arXiv:2603.15099v1 [cs.LO] 16 Mar 2026

通过柱代数实现关系代数的完备性

ˇ ˇ JAN LASTOVICKA

捷克共和国帕拉茨基大学奥洛穆茨分校理学院计算机科学系*e-mail address*: jan.lastovicka@upol.cz

Abstract. 本文给出了一个替代性证明，证明相对于一阶逻辑的允许公式而言，关系代数具有完备性。该证明基于关系代数嵌入柱代数这一广为人知的结果，从而可以用更具代数性的方式建立完备性。在此证明的基础上，我们提出一种替代性算法，可为给定的允许公式生成与之等价的关系表达式。本研究的主要动机是建立一种完备性证明，使其适用于推广到处理不完整或模糊信息的关系模型。

1. 引言

关系代数的表达式 [Cod70]构成了一种适用于查询关系数据库的过程式语言。为了寻找一种声明式查询语言，一个自然的做法是考虑所有一阶公式。然而，出于实际需要，声明式查询必须转换为等价的过程式查询，以便计算机能够高效执行。但并非每个公式都能做到这一点；例如，公式 $\neg r(x)$ 没有等价的关系表达式。下文中，我们将讨论范围限定于允许公式 [Top87、VGT91], ，它们具有所需的性质，并由一个简单且易于验证的结构条件定义。

这里所说的关系代数的完备性，是指这样一个定理：每个允许公式都有一个与之语义等价的关系表达式，反之，每个关系表达式也都有一个与之语义等价的允许公式。如前所述，我们进一步要求，对于每个允许公式，都能构造出一个与之语义等价的关系表达式，并且该表达式可以被高效求值。在 [VGT91], 中，完备性定理得到了证明，并提出了一种将允许公式转换为关系表达式的算法。

柱代数 [HMT71, HMT$^+$81] 由塔斯基引入，用于一阶逻辑的代数化。Imieli´nski 和 Lipski [IL82] 展示了如何将关系代数自然地嵌入柱代数。借助这种嵌入，并部分遵循完备性原始证明的思路，我们推导出完备性定理的另一种证明。

我们所提出的替代证明的主要优点在于，它是在适当的柱代数中完成的。因此，这种证明方法同样适用于广义关系模型。例如，我们希望能够为不完备信息关系模型{v1}Las{v2}以及在论域中引入值的相似性的模型{v3}BV{v4}建立类似的完备性

提交至《计算机科学中的逻辑方法》的预印本

© 通过柱代数实现关系代数的完备性 CreativeCommons

结果。为此，可以推广柱代数以适应这些情况，进而建立相应的引理和定理，如下文各节所示。

与 [VGT91], 的方法相比，我们的方法将否定视为完整的逻辑联结词，因此能够更清晰地定义允许公式。另一个优点是，我们允许公式中出现相等，因此处理前无需将其消去。我们将允许公式转换为等价关系表达式的算法分为两个步骤。首先，将允许公式转换为规范化公式，随后即可直接将其转换为关系表达式。第一步规范化保留了输入公式的结构，这一特点在实践中可能带来益处。

本文结构如下。第二节和第三节介绍一阶逻辑与关系代数的必要概念。第四节研究关系表达式与公式之间的语义等价关系，同时定义规范化公式及其向关系表达式的转换。该节最后讨论与域无关公式。第五节专门讨论允许公式。最后，第六节给出允许公式的规范化算法及其正确性。

2. First-order logic

我们首先定义一阶逻辑的语法和语义，并从现有定义中选取最适合我们目的的定义。

语法。一阶逻辑的语言由一个有限集合 $\mathcal{R}$ 的关系符号组成，其中每个关系符号 $r \in \mathcal{R}$ 都有一个称为其元数 的非负整数 $\delta(r)$；重言式 1、相等 $\approx$；一个有限集合 $\mathcal{X}$ 的变量；逻辑联结词 $\neg$、$\wedge$、 $\vee$；存在量词 $\exists$；以及辅助符号 (,)（左括号和右括号）。请注意，与通常的做法相反，我们不将相等视为关系符号。另一个不同寻常的特征是，变量集合是有限的。每种语言由 $\mathcal{R}$、δ 和 $\mathcal{X}$ 确定。三元组 $(\mathcal{R}、\ \delta、\ \mathcal{X})$ 称为类型。

类型为 $(\mathcal{R}、\ \delta、\ \mathcal{X})$ 的语言的公式 归纳定义如下：
(1) 1 是一个公式；(2) 如果 $r \in \mathcal{R}$ 是一个元数为 n 的关系符号，即 $\delta(r) = n$，并且 x_1、.....、 $x_n \in \mathcal{X}$ 是变量，那么 $r(x_1、\ .....、\ x_n)$ 是一个公式；(3) 如果 x_1 和 x_2 是变量，那么 $(x_1 \approx x_2)$ 是一个公式；(4) 如果 φ 是一个公式，那么 $\neg\varphi$ 是一个公式；(5) 如果 φ 和 ψ 是公式，那么 $(\varphi \wedge \psi)$ 和 $(\varphi \vee \psi)$ 都是公式；(6) 如果 φ 是一个公式且 x 是一个变量，那么 $(\exists x)\varphi$ 是一个公式。

由前三条规则给出的公式称为原子公式，而由其余规则给出的公式称为复合公式。由第二条规则构造的公式称为关系公式，由第三条规则构造的公式称为等式公式。

表达式（$\varphi \Rightarrow \psi$）是（$\neg\varphi \vee \psi$）的缩写，（$\varphi \Leftrightarrow \psi$）是（（$\varphi \Rightarrow \psi$）$\wedge$（$\psi \Rightarrow \varphi$））的缩写，（$\forall x$）$\varphi$ 是 $\neg$（$\exists x$）$\neg\varphi$的缩写，（$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n$）是（（$\varphi_1 \wedge \varphi_2$）$\wedge \cdots \wedge \varphi_n$）的缩写；类似地，（$\varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \cdots \vee \varphi_n$）是（（$\varphi_1 \vee \varphi_2$）$\vee \cdots \vee \varphi_n$）的缩写。我们通常不在公式中写出最外层的括号。

我们假设 $\mathcal{X}$ 中的变量是线性有序的。正如接下来的定义所示，每当我们需要按特定顺序考察变量时，就会使用这一顺序。对于 $\{x_1,\dots,x_n\}=X\subseteq\mathcal{X}$，（$\exists X$）$\varphi$ 是（$\exists x_1$）$\cdots$（$\exists x_n$）φ 的缩写，而（$\forall X$）φ 是（$\forall x_1$）$\cdots$（$\forall x_n$）φ的缩写。

公式 φ 的自由变量 集合 FV(φ) 定义如下：FV(1) $=\emptyset$；FV($r(x_1,\dots,x_n)$) $=\{x_1,\dots,x_n\}$；FV($x_1\approx x_2$) $=\{x_1,x_2\}$；FV($\neg\varphi$) $=$FV(φ)；FV($\varphi\vee\psi$) $=$FV($\varphi\wedge\psi$) $=$FV(φ) $\cup$FV(ψ)；FV(($\exists x$)φ) $=$FV(φ) $-\{x\}$。

语义。 类型为 $(\mathcal{R},\delta,\mathcal{X})$ 的语言的结构 是一个三元组 $(M,\approx^M,\mathcal{R}^M)$，由一个非空有限集 M（称为论域）、 M 上的等号关系 $\approx^M$（即 $\approx^M$=$\{(m,m)\mid m\in M\}$）以及一个关系指标集 $\mathcal{R}^M=\{(r^M)_{r\in\mathcal{R}}\mid r^M\subseteq M^{\delta(r)}\}$ 组成。由于我们的结构用于建模关系数据库，因此我们只考虑有限论域。给定的结构 $(M,\approx^M,\mathcal{R}^M)$ 也简记为 M。在本文余下部分中，我们固定一个类型为 $(\mathcal{R},\delta,\mathcal{X})$ 的语言。

设 M 是一个结构。映射 $v:\mathcal{X}\to M$ 将每个变量 x 赋予元素 $v(x)\in M$，称为 M-赋值。当上下文中已指明 M 时， v 就简称为 赋值。对于变量 x 以及赋值 u 和 v，若对每个不同于 x 的变量 y，都有 $u(y)=v(y)$，则记作 $u=_x v$。对于变量集 $X=\{x_1,\dots,x_n\}$，若存在赋值 $v_1,\dots,v_{n+1}$，使得对每个 $1\le i\le n$ 都有 $v_i=_{x_i}v_{i+1}$，且 $v_1=v$ 和 $v_{n+1}=u$，则记作 $u=_X v$。

我们不定义公式相对于某个赋值在结构中为真这一概念。相反，对于给定的公式和结构，我们定义使该公式为真的所有赋值所构成的集合。为此，我们先介绍几个有用的运算。

当上下文指定了 M 时，所有 M 赋值的集合 $M^{\mathcal{X}}$ 记为 $\mathcal{V}$。对于集合 $V\subseteq\mathcal{V}$，我们将其相对于 $\mathcal{V}$ 的补集记为 $\overline{V}$，即 $\overline{V}=\mathcal{V}\setminus V$。对于变量 x，我们定义算子 C_x: $\mathcal{V}\to\overline{\mathcal{V}}$，称为柱化，其定义如下：

$$\mathrm{C}_x(V)=\{v\in\mathcal{V}\mid \text{there is } u\in V \text{ such that } u=_x v\}. \tag{2.1}$$

显然，柱化是闭包算子。

引理 2.1. 以下结论成立。
(1) $\overline{C_x(V)}\subseteq\overline{V}$，(2) $C_x(C_x(V))=C_x(V)$，(3) $C_x(V)\subseteq C_x(V)$。证明。

(1) 这由 $V\subseteq\mathsf{C}_x(V)$ 得出。(2) 显然，$\mathsf{C}_x(\mathsf{C}_x(V))\supseteq\mathsf{C}_x(V)$。令 $v\in\mathsf{C}_x(\mathsf{C}_x(V))$。那么存在 $v'\in\mathcal{V}$，使得 $v'\in\mathsf{C}_x(V)$ 且 $v'=_x v$。对于每个 $v''\in V$，我们有 $v''\neq_x v'$。令 $v''\in V$ 满足 $v''\neq_x v'$。那么存在一个与 x 不同的变量 $y\in\mathcal{X}$，使得 $v''(y)\neq v'(y)$。但由于 $v'(y)=v(y)$，我们有 $v''\neq_x v$。因此， $v\in\mathsf{C}_x(V)$。——

（3）由（1）和（2）可得，$\mathsf{C}_x(V)=\overline{\mathsf{C}_x(\mathsf{C}_x(V))}\subseteq\overline{\mathsf{C}_x(V)}$。 □

对于变量 x， $y\in\mathcal{X}$，我们将集合 $\mathsf{D}_{xy}\subseteq\mathcal{V}$称为对角线，定义如下：

$$\mathrm{D}_{xy}=\{v\in\mathcal{V}\mid v(x)=v(y)\}. \tag{2.2}$$

关系 $||\varphi||_M$，称为 M 中 φ 的值，定义如下：
(1) $||1||_M=\mathcal{V}$;

(2) $||r(x_1, \ldots\ldots, x_n)||_M = \{v \in \mathcal{V} \mid (v(x_1) \ldots\ldots, v(x_n)) \in r^M\}$; (3) $||x \approx y||_M = \mathsf{D}^{xy}$; (4) 若 φ 是公式，则 $||\neg\varphi||_M = ||\varphi||_M$; (5) 若 φ 和 ψ 是公式，则

$$||\varphi \wedge \psi||_M = ||\varphi||_M \cap ||\psi||_M,$$
$$||\varphi \vee \psi||_M = ||\varphi||_M \cup ||\psi||_M;$$

(6) 若 φ是一个公式，且 x是一个变量，则

$$||(\exists x)\varphi||_M = C_x(||\varphi||_M).$$

若 M 可由上下文确定，我们就用 $||\varphi||$ 代替 $||\varphi||_M$。容易看出，只要 $x \notin \mathrm{FV}(\varphi)$，就有 $\mathsf{C}_x(||\varphi||) = ||\varphi||$。

对于一个集合 $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$，我们在 $\mathcal{V}$上定义一元运算 C_S，如下:

$$\mathrm{C}_S(V) = \mathrm{C}_{x_1}(\cdots \mathrm{C}_{x_n}(V)\cdots). \tag{2.3}$$

