟共形映射与共形映射的复合是 K-拟共形映射。有关更多背景知识，请读者参阅 [Ahl06,V¨ai71,LV73, AIM09]。

本节几乎只讨论整个 $\widehat{\mathbb{C}}$ 球面 $\mathbb{C}$上的拟共形映射。今后，如果存在一个将 E 映到 F 上的 $\mathbb{C}$ 拟共形同胚，我们就称两个集合 E, F 拟共形等价。请将此概念与我们在第 2.1 节中定义的区域共形等价概念作比较。

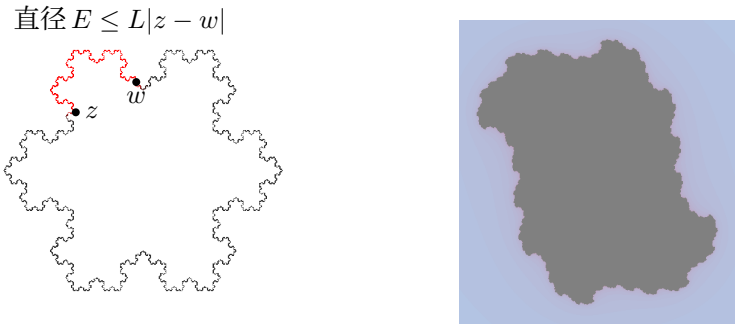

FIGURE 9. 左图：冯·科赫雪花是一个拟圆。右图：当 $c \in \mathbb{C}$ 接近 0 时， $z^2 + c$ 的朱利亚集是一个拟圆。

如果 A 是一个正参数或一组参数，我们用记号$C(A)$表示一个仅依赖于 A的正常数。

3.2. **拟圆盘**。如果集合 $U \subset \mathbb{C}$ 是单位圆盘 $\mathbb{D}$（或等价地，任意其他圆盘）在拟共形映射 $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$下的像，则称其为拟圆盘。若 f 是K-拟共形的，其中 $K \ge 1$为某个常数，则称 U 为 K-拟圆盘。自拟共形映射理论早期发展以来，一个引人关注的问题便是为拟圆盘提供几何刻画。Ahlfors 在一项开创性工作中解决了这一问题 [Ahl63]。

定理 3.1 ([Ahl63])。 *Jordan* 区域 $U \subset \mathbb{C}$ 是拟圆盘，当且仅当 ∂U是拟圆，且这一结论在定量意义下成立。

Jordan 曲线 $J \subset \mathbb{C}$ 是拟圆，如果存在常数 $L \ge 1$，使得对于任意两点 z, $w \in J$，都存在一条弧 $E \subset J$连接 z, w，满足

$$\operatorname{diam} E \le L|z-w|.$$

在这种情况下，我们称 J 为 L-拟圆。可以通过在上述定义中使用球面度量，在球面 $\mathbb{C}$ 上定义拟圆（参见[Nta26，第 2 节.4]中的讨论）；Ahlfors 定理在此情形下仍然成立。定理 3.1 的陈述具有定量性，即如果 U 是一个 K-拟圆盘，那么对于某个仅依赖于 K的 L， ∂U 就是一个 L-拟圆，反之亦然。

从几何上看，拟圆没有尖点。很容易证明，若干分形集，尤其是自相似分形集，都是拟圆；因此，根据 Ahlfors 定理，它们可以通过拟共形映射映到单位圆上。拟圆的示例见图 9，非拟圆曲线的示例见图 10。

3.3. **拟共形环域**。 多亏了定理 3.1，我们已经完全理解了 Jordan 曲线的拟共形一致化问题。很自然会问，是否能以受控的方式将一对不相交的 Jordan 曲线拟共形地映射到一对圆上。也就是说，若 J_1, J_2 是 Jordan 曲线，我们希望用球面上的一个 K-拟共形同胚将它们映射到圆上，使得 K 只取决于 J_1 和 J_2的几何特征。由定理 3.1 可知，必要条件是 J_1 和 J_2 为拟圆，且其拟圆性质的定量程度取决于 K。这个条件是否充分?

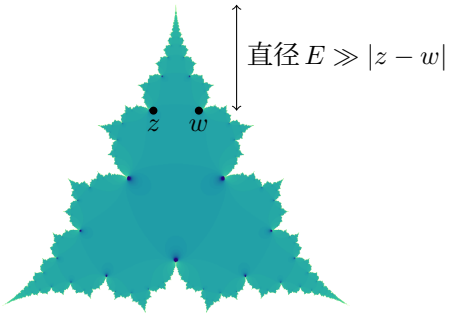

FIGURE 10. 拟圆没有尖点。图中所示的曲线是某个有理映射的朱利亚集，它有尖点，因此不是拟圆。

作为一个启发性例子，请注意，平面中的每个开正方形都是一个 L-拟圆盘。假设任意一对不相交正方形都能通过球面上的一个 K-拟共形映射映到一对不相交圆盘，且$K \geq 1$一致。考虑单位正方形 $[0,1]^2$，并对每个 $n \in \mathbb{N}$，取一个边平行于坐标轴的正方形 A_n，使得 A_n 大于 $[0,1]^2$，且 A_n 的一个顶点到 $[0,1]^2$ 的一个顶点的距离在 $n \to \infty$时趋于 0；见图 11。对每个 $n \in \mathbb{N}$，考虑一个 K-拟共形映射 $f_n\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$，它将 $[0,1]^2$ 映到单位圆盘，并将正方形 A_n 映到一个圆盘。根据拟共形映射的正规性判据（参见 LV73，第 II.5] 节），经过适当的规范化后，f_n 的一个子列收敛到一个拟共形映射 f，它将单位正方形映到 $\mathbb{D}$，并将一个正方形或四分之一平面 A 映到一个圆盘或半平面 $f(A)$。注意，A 和 $[0,1]^2$有一个公共顶点，而 $f(A)$ 与 $\mathbb{D}$相切。由于拟共形映射会以准保角的方式保持角度，映射 f 不可能将 A 和$[0,1]^2$ 之间的非零角映为 $f(A)$ 与 $\mathbb{D}$之间的零度角；利用拟共形映射局部拟对称这一事实，可以对此作出形式化证明。因此，我们得到矛盾。更多细节见 [Nta20，第 3.12] 节。

上述例子表明，正方形良好的几何性质并不足以保证能以受控的畸变将一对正方形映射到一对圆盘，且这种畸变不受其他因素（例如正方形的相对距离）的影响。两个直径为正且有限的集合 $E, F \subset \mathbb{C}$ 之间的相对距离定义为

$$\Delta(E,F) = \frac{\operatorname{dist}(E,F)}{\min\{\operatorname{diam} E, \operatorname{diam} F\}}.$$

Herron 注意到，若能控制两个拟圆盘的相对距离，就可以用受控的方式将它们映射到圆盘。具体而言，以下陈述是 [Her87 中定理 2.6 和推论 3.5] 的推论。

定理 3.2 ([赫尔87])。设 $L \geq 1$、$\delta > 0$ 和 U、$V \subset \mathbb{C}$ 是一对 L-拟圆盘，满足 $\Delta(U, V) \geq \delta$。则存在一个 $K(L, \delta)$-拟共形同胚映射 $\widehat{\ }$，它将 $\mathbb{C}$ 中的 U 和 V 映射为圆盘。