显然，有 $||(\exists X)\varphi|| = \mathsf{C}_X(||\varphi||)$。

虽然这对下面的讨论并非必不可少，但值得注意的是，一阶逻辑的语义可以由一种特定的代数来给出。维度为 I 的柱代数是一个代数结构

$$(A, \vee, \wedge, ', 0, 1, c_i, d_{ij}), \quad i, j \in I,$$

使得 0，1 和 d_{ij}（对于 i, $j \in I$）都是 A 的元素；$'$ 和 c_i（对于 $i \in I$）是 unary 运算；$\vee$ 和 $\wedge$ 是 binary 运算；并且对于任意 a, $b \in A$ 以及任意 i, j, $k \in I$，以下条件均成立:

(1) $(A, \vee, \wedge, ', 0, 1)$ 是一个布尔代数;
(2) $c_i(0) = 0$; (3) $a \wedge c_i(a) = a$; (4) $c_i(a \wedge c_i(b)) = c_i(a) \wedge c_i(b)$; (5) $c_i(c_j(a)) = c_j(c_i(a))$; (6) $d_{ii} = 1$; (7) 如果 $i \neq j$ 且 $i \neq k$, 则 $d_{jk} = c_i(d_{ji} \wedge d_{ik})$; (8) 如果 $i \neq j$，则 $c_i(d_{ij} \wedge a) \wedge c_i(d_{ij} \wedge a') = 0$。

容易验证,

$$(2^{\mathcal{V}}, \cup, \cap, \bar{}, \emptyset, \mathcal{V}, \mathrm{C}_x, \mathrm{D}_{xy}), \quad x, y \in \mathcal{X} \tag{2.4}$$

是一个维数为 $\mathcal{X}$ 的柱代数。

3. Relational algebra

设 M 是一个结构。关系模式是 $\mathcal{X}$ 的子集。设 S 是一个关系模式。元组 t在 S上是一个映射 $t\colon S \to M$，即 $t \in M^S$。对于一个在 S 上的元组 t 和一个关系模式 $S' \subseteq S$, $t|_{S'} = \{(y, t(y)) \mid y \in S'\}$ 是 t 在 S' 上的限制，是一个在 S' 上的元组。关系 T 在 S 上是 S 上的元组的任意集合，即 $T \subseteq M^S$。注意，由于 M 和 S 是有限集，T 也是有限的。

设 T_1 和 T_2 分别是定义在 S_1 和 S_2 上的关系。那么 T_1 和 T_2 的连接 是定义在 $S_1 \cup S_2$ 上的关系 $T_1 \bowtie T_2$，其定义如下:

$$T_1 \bowtie T_2 = \{t \in M^{S_1 \cup S_2} \mid t|_{S_1} \in T_1 \text{ and } t|_{S_2} \in T_2\}. \tag{3.1}$$

设 T 是定义在 S 上的关系， S' 是 S 的一个子关系模式。那么 T 在 S' 上的投影 是定义在 S' 上的关系 $\pi_{S'}(T)$，其定义如下：

$$\pi_{S'}(T) = \{t|_{S'} \mid t \in T\}. \tag{3.2}$$

设 T 是 S 上的一个关系，并设 x_1 和 x_2 是关系模式 S 中的变量。那么，将 T 限制为满足 x_1 与 s_2 相等，所得关系 $\sigma_{x_1 \approx x_2}(T)$ 定义在 S 上，其定义如下：

$$\sigma_{x_1 \approx x_2}(T) = \{t \in T \mid t(x_1) = t(x_2)\}.$$

设 T 是 S 上的一个关系，并设 x 和 y 是满足 $x \in S$ 和 $y \notin S$ 的变量。那么，在 T 中将变量 x 重命名为 y，所得关系 $\rho_{y \leftarrow x}(T)$ 定义在 $S' = (S \setminus \{x\})$ 上，其定义如下： $\cup \{y\}$

$$\rho_{y \leftarrow x}(T) = \{\rho_{y \leftarrow x}(t) \mid t \in T\},$$

其中，$\rho_{y \leftarrow x}(t)$ 是 S' 上的元组，定义如下：

$$\rho_{y \leftarrow x}(t)(z) = \begin{cases} t(x) & \text{if } z = y, \\ t(z) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

在 1984年 的一篇文章中， [IL82], Imieli´nski 和 Lipski 阐明了关系代数与用于结构的柱代数之间的密切联系。我们首先定义一种自然映射，将一组赋值对应到一个关系上。若上下文给定一个结构 M，我们用 $\mathcal{T}$ 表示任意模式上的所有关系的集合；也就是说，$\mathcal{T} = \{T \subseteq M^S \mid S \subseteq \mathcal{X}\}$。我们定义映射 ϵ: $\mathcal{T} \to \mathcal{V}$，如下所示：

$$\epsilon(T) = \{v \in \mathcal{V} \mid v|_S \in T\}. \tag{3.3}$$

以下定理取自 [IL82], ，确立了这种联系。

定理 3.1. 设 T、 T_1 和 T_2 分别是定义在 S、 S_1 和 S_2 上的关系。那么以下结论成立：

(1) $\epsilon(T_1 \cup T_2) = \epsilon(T_1) \cup \epsilon(T_2)$，若 $S_1 = S_2$；(2) $\epsilon(T_1 \setminus T_2) = \epsilon(T_1) \cap \epsilon(T_2)$，若 $\overline{S_1 = S_2}$；(3) $\epsilon(T_1 \bowtie T_2) = \epsilon(T_1) \cap \epsilon(T_2)$；(4) $\epsilon(\pi_{S'}(T)) = \mathsf{C}^{S \setminus S'}(\epsilon(T))$，其中 $S' \subseteq S$；(5) $\epsilon(\sigma_{x \approx y}(T)) = \epsilon(T) \cap \mathsf{D}xy$，其中 x、$y \in S$；(6) $\epsilon(\rho_{y \leftarrow x}(T)) = \mathsf{C}x(\epsilon(T) \cap \mathsf{D}xy)$。

我们定义关系表达式的语法和语义。

语法。为了更贴近现代关系数据库，我们用一组关系公式的子集来表示数据库的模式。类型为 $(\mathcal{R}, \delta, \mathcal{X})$ 的语言的一个数据库模式 是一个元组 $(\mathcal{R}, \delta, \mathcal{X}, \mathcal{F})$，其中 $\mathcal{F}$ 是一组原子公式，且对于每个 n 元关系符号 $r \in \mathcal{R}$，恰有一个原子公式 $r(x_1, \ldots\ldots, x_n) \in \mathcal{F}$，其中变量 $x_1, \ldots\ldots, x_n$ 两两不同。

数据库模式 $(\mathcal{R}, \delta, \mathcal{X}, \mathcal{F})$ 的关系模式上的一个关系表达式 按如下方式归纳定义：

(1) DEE 是关于 $\emptyset$ 的关系表达式；(2) 若 $r(x_1, \ldots\ldots, x_n) \in \mathcal{F}$，则 r 是关于 $\{x_1, \ldots, x_n\}$ 的关系表达式；(3) 若 E_1 和 E_2 是关于 S 的关系表达式，则 $E_1 \cup E_2$ 和 $E_1 - E_2$ 是关于 S 的关系表达式；

(4) 若 E_1 和 E_2 分别是关于 S_1 和 S_2 的关系表达式，则 $R_1 \bowtie R_2$ 是关于 $S_1 \cup S_2$ 的关系表达式；(5) 若 E 是关于 S 和 $S' \subseteq S$ 的关系表达式，则 $\pi_{S'}(E)$ 是关于 S' 的关系表达式；(6) 若 E 是关于 S 和 x，$y \in S$ 的关系表达式，则 $\sigma_{x \approx y}(E)$ 是关于 S 的关系表达式；(7) 若 E 是关于 S 和 $x \in S$ 以及 $y \in \mathcal{X} \setminus S$ 的关系表达式，则 $\rho_{y \leftarrow x}(E)$ 是关于 $(S \setminus \{x\}) \cup \{y\}$ 的关系表达式。

关系表达式 E 的关系模式记作 S(E)。

语义。 类型为（$\mathcal{R}$，δ，$\mathcal{X}$）的语言的任何结构都可称为数据库模式（$\mathcal{R}$，δ，$\mathcal{X}$，$\mathcal{F}$）上的数据库 。本文余下部分固定使用数据库模式（$\mathcal{R}$，δ，$\mathcal{X}$，$\mathcal{F}$）。

数据库 M 中关系表达式 E over S 的值 是由以下方式定义的、在 S over 上的关系 $||E||_M$:

(1) $||\mathrm{DEE}||_M = \{\emptyset\}$。 (2) 如果 r 是关系
表达式，那么

$$||r||_M = \{t \in M^S \mid (t(x_1), \ldots, t(x_n)) \in r^M\},$$

其中 x_1，$\ldots x_n$ 是变量，且满足 $r(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{F}$ 和 $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$ ；
(3) 若 E_1 和 E_2 是关于 S 的关系表达式，则

$$||E_1 \cup E_2||_M = ||E_1||_M \cup ||E_2||_M,$$
$$||E_1 - E_2||_M = ||E_1||_M \setminus ||E_2||_M;$$

(4) 若 E_1 和 E_2 是关系表达式，则

$$||E_1 \bowtie E_2||_M = ||E_1||_M \bowtie ||E_2||_M;$$

(5) 若 E 是关于 S 和 $S' \subseteq S$ 的关系表达式，则

$$||\pi_{S'}(E)||_M = \pi_{S'}(||E||_M);$$

(6) 若 E 是关于 S 和 x，$y \in S$ 的关系表达式，则

$$||\sigma_{x_1 \approx x_2}(E)||_M = \sigma_{x_1 \approx x_2}(||E||_M);$$

(7) 若 E 是关于 S、$x \in S$ 和 $y \in \mathcal{X} \setminus S$ 的关系表达式，则

$$||\rho_{y \leftarrow x}(E)||_M = \rho_{y \leftarrow x}(||E||_M).$$

4. Semantic equivalence

我们先给出公式和表达式的语义等价关系的定义。公式φ_1 和 φ_2 若满足语义等价，则 $||\varphi_1||_M = ||\varphi_2||_M$ 对每个结构 M都成立。表达式E_1 和 E_2 若满足语义等价，则 $||E_1||_M = ||E_2||_M$ 对每个数据库 M都成立。若关系表达式 E 与公式 φ 满足语义等价，则

$$\epsilon(||E||_M) = ||\varphi||_M \tag{4.1}$$

对每个数据库 M都成立。

定理 4.1. 每个关系表达式都与一个公式语义等价。

证明。由定理 3.1 和公式的语义规则可直接得出。 □

另一方面，有些公式不存在语义等价的关系表达式。例如，不存在与公式 $\neg\varphi$ 语义等价的关系表达式，其中 φ 是任意关系公式。

定理 3.1 的各条款定义了一个公式子集，对于该子集，可以直接得到语义等价的关系表达式。规范化公式由以下规则归纳定义：

(1) 1 是规范化的；(2) 如果 $\varphi \in \mathcal{F}$，那么 φ 是规范化的；(3) 如果 φ 是规范化的，$x \in \mathrm{FV}(\varphi)$，并且 y 是任意变量，那么 $\varphi \wedge (x \approx y)$ 是规范化的；(4) 如果 φ 和 ψ 是规范化的，且 $\mathrm{FV}(\varphi) = \mathrm{FV}(\psi)$，那么 $\varphi \wedge \neg\psi$ 和 $\varphi \vee \psi$ 是规范化的；(5) 如果 φ 和 ψ 是规范化的，那么 $\varphi \wedge \psi$ 是规范化的；(6) 如果 φ 是规范化的且 x 是一个变量，那么 $(\exists x)\varphi$ 是规范化的。

规范化公式 φ 可以按照以下规则轻松转换为与之语义等价的关系表达式 $expr(\varphi)$：

(1) $expr(1) = \mathrm{DEE}$；(2) 若 φ 的形式为 $r(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{F}$，则 $expr(\varphi) = r$；(3) 若 φ 的形式为 $\varphi_1 \wedge (x \approx y)$，且 $x, y \in \mathrm{FV}(\varphi_1)$，则 $expr(\varphi) = \sigma_{x \approx y}(expr(\varphi_1))$；(4) 若 φ 的形式为 $\varphi_1 \wedge (x \approx y)$，且 $x \in \mathrm{FV}(\varphi_1)$ 和 $y \notin \mathrm{FV}(\varphi_1)$，则 $expr(\varphi) = \sigma_{x \approx y}(E_1 \times \rho_{y \leftarrow x}(\pi_{\{x\}}(E_1)))$，其中 $E_1 = expr(\varphi_1)$；(5) 若 φ 的形式为 $\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2$，则 $expr(\varphi) = expr(\varphi_1) - expr(\varphi_2)$；(6) 若 φ 的形式为 $\varphi_1 \vee \varphi_2$，则 $expr(\varphi) = expr(\varphi_1) \cup expr(\varphi_2)$；(7) 若 φ 的形式为 $\varphi_1 \wedge \varphi_2$，且 φ_2 的形式不是 $\neg\varphi_3$，则 $expr(\varphi) = expr(\varphi_1) \bowtie expr(\varphi_2)$；(8) 若 φ 的形式为 $(\exists x)(\varphi_1 \wedge (x \approx y))$，则 $expr(\varphi) = \rho_{y \leftarrow x}(expr(\varphi_1))$；(9) 若 φ 的形式为 $(\exists x)\varphi_1$，且 φ_1 的形式不是 $\varphi_2 \wedge (x \approx y)$，则 $expr(\varphi) = \pi_{\mathrm{FV}(\varphi_1) - \{x\}}(expr(\varphi_1))$。