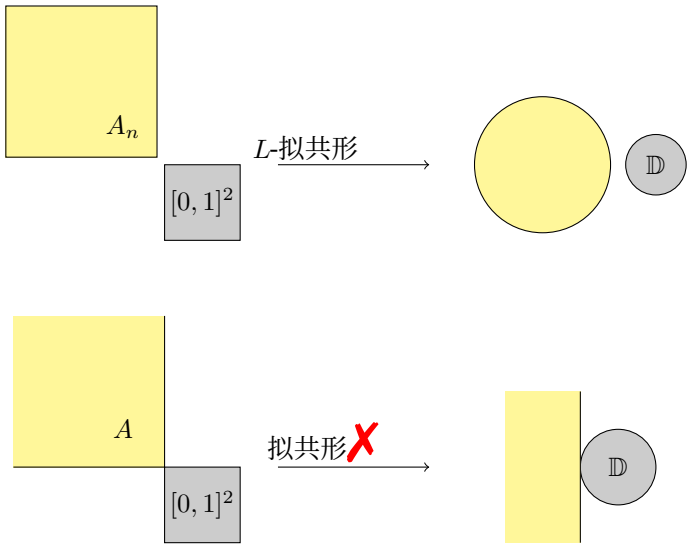

FIGURE 11.

注意，逆命题并不成立。也就是说，如果我们可以将 U 和 V 拟共形地映射为圆盘，那么 U 和 V 不一定具有较大的相对距离。例如，当 U 和 V 本身就是彼此过于接近的圆盘时，情况便是如此。于是，我们自然会遇到以下问题。

问题 3.3。 找出一个充要条件，使一对不相交的拟圆盘可以拟共形地映射到一对不相交圆盘，并给出定量估计。

我们将在第 3.6 节回到这个问题。

3.4. **肖特基集**。 更一般地，可以问三个或更多个不相交的拟圆盘是否能拟共形地映射到圆盘。在复平面中，一族不相交圆盘的补集称为*Schottky* 集；见图 12。肖特基集出现在几何函数论中的若干问题里，例如 Koebe 猜想，因为圆域的闭包是一个肖特基集。此外，它们还作为克莱因群的极限集出现，因此也从动力系统视角进行研究。

3.4.1. 早期结果。 通过 Schottky 集进行拟共形一致化的问题可追溯到1990年，当时 Herron 和 Koskela [HK90] 证明了 Koebe 关于一致域的猜想。在同一篇著作中，他们还得到了以下结果；请与定理 2.7 比较。

定理 3.4 ([HK90])**.** 设$\Omega \subset \mathbb{C}$ 是一致域。那么，存在一个Ω 的拟共形同胚，它将其映到一个 *Schottky* 集上。

与此同时，McMullen [McM90] 证明了一个关于克莱因群极限集的类似结果。

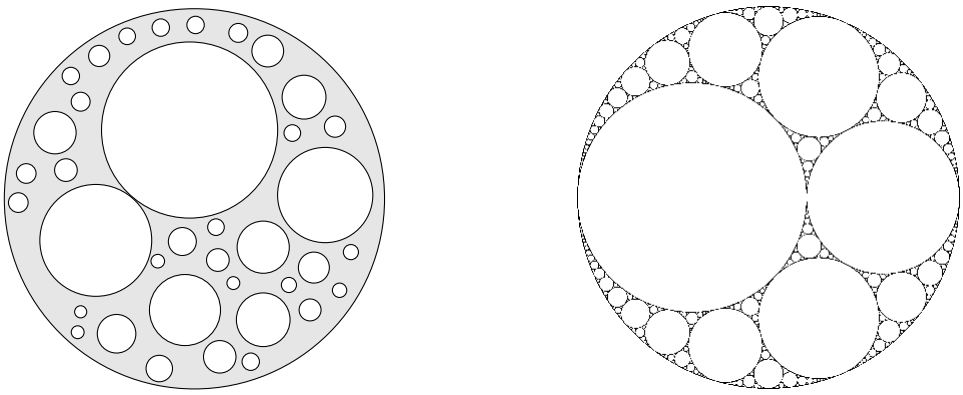

FIGURE 12. 肖特基集示例。右侧的肖特基集称为阿波罗尼乌斯垫片。

定理 3.5 ([McM90])。 如果凸余紧克莱因群的极限集是一个谢尔宾斯基 ´地毯，那么存在一个 $\mathbb{C}$ 上的拟共形同胚，将它映射到一个 ***Schottky*** 集。

在这一结果中出现的概念里，我们仅定义谢尔宾斯基地毯。标准谢尔宾斯基地毯 ´是一种自相似分形集，它通过将单位正方形划分为九个边长为$1/3$ 的正方形并移除中间的正方形来构造；随后，我们在剩余的八个正方形中分别递归进行这一过程。更一般地，谢尔宾斯基地毯定义如下。

定义 3.6（谢尔宾斯基地毯）。如果集合 $S \subset \mathbb{C}$ 满足以下条件，则称其为谢尔宾斯基 ´地毯：

（1） S 的补分支是可数多个互不相交的 Jordan 区域 U_i、 $i \in \mathbb{N}$。（2） S 的内部为空。（3）当 $i \to \infty$ 时，$\operatorname{diam} U_i \to 0$ 。（按球面度量测量）。（4）当 $i \neq j$时，$U_i \cap U_j = \emptyset$ 。

— —

Whyburn [Why58] 的一项基本结果表明，所有 Sierpi ´nski 地毯彼此同胚，尤其都与标准的 Sierpi ´nski 地毯同胚。图 13 展示了一个示例。

3.4.2. *Bonk* 的一致化定理。 Herron–Koskela 和 McMullen 的研究成果问世二十年后，Bonk 在 [Bon11] 中证明了一项关于通过 Schottky 集进行拟共形一致化的一般充分性判据，该判据不依赖一致域的几何性质，也不依赖复动力系统。

定理 3.7 ([Bon11])**.** 设 $\{U_i\}_{i\in I}$ 是复平面$\hat{}\mathbb{C}$中的一族两两不相交的 ***Jordan*** 区域。假设存在 $L \geq 1$ ，使得

(1) U_i 对每个 $i \in I$ 都是一个 L-拟圆盘；并且(2) 对于任意一对不同的指标 i、 $j \in I$ ，都有 $\Delta(U_i, U_j) \geq L^{-1}$。

那么存在一个 K（L）-拟共形同胚 f ，它将球面上的集合 $S = \mathbb{C} \setminus \bigcup_{i\in I} U_i$ 映到一个 ***Schottky*** 集上。此外，如果 S 的面积为零，那么 f 在相差一个 ***Möbius*** 变换的后复合意义下是唯一的。

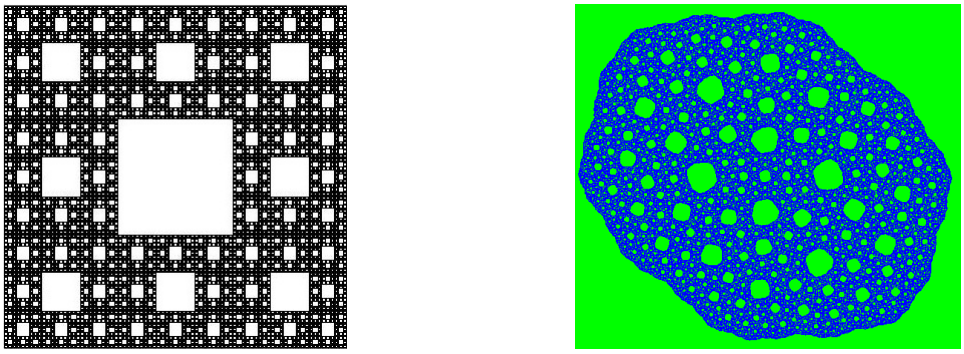

FIGURE 13. 标准谢尔宾斯基地毯，以及有理映射的一个谢尔宾斯基地毯朱利亚集。

等价地，我们可以将结论改述为： f 将每个 U_i 映为一个圆盘。注意，在式 (2) 中，相对距离 $\Delta(U_i, U_j)$ 必须使用球面度量计算。实际上，度量并非那么重要，因为如式 (2) 所示， $\Delta(U_i, U_j)$ 有正的下界这一条件，在球面度量下成立，当且仅当它在欧几里得度量下成立；参见 [Nta26，注 2.3]。此外，当 S 的面积为零时，集合 S 实际上是一个谢尔宾斯基地毯。

Bonk 的结果推广了 Herron 在定理 3.2 中的思路：通过一对圆盘对一对 Jordan 区域进行一致化。值得注意的是，用于一致化一对 Jordan 区域的完全相同的充分条件，也适用于无限多个 Jordan 区域的情形。

我们注意到，Bonk 定理蕴含了上文提到的 Herron–Koskela（定理 3.4）和 McMullen（定理 3.5）的结果。人们或许会问，这些结果与 Bonk 的结果之间为何相隔二十年。答案是，在此期间，Schramm [Sch95] 提出了跨边界模这一强大工具，用于研究平面上的一致化问题。Bonk 极大地依赖了这一工具，并对其进行了系统研究，为后续若干涉及谢尔宾斯基地毯以及平面和度量空间中区域的研究项目奠定了基础。

Bonk 的卓越判据已被用于解决研究标准谢尔宾斯基地毯和朱利亚集时产生的刚性问题 [BM13,BLM16,BM20]，并进一步推广到了非平面地毯的情形 [MW13, Reh22]。我们陈述 Bonk 和 Merenkov [BM13], 工作的主要结果，该结果代表了这一领域的一项重大成就；其证明展示了如何利用 Schottky 集来解决并非直接涉及 Schottky 集或圆的问题。

定理 3.8 ([BM13])。 标准谢尔宾斯基地毯的每个拟对称同胚都是欧氏等距映射。

几何群论中的一个核心问题是确定哪些集合能够作为双曲群的极限集出现。定理 3.8 的一个深刻推论是，标准的谢尔宾斯基地毯与任何双曲群的极限集都不同胚于拟对称映射。事实上，作为双曲群极限集出现的地毯都具有作用于其上的无限拟对称自映射群，而根据定理 3.8，标准谢尔宾斯基地毯对应的群是有限群。另请参阅下文第 3.4.4 节的相关讨论。

3.4.3. 放宽几何假设。定理 3.7 陈述最后一句中映射的唯一性，源自 Bonk–Kleiner–Merenkov 的一项关于 Schottky 集刚性的工作 [BKM09] 。该结果至关重要地运用了圆的几何性质，其证明涉及由沿 Schottky 集中的圆作共形反射所生成的群。另一方面，Bonk 定理的存在性部分并不依赖圆的几何性质。事实上，证明可以加以改造，从而将该集合拟共形一致化为一个补分支为正方形或等边三角形的集合。

现在，关于 Bonk 假设的必要性，显然，正如 Herron 定理（定理 3.2）的情形一样，条件（1）是必要的。然而，条件（2）显然不是必要条件，因为存在不满足该条件的 Schottky 集。

自然会问，如果放宽假设（2），一致化结果是否仍然成立。作者在 [Nta20 3] 的第 3]节研究了这一问题。研究表明，可以通过一种广义意义下的拟共形同胚，将满足假设（1）某种放宽版本的零面积 Sierpi´nski 地毯一致化为方形地毯。非正式地说，如果放宽定理 3.7 的假设，仍然存在一致化映射，但其正则性会降低。

我们介绍作者在这一方向上的另一项结果 [Nta23a] 。相当令人惊讶的是，我们可以完全去除定理 3.7 的几何假设，转而使用一个非常弱的可和性条件，同时仍然得到一致化结果。

定理 3.9 ([Nta23a])。 设 $\{U_i\}_{i\in I}$ 是复平面中的一族 *Jordan* 区域，它们的闭包互不相交，并且满足

$$\sum_{i\in I}(\operatorname{diam} U_i)^2 < \infty.$$

那么，存在一个填充拟共形映射 $f\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$，它将一个 *Schottky* 集映到 $S=\mathbb{C}\setminus\bigcup_{i\in I}U_i$。

这里不对填充拟共形映射的概念作定义。大致而言，如第3.1节中经典拟共形映射的定义一样，$f|_{f^{-1}(S)}$须属于适当的索伯列夫空间推广，并满足类似于 (3.1) 的畸变不等式。对原像$f^{-1}(U_i)$不要求任何正则性。此外，f 不一定是同胚，而只是一列同胚的一致极限；等价地，f 是连续的、满射的，且每个点的原像都是连通的 [You48]。填充拟共形映射的定义很自然，其动机来自过去三十年间对度量空间中的索伯列夫空间及拟共形映射的各种定义的研究[HK98, Sha00, Hei01, Wil12, HKST15, Nta20, NR23, NR24]。

定理 3.9 的可和性条件，其动机源于对共形环系综地毯（CLE）的研究，该系综由 Sheffield 和 Werner [SW12] 提出。这是一种 Sierpi´nski 地毯，由单位圆盘中的 Jordan 曲线随机集合产生，并结合了共形不变性与一种自然的限制性质。这种随机地毯的几何结构具有奇异性，其补分支既不是拟圆盘，也不满足分离条件（2）。然而，Rohde 和 Werness [RW15] 宣布，直径以概率 1 满足定理 3.9 的可和性条件。首个公开发表的、证明这一已宣布结果的证明归功于 Doherty 和 Miller

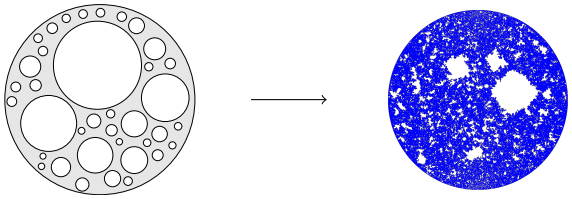

FIGURE 14. 用一个肖特基集对 CLE 地毯进行一致化。图中所示 CLE 地毯的模拟由 D. Wilson 完成。

[DM25]。因此，根据定理 3.9，CLE地毯以概率 1 可由 Schottky 集一致化；见图 14。

3.4.4. 朱利亚集的一致化。 我们回到这样一个问题：如何在经典意义下利用拟共形映射，通过肖特基集对集合进行一致化。

Bonk 定理适用于复动力系统中的一致化结果，因为定理 3.7 中的两个主要假设在（次）双曲动力系统的背景下都十分自然，而且容易验证。在这一方向上，Bonk、Lyubich 和 Merenkov [BLM16] 证明了以下结果。

定理 3.10 ([BLM16])。 设 R 是一个后临界有限有理映射，其朱利亚集 $\mathcal{J}(R)$ 是一个谢尔宾斯基地毯。那么存在一个 $\mathbb{C}$ 的拟共形同胚$\widehat{\ }$，它将 $\mathcal{J}(R)$ 映到一个肖特基集上。