引理 4.2。每个规范化公式 φ 在语义上都等价于关系表达式 $expr(\varphi)$。

证明。这是定理 3.1 的直接推论。 □

我们证明每个关系公式在语义上都等价于一个规范化公式。若 φ 是一个公式，且 x, y 是变量，则用 $(\varphi)[x/y]$ 表示公式

$$(\exists x)(\varphi \wedge (x \approx y)). \tag{4.2}$$

若 $x_1, \ldots, x_n$ 和 $y_1, \ldots, y_n$ 是变量，则用

$$(\varphi)[x_1/y_1, \ldots, x_n/y_n] \tag{4.3}$$

表示公式

$$(\cdots(\varphi)[x_1/y_1]\cdots)[x_n/y_n] \tag{4.4}$$

设 $r(x_1, \ldots, x_n)$ 是一个关系公式，其中变量 $x_1, \ldots, x_n$ 两两不同，并设 $y_1, \ldots, y_n$ 是任意变量。则用

$$r(x_1/y_1, \ldots, x_n/y_n), \tag{4.5}$$

我们将公式记为

$$(r(x_1, \ldots, x_n))[x_1/z_1, \ldots, x_n/z_n, z_1/y_1, \ldots, z_n/y_n], \tag{4.6}$$

其中 z_1、.....、 z_n 是两两不同的变量，且集合 $\{z_1,\ldots,z_n\}$和 $\{x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n\}$ 不相交。我们假设 $\mathcal{X}$包含足够多的变量，以便选取 z_1、.....、 z_n。例如，

$$\begin{aligned} r(x_1/x_1,x_2/x_1) &= (r(x_1,x_2))[x_1/z_1,x_2/z_2,z_1/x_1,z_2/x_1] \\ &= (\exists z_2)((\exists z_1)((\exists x_2)((\exists x_1)(r(x_1,x_2)\wedge(x_1\approx z_1))\wedge(x_2\approx z_2)) \\ &\quad \wedge(z_1\approx x_1))\wedge(z_2\approx x_1)). \end{aligned}$$

最后一个公式可简化为与之语义等价的公式 $(\exists x_2)(r(x_1,\ x_2)\ \wedge(x_2\approx x_1))$。为便于阅读，本文后续示例中也会进行类似的简化。

引理 4.3. 公式 $r(x_1/y_1,\ldots,x_n/y_n)$ 和 $r(y_1,\ldots,y_n)$ 语义等价。

证明。 我们有 $||r(x_1/y_1,\ldots,x_n/y_n)|| =$

$$\begin{aligned} &\mathrm{C}_{\{z_1,\ldots,z_n\}}(\mathrm{C}_{\{x_1,\ldots,x_n\}}(||r(x_1,\ldots,x_n)||\cap \mathrm{D}_{x_1z_1}\cap\cdots\cap \mathrm{D}_{x_nz_n}) \\ &\qquad \cap \mathrm{D}_{z_1y_1}\cap\cdots\cap \mathrm{D}_{z_ny_n}). \end{aligned}$$

设 $v\in\mathcal{V}$。当且仅当存在 $v'\in\mathcal{V}$，使得 $v'=_{\{z_1,\ldots,z_n\}} v$，并且对于每个 $1\le i\le n$，$v'(z_i)=v'(y_i)=v(y_i)$；同时存在$v''\in\mathcal{V}$，使得 $v''=_{\{x_1,\ldots,x_n\}} v'$，并且对于每个 $1\le i\le n$，$v'(z_i)=v''(z_i)=v''(x_i)$，且 $(v''(x_1)\ldots,v''(x_n))\in r^M$。

设 $v\in||r(x_1/y_1,\ldots,x_n/y_n)||$。那么，对于每个$1\le i\le n$，都有 $v(y_i)=v'(z_i)=v''(x_i)$，并且 $(v(y_1)\ldots,v(y_n))=(v''(x_1)\ldots,v''(x_n))\in r^M$。我们证明了 $v\in|r(y_1,\ldots,y_n)||$。

设 $v\in||r(y_1,\ldots,y_n)||$。令 v'为一个赋值，使得

$$v'(x)=\begin{cases} v(x) & \text{if } x\notin\{z_1,\ldots,z_n\},\\ v(y_i) & \text{if } x=z_i \text{ for some } 1\le i\le n,\end{cases}$$

并令 v'' 为一个赋值，使得

$$v''(x)=\begin{cases} v'(x) & \text{if } x\notin\{x_1,\ldots,x_n\},\\ v'(z_i) & \text{if } x=x_i \text{ for some } 1\le i\le n.\end{cases}$$

显然，$v=_{\{z_1,\ldots,z_n\}} v'$ 且 $v'=_{\{x_1,\ldots,x_n\}} v''$。对于每个 $1\le i\le n$，都有 $v''(x_i)=v'(z_i)=v(y_i)$。因此 $(v''(x_1)\ldots,v''(x_n))\in r^M$。我们证明了 $v\in||r(x_1/y_1,\ldots,x_n/y_n)||$。 □

我们概述与关系表达式等价的公式的已知结果；更多细节请参见例如 [AHV95]。两个结构 M_1 和 M_2 仅在论域上不同，当且仅当

$$r^{M_1}=r^{M_2} \tag{4.7}$$

对于每个关系符号 r。如果对于论域无关

$$\pi_{\mathrm{FV}(\varphi)}(||\varphi||_{M_1})=\pi_{\mathrm{FV}(\varphi)}(||\varphi||_{M_2}), \tag{4.8}$$

对于任意两个仅在论域上不同的结构 M_1 和 M_2。

如下引理所示，定义域无关关系表达式毫无意义。如果两个数据库 M_1 和 M_2 仅在论域上不同，那么它们的结构也仅在论域上不同。

引理 4.4. 设 E 为一个关系表达式。那么

$$||E||_{M_1} = ||E||_{M_2} \tag{4.9}$$

对于任意两个仅论域不同的数据库 M_1 和 M_2 。

证明。 这直接由关系运算的定义得出。 □

定理 4.5。 如果一个公式与某个关系表达式语义等价，那么它就是域无关的。

证明。 设 φ 是一个公式，且存在一个与 φ语义等价的关系表达式 E 。设 M_1, M_2 是论域不同的数据库。于是，根据引理 4.4，我们有 $||\varphi||_{M_1} = \epsilon(||E||_{M_1}) = \epsilon(||E||_{M_2}) = ||\varphi||_{M_2}$。 □

数据库的活动域是该数据库的关系中出现的所有值的集合。更准确地说，对于数据库 M，我们用 $\mathrm{A}(M) \subseteq M$ 表示称为活动域 的 M，定义如下:

$$\mathrm{A}(M) = \bigcup_{r(x_1,\ldots,x_n)\in\mathcal{F}} \bigcup_{1\le i\le n} \{m_i \mid (m_1,\ldots,m_n) \in r^M\}. \tag{4.10}$$

定理 4.6. 每个域无关公式在语义上都等价于一个关系表达式。

证明. 对于每个模式 S，都可以轻松构造一个关系表达式 E_S，使得 $||E_S||_M = \mathrm{A}(M)^S$ 对每个数据库 M 都成立。对于一个公式 φ，我们按照以下规则定义关系表达式$expr_{\mathrm{i}}(\varphi)$。

(1) $expr_{\mathrm{i}}(1) = \mathrm{DEE}$, (2) $expr_{\mathrm{i}}(r(x_1, \ldots\ldots, x_n))$
$= expr(r(x_1, \ldots\ldots, x_n))$, (3) $expr_{\mathrm{i}}(x_1 \approx x_2)$
$= \sigma_{x_1\approx x_2}(E_{\{x_1,x_2\}})$, (4) $expr_{\mathrm{i}}(\neg\varphi)$
$= E_{\mathrm{FV}(\varphi)} \setminus expr_{\mathrm{i}}(\varphi)$, (5) $expr_{\mathrm{i}}(\varphi \wedge \psi) = expr_{\mathrm{i}}(\varphi)$
$\bowtie expr_{\mathrm{i}}(\psi)$, (6) $expr_{\mathrm{i}}(\varphi \vee \psi) = expr_{\mathrm{i}}(\neg($
$\neg\varphi \wedge \neg\psi))$, (7) $expr_{\mathrm{i}}((\exists x)\varphi) = \pi_{\mathrm{FV}(\varphi)\setminus\{x\}}(expr_{\mathrm{i}}(\varphi))$.

设 φ 是一个与域无关公式，且 M 是一个数据库。定义 M_A 为将 M 的论域替换为 $\mathrm{A}(M)$ 后得到的数据库。那么 $\epsilon(||expr_{\mathrm{i}}(\varphi)||_{M_A}) = ||\varphi||_{M_A}$，因此 $||expr_{\mathrm{i}}(\varphi)||_{M_A} = \pi_{\mathrm{FV}(\varphi)}(||\varphi||_{M_A})$。由于 φ 与域无关，我们有 $\pi_{\mathrm{FV}(\varphi)}(||\varphi||_{M_A}) = \pi_{\mathrm{FV}(\varphi)}(||\varphi||_M)$；根据引理 4.4，$||expr_{\mathrm{i}}(\varphi)||_M = ||expr_{\mathrm{i}}(\varphi)||_{M_A}$。结合这些等式，可得 $||expr_{\mathrm{i}}(\varphi)||_M = \pi_{\mathrm{FV}(\varphi)}(||\varphi||_M)$，从而 $\epsilon(||expr_{\mathrm{i}}(\varphi)||_M) = ||\varphi||_M$。因此， φ 与 $expr_{\mathrm{i}}(\varphi)$ 语义等价。 □

请注意，前述定理的证明中给出的与域无关公式的翻译纯粹具有理论意义。与域无关公式还有一个主要缺点。若存在一个结构 M，使得$||\varphi||_M$ 非空，则公式 φ 是 可满足 的。Trakhtenbrot [Tra50] 证明了，判定公式 φ 是否可满足的问题是不可判定的。由此可知，判定给定公式是否与域无关的问题同样不可判定，因为公式 $\varphi \wedge \neg r(x)$ 与域无关，当且仅当 φ 不可满足，其中变量 x 在 φ 中不是自由变量。

出于实际考虑，研究人员提出了与域无关公式集合中足够大的可判定子集（概述见 [Top09]）。

5. 允许的公式

我们先讨论这样一个问题：对于给定的公式 φ 和变量 x, y，是否对每个结构 M都有 $||\varphi||_M \subseteq ||x \approx y||_M$。这个问题不可判定，因为对于公式 φ和变量 $x, y \notin \mathrm{FV}(\varphi)$，公式 $\varphi \wedge r(x, y)$ 具有所需性质，当且仅当 φ 不可满足。因此，我们只能从给定公式的结构中推断出所研究性质的一个充分条件。

设 M 是一个数据库。对于集合 A，我们用 id_A 表示 A上的恒等关系，即 $\mathrm{id}_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$。对于 $\mathcal{X}$上的二元关系 R，我们用 $\mathrm{Eq}(R)$ 表示包含 R的最小等价关系（相对于集合包含而言）。

根据以下规则，对于公式 φ，我们定义 $\mathcal{X}$上的等价关系 $eq(\varphi)$ 和 $coeq(\varphi)$，在 φ中分别称为变量相等和变量不等：

(1) $eq(1) = coeq(1) = \mathrm{id}_{\mathcal{X}}$，(2) $eq(r(x_1, \ldots, x_n)) = \mathrm{id}_{\mathcal{X}}$，(3) $coeq(r(x_1, \ldots, x_n)) = \mathrm{id}_{\mathcal{X}}$，(4) $eq(x_1 \approx x_2) = \mathrm{Eq}(\{(x_1, x_2)\})$，(5) $coeq(x_1 \approx x_2) = \mathrm{id}_{\mathcal{X}}$，(6) $eq(\neg\varphi) = coeq(\varphi)$，(7) $coeq(\neg\varphi) = eq(\varphi)$，(8) $eq(\varphi \wedge \psi) = \mathrm{Eq}(eq(\varphi) \cup eq(\psi))$，(9) $coeq(\varphi \wedge \psi) = coeq(\varphi) \cap coeq(\psi)$，(10) $eq((\exists x)\varphi) = \mathrm{Eq}(eq(\varphi)|_{(\mathcal{X}\setminus\{x\})^2})$，(11) $coeq((\exists x)\varphi) = \mathrm{Eq}(coeq(\varphi)|_{(\mathcal{X}\setminus\{x\})^2})$。

刚刚定义的规则没有涵盖析取形式的公式。形如 $\varphi \vee \psi$ 的公式可以视为公式 $\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$。除非在后续递归定义中明确处理析取，否则这条关于析取的规则同样适用。例如，我们有 $eq((x_1 \approx x_2) \wedge r(x_1, x_3) \wedge (x_2 \approx x_3)) = \mathrm{Eq}(\{(x_1, x_2), (x_2, x_3)\})$。

以下引理阐明了公式中变量相等和变量不等的含义。

引理 5.1。若 $(x, y) \in eq(\varphi)$，则 $||\varphi|| \subseteq \mathrm{D}_{xy}$；若 $(x, y) \in coeq(\varphi)$，则 $||\varphi|| \subseteq \overline{\mathrm{D}_{xy}}$。

证明。由于对任意变量 x，$\mathrm{D}_{xx} = \mathcal{V}$，因此当$x = y$时，该断言显然成立。所以我们可以假设 $x \neq y$。我们通过对公式进行结构归纳来证明该断言。

显然，该断言对原子公式成立。假设该断言对公式 φ and ψ成立。

如果 $(x, y) \in eq(\neg\varphi)$，那么 $(x, y) \in coeq(\varphi)$，并且根据假设，$||\varphi|| \subseteq \overline{\mathrm{D}_{xy}}$。因此，$||\neg\varphi|| \subseteq \mathrm{D}_{xy}$。类似地，可以证明 $(x, y) \in coeq(\neg\varphi)$ 的情形。因此，该断言对否定公式成立。

设 $(x, y) \in eq(\varphi \wedge \psi)$。于是 $(x, y) \in \mathrm{Eq}(eq(\varphi) \cup eq(\psi))$。存在两两不同的变量 $x_1, \ldots, x_n$，使得 $x_1 = x$, $x_n = y$，并且对于每个$1 \leq i < n$，$(x_i, x_{i+1}) \in eq(\varphi) \cup eq(\psi)$。因此，对于每个 $1 \leq i < n$，我们有 $||\varphi|| \subseteq \mathrm{D}_{x_i x_{i+1}}$ 或 $||\psi|| \subseteq \mathrm{D}_{x_i x_{i+1}}$；此外，$||\varphi|| \cap ||\psi|| \subseteq \mathrm{D}_{x_i x_{i+1}}$。利用柱代数的第 7 条公理，我们得到

$$\begin{aligned} ||\varphi \wedge \psi|| = ||\varphi|| \cap ||\psi|| &\subseteq \mathrm{D}_{x_1 x_2} \cap \cdots \cap \mathrm{D}_{x_{n-1} x_n} \\ &\subseteq \mathrm{C}_{\{x_2, \ldots, x_{n-1}\}}(\mathrm{D}_{x_1 x_2} \cap \cdots \cap \mathrm{D}_{x_{n-1} x_n}) = \mathrm{D}_{xy}. \end{aligned}$$

如果 $(x,y) \in coeq(\varphi \wedge \psi)$，那么 $(x,y) \in coeq(\varphi)$ 且 $(x,y) \in coeq(\psi)$。根据假设，$||\varphi|| \subseteq \mathrm{D}_{xy}$ 且 $||\psi|| \subseteq \mathrm{D}_{xy}$。我们有 $||\varphi \wedge \psi|| = ||\varphi|| \cup ||\psi|| \subseteq \mathrm{D}_{xy}$。我们已经证明了合取形式的公式的断言。

设 $(x,y) \in eq((\exists z)\varphi)$。由于 $x \neq y$，$(x,y) \in eq(\varphi)$。我们有

$$||(\exists z)\varphi|| = \mathrm{C}_z(||\varphi||) \subseteq \mathrm{C}_z(\mathrm{D}_{xy}) = \mathrm{D}_{xy}.$$

设 $(x,y) \in coeq((\exists z)\varphi)$。由 $x \neq y$ 可知 $x \neq z$、$y \neq z$，且 $(x,y) \in coeq(\varphi)$。我们有

$$\overline{||(\exists z)\varphi||} = \overline{\mathrm{C}_z(||\varphi||)} \subseteq \overline{||\varphi||} \subseteq \mathrm{D}_{xy}.$$

我们证明了该断言对存在量化公式成立。 □

公式中的变量相等和变量不等对于某些公式集合而言变得平凡。正公式 通过以下规则归纳定义。

(1) 每个原子公式都是正公式；(2) 若 φ 不是正公式，则 $\neg\varphi$ 是正公式；(3) 若 φ 是正公式，则 $(\exists x)\varphi$ 是正公式；(4) 若 φ 或 ψ 是正公式，则 $\varphi \wedge \psi$ 是正公式。

请回想，在前面的定义中，形如 $\varphi \wedge \psi$ 的公式被视为 $\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ 的简写。非正公式称为负公式。

以下引理可直接由公式中变量相等和变量不等的定义得出。

引理 5.2。若 φ 是正公式或负公式，则 $coeq(\varphi)$ 或 $eq(\varphi)$ 分别是 $\mathcal{X}$ 上的恒等关系。

我们可以从给定公式的结构推断出这样一组变量：公式的值所包含的元素仅属于活动域。

对于 $\mathcal{X}$ 上的一个等价关系 E 以及 $\mathcal{X}$ 的一个子集 X，我们用 $\mathrm{cl}_E(X)$ 表示由以下变量构成的集合

$$\mathrm{cl}_E(X) = \{y \in \mathcal{X} \mid x \in X \text{ and } (x,y) \in E\}. \tag{5.1}$$

对于公式 φ，我们按以下规则定义变量集 $gen_0(\varphi)$ 和 $cogen_0(\varphi)$：

(1) $gen_0(1) = cogen_0(1) = \emptyset$，(2) $gen_0(r(x_1,\ldots,x_n)) = \{x_1,\ldots,x_n\}$，(3) $cogen_0(r(x_1,\ldots,x_n)) = \emptyset$，(4) $gen_0(x \approx y) = \emptyset$，(5) $cogen_0(x \approx y) = \emptyset$，(6) $gen_0(\neg\varphi) = cogen_0(\varphi)$，(7) $cogen_0(\neg\varphi) = gen_0(\varphi)$，(8) $gen_0(\varphi \wedge \psi) = \mathrm{cl}_E(gen_0(\varphi) \cup gen_0(\psi))$，其中 $E = eq(\varphi \wedge \psi)$，(9) $cogen_0(\varphi \wedge \psi) = cogen_0(\varphi) \cap cogen_0(\psi)$，(10) $gen_0((\exists x)\varphi) = gen_0(\varphi) \setminus \{x\}$，(11) $cogen_0((\exists x)\varphi) = cogen_0(\varphi) \setminus \{x\}$。

在证明下述定理并描述映射 gen_0 和 $cogen_0$ 的作用之前，我们先建立一些辅助引理。

引理 5.3. 设 $X_1, X_2 \subseteq \mathcal{X}$和 $V_1, V_2 \subseteq \mathcal{V}$。则有

$$\epsilon(\pi_{X_1 \cup X_2}(V_1 \cap V_2)) \subseteq \epsilon(\pi_{X_1}(V_1)) \cap \epsilon(\pi_{X_2}(V_2)).$$

证明。设 $v \in \epsilon(\pi_{X_1 \cup X_2}(V_1 \cap V_2))$。那么存在 $v' \in V_1 \cap V_2$ 使得 $v|_{X_1 \cup X_2} = v'|_{X_1 \cup X_2}$。显然，$v'|_{X_1} \in \pi_{X_1}(V_1)$、$v'|_{X_2} \in \pi_{X_2}(V_2)$、$v|_{X_1} = v'|_{X_1}$和 $v|_{X_2} = v'|_{X_2}$。因此，$v \in \epsilon(\pi_{X_1}(V_1)) \cap \epsilon(\pi_{X_2}(V_2))$。□

引理 5.4。设 $N \subseteq M$, $X_1, X_2 \subseteq \mathcal{X}$。则有

$$\epsilon(N^{X_1 \cup X_2}) = \epsilon(N^{X_1}) \cap \epsilon(N^{X_2}).$$

证明。设 $v \in \mathcal{V}$。那么 $v \in \epsilon(N^{X_1 \cup X_2})$ 当且仅当存在 $t \in N^{X_1 \cup X_2}$使得 $v|_{X_1 \cup X_2} = t$当且仅当存在 $t_1 \in N^{X_1}$和 $t_2 \in N^{X_2}$使得 $v|_{X_1} = t_1$和 $v|_{X_2} = t_2$当且仅当 $v \in \epsilon(N^{X_1}) \cap \epsilon(N^{X_2})$。注意，对于 $t_1 \in N^{X_1}$和 $t_2 \in N^{X_2}$，有 $t_1 \cup (t_2|_{X_2 \setminus X_1}) \in N^{X_1 \cup X_2}$。□

引理 5.5。令 $N \subseteq M$、$X \subseteq \mathcal{X}$ 和 φ 为公式，使得 $\pi_X(||\varphi||) \subseteq N^X$。那么有

$$\pi_{cl_{eq(\varphi)}(X)}(||\varphi||) \subseteq N^{cl_{eq(\varphi)}(X)}.$$

证明。令 $t \in \pi_{\mathrm{cl}_{eq(\varphi)}(X)}(||\varphi||)$ 且 $x \in \mathbf{cl}^{eq(\varphi)}(X)$。那么存在 $y \in X$，使得 $(x, y) \in eq(\varphi)$。因此，$||\varphi|| \subseteq \mathbf{D}^{xy}$。现在，$t|_X \in \pi_X(||\varphi||)$，所以 $t|_X \in N^X$。我们有$t(y) \in N$，并且由于 $t(y) = t(x)$，可得 $t(x) \in N$ 也成立。因此我们已经证明了$t \in N^{\mathrm{cl}_{eq(\varphi)}(X)}$。□

以下观察结论是显然的：

$$\pi_Y(\mathrm{cl}_X(V)) = \pi_Y(V), \qquad \text{provided that } X \cap Y = \emptyset, \tag{5.2}$$

$$\pi_Y(\overline{\mathrm{cl}_X(V)}) \subseteq \pi_Y(\overline{V}). \tag{5.3}$$

现在我们可以陈述一个定理，描述映射 gen_0 和 $cogen_0$ 的含义。

定理 5.6。对于每个公式 φ，有

$$\pi_{gen_0(\varphi)}(||\varphi||) \subseteq A(M)^{gen_0(\varphi)},$$
$$\pi_{cogen_0(\varphi)}(\overline{||\varphi||}) \subseteq A(M)^{cogen_0(\varphi)}.$$

证明。我们通过对公式进行结构归纳来证明该断言。显然，该断言对任意原子公式都成立。假设该断言对公式 φ 和 ψ成立。我们有

$$\pi_{gen_0(\neg\varphi)}(||\neg\varphi||) = \pi_{cogen_0(\varphi)}(\overline{||\varphi||}) \subseteq \mathrm{A}(M)^{cogen_0(\varphi)} = \mathrm{A}(M)^{gen_0(\neg\varphi)}$$

and

$$\begin{aligned}\pi_{cogen_0(\neg\varphi)}(\overline{||\neg\varphi||}) &= \pi_{gen_0(\varphi)}(\overline{\overline{||\varphi||}}) = \pi_{gen_0(\varphi)}(||\varphi||) \\ &\subseteq \mathrm{A}(M)^{gen_0(\varphi)} = \mathrm{A}(M)^{cogen_0(\neg\varphi)}.\end{aligned}$$

因此，该断言对取反公式成立。根据假设 $\pi_{gen_0(\varphi)}(||\varphi||) \subseteq \mathbf{A}(M)^{gen_0(\varphi)}$和 $\pi_{gen_0(\psi)}(||\psi||) \subseteq \mathbf{A}(M)^{gen_0(\psi)}$，可得

$$\epsilon(\pi_{gen_0(\varphi)}(||\varphi||)) \cap \epsilon(\pi_{gen_0(\psi)}(||\psi||)) \subseteq \epsilon(\mathrm{A}(M)^{gen_0(\varphi)}) \cap \epsilon(\mathrm{A}(M)^{gen_0(\psi)}).$$