关于动力学概念的定义，请参阅经典专著 [Mil06] 。图 13 展示了一个满足 Bonk 定理假设的谢尔宾斯基地毯朱利亚集。上述定理对这类朱利亚集的刚性有一些深远影响。例如，文献 [BLM16] 证明， $\mathcal{J}(R)$ 的拟对称自映射群是有限群，因此，克莱因群的极限集都不可能与 $\mathcal{J}(R)$ 拟对称等价。这些结果的拓展近来见于文献 [MS26]。

虽然 Bonk 在定理 3.7 中提出的判据可用于若干有趣且重要的情形，但它不允许补拟圆盘 U_i、 $i \in I$ 彼此靠近，更不用说相互接触。因此，即使补分支 U_i、$i \in I$ 满足非常强的几何条件，要对拓扑上类似阿波罗尼垫片的集合（见图 12）给出一般的一致化结果，似乎仍遥不可及。

最近，作者和 Luo [LN24] 克服了这一障碍，并为垫圈朱利亚集证明了一个拟共形一致化结果。受阿波罗尼乌斯垫片的启发，我们给出以下定义。

$\widehat{\ }$**定义3.11** （垫片）。 集合 $K \subset \mathbb{C}$ 如果满足以下条件，则称为垫片：

（1） K 的补分支是可数个互不相交的 Jordan 区域 U_i、 $i \in \mathbb{N}$。（2） K 的内部为空。（3）$\operatorname{diam} U_i \to 0$ 趋于 $i \to \infty$ （在球面度量下测量）。（4） K 的两个补分支的边界至多共享一个点。

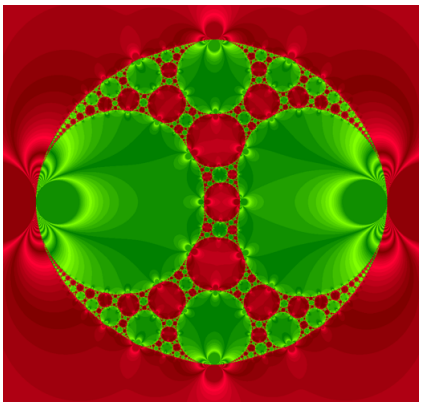

FIGURE 15. 一个胖垫圈朱利亚集。

（5） $\mathbb{C}$中的任何点都不属于 K的三个补分支的边界。（6）与 K对应的接触图如下构成：为每个补分支指定一个顶点；如果两个补分支共享一个边界点，则在它们之间连一条边。该图是连通的。

注意，谢尔宾斯基地毯也满足条件 (1)、(2) 和 (3)。然而，对于地毯，各区域 U_i、 $i \in \mathbb{N}$ 的闭包不相交，因此条件 (4) 和 (5) 显然成立；而条件 (6) 不成立，因为接触图没有边。此外，Schottky 集必然满足条件 (4) 和 (5)，所以任何能够通过球面同胚映射到 Schottky 集的集合也必须满足这两个条件。

如果一个垫片 $K = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ 满足如下条件，我们就称它为胖的：每当 $U_i \cap U_j = \emptyset$ 时， $\overline{U_i}$ 和 $\overline{U_j}$ 就彼此相切；参见图 15。关于胖性的精确定义，请参阅 [LN24] 。请注意，此处的胖性不要与第2.3节前文使用的概念混淆；另请参见下文的问题3.15，了解进一步讨论。

我们陈述定理 [LN24], ，该定理刻画了哪些垫圈朱利亚集可以拟共形地映到 Schottky 集。

定理3.12 ([LN24])。 设 R 是一个有理映射，其朱利亚集 $\mathcal{J}(R)$ 是一个不含 R任何临界点的垫片。以下条件等价。

(1) 存在一个拟共形同胚 ϕ ，将 $\mathbb{C}$ 中的 $\mathcal{J}(R)$ 映到一个 *Schottky* 集上。 (2) $\mathcal{J}(R)$ 是一个胖垫片。(3) 每个接触点最终都会被映到一个重数为3的抛物周期点。

此外，条件 *(1)* 中的映射 ϕ 在以下强意义下是唯一的：若 ψ 是将 $\mathbb{C}$ 中的 $\mathcal{J}(R)$ 映到某个 *Schottky* 集的任意保向同胚，那么 $\psi|_{\mathcal{J}(R)}$ 与 $\phi|_{\mathcal{J}(R)}$ 只相差一个 *Möbius* 变换的后复合。

关于各种复动力系统概念的定义，请读者参阅所引用的论文。这一结果很大程度上依赖于朱利亚集的结构以及复动力系统中的方法，而这些方法并不能推广到任意

垫片。尽管如此，它仍为下一节提出的一般性结果提供了动机。

3.5. **Schottky集的刻画**。设 $\{U_i\}_{i\in I}$ 是复平面 $\mathbb{C}$ 中一族互不相交的 $\widehat{}$Jordan区域。我们注意到，在 Bonk 定理（定理 3.7）中，为了得到拟共形一致化结果，需要对区域对 U_i，U_j 施加几何假设。尽管这一点不那么明显，但类似的思想也适用于定理3.12；在该定理中，对彼此接触的区域对U_i，U_j 施加了相切条件。受这些结果的启发，我们给出以下定义。

定义 3.13（可圆化区域）。设 $\{U_i\}_{i\in I}$ 是复平面 $\mathbb{C}$ 中一族互不相交的$\widehat{}$Jordan区域。若存在 $K \geq 1$，使得对于每个 i，$j \in I\widehat{}$都存在一个 K-拟共形同胚，将 $\mathbb{C}$ 中的 U_i 和 U_j 映射为边界彼此不同的圆盘，则称区域 U_i、 $i \in I$ 一致地成对拟共形可圆化。

注意，如果这些区域 U_i、$i \in I$ 是 L-拟圆盘，并且 $\Delta(U_i, U_j) \geq L^{-1}$ 对于 $i \neq j$，那么根据 Herron 定理（定理 3.2），它们也能一致地两两拟共形圆化。因此，定义 3.13 的条件严格弱于 Bonk 定理（定理 3.7）中的假设。

自然会问，上述两两圆化条件是否足以推出通过 Schottky 集进行拟共形一致化。作者 [Nta25b]的下一个结果给出了肯定的回答。

定理 3.14（[Nta25b]）。设 $\{U_i\}_{i\in I}$ 是一族两两不交的 *Jordan* 区域$\widehat{}$，它们位于 $\mathbb{C}$ 中且边界彼此不同。以下条件在定量意义下等价。

（1）区域 U_i、 $i \in I$ 能够一致地两两拟共形圆化。$\widehat{}$（2）存在一个 $\mathbb{C}$ 上的拟共形同胚，将集合 $S = \mathbb{C} \setminus \bigcup_{i\in I} U_i$ 映到一个 *Schottky* 集上，并且在 S上是1-拟共形的。

在这种情况下，映射 $f|_S$ 在相差一个莫比乌斯变换 $M\ddot{}$ 的后复合的意义下唯一。

该定理给出了 Schottky 集的拟共形刻画，并可将 Bonk 定理作为推论得到。证明依赖于 Schramm 的跨边界模、对 Bonk 的跨边界模数估计的改进，以及由圆反射生成的群（称为施托基群）的性质。

证明中的难点之一是，目前尚无已知的拓扑刻画能够描述 Schottky 集。我们列出定义 3.13 中圆化假设的三个拓扑推论；可与第 3.4.1 节中 Sierpi´nski 地毯的定义以及第 3.4.4 节中垫片的定义作比较。