由引理 5.3 和 5.4，可得

$$\pi_{gen_0(\varphi) \cup gen_0(\psi)}(||\varphi \wedge \psi||) \subseteq \mathrm{A}(M)^{gen_0(\varphi) \cup gen_0(\psi)}.$$

由引理 5.5，我们得到

$$\pi_{gen_0(\varphi\wedge\psi)}(||\varphi\wedge\psi||)\subseteq \mathrm{A}(M)^{gen_0(\varphi\wedge\psi)}.$$

根据这些假设

$$\pi_{cogen_0(\varphi)}(\overline{||\varphi||})\subseteq \mathrm{A}(M)^{cogen_0(\varphi)}$$

and

$$\pi_{cogen_0(\psi)}(\overline{||\psi||})\subseteq \mathrm{A}(M)^{cogen_0(\psi)}$$

连同相等式 $cogen_0(\varphi\wedge\psi) = cogen_0(\varphi)\cap cogen_0(\psi)$，我们得到

$$\pi_{cogen_0(\varphi\wedge\psi)}(\overline{||\varphi||})\subseteq \mathrm{A}(M)^{cogen_0(\varphi\wedge\psi)},$$
$$\pi_{cogen_0(\varphi\wedge\psi)}(\overline{||\psi||})\subseteq \mathrm{A}(M)^{cogen_0(\varphi\wedge\psi)}.$$

由此可得

$$\begin{aligned}\pi_{cogen_0(\varphi\wedge\psi)}(\overline{||\varphi\wedge\psi||}) &= \pi_{cogen_0(\varphi\wedge\psi)}(\overline{||\varphi||}\cup\overline{||\psi||})\\ &= \pi_{cogen_0(\varphi\wedge\psi)}(\overline{||\varphi||})\cup\pi_{cogen_0(\varphi\wedge\psi)}(\overline{||\psi||})\\ &\subseteq \mathrm{A}(M)^{cogen_0(\varphi\wedge\psi)}.\end{aligned}$$

我们已经证明，该断言对合取公式也成立。

根据假设 $\pi_{gen_0(\varphi)}(||\varphi||)\subseteq \mathrm{A}(M)^{gen_0(\varphi)}$，我们得到

$$\pi_{gen_0(\varphi)\setminus\{x\}}(||\varphi||)\subseteq \mathrm{A}(M)^{gen_0(\varphi)\setminus\{x\}}.$$

利用相等式 (5.2)，可得

$$\begin{aligned}\pi_{gen_0((\exists x)\varphi)}(||(\exists x)\varphi||) &= \pi_{gen_0(\varphi)\setminus\{x\}}(\mathrm{C}_x(||\varphi||)) = \pi_{gen_0(\varphi)\setminus\{x\}}(||\varphi||)\\ &\subseteq \mathrm{A}(M)^{gen_0(\varphi)\setminus\{x\}} = \mathrm{A}(M)^{gen_0((\exists x)\varphi)}.\end{aligned}$$

由假设 $\pi_{cogen_0(\varphi)}(||\varphi||)\subseteq \mathrm{A}(M)^{\overline{cogen_0(\varphi)}}$，可得

$$\pi_{cogen_0(\varphi)\setminus\{x\}}(\overline{||\varphi||})\subseteq \mathrm{A}(M)^{cogen_0(\varphi)\setminus\{x\}}.$$

利用相等式 (5.3)，可得

$$\begin{aligned}\pi_{cogen_0((\exists x)\varphi)}(\overline{||(\exists x)\varphi||}) &= \pi_{cogen_0(\varphi)\setminus\{x\}}(\overline{\mathrm{C}_x(||\varphi||)})\subseteq \pi_{cogen_0(\varphi)\setminus\{x\}}(||\varphi||)\\ &\subseteq \mathrm{A}(M)^{cogen_0(\varphi)\setminus\{x\}} = \mathrm{A}(M)^{cogen_0((\exists x)\varphi)}.\end{aligned}$$

我们已经证明，该断言对存在量化公式也成立 . □

按照 Gelder 和 Topor [VGT91], 的做法，我们相应地定义允许公式。公式 φ 称为允许公式，如果 $\mathrm{FV}(\varphi) = gen_0(\varphi)$，并且 φ 的每个形如 $(\exists x)\psi$的子公式都满足 $x\in gen_0(\psi)$。

6. Normalization

本节讨论如何构造一个与给定允许公式语义等价的规范化公式。我们首先引入一个导出逻辑联结词。我们将公式 $(\exists X \setminus Y)\varphi \vee (\exists Y \setminus X)\psi$ 记作 $\varphi \vee^* \psi$，其中 $X = \mathrm{FV}(\varphi)$ 且 $Y = \mathrm{FV}(\psi)$。

我们描述给定公式的规范化公式，该公式限制其值的元素。对于公式 φ，我们按照以下规则定义公式 $gen(\varphi)$ 和 $cogen(\varphi)$，分别称为 φ 的生成元 和余生成元 。

(1) $gen(1) = cogen(1) = 1$; (2) $gen(r(x_1, \ldots, x_n)) = r(x_1, \ldots, x_n)$; (3) $cogen(r(x_1, \ldots, x_n)) = 1$; (4) $gen(x \approx y) = 1$; (5) $cogen(x \approx y) = 1$; (6) $gen(\neg\varphi) = cogen(\varphi)$; (7) $cogen(\neg\varphi) = gen(\varphi)$; (8) $gen(\varphi \wedge \psi) = gen(\varphi) \wedge gen(\psi) \wedge (\varphi \approx_\wedge \psi)$; (9) $cogen(\varphi \wedge \psi) = cogen(\varphi) \vee^* cogen(\psi)$; (10) $gen((\exists x)\varphi) = (\exists x)gen(\varphi)$; (11) $cogen((\exists x)\varphi) = (\exists x)cogen(\varphi)$】【。

还需定义第八点中出现的公式 $\varphi \approx_\wedge \psi$。等价关系 E 在 $\mathcal{X}$ 上的极小表示，是指 $\mathcal{X}$ 上关于集合包含而言极小的二元关系 R，满足 $\mathrm{Eq}(R) = E$。我们用 $(\varphi_1 \approx_\wedge \varphi_2)$ 表示公式 $(x_1 \approx y_1) \wedge \cdots \wedge (x_n \approx y_n)$，其中 $\{(x_i, y_i) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X} \mid 1 \le i \le n\}$ 是 $\mathrm{Eq}(eq(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \setminus eq(gen(\varphi_1) \wedge gen(\varphi_2)))$ 的极小表示。如果极小表示是空集，则令 $(\varphi_1 \approx_\wedge \varphi_2)$ 等于 1。对于 $\mathcal{X}$ 上的每个等价关系，我们固定其一个极小表示。例如，若 $\varphi_1 = r(x_1, x_2)$ 且 $\varphi_2 = x_1 \approx x_2$，则 $\varphi_1 \approx_\wedge \varphi_2 = x_1 \approx x_2$，因为 $eq(\varphi_1 \wedge \varphi_2) = \mathrm{Eq}(\{(x_1, x_2)\})$，且 $eq(gen(\varphi_1) \wedge gen(\varphi_2)) = eq(r(x_1, x_2) \wedge 1) = \mathrm{Eq}(\emptyset)$。

映射 gen 和 $cogen$ 分别是 gen_0 和 $cogen_0$的推广，含义如下：对于每个公式 φ，$\mathrm{FV}(gen(\varphi)) = gen_0(\varphi)$ 和 $\mathrm{FV}(cogen(\varphi)) = cogen_0(\varphi)$ 均成立。

例如，考虑关系除法，它可以表示为公式$\varphi = (\exists y)s(x,\ y) \wedge (\forall y)(r(y) \to s(x,\ y))$. 不使用缩写时，公式 φ 为 $(\exists y)s(x,\ y) \wedge \neg(\exists y)\neg(\neg r(y) \vee s(x,\ y))$. 我们有

$$
\begin{aligned}
&gen((\exists y)s(x,y) \wedge \neg(\exists y)\neg(\neg r(y) \vee s(x,y)))\\
=&(\exists y)s(x,y) \wedge gen(\neg r(y) \vee s(x,y)) \wedge 1\\
=&(\exists y)s(x,y) \wedge gen(\neg(\neg\neg r(y) \wedge \neg s(x,y))) \wedge 1\\
=&(\exists y)s(x,y) \wedge (cogen(\neg\neg r(y)) \vee^* cogen(\neg s(x,y))) \wedge 1\\
=&(\exists y)s(x,y) \wedge (1 \vee^* s(x,y)) \wedge 1\\
=&(\exists y)s(x,y) \wedge (1 \vee (\exists x)(\exists y)s(x,y)) \wedge 1.
\end{aligned}
$$

虽然并非必需，但我们可以应用以下规则简化结果，我们称之为重言式规则：

(1) $(\exists x)1$ 简化为 1；(2) $1 \wedge \varphi$ 和 $\varphi \wedge 1$ 简化为 φ；(3) $1 \vee \psi$ 和 $\varphi \vee 1$ 简化为 1。

简化后， φ 的生成元为 $(\exists y)s(x,y)$。

下面的引理表明，正公式的余生成元和负公式的生成元都是平凡的。

引理 6.1. 若 φ 为正，则 $||cogen(\varphi)|| = \mathcal{V}$；若其为负，则 $||gen(\varphi)|| = \mathcal{V}$。

证明。 对于原子公式，该断言显然成立，因为它们都是正公式。假设 φ 为正，则 $\neg\varphi$ 为负，因此有 $||gen(\neg\varphi)|| = ||cogen(\varphi)|| = \mathcal{V}$。类似地可以证明，只要 φ为负，该断言对 $\neg\varphi$也成立。

假设 φ 为正，则 $\varphi \wedge \psi$ 也为正。我们有 $||cogen(\varphi \wedge \psi)|| = ||cogen(\varphi) \vee^* cogen(\psi)|| = ||1 \vee^* cogen(\psi)|| = \mathcal{V}$。在假设 ψ 为正的情况下，也有相同的结论。

假设 φ 和 ψ 都是负公式。那么 $\varphi \wedge \psi$ 也是负公式，并且根据引理 5.2，$eq(\varphi \wedge \psi)$ 是 $\mathcal{X}$上的恒等关系。因此，我们有 $||gen(\varphi \wedge \psi)|| = ||gen(\varphi)|| \cap ||gen(\psi)|| = \mathcal{V} \cap \mathcal{V} = \mathcal{V}$。

假设 φ 是正公式。那么 $(\exists x)\varphi$ 也为正。我们有 $||cogen((\exists x)\varphi)|| = \mathsf{C}_x(||cogen(\varphi)||) = \mathsf{C}_x(\mathcal{V}) = \mathcal{V}$。类似地，如果 φ 是负公式，那么 $||gen((\exists x)\varphi)|| = \mathcal{V}$。 □

至此，我们可以准确地描述生成元和余生成元如何限制公式的取值。

定理 6.2。成立

$$||\varphi|| \subseteq ||gen(\varphi)||,$$
$$\overline{||\varphi||} \subseteq ||cogen(\varphi)||.$$

证明。 我们通过对公式进行结构归纳来证明该断言。显然，该断言对任何原子公式都成立。

假设该断言对公式 φ和 ψ成立。我们有

$$||\neg\varphi|| = \overline{||\varphi||} \subseteq ||cogen(\varphi)|| = ||gen(\neg\varphi)||$$

and

$$\overline{||\neg\varphi||} = \overline{\overline{||\varphi||}} = ||\varphi|| \subseteq ||gen(\varphi)|| = ||cogen(\neg\varphi)||.$$

我们证明了该断言对否定公式也成立。我们有

$$||(\exists x)\varphi|| = \mathrm{C}_x(||\varphi||) \subseteq \mathrm{C}_x(||gen(\varphi)||) = ||(\exists x)gen(\varphi)|| = ||gen((\exists x)\varphi)||$$

and

$$\begin{aligned}\overline{||(\exists x)\varphi||} = \overline{\mathrm{C}_x(||\varphi||)} \subseteq \overline{||\varphi||} \subseteq \mathrm{C}_x(\overline{||\varphi||}) \subseteq \mathrm{C}_x(||cogen(\varphi)||)\\ = ||(\exists x)cogen(\varphi)|| = ||cogen((\exists x)\varphi)||.\end{aligned}$$

我们证明了该断言对存在量化公式也成立。由引理 5.1，我们有

$$\begin{aligned}||\varphi \wedge \psi|| &= ||\varphi|| \cap ||\psi|| = ||\varphi|| \cap ||\psi|| \cap \mathrm{D}_{x_1y_1} \cap \cdots \cap \mathrm{D}_{x_ny_n}\\ &\subseteq ||gen(\varphi)|| \cap ||gen(\psi)|| \cap \mathrm{D}_{x_1y_1} \cap \cdots \cap \mathrm{D}_{x_ny_n}\\ &= ||gen(\varphi) \wedge gen(\psi) \wedge (x_1 \approx y_1) \wedge \cdots \wedge (x_n \approx y_n)||\\ &= ||gen(\varphi \wedge \psi)||,\end{aligned}$$

其中 $\{(x_1, y_1) \ldots, (x_n, y_n)\}$ 是 $\mathsf{Eq}(eq(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \setminus eq(gen(\varphi_1) \wedge gen(\varphi_2))$ 的极小表示。

我们有

$$\begin{aligned}\overline{||\varphi \wedge \psi||} &= \overline{||\varphi|| \cap ||\psi||} = \overline{||\varphi||} \cup \overline{||\psi||} \subseteq ||cogen(\varphi)|| \cup ||cogen(\psi)|| \\ &\subseteq \mathrm{C}_{X\setminus Y}(||cogen(\varphi)||) \cup \mathrm{C}_{Y\setminus X}(||cogen(\psi)||) \\ &= ||(\exists X \setminus Y)cogen(\varphi) \vee (\exists Y \setminus X)cogen(\psi)|| \\ &= ||cogen(\varphi \wedge \psi)||,\end{aligned}$$

其中 $X = \mathrm{FV}(cogen(\varphi))$ 且 $Y = \mathrm{FV}(cogen(\psi))$.

我们已经证明，该断言对合取公式也成立。 □

接下来，我们考虑公式的规范化。为了在规范化过程中正确处理双重否定，我们引入以下公式的补的概念。对于公式 φ，我们将公式的补 φ定义为 $\overline{\varphi}$：

$$\overline{\varphi} = \begin{cases} \neg\varphi & \text{if } \varphi \text{ is not negated ,} \\ \varphi_1 & \text{if } \varphi \text{ is a formula of the form } \neg\varphi_1. \end{cases}$$

显然，$||\varphi|| = \overline{||\varphi||}$，$eq(\overline{\varphi}) = coeq(\varphi)$，且 $coeq(\overline{\varphi}) = eq(\varphi)$。

在规范化过程中，我们需要对齐给定公式的自由变量。设 φ 和 ψ 是满足 $\mathrm{FV}(\varphi) \subseteq \mathrm{FV}(\psi)$ 的公式。那么，公式 φ 经由 ψ 进行对齐，是指如下给出的公式 $align(\varphi, \psi)$：

(1) $align(\varphi, \psi) = \varphi$，若 $\mathrm{FV}(\varphi) = \mathrm{FV}(\psi)$；
(2) $align(\varphi, \psi) = \varphi \wedge (\exists \mathrm{FV}(\varphi))\psi$，否则。

以下包含关系可直接由定义得出：

$$||align(\varphi, \psi)|| \subseteq ||\varphi||. \tag{6.1}$$

显然，$eq(align(\varphi, \psi)) \supseteq eq(\varphi)$。

引理 6.3。若 $FV(\varphi) \subseteq FV(\psi)$，则 $||align(\varphi, \psi)|| \cap ||\psi|| = ||\varphi|| \cap ||\psi||$。

证明。若 $\mathrm{FV}(\varphi) = \mathrm{FV}(\psi)$，则断言显然成立。设 $\mathrm{FV}(\varphi) \subset \mathrm{FV}(\psi)$。于是我们有

$$\begin{aligned}||align(\varphi, \psi)|| \cap ||\psi|| &= ||\varphi \wedge (\exists \mathrm{FV}(\varphi))\psi|| \cap ||\psi|| = ||\varphi|| \cap \mathrm{C}_{\mathrm{FV}(\varphi)}(||\psi||) \cap ||\psi|| \\ &= ||\varphi|| \cap ||\psi||.\end{aligned}$$ □

现在我们可以说明如何对公式进行规范化。对于公式 φ和满足 $\mathrm{FV}(\varphi) = \mathrm{FV}(\psi)$ 的规范化公式 ψ，我们按照以下规则，使用 ψ 将 φ 转化为公式 $norm(\varphi, \psi)$，称为 φ 的规范化：

(1) 若 $\varphi = r(x_1, \ldots\ldots, x_n)$，则 $norm(\varphi, \psi) = r(y_1/x_1, \ldots\ldots, y_n/x_n)$，其中 $r(y_1, \ldots\ldots, y_n) \in \mathcal{F}$；
(2) 若 $\varphi = x_1 \approx x_2$，则 $norm(\varphi, \psi) = \psi \wedge (x_1 \approx x_2)$；(3) 若 $\varphi = \neg\varphi_1$，则 $norm(\varphi, \psi) = norm(\varphi_1, \psi)$；
(4) 若 $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$，则记 $\alpha_1 = norm(\varphi_1, \psi_1)$、$\alpha_2 = norm(\varphi_2, \psi_2)$，其中 $\psi_1 = (\exists \mathrm{FV}(\psi) \setminus \mathrm{FV}(\varphi_1))\psi$ 且 $\psi_2 = (\exists \mathrm{FV}(\psi) \setminus \mathrm{FV}(\varphi_2))\psi$，并且

(a) 若 α_1 和 α_2 均未取反，则 $norm(\varphi, \psi) = \alpha_1 \wedge \alpha_2$；(b) 若 α_1 未取反而 α_2 取反，则

$$norm(\varphi, \psi) = align(\alpha_1, \psi) \wedge \neg align(\overline{\alpha_2}, \psi);$$

(c) 如果 α_2 未被取反且 α_1 被取反，则

$$norm(\varphi, \psi) = align(\alpha_2, \psi) \wedge \neg align(\overline{\alpha_1}, \psi);$$

(d) 如果 α_1 和 α_2 都被取反，则

$$norm(\varphi,\psi)=\neg(align(\overline{\alpha_1},\psi)\vee align(\overline{\alpha_2},\psi));$$

(5) 若 $\varphi=(\exists x)\varphi_1$，则

$$norm(\varphi,\psi)=(\exists x)norm(\varphi_1,(\exists X)\psi_1\wedge\psi),$$

其中 $\psi_1=gen(\varphi_1)$ 且 $X=\mathrm{FV}(\psi_1)\setminus\{x\}$。

检查刚才描述的规则可知，公式 $norm(\varphi,\ \psi)$ 已规范化。公式 φ 的规范化 是指公式 $norm(\varphi,\ gen(\varphi))$。例如，我们来计算第6节中讨论的关系除法公式的规范化：

$$\varphi_1=(\exists y)s(x,y)\wedge\neg(\exists y)(r(y)\wedge\neg s(x,y)). \tag{6.2}$$

为了让示例更易读，我们对重言式 1 使用简化规则，并采用原子公式规范化过程中的简化。我们已经知道，生成元 $gen(\varphi_1)$ 可简化为 $\psi_1=(\exists y)s(x,\ y)$。规范化过程如下。

(1) 由于 φ_1 等于 $\varphi_2\wedge\varphi_3$，其中 $\varphi_2=(\exists y)s(x,y)$ 且 $\varphi_3=\neg(\exists y)(r(y)\wedge\neg s(x,y))$，因此我们需要计算 $norm(\varphi_2,\psi_1)$ 和 $norm(\varphi_3,\psi_1)$。(2) 我们有 $norm(\varphi_2,\psi_1)=(\exists y)norm(s(x,y),(\exists x)s(x,y)\wedge\psi_1)=s(x/x,y/y)$，将其简化后得到 $s(x,y)$。(3) 我们有 $norm(\varphi_3,\psi_1)=norm(\varphi_4,\psi_1)$，其中 φ_4 是 ~~$(\exists y)(r(y)\wedge\neg s(x,y))$~~。(4) 为了计算 $norm(\varphi_4,\psi_1)$，我们需要计算 $gen(r(y)\wedge\neg s(x,y))=r(y)\wedge 1$，将其简化后得到 $r(y)$。现在，

$$norm(\varphi_4,\psi_1)=(\exists y)(norm(r(y)\wedge\neg s(x,y),r(y)\wedge\psi_1)).$$

我们需要计算 $norm(r(y),\ (\exists x)(r(y)\wedge\psi_1))$ 和 $norm(\neg s(x,\ y)\ r(y)\wedge\psi_1)$。(5) 我们有 $norm(r(y),\ (\exists x)(r(y)\wedge\psi_1))=r(y/y)$，这可简化为 $r(y)$ 和 $norm(\neg s(x,\ y)\ r(y)\wedge\psi_1)=norm(s(x,\ y)\ r(y)\wedge\psi_1)=\neg s(x/x,\ y/y)$，进一步简化为 $\neg s(x,\ y)$。

(6) 我们可以继续进行第四步，得到

$$\begin{aligned}norm(\varphi_4,\psi_1)&=(\exists y)norm(r(y)\wedge\neg s(x,y),r(y)\wedge\psi_1)\\&=(\exists y)(align(r(y),r(y)\wedge\psi_1)\wedge\neg align(s(x,y),r(y)\wedge\psi_1))\\&=(\exists y)((r(y)\wedge(\exists y)(r(y)\wedge\psi_1))\wedge\neg s(x,y)).\end{aligned}$$

将最后一个公式记为 φ_5。因此，

$$norm(\varphi_3,\psi_1)=\overline{norm(\varphi_4,\psi_1)}=\neg\varphi_5.$$

(7) 我们可以继续进行第一步：

$$\begin{aligned}norm(\varphi_1,\psi_1)&=norm(\varphi_2\wedge\varphi_3,\psi_1)\\&=align((\exists y)s(x,y),\psi_1)\wedge\neg align(\varphi_5,\psi_1)\\&=(\exists y)s(x,y)\wedge\neg\varphi_5\\&=(\exists y)s(x,y)\wedge\neg(\exists y)((r(y)\wedge(\exists y)(r(y)\wedge(\exists y)s(x,y)))\wedge\neg s(x,y))\end{aligned}$$

利用柱代数的第三和第四公理，我们可以简化 $norm(\varphi_1,\ \psi_1)$，并得到：

$$\varphi_6=(\exists y)s(x,y)\wedge\neg(\exists y)((r(y)\wedge(\exists y)s(x,y))\wedge\neg s(x,y))$$

Since φ_6 已规范化，我们可以得到语义等价的关系表达式 :

$$expr(\varphi_6) = \pi_{\{x\}}(s) - \pi_{\{x\}}((r \bowtie \pi_{\{x\}}(s)) - s).$$

这是关系除法的标准定义。

我们观察到，如果 $norm(\varphi,\ \psi)$ 没有取反，它就是正的；否则就是负的。另一个观察是，当且仅当 $norm(\varphi,\ \psi)$ 为正时， φ 才为正。

下面的引理表明，规范化保留公式中变量的相等与不等。

引理 6.4。 成立的是 $eq(\varphi) \subseteq eq(norm(\varphi,\ \psi))$ 并且 $coeq(\varphi) \subseteq coeq(norm(\varphi,\ \psi))$。

证明。 我们对公式 φ 作结构归纳来证明该断言。

(1) 当 φ 的形式为 $r(x_1,\ ...,\ x_n)$ 或 1 时，情况显然，因为在这些情况下， $eq(\varphi) = coeq(\varphi) = \mathsf{id}_{\mathcal{X}}$。

(2) 考虑 φ 的形式为 $x_1 \approx x_2$ 的情况。于是有 $eq(norm(x_1 \approx x_2,\ \psi)) = eq(\psi \wedge (x_1 \approx x_2)) = \mathsf{Eq}(eq(\psi) \cup eq(x_1 \approx x_2)) \supseteq eq(x_1 \approx x_2)$。显然，$coeq(x_1 \approx x_2) = \mathsf{id}_{\mathcal{X}} \subseteq coeq(norm(\varphi,\ \psi))$。

(3) 考虑 φ 的形式为 $\neg\varphi_1$ 的情况。于是有 $eq(\neg\varphi_1) = coeq(\varphi_1) \subseteq coeq(norm(\varphi_1,\ \psi)) = eq(norm(\varphi_1,\ \psi)) = eq(norm(\neg\varphi_1,\ \psi))$。类似地可以证明， $coeq(\neg\varphi_1) \subseteq coeq(norm(\neg\varphi_1,\ \psi))$。