(1) $\overline{U_i} \cap \overline{U_j}$ 对于 $i \neq j$至多包含一个点。这是因为存在一个$\widehat{}$同胚，将 $\mathbb{C}$ 映射，使 U_i 和 U_j 成为边界互不相同的圆盘。(2) 对每组三个互不相同的指标 i、j、$k \in I$， $U_i \cap U_j \cap U_k = \emptyset$。这更为微妙，其结论源于拟圆的几何性质以及 Ahlfors 在定理 3.1 中给出的刻画；参见 [Nta25b，引理 3.2]。(3) 对每个 $\varepsilon > 0$，至多存在有限多个 $i \in I$ 使得 $\operatorname{diam} U_i > \varepsilon$。这是因为区域 U_i、$i \in I$ 是一致拟圆盘，

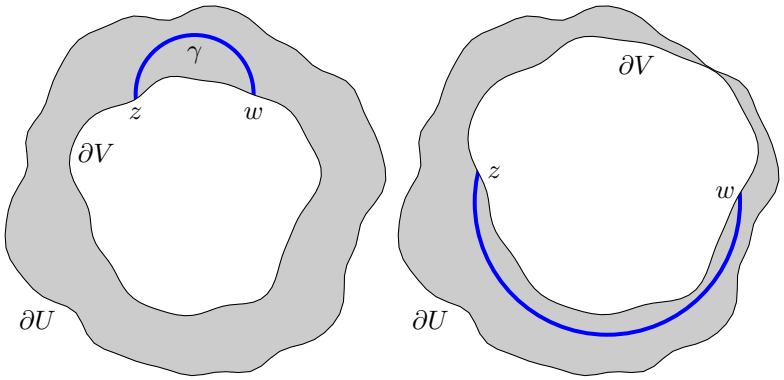

FIGURE 16. 一条曲线 γ位于 $U^* \setminus V$中，连接 z， $w \in \partial V \setminus \overline{U}$。这里$U$ 是无界区域， V 是有界白色区域。

因此 $(\operatorname{diam} U_i)^2$ 有一个一致常数倍的上界，即 U_i的面积；参见第2.3.2节关于厚集的讨论。

问题3.15。 如果 *Jordan* 区域 $\{U_i\}_{i\in I}$ 满足上述三个条件，是否存在一个 $\mathbb{C}$ 的同胚，将集合 $S = \mathbb{C} \setminus \bigcup_{i\in I} U_i$ 映到一个 *Schottky* 集上？

目前只有在 $U_i \cap U_j = \emptyset$ 对于 $i \neq j$ 的情形下，才已知答案是肯定的；这一结果由 Whyburn 给出 [Why58]。一般情形预计要困难得多，因为当允许 $U_i \cap U_j$ 非空时，强刚性性质便会发挥作用。事实上，在这种情况下，可能存在一个从 S 到 Schottky 集的唯一同胚（相差 M¨obius 变换），如定理3.12的最后部分所示。

为了完整地几何刻画与 Schottky 集拟共形等价的集合，尚需几何刻画能够拟共形映射到一对圆盘的一对拟圆盘。因此，我们回到了问题 3.3；该问题的解将在下一节给出。

3.6. **重新审视拟共形环域**。若 U 是复平面中的一个区域，我们用 U^*表示U的补集。若 ∂U 至少有三个点，则用 h_U 表示 U上的双曲度量。

设 $U, V \subset \mathbb{C}$ 为 Jordan 区域，且 $U \cap V$至多包含一个点。按照 [Nta26]，我们将这一对（V, U）的相对双曲度量定义为

$$d_{V,U} = \inf_{\gamma} \ell_{h_{U^*}}(\gamma), \quad z, w \in \partial V \setminus \overline{U},$$

其中，下确界取遍 $U^* \setminus V$中连接 z 与 w的所有曲线 γ；参见图16。注意，若 V是拟圆盘，则 $d_{V,U}$ 是 $\partial V \setminus U$上的度量。

当 U, V 是不相交圆盘时，可以显式计算度量 $d_{V,U}$。具体而言，若 V 和 U^* 是 $\mathbb{C}$ 中的同心圆盘，则对所有 $z, w \in \partial V$，我们有

$$C^{-1} \frac{|z-w|}{\operatorname{dist}(\partial U, \partial V)} \leq d_{V,U}(z,w) \leq C \frac{|z-w|}{\operatorname{dist}(\partial U, \partial V)},$$

其中 $C \geq 1$ 是一致常数。此外，若 U, V 是平行半平面（即在 ∞ 相切的圆盘），则对所有 $z, w \in \partial V \setminus U$，我们有

$$d_{V,U}(z,w) = \frac{|z-w|}{\operatorname{dist}(\partial U, \partial V)}.$$

因此，在这两个模型情形中，度量 $d_{V,\,U}$ 本质上是欧几里得距离的倍数。

来自 [Nta26] 的接下来两个结果，给出了 $d_{V,\,U}$ 与欧几里得距离之间所需的精确关系；满足该关系时，一对互不相交的拟圆盘 U，V 可以通过复平面上的一个拟共形同胚映射为一对圆盘。

第一个结果涉及彼此“相切”的拟圆盘 U，V。通过莫比乌斯变换进行归一化，我们假设“切点”位于 ∞。因此，我们假设 U，$V \subset \mathbb{C}$ 是复平面拓扑下的无界拟圆盘。在下述命题中，我们使用 $\mathbb{C}$ 的拓扑。

定理 3.16 ([Nta26])**.** 设 $U, V \subset \mathbb{C}$ 为无界拟圆盘，满足 $U \cap V \neq \emptyset$（在 $\mathbb{C}$ 中）。存在一个拟共形映射 $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$，将 U 和 V 映射为半平面，当且仅当恒等映射

$$\mathrm{id}\colon (\partial V, d_{V,U}) \to (\partial V, |\cdot|)$$

是拟对称的。该结论是定量的。

回顾第 2.3.3 节中拟对称映射的定义。该结论是定量的，具体而言，若区域 U，V 是 L-拟圆盘，且映射 $\mathrm{id}\colon (\partial V,\ d_{V,\,U}) \to (\partial V,\ |\cdot|)$ 是 η-拟对称的，则存在一个 $K(L,\ \eta)$-拟共形同胚，将 $\mathbb{C}$ 映射到半平面。反过来，若 U，V 是 L-拟圆盘，且存在如上所述的 K-拟共形同胚，则映射 $\mathrm{id}\colon (\partial V,\ d_{V,\,U}) \to (\partial V,\ |\cdot|)$ 对某个畸变函数 η 是 η-拟对称的，该畸变函数仅依赖于 K 和 L。

接下来，我们给出关于闭包不相交的拟圆盘的相应结果。这里我们使用球面 $\mathbb{C}$ 的拓扑。该结论与上述情形一样是定量的。

定理 3.17 ([Nta26])**.** 设 $U, V \subset \mathbb{C}$ 为拟圆盘，使得 $U \cap V = \emptyset$。那么，存在拟共形映射 $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$，将 U 和 V 映到圆盘，当且仅当恒等映射

$$\mathrm{id}\colon (\partial V, d_{V,U}) \to (\partial V, \chi)$$

是拟 *Möbius* 的。该结论是定量的。

这里 χ 表示 $\mathbb{C}$ 上的弦度量，定义为

$$\chi(z,w) = \frac{2|z-w|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|w|^2}} \text{ for } z, w \in \mathbb{C} \text{ and } \chi(z,\infty) = \frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}} \text{ for } z \in \mathbb{C}.$$

等价地，也可以使用球面度量，它与弦度量双 Lipschitz 等价。现在我们讨论准 M¨obius 映射的概念，该概念由 V¨ais¨al¨a [V¨ai84] 引入。度量空间 $(X,\ d)$ 中四个互异点 a，b，c，d 的交比 定义为

$$[a,b,c,d] = \frac{d(a,c)d(b,d)}{d(a,d)d(b,c)}.$$

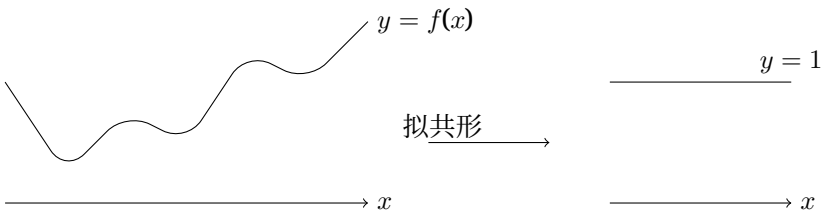

FIGURE 17. 定理 3.18 的图示。

^若 $X = \mathbb{C}$ 配备弦度量，且 a, b, c, $d \neq \infty$，则有

$$[a, b, c, d] = \frac{|a - c||b - d|}{|a - d||b - c|}.$$

如果其中一个点等于 ∞，则省略包含该点的因子。例如，

$$[a, b, c, \infty] = \frac{|a - c|}{|b - c|}.$$

众所周知，莫比乌斯变换保持交比。拟莫比乌斯映射的定义是要求它们以受控的方式扭曲交比。具体而言，度量空间之间的同胚 $f\colon X \to Y$ 是拟莫¨比乌斯映射，当且仅当存在一个同胚 $\eta\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$，使得

$$[f(a), f(b), f(c), f(d)] \leq \eta([a, b, c, d])$$

对于任意四个互不相同的点 a、b、c、$d \in X$。在这种情况下，我们称 f是η-拟M¨obius。拟对称映射是拟M¨obius映射；在某些限制和规范化条件下，反过来亦成立。

定理 3.17 中使用拟M¨obius映射而非拟对称映射，是为了使结论具有定量性。我们指出，定量依赖性正是问题 3.3 所要求的。若不要求这一点，那么将两个闭包不相交的拟圆盘映射到两个圆盘上，只需一个拟常数可能非常大的 K 拟共形映射，这显然是容易做到的。

最后，我们将定理 3.16 应用于 ∂V是实数轴且 ∂U 是利普希茨函数图像的情形。

定理 3.18 ([Nta26])。 设 $f\colon \mathbb{R} \to (0, \infty)$ 是一个利普希茨函数。当且仅当 $1/f$ 的一个原函数是拟对称映射时，存在一个保持实数轴不变、并将 f 的图像映射到一条直线上的 $\mathbb{C}$ 拟共形同胚。该结论具有定量性。

示意图见图17。该定理应用了利普希茨函数

$$f(x) = \frac{1}{(|x| + 1)^p}, \quad x \in \mathbb{R},$$

其中 $p > -1$。 $1/f$ 的任一原函数都是幂函数，可以证明它是拟对称的（见 [Hei01，第 10.3] 题）。因此，根据定理 3.18， f 的图像可以通过一个保持实数轴不变的复平面拟共形映射拉直为一条直线。另一方面，对于利普希茨函数 $g(x) = e^{-|x|}$， $1/g$ 的原函数并非拟对称，因此不存在保持实数轴不变且能将 g 的图像拉直为一条直线的拟共形映射。

References

[AB50] L. Ahlfors 和 A. Beurling, *Conformal invariants and function-theoretic null-sets*, 《数学学报》83 (1950), 101–129。[Ahl06] L. V. Ahlfors, *Lectures on quasiconformal mappings*, 第二版, 大学讲义系列, 第 38 卷, 美国数学学会, 普罗维登斯, 罗得岛州, 2006年。附有 C. J. Earle、I. Kra、M. Shishikura 和 J. H. Hubbard 撰写的补充章节。[Ahl63] L. V. Ahlfors, *Quasiconformal reflections*, 《数学学报》109 (1963), 291–301。[AIM09] K. Astala、T. Iwaniec 和 G. Martin, *Elliptic partial differential equations and quasi-conformal mappings in the plane*, 普林斯顿数学丛书, 普林斯顿大学出版社, 普林斯顿, 新泽西州, 2009年。[BB03] Z. M. Balogh 和 S. M. Buckley, *Geometric characterizations of Gromov hyperbolicity*, 《数学发明》153 (2003), 第 2 期, 261–301。[Ber61] L. Bers, *Uniformization by Beltrami equations*, 《纯粹与应用数学通讯》14 (1961), 215–228。[Bes31] A. S. Besicovitch, *On Sufficient Conditions for a Function to be Analytic, and on Be-haviour of Analytic Functions in the Neighbourhood of Non-Isolated Singular Points*, 《伦敦数学会会刊》（第二辑）32 (1931), 第 1 期, 1–9。[BH20] S. M. Buckley 和 D. A. Herron, *Quasihyperbolic geodesics are hyperbolic quasi-geodesics* **22** 2020 6, 1917 1970 , 《欧洲数学学会杂志》（ ）, 第 – 期。[BHK01] M. Bonk、J. Heinonen 和 P. Koskela, *Uniformizing Gromov hyperbolic spaces*, 《Ast´erisque》270 (2001)。[Bis26] C. J. Bishop, *Conformal removability is hard*, 《EMS 数学科学综述》（2026年）。即将出版。[BKM09] M. Bonk、B. Kleiner 和 S. Merenkov, *Rigidity of Schottky sets*, 《美国数学杂志》131 (2009), 第 2 期, 409–443。[BLM16] M. Bonk、M. Lyubich 和 S. Merenkov, *Quasisymmetries of Sierpiński carpet Julia sets* **301** 2016 383 422 , 《数学进展》（ ）, –。[BM13] M. Bonk 和 S. Merenkov, *Quasisymmetric rigidity of square Sierpiński carpets*, 《数学年刊》177 (2013), 第 2 期, 591–643。[BM20] M. Bonk 和 S. Merenkov, *Square Sierpiński carpets and Lattès maps*, 《数学杂志》296 (2020), 第 1–2 期, 695–718。[Bon06] M. Bonk, *Quasiconformal geometry of fractals*, 《国际数学家大会论文集》第二卷, 欧洲数学学会, 苏¨黎世, 2006年, 第 1349–1373 页。[Bon11] M. Bonk, *Uniformization of Sierpiński carpets in the plane*, 《数学发明》186 (2011), 第 3 期, 559–665。[Bon16] M. Bonk, *Uniformization by square domains*, 《分析杂志》24 (2016), 第 1 期, 103–110。[Bra80] M. Brandt, *Ein Abbildungssatz für endlich-vielfach zusammenhängende Gebiete*, 《罗兹科学与文学学会通报》 -L´od´z 30 (1980), 第 3 期, 12。[Con95] J. B. Conway, *Functions of one complex variable. II*, 《数学研究生教材》第 159 卷, 施普林格出版社, 纽约, 1995年。[Cou77] R. Courant, *Dirichlet's principle, conformal mapping, and minimal surfaces*, 施普林格出版社, 纽约—海德堡, 1977年。1950年原版的重印本。[Den32]H. Denneberg, *Konforme Abbildung einer Klasse unendlich-vielfach zusammenhängender schlichter Bereiche auf Kreisbereiche*, 论文, 莱比锡报告 84 (1932), 331–352。[DM25] C. Doherty 和 J. Miller, *The square summability of the CLE complementary component diameters* 2025 2509 19204 （ ）。预印本 arXiv: 。。[ER26] B. Esmayli 和 K. Rajala, *Conformal uniformization of domains bounded by quasitripods* 2026 , 《杜克数学杂志》（ ）。即将出版。[Fol99] G. B. Folland, *Real analysis. Modern techniques and their applications*, 第二版, 《纯粹与应用数学》（纽约）, John Wiley & Sons, Inc., 纽约, 1999年。[Geh87] F. W. Gehring, *Uniform domains and the ubiquitous quasidisk*, 《德国数学家协会年报》89 (1987), 第 2 期, 88–103。[Gol69] G. M. Goluzin, *Geometric theory of functions of a complex variable*, 数学专著译丛, 第 26 卷, 美国数学学会, 普罗维登斯, 罗得岛州, 1969年。