(4) 考虑 φ 具有 $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ 形式的情况。令 $\alpha_1 = norm(\varphi_1,\ \psi_1)$ 且令 $\alpha_2 = norm(\varphi_2,\ \psi_2)$，其中 $\psi_1 = (\exists \mathsf{FV}(\psi) \setminus \mathsf{FV}(\varphi_1))\psi$ ，并且 $\psi_2 = (\exists \mathsf{FV}(\psi) \setminus \mathsf{FV}(\varphi_2))\psi$。我们区分四种子情况。根据引理 5.2，只需证明该断言的一部分，因为另一部分显然成立。

(a) 考虑 α_1 和 α_2 都未取反的子情况。我们有 $eq(norm(\varphi_1 \wedge \varphi_2)) = eq(\alpha_1 \wedge \alpha_2) = \mathsf{Eq}(eq(\alpha_1) \cup eq(\alpha_2)) \supseteq \mathsf{Eq}(eq(\varphi_1) \cup eq(\varphi_2)) = eq(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$。(b) 考虑 α_1 未取反而 α_2 取反的子情况。我们有

$$\begin{aligned}
&eq(norm(\varphi_1 \wedge \varphi_2,\ \psi)) = eq(align(\alpha_1,\ \psi) \wedge \neg align(\overline{\alpha_2},\ \psi)) \\
&= \text{方程}(eq(align(\alpha_1, \psi)) \cup eq(\neg align(\overline{\alpha}_2, \psi))) \\
&= eq(align(\alpha_1,\ \psi)) \qquad (6.3) \\
&\supseteq eq(\alpha_1) \supseteq eq(\varphi_1) \\
&= \mathsf{Eq}(eq(\varphi_1) \cup eq(\varphi_2)) \qquad (6.4) \\
&= eq(\varphi_1 \wedge \varphi_2)。
\end{aligned}$$

由于 α_2 是负公式， $\neg align(\overline{\alpha_2},\ \psi)$也是负公式。因此， $eq(\neg align(\alpha_{\overline{2}},\ \psi))$是 $\mathcal{X}$ 上的恒等关系，相等式 (6.3) 成立。同理，由于φ_2 是负公式，相等式 (6.4) 也成立。

(c) α_2 未取反而 α_1 取反的子情况，与前一种情况的处理方式类似。(d) 考虑 α_1 和 α_2 均取反的子情况。我们有 $coeq(norm(\varphi_1 \wedge \varphi_2, \psi)) = coeq(\neg(align(\alpha_1, \psi) \vee align(\alpha_2, \psi))) = coeq(\neg align(\alpha_1, \psi) \wedge \neg align(\alpha_2, \psi)) = eq(align(\alpha_1, \psi)) \cap eq(align(\alpha_2, \psi)) \supseteq eq(\alpha_1) \cap eq(\alpha_2) = coeq(\alpha_1) \cap coeq(\alpha_2) \supseteq coeq(\varphi_1) \cap coeq(\varphi_2) = coeq(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$。

（5）考虑 φ 具有 $(\exists x)\varphi_1$ 形式的情况。令 $\psi_1 = gen(\varphi_1)$，且 $X = \mathsf{FV}(\psi_1) \setminus \{x\}$。我们有 $eq(norm((\exists x)\varphi_1, \psi)) = eq((\exists x)norm(\varphi_1, (\exists X)\psi_1 \wedge \psi)) = \mathsf{Eq}(eq(norm(\varphi_1, (\exists X)\psi_1 \wedge \psi))|_{(X \setminus \{x\})^2}) \supseteq \mathsf{Eq}(eq(\varphi_1)|_{(X \setminus \{x\})^2}) = eq((\exists x)\varphi_1)$。同理可证明， $coeq(norm((\exists x)\varphi_1, \psi)) \supseteq eq((\exists x)\varphi_1)$。

□

对合取进行规范化会保留联结词 $\approx_\wedge$ 所表达的变量相等关系。

引理 6.5. 成立 $||norm(\varphi_1 \wedge \varphi_2, \psi)|| \subseteq ||\varphi_1 \approx_\wedge \varphi_2||$。

证明。 假设 $\varphi_1 \approx_\wedge \varphi_2 = (x_1 \approx x_2) \wedge \cdots \wedge (x_n \approx x_n)$。根据$\varphi_1 \approx_\wedge \varphi_2$的定义，对于所有 $1 \leq i \leq n$，都有 $(x_i, y_i) \in eq(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$。由引理 6.4 可得，对于所有 $1 \leq i \leq n$，都有 $(x_i, y_i) \in eq(norm(\varphi_1 \wedge \varphi_2, \psi))$。根据引理 5.1,

$$||norm(\varphi_1 \wedge \varphi_2, \psi)|| \subseteq \mathrm{D}_{x_1 y_1} \cap \cdots \cap \mathrm{D}_{x_n y_n} = ||\varphi_1 \approx_\wedge \varphi_2||.$$

□

公式的规范化始终处于其生成元所描述的空间内。

引理 6.6. 成立:

$$||norm(\varphi, \psi)|| \subseteq ||gen(\varphi)||$$

and

$$\overline{||norm(\varphi, \psi)||} \subseteq ||cogen(\varphi)||.$$

证明。 我们通过对公式 φ 作结构归纳来证明该断言。

(1) 考虑 φ 的形式为 $r(x_1, \ldots, x_n)$ 的情况。那么我们有$||norm(r(x_1, \ldots, x_n)\ \psi)|| = ||r(y_1/x_1, \ldots, y_n/x_n)||$, 其中 $r(y_1, \ldots, y_n) \in \mathcal{F}$，根据引理 4.3, $||r(y_1/x_1, \ldots, y_n/x_n)|| = ||r(x_1, \ldots, x_n)||$。现在，根据引理 6.2, $||r(x_1, \ldots, x_n)|| \subseteq |gen(r(x_1, \ldots, x_n))|$。显然, $||norm(r(x_1, \ldots, x_n)\ \psi)|| \subseteq ||cogen(r(x_1, \ldots, x_n))|| = \mathcal{V}$。

(2) 考虑 φ 的形式为 $x_1 \approx x_2$ 的情况。那么显然, $||norm(x_1 \approx x_2,\ \psi)|| \subseteq \mathcal{V} = ||gen(x_1 \approx x_2)||$, 同理, $||norm(x_1 \approx x_2,\ \psi)|| \subseteq \mathcal{V} = ||cogen(x_1 \approx x_2)||$。

（3）考虑 φ 的形式为 $\neg\varphi_1$ 的情况。由于 $||cogen(\varphi_1)|| = ||gen(\neg\varphi_1)|| \subseteq |\chi||$,

根据归纳假设，我们有:

$$||norm(\neg\varphi_1, \psi)|| = \overline{||norm(\varphi_1, \psi)||} \subseteq ||cogen(\varphi_1)|| = ||gen(\neg\varphi_1)||.$$

同理，我们有

$$\overline{||norm(\neg\varphi_1, \psi)||} = \overline{\overline{||norm(\varphi_1, \psi)||}} = ||norm(\varphi_1, \psi)|| \subseteq ||gen(\varphi_1)|| = ||cogen(\neg\varphi_1)||.$$

（4）考虑 φ 的形式为 $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ 的情况。令 $\alpha_1 = norm(\varphi_1, \psi_1)$ 和 $\alpha_2 = norm(\varphi_2, \psi_2)$, 其中 $\psi_1 = (\exists \mathrm{FV}(\psi) \setminus \mathrm{FV}(\varphi_1))\psi$ 且 $\psi_2 = (\exists \mathrm{FV}(\psi) \setminus \mathrm{FV}(\varphi_2))\psi$。我们区分四种子情况。

(a) 考虑 α_1 和 α_2 均未取反的子情况。由引理 6.5 可得,

$$\begin{aligned} ||norm(\varphi_1 \wedge \varphi_2, \psi)|| &= ||norm(\varphi_1 \wedge \varphi_2, \psi)|| \cap ||\varphi_1 \approx_\wedge \varphi_2|| \\ &= ||\alpha_1|| \cap ||\alpha_2|| \cap ||\varphi_1 \approx_\wedge \varphi_2|| \\ &\subseteq ||gen(\varphi_1)|| \cap ||gen(\varphi_2)|| \cap ||\varphi_1 \approx_\wedge \varphi_2|| \\ &= ||gen(\varphi_1 \wedge \varphi_2||). \end{aligned}$$

(b) 考虑 α_1 未取反而 α_2 取反的子情况。我们有

$$\begin{aligned}&||norm(\varphi_1\wedge\varphi_2,\psi)||=||align(\alpha_1,\psi)||\cap\overline{||align(\overline{\alpha_2},\psi)||}\\ \subseteq&||align(\alpha_1,\psi)||\subseteq||\alpha_1||\subseteq||gen(\varphi_1)||\\ =&||gen(\varphi_1)||\cap||gen(\varphi_2)||\cap||\varphi_1\approx_\wedge\varphi_2||\\ =&||gen(\varphi_1\wedge\varphi_2||).\end{aligned}\tag{6.5}$$

相等式 (6.5) 由引理 5.2 和 6.1 得出。

(c) α_1 为负公式且 α_2 为正的子情况可类似于前一个子情况证明。

(d) 考虑 α_1 和 α_2 均取反的子情况。根据 (6.1) 以及归纳假设，我们有

$$||align(\overline{\alpha_1},\psi)||\subseteq||\overline{\alpha_1}||=\overline{||\alpha_1||}\subseteq||cogen(\varphi_1)||$$

and

$$||align(\overline{\alpha_2},\psi)||\subseteq||\overline{\alpha_2}||=\overline{||\alpha_2||}\subseteq||cogen(\varphi_2)||.$$

现在，我们有

$$\begin{aligned}\overline{||norm(\varphi_1\wedge\varphi_2,\psi)||}&=||align(\overline{\alpha_1},\psi)||\cup||align(\overline{\alpha_2},\psi)||\\ &\subseteq||cogen(\varphi_1)||\cup||cogen(\varphi_2)||\\ &\subseteq \mathrm{C}_{X_1\setminus X_2}(||cogen(\varphi_1)||)\cup\mathrm{C}_{X_2\setminus X_1}(||cogen(\varphi_2)||)\\ &=||cogen(\varphi_1\wedge\varphi_2)||,\end{aligned}$$

其中 $X_1=$FV($cogen(\varphi_1)$) 且 $X_2=$FV($cogen(\varphi_2)$)。

(5) 考虑 φ 形如 $(\exists x)\varphi_1$ 的情况。令 $\psi_1=gen(\varphi_1)$，且 $X=$FV$(\psi_1)\setminus\{x\}$。由 $||norm(\varphi_1,(\exists X)\psi_1\wedge\psi)||\subseteq||gen(\varphi_1)||$，可得

$$\begin{aligned}||norm((\exists x)\varphi_1,\psi)||&=\mathrm{C}_x(||norm(\varphi_1,(\exists X)\psi_1\wedge\psi)||)\subseteq\mathrm{C}_x(||gen(\varphi_1)||)\\ &=||gen((\exists x)\varphi_1)||.\end{aligned}$$

Fro由归纳假设$||norm(\varphi_1,(\exists X)\psi_1\wedge\psi)||\subseteq\overline{||cogen(\varphi_1)||}$，可得 s

$$\begin{aligned}\overline{||norm((\exists x)\varphi_1,\psi)||}&=\overline{\mathrm{C}_x(||norm(\varphi_1,(\exists X)\psi_1\wedge\psi)||)}\\ &\subseteq\mathrm{C}_x(\overline{||norm(\varphi_1,(\exists X)\psi_1\wedge\psi)||})\\ &\subseteq\mathrm{C}_x(||cogen(\varphi_1)||)=||cogen((\exists x)\varphi_1)||.\end{aligned}\tag{6.6}$$

包含关系 (6.6) 由引理 2.1 的第 (3) 项得出。 □

允许公式 φ 使用公式 ψ 进行规范化后，在 ψ 的值范围内，其值与原公式 φ 相同。

引理 6.7。 假设 φ 是允许的，且 $FV(\psi)=FV(\varphi)$。则成立

$$||norm(\varphi,\psi)||\cap||\psi||=||\varphi||\cap||\psi||.$$

证明。 我们对公式 φ 使用结构归纳来证明该断言。

(1) 考虑 φ 具有 $r(x_1,\ldots,x_n)$ 这种形式的情形。设 $y_1,\ldots,y_n$ 是满足 $r(y_1,\ldots,y_n)\in\mathcal{F}$ 的变量。我们有

$$\begin{aligned}||norm(\varphi,\psi)||\cap||\psi|| &= ||norm(r(x_1,\ldots,x_n),\psi)||\cap||\psi||\\ &= ||r(y_1/x_1,\ldots,y_n/x_n)||\cap||\psi||\\ &= ||r(x_1,\ldots,x_n)||\cap||\psi|| = ||\varphi||\cap||\psi||. \end{aligned}\tag{6.7}$$