[Gr¨o31] H. Gr ¨ *Zum Parallelschlitztheorem der konformen Abbildung schlichterunendlich-vielfach zusammenhängender Bereiche* ¨ otzsch, , Ber. Verh. Sachs. Akad. Wiss. Leipz., Math.-Phys. Kl. 83 (1931), 185–200. [Gr¨o35] H. Gr¨otzsch, *Bemerkung zum Koebeschen Kreisnormierungsprinzip*, Leipziger Berichte 87 (1935), 319–324. [Gro87] M. Gromov, *Hyperbolic groups*, Essays in group theory, Math. Sci. Res. Inst. Publ., Springer, New York, 1987, pp. 75–263. [Haa84] A. Haas, *Linearization and mappings onto pseudocircle domains*, Trans. Amer. Math. Soc. 282 (1984), no. 1, 415–429. [Har82] A. N. Harrington, *Conformal mappings onto domains with arbitrarily specified boundary shapes* **41** 1982 39 53 , J. Anal. Math. ( ), – . [Hei01] J. Heinonen, *Lectures on analysis on metric spaces*, Universitext, 施普林格出版社, New York, 2001. [Her87] D. A. Herron, *The geometry of uniform, quasicircle, and circle domains*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. 12 (1987), no. 2, 217–227. [Hil09] D. Hilbert, *Zur Theorie der konformen Abbildung*, Nachr. Kgl. Ges. Wiss. G¨ott., Math.- Phys. Kl. (1909), 314–323. [HK90] D. A. Herron and P. Koskela, *Quasiconformal distance domains and conformal mappings onto circle domains* **15** 1990 3, 167 179 , Complex Variables Theory Appl. ( ), no. – . [HK98] J. Heinonen and P. Koskela, *Quasiconformal maps in metric spaces with controlled geometry* **181** 1998 1, 1 61 , 《数学学报》 ( ), no. – . [HKST15] J. Heinonen, P. Koskela, N. Shanmugalingam, and J. T. Tyson, *Sobolev spaces on metric measure spaces. An approach based on upper gradients* , New Mathematical Monographs, Cambridge University Press, Cambridge, 2015. [HL23] H. Hakobyan and W.-B. Li, *Quasisymmetric embeddings of slit Sierpiński carpets*, Trans. Amer. Math. Soc. 376 (2023), no. 12, 8877–8918. [HS93] Z.-X. He and O. Schramm, *Fixed points, Koebe uniformization and circle packings*, Ann. of Math. (2) 137 (1993), no. 2, 369–406. [HS94] Z.-X. He and O. Schramm, *Rigidity of circle domains whose boundary has σ-finite linear measure* **115** 1994 2, 297 310 , Invent. Math. ( ), no. – . [Jon81] P. W. Jones, *Quasiconformal mappings and extendability of functions in Sobolev spaces* **147** 1981 1 2, 71 88 , 《数学学报》 ( ), no. - – . [Jon95] P. W. Jones, *On removable sets for Sobolev spaces in the plane*, Essays on Fourier analysis in honor of Elias M. Stein (Princeton, NJ, 1991), 普林斯顿数学丛书, 普林斯顿大学出版社, 普林斯顿, NJ, 1995, pp. 250–267. [JS00] P. W. Jones and S. K. Smirnov, *Removability theorems for Sobolev functions and quasiconformal maps* **38** 2000 2, 263 279 , Ark. Mat. ( ), no. – . [Kle06] B. Kleiner, *The asymptotic geometry of negatively curved spaces: uniformization, geometrization and rigidity* , International Congress of Mathematicians. Vol. II, Eur. Math. Soc., Z¨urich, 2006, pp. 743–768. [KN05] P. Koskela and T. Nieminen, *Quasiconformal removability and the quasihyperbolic metric* **54** 2005 1, 143 151 , Indiana Univ. Math. J. ( ), no. – . [KN25] C. Karafyllia and D. Ntalampekos, *Uniformization of Gromov hyperbolic domains by circle domains* 2025 , 《杜克数学杂志》 ( ). 即将出版。 [Koe07a] P. Koebe, *Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven*, Nachr. Ges. Wiss. G¨ottingen, Math.-Phys. Kl. (1907), 191–210. [Koe07b] P. Koebe, *Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven. Zweite Mitteilung.* ¨ 1907 633 669 , Nachr. Ges. Wiss. Gottingen, Math.-Phys. Kl. ( ), – . [Koe07c] P. Koebe, *Über die Uniformisierung reeller algebraischer Kurven*, Nachr. Ges. Wiss. G¨ottingen, Math.-Phys. Kl. (1907), 177–190. [Koe08] P. Koebe, *Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven, III*, Nachr. Ges. Wiss. G¨ott. (1908), 337–358. [Koe20] P. Koebe, *Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung*, Math. Z. 7 (1920), no. 1-4, 235–301. [Koe22] P. Koebe, *über die Konforme Abbildung Endlich- und Unendlich-Vielfach Zusammenhängender Symmetrischer Bereiche* **43** 1922 1, 263 287 , 《数学学报》 ( ), no. – . [LN24] Y. Luo and D. Ntalampekos, *Uniformization of gasket Julia sets* (2024). 预印本 arXiv:2411.17227.

[LR25] C. Li and K. Rajala, *Uniformization of cofat domains on metric two-spheres* (2025). 预印本 arXiv:2504.14277.[LV73] O. Lehto and K. I. Virtanen, *Quasiconformal mappings in the plane*, 第二版，Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften，第126卷，施普林格出版社，New York-Heidelberg，1973.[McM90] C. McMullen, *Iteration on Teichmüller space*, Invent. Math. 99 (1990), no. 2, 425–454.[Mes51] H. Meschowski, *Über die konforme Abbildung gewisser Bereiche von unendlich hohen Zusammenhang auf Vollkreisbereiche I* **123** 1951 392 405 , , Math. Ann. ( ), – .[Mes52] H. Meschowski, *Über die konforme Abbildung gewisser Bereiche von unendlich hohen Zusammenhang auf Vollkreisbereiche II* **124** 1952 178 181 , , Math. Ann. ( ), – .[Mil06] J. Milnor, *Dynamics in one complex variable*, 第三版，Annals of Mathematics Studies，第160卷，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，NJ，2006.[MS26] S. Merenkov and L. Shen, *Quasiregular maps of Sierpiński carpet Julia sets* (2026). 预印本 arXiv:2601.18109. [MS79] O. Martio and J. Sarvas, *Injectivity theorems in plane and space*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. 4 (1979), no. 2, 383–401. [MW13] S. Merenkov and K. Wildrick, *Quasisymmetric Koebe uniformization*, Rev. Mat. Iberoam. 29 (2013), no. 3, 859–909.[NR23] D. Ntalampekos and M. Romney, *Polyhedral approximation of metric surfaces and applications to uniformization* **172** 2023 9, 1673 1734 , 《杜克数学杂志》 ( ), no. – .[NR24] D. Ntalampekos and M. Romney, *Polyhedral approximation and uniformization for non-length surfaces* 2024 , J. Eur. Math. Soc. ( ). 即将出版。[NR25] D. Ntalampekos and K. Rajala, *Exhaustions of circle domains*, Int. Math. Res. Not. IMRN 2025 (2025), no. 19, Paper No. rnaf296, 25 pp. [Nta19] D. Ntalampekos, *Non-removability of the Sierpiński gasket*, Invent. Math. 216 (2019), no. 2, 519–595.[Nta20] D. Ntalampekos, *Potential theory on Sierpiński carpets With applications to uniformization* 2268, 2020 : , Lecture Notes in Mathematics, vol. Springer, Cham, . [Nta21] D. Ntalampekos, *Non-removability of Sierpiński carpets*, Indiana Univ. Math. J. 70 (2021), no. 3, 847–854. [Nta23a] D. Ntalampekos, *Conformal uniformization of planar packings by disk packings*, Adv. Math. 428 (2023), Paper No. 109159, 58 pp. [Nta23b] D. Ntalampekos, *Metric definition of quasiconformality and exceptional sets*, Math. Ann. 389 (2023), no. 3, 3231–3253. [Nta23c] D. Ntalampekos, *Rigidity and continuous extension for conformal maps of circle domains* **376** 2023 7, 5221 5239 , Trans. Amer. Math. Soc. ( ), no. – . [Nta24] D. Ntalampekos, *CNED sets: countably negligible for extremal distances*, Selecta Math. (N.S.) 30 (2024), no. 4, Paper No. 61, 57 pp. [Nta25a] D. Ntalampekos, *Metric surfaces and conformally removable sets in the plane*, J. Anal. Math. 157 (2025), no. 2, 769–787. [Nta25b] D. Ntalampekos, *Quasiconformal characterization of Schottky sets* (2025). 预印本 arXiv:2507.22658.[Nta25c]D. Ntalampekos, *Uniformization of metric surfaces: A survey* (2025). 预印本 arXiv:2505.02697.[Nta26] D. Ntalampekos, *Characterization of tangent quasicircles and quasiannuli* (2026). 预印本 arXiv:2602.17236.[NY20] D. Ntalampekos and M. Younsi, *Rigidity theorems for circle domains*, Invent. Math. 220 (2020), no. 1, 129–183. [Raj25a] K. Rajala, *Extremal length and duality*, Expo. Math. 43 (2025), no. 1, Paper No. 125634, 14 pp.[Raj25b] K. Rajala, *Rigid circle domains with non-removable boundaries*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) 131 (2025), no. 3, Paper No. e70081, 18 pp. [Raj25c] K. Rajala, *Uniformization of planar domains by exhaustion*, Amer. J. Math. 147 (2025), no. 4, 1025–1051. [Reh22] J. Rehmert, *Quasisymmetric Koebe Uniformization of Metric Surfaces with Uniformly Relatively Separated Boundary* 2022 , ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, . 博士论文——堪萨斯州立大学。

[RR21] K. Rajala 和 M. Rasimus, *Quasisymmetric Koebe uniformization with weak metric doubling measures* **65** 2021 4, 749 767 , 《Illinois J. Math.》（ ）第 – 期。[RW15] S. Rohde 和 B. M. Werness, *Partial uniformization of CLE*（2015年），可见于 http://www.math.stonybrook.edu/Videos/Colloquium/direct_download.php?file=PDFs/20150212-Werness.pdf 10, 2026 。访问日期：3月 。[Sar48] L. Sario, *Über Riemannsche Flächen mit hebbarem Rand*, 《Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I.》50（1948年），1–79。[Sch93a] O. Schramm, *Square tilings with prescribed combinatorics*, 《Israel J. Math.》84（1993年），第1-2期，97–118。[Sch93b] O. Schramm, *Transboundary extremal length*（1993年），可见于 https://citeseerx.ist.psu.edu/document?repid=rep1&type=pdf&doi=02af0e4ab57df9449da0bec874fa73f46cc85fbd 。访问日期：2024年7月17日。[Sch95] O. Schramm, *Transboundary extremal length*, 《J. Anal. Math.》66（1995年），307–329。[Sha00] N. Shanmugalingam, *Newtonian spaces: an extension of Sobolev spaces to metric measure spaces* **16** 2000 2, 243 279 , 《Rev. Mat. Iberoamericana》（ ），第 – 期。[Sib68] R. J. Sibner, *Remarks on the Koebe Kreisnormierungsproblem*, 《Comment. Math. Helv.》43（1968年），289–295。[Str51] K. Strebel, *Über das Kreisnormierungsproblem der konformen Abbildung*, 《Ann. Acad. Sci. Fennicae Ser. A. I.》101（1951年），1–22。[Str53] K. Strebel, *Über die konforme Abbildung von Gebieten unendlich hohen Zusammenhangs. I* **27** 1953 101 127 , 《Comment. Math. Helv.》（ ），– 。[SV20] A. Yu. Solynin 和 N. C. Vidanage, *Uniformization by rectangular domains: a path from slits to squares* **486** 2020 2, 123927, 12 , 《J. Math. Anal. Appl.》（ ），论文编号，页数。[SW12] S. Sheffield 和 W. Werner, *Conformal loop ensembles: the Markovian characterization and the loop-soup construction* 2 **176** 2012 3, 1827 1917 , 《Ann. of Math.》（ ）（ ），第 – 期。[Uy79] N. X. Uy, *Removable sets of analytic functions satisfying a Lipschitz condition*, 《Ark. Mat.》17（1979年），第1期，19–27。[V¨ai84] J. V¨ais¨al¨a, *Quasi-Möbius maps*, 《J. Anal. Math.》44（1984年），218–234。[V¨ai71] J. V¨ais¨al¨a, *Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings*, 《数学讲义》，第229卷，施普林格出版社，柏林-纽约，1971年。[Why58] G. T. Whyburn, *Topological characterization of the Sierpiński curve*, 《Fund. Math.》45（1958年），320–324。[Wil12] M. Williams, *Geometric and analytic quasiconformality in metric measure spaces*, 《Proc. Amer. Math. Soc.》140（2012年），第4期，1251–1266。[Wu98] J.-M. Wu, *Removability of sets for quasiconformal mappings and Sobolev spaces*, 《复变函数理论及其应用》37（1998年），第1-4期，491–506。[You15] M. Younsi, *On removable sets for holomorphic functions*, 《EMS Surv. Math. Sci.》2（2015年），第2期，219–254。[You16] M. Younsi, *Removability, rigidity of circle domains and Koebe's conjecture*, 《Adv. Math.》303（2016年），1300–1318。[You48] J. W. T. Youngs, *Homeomorphic approximations to monotone mappings*, 《杜克数学杂志》15（1948年），87–94。

Department of Mathematics, Aristotle University of Thessaloniki, Thessaloniki, 54152, Greece.*Email address*: dntalam@math.auth.gr