等式 (6.7) 由引理 4.3 得出。

(2) 考虑 φ 为 $x\approx y$ 形式的情形。令 $X=\mathrm{FV}(\psi)\setminus\{x,y\}$ 我们有

$$\begin{aligned}||norm(\varphi,\psi)||\cap||\psi|| &= ||(\exists X)\psi\wedge(x\approx y)||\cap||\psi||\\ &= \mathrm{C}_X(||\psi||)\cap||x\approx y||\cap||\psi||\\ &= ||x\approx y||\cap||\psi|| = ||\varphi||\cap||\psi||.\end{aligned}$$

(3) 考虑 φ 为 $\neg\varphi_1$ 形式的情形。我们有

$$\begin{aligned}||norm(\varphi,\psi)||\cap||\psi|| &= ||norm(\neg\varphi_1,\psi)||\cap||\psi||\\ &= ||\overline{norm(\varphi_1,\psi)}||\cap||\psi||\\ &= \overline{||norm(\varphi_1,\psi)||}\cap||\psi||\\ &= \overline{||norm(\varphi_1,\psi)||\cap||\psi||}\cap||\psi||\\ &= \overline{||\varphi_1||\cap||\psi||}\cap||\psi|| = \overline{||\varphi_1||}\cap||\psi||\\ &= ||\neg\varphi_1||\cap||\psi|| = ||\varphi||\cap||\psi||.\end{aligned}$$

(4) 考虑 φ 为 $\varphi_1\wedge\varphi_2$ 形式的情形。令 $\alpha_1 = norm(\varphi_1,\ \psi)$ 且 $\alpha_2 = norm(\varphi_2,\ \psi)$。我们区分四种子情况。

(a) 考虑 α_1 和 α_2 均为正的子情况。我们有

$$\begin{aligned}||norm(\varphi,\psi)||\cap||\psi|| &= ||norm(\varphi_1\wedge\varphi_2,\psi)||\cap||\psi||\\ &= ||norm(\varphi_1,\psi)\wedge norm(\varphi_2,\psi)||\cap||\psi||\\ &= ||norm(\varphi_1,\psi)||\cap||norm(\varphi_2,\psi)||\cap||\psi||\\ &= ||\varphi_1||\cap||\varphi_2||\cap||\psi||\\ &= ||\varphi_1\wedge\varphi_2||\cap||\psi|| = ||\varphi||\cap||\psi||.\end{aligned}$$

(b) 考虑 α_1 为正且 α_2 为负公式的子情况。令 $X=\mathrm{FV}(\alpha_1)\cup\mathrm{FV}(\alpha_2)$。我们有

$$\begin{aligned}&||norm(\varphi,\psi)||\cap||\psi|| = ||norm(\varphi_1\wedge\varphi_2)||\cap||\psi||\\ &= ||align(\alpha_1,X,\psi)||\cap\overline{||align(\overline{\alpha_2},X,\psi)||}\cap||\psi||\\ &= ||\alpha_1||\cap\overline{||align(\overline{\alpha_2},X,\psi)||\cap||\psi||}\cap||\psi|| \qquad (6.8)\\ &= ||\alpha_1||\cap\overline{||\overline{\alpha_2}||\cap||\psi||}\cap||\psi|| \qquad (6.9)\\ &= ||\alpha_1||\cap\overline{||\overline{\alpha_2}||}\cap||\psi||\\ &= ||\alpha_1||\cap\overline{\overline{||\alpha_2||}}\cap||\psi||\\ &= ||\alpha_1||\cap||\alpha_2||\cap||\psi||\\ &= ||\varphi_1||\cap||\varphi_2||\cap||\psi|| = ||\varphi||\cap||\psi||.\end{aligned}$$

等式（6 .8）和（6 .9）可 w由引理 6 得出 .3.

（c） α_1 为负公式而 α_2 为正的子情况，可以类似于前一子情况加以证明。

（d）考虑 α_1 和 α_2 均为负公式的子情况。令 $X = \mathrm{FV}(\alpha_1) \cup \mathrm{FV}(\alpha_2)$。我们有

$$
\begin{aligned}
&||norm(\varphi, \psi)|| \cap ||\psi|| = ||norm(\varphi_1 \wedge \varphi_2)|| \cap ||\psi|| \\
&= \overline{||align(\overline{\alpha_1}, X, \psi)|| \cup ||align(\overline{\alpha_2}, X, \psi)||} \cap ||\psi|| \\
&= \overline{||align(\overline{\alpha_1}, X, \psi)|| \cap ||\psi||} \cap \overline{||align(\overline{\alpha_2}, X, \psi)|| \cap ||\psi||} \cap ||\psi|| \\
&= \overline{||\overline{\alpha_1}||} \cap \overline{||\overline{\alpha_2}||} \cap ||\psi|| = ||\alpha_1|| \cap ||\alpha_2|| \cap ||\psi|| \\
&= ||\varphi_1|| \cap ||\varphi_2|| \cap ||\psi|| = ||\varphi|| \cap ||\psi||.
\end{aligned}
$$

由于这个子情况与子情况 (b) 类似，我们可以省略一些步骤。

(5) 考虑 φ 形式为 $(\exists x)\varphi_1$ 的情况。令 $\psi_1 = gen(\varphi_1)$ 且 $X = \mathrm{FV}(\psi_1) \setminus \{x\}$。我们有

$$
\begin{aligned}
&||\varphi|| \cap ||\psi|| = ||(\exists x)\varphi_1|| \cap ||\psi|| = \mathrm{C}_x(||\varphi_1||) \cap ||\psi|| \\
&= \mathrm{C}_x(||\varphi_1|| \cap ||\psi_1||) \cap \mathrm{C}_x(||\psi||) \cap ||\psi|| && (6.10) \\
&= \mathrm{C}_x(||\varphi_1|| \cap \mathrm{C}_X(||\psi_1||) \cap \mathrm{C}_x(||\psi||)) \cap ||\psi|| && (6.11) \\
&= \mathrm{C}_x(||\varphi_1|| \cap \mathrm{C}_X(||\psi_1||) \cap ||\psi||) \cap ||\psi|| && (6.12) \\
&= \mathrm{C}_x(||\varphi_1|| \cap ||(\exists X)\psi_1 \wedge \psi||) \cap ||\psi|| \\
&= \mathrm{C}_x(||norm(\varphi_1, (\exists X)\psi_1 \wedge \psi)|| \cap ||(\exists X)\psi_1 \wedge \psi||) \cap ||\psi|| && (6.13) \\
&= \mathrm{C}_x(||norm(\varphi_1, (\exists X)\psi_1 \wedge \psi)|| \cap \mathrm{C}_X(||\psi_1||) \cap ||\psi||) \cap ||\psi|| \\
&= \mathrm{C}_x(||norm(\varphi_1, (\exists X)\psi_1 \wedge \psi)|| \cap \mathrm{C}_X(||\psi_1||) \cap \mathrm{C}_x(||\psi||)) \cap ||\psi|| && (6.14) \\
&= \mathrm{C}_x(||norm(\varphi_1, (\exists X)\psi_1 \wedge \psi)|| \cap \mathrm{C}_X(||\psi_1||)) \cap \mathrm{C}_x(||\psi||) \cap ||\psi|| && (6.15) \\
&= \mathrm{C}_x(||norm(\varphi_1, (\exists X)\psi_1 \wedge \psi)|| \cap \mathrm{C}_X(||\psi_1||)) \cap ||\psi|| && (6.16) \\
&= \mathrm{C}_x(||norm(\varphi_1, (\exists X)\psi_1 \wedge \psi)||) \cap ||\psi|| && (6.17) \\
&= ||(\exists x)norm(\varphi_1, (\exists X)\psi_1 \wedge \psi)|| \cap ||\psi|| \\
&= ||norm((\exists x)\varphi_1, \psi)|| \cap ||\psi|| \\
&= ||norm(\varphi, \psi)|| \cap ||\psi||
\end{aligned}
$$

等式 (6.10) 根据引理 6.2 成立。柱代数的第三条公理用于等式 (6.10) 和 (6.16)。柱代数的第四条公理用于等式 (6.11) 和 (6.15)。等式 (6.17) 由引理 6.6 和引理 6.2 得出。等式 (6.13) 根据归纳假设成立。

由于 $\mathrm{FV}(\varphi) = \mathrm{FV}(\psi)$，$x \notin \mathrm{FV}(\psi)$，因此 $\mathrm{C}_x(||\psi||) = ||\psi||$。这一事实用于等式 (6.12) 和 (6.14)。 □

我 们通过介绍两个关于允许公式的主要结果来结束本研究。

定理 第 6.8 节。每个允许公式都与其规范化形式语义等价 .

证明。设 φ 是一个允许公式。由于 φ 是允许的，我们有 $\mathrm{FV}(\varphi) = \mathrm{FV}(gen(\varphi))$。由定理 6.2 可知，$||\varphi|| \subseteq ||gen(\varphi)||$；并且由引理 6.7，$||norm(\varphi, gen(\varphi))|| \cap ||gen(\varphi)|| = ||\varphi|| \cap ||gen(\varphi)|| = ||\varphi||$。

□

定理 6.9。 允许公式与域无关。

证明。 设 φ 是一个允许公式。则规范化 $norm(\varphi,\ gen(\varphi))$ 与 φ 语义等价（定理 6.8），且处于规范化形式。由引理 4.2，规范化 $norm(\varphi,\ gen(\varphi))$ 与关系表达式$expr(norm(\varphi,\ gen(\varphi)))$语义等价。由定理 4.5，该规范化是域无关的，因此 φ也与域无关。

□

References

[AHV95] Serge Abiteboul、Richard Hull 和 Victor Vianu。 *Foundations of Databases: The Logical Level*。Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc.，美国，第 1 版，1995年。[BV17] Radim Belohlavek 和 Vilem Vychodil。基于关系相似性的数据模型，第 1 部分：基础与查询系统。 *International Journal of General Systems*，46(7):671–751，2017年。doi:10.1080/03081079.2017.1357550。[Cod70] E. F. Codd。大型共享数据库的关系数据模型。 *Commun. ACM*，13(6):377–387，1970年6月。doi:10.1145/362384.362685。[HMT71] Leon Henkin、J. Donald Monk 和 Alfred Tarski。 *Cylindric Algebras*，第 64 卷。North-Holland，阿姆斯特丹，1971年。doi:10.2307/2273803。[HMT+81] Leon Henkin、James Donald Monk、Alfred Tarski、Hajnalka Andr

´ ´ ´ *Cylindric* eka 和 Istvan Nemeti。。

Set Algebras 883 1981

《数学讲义》系列第……号。Springer Berlin, Heidelberg，……。[IL82] Tomasz Imielinski 和 Witold Lipski。关系数据模型与柱代数。载于*Proceedings of the 1st ACM SIGACT-SIGMOD Symposium on Principles of Database Systems*，PODS '82，第 170 页，美国纽约，1982年。美国计算机协会。doi: 10.1145/588111.588139。[Las25] Jan Lastovicka。基于海廷值逻辑的域演算。 *Journal of Logic and Compu-*

tation 35 6 004, 01 2025 35 6 ，( ):exaf。

arXiv:https://academic.oup.com/logcom/article-pdf/ / / exaf004/61706910/exaf004.pdf，doi:10.1093/logcom/exaf004。[Top87] Rodney W. Topor。与域无关公式与数据库。 *Theoretical Computer Science*，52 3 281 10 1016 0304 3975 87 90113 7 ( ): –306，1987年。doi: . / - ( ) - 。[Top09] Rodney W. Topor。安全性与域无关性。载于 Ling Liu 和 M. Tamer ¨Ozsu 编， *Encyclopedia of Database Systems*，第 2463–2466 页。Springer US，2009年。doi:10.1007/ 978-0-387-39940-9_1255。[Tra50] Boris Trakhtenbrot。关于有限类上的可判定性问题不存在算法。 *Proceedings of the USSR Academy of Sciences*，70(4):569–572，1950年。[VGT91] Allen Van Gelder 和 Rodney W. Topor。关系演算的安全性与转换。 *ACM*

Trans. Database Syst. 16 2 235 278, 1991 10 1145 114325 103712 ，( ): – may。doi: . / . 。

本作品采用知识共享署名许可协议授权。如需查看该许可协议副本，请访问 https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/，或致函知识共享，地址：第二街171号，300室，旧金山，加利福尼亚州 94105，美国；或艾森纳赫街2号，10777 柏林，德国。