arXiv:2603.15113v1 [math.RT] 16 Mar 2026

经典群环面超尖点 L-包的扭曲端oscopic特征关系

Masao Oi

Abstract. 我们证明，在某些情形下，Kaletha 的环面超尖点 L-包满足扭曲端oscopic特征关系，其中包括赋有对合的广义线性群情形。因此，我们验证了 Kaletha 为准分裂辛群或特殊正交群的环面超尖点表示构造的局部朗兰兹对应与 Arthur 的构造一致。我们的策略是在扭曲情形中借鉴 Kaletha 对标准端oscopic特征关系的证明，并借助 Waldspurger 的框架“扭曲内窥并非那么扭曲”。

Contents

1. 引言 2 2. 关于 p 10的记号与假设 2.1. 记号 10 2.2. 关于 p 12 的假设3. Kaletha 的正则超尖局部朗兰兹对应 13 3.1. 正则超尖点表示 13 3.2. 构造局部朗兰兹对应的若干不变量 14 3.3. 正则超尖 L-参数的构造 17 3.4. 正则超尖 L-包的构造 19 4. 环面超尖点表示的扭曲特征标公式 21 4.1. 扭曲空间与扭曲特征 21 4.2. 扭曲极大环面 22 4.3. 海森堡商的结构 24 4.4. 环面超尖点表示的交织算子 27 4.5. 扭曲空间中的良好乘积展开 29 4.6. 扭曲特征标公式 30 5. 扭曲端oscopy框架 32 5.1. 本文讨论的端oscopic数据 32 5.2. 扭曲端oscopy中的范数对应 33 5.3. 传递因子 34 6. θ-稳定正则超尖 L-包的分析 34 6.1. 正则超尖 L-包与 L-参数的扭曲 34 6.2. θ-稳定 L-包的结构 36 6.3. 扭曲环面的嵌入 37 6.4. θ-稳定包中 θ-稳定成员的参数化 39

2026-03-17 03:39:46Z 注：本文的内容最初作为以下部分的一部分纳入 [Oi23] ，现已抽出。剩余部分 [Oi23] 现收录于 [Oi25]。1

6.5. 下降的正则超尖 L-包 40 7. Kaletha 下降引理的扭曲版本 42 7.1. Waldspurger 图表 42 7.2. 图表上的等价关系 43 7.3. Kaletha 下降引理 45 8. Waldspurger 关于扭曲端oscopy的下降定理 49 8.1. 非标准端oscopy 49 8.2. 扭曲端oscopy的分解 49 8.3. 传递因子的下降 50 8.4. 轨道积分的傅里叶变换的传递 51 9. 限制根的环面不变量 54 9.1. 根系 54 9.2. 分歧限制根的分析 55 9.3. 环面不变量的下降 56 10. 转移因子的若干计算 59 10.1. 第一因子 Δ_{I} 59 10.2. 第二因子 Δ_{II} 60 10.3. 第三因子 Δ_{III} 61 10.4. 第四因子 Δ_{IV} 64 10.5. 完整转移因子上的尾部缩放引理 65 11. 扭曲端oscopic特征关系 66 11.1. 扭曲端oscopic特征关系 66 11.2. 若干初步考虑 66 11.3. 谱转移因子的出现 74 12. GL_n考量 82 12.1. GL_n 的扭曲椭圆极大环面 82 12.2. GL_n 椭圆极大环面的根 83 12.3. 谱转移因子的计算 84 12.4. 一个推论 87 索引 90 参考文献 92

1. Introduction

局部域上约化群表示论的一个基本目标是建立局部朗兰兹对应。对于定义在局部域 F 上的连通约化群$\mathbf{G}$，局部朗兰兹对应是一个自然映射，它将 $\Pi(\mathbf{G})$——$G := \mathbf{G}(F)$ 的不可约可容许表示的同构类集合——映到 $\Phi(\mathbf{G})$—— L-参数的$\mathbf{G}$的等价类集合。这里，映射的每个纤维都预期是有限集；我们用 $\Pi_\phi^{\mathbf{G}}$ 表示在 $\phi \in \Phi(\mathbf{G})$ 处的纤维，并称其为一个 L-包。因此，我们可以将局部朗兰兹对应视为把 $\Pi(\mathbf{G})$划分为有限集合的一种自然方式，这些集合由L-参数标记：

$$\Pi(\mathbf{G}) = \bigsqcup_{\phi \in \Phi(\mathbf{G})} \Pi_\phi^{\mathbf{G}}.$$

虽然朗兰兹在[Lan89]时构造了局部朗兰兹对应，但当 F 为阿基米德域时，其一般存在性在 F 为非阿基米德域时仍属猜想。不过，截至目前已经取得了许多成果。下面我们只关注 F为 p-进域的情形，即零特征的非阿基米德局部域，并回顾其中一些成果。

首先，若干特定群的局部朗兰兹对应已得到完整确立。特别重要的例子包括：Harris–Taylor 和 Henniart 对 GL_n ([HT01, Hen00]) 的结果，Arthur 对准分裂特殊正交群或辛群的结果（[Art13]），以及 Mok 对准分裂酉群的结果（[Mok15]）。

另一方面，也可以尝试通过限制表示的类别，而非群的类别，来构造局部朗兰兹对应。这一方向的一个重要例子是 DeBacker–Reeder 的工作（[DR09]），该工作为任意非分歧群的零深度正则超尖点表示确立了局部朗兰兹对应。在 DeBacker–Reeder 的工作之后，Kaletha 研究了正深度超尖点表示的若干特例（[Kal13,Kal15]）。目前，Kaletha 本人已将所有这些构造统一推广到温和分歧连通约化群中一类范围相当广的超尖点表示，称为正则 (更一般地说，非奇异/半单) 超尖点表示（[Kal19b,Kal19c]）。

考虑到局部朗兰兹对应的这两种研究路径（即限制群类的“纵向”方向，以及限制表示类的“横向”方向），自然会提出这样的问题：在两种构造的定义域“交集”上，它们是否确实给出相同的对应？这个问题本身不仅很有趣，在技术上也十分重要。例如，上述针对特定群的构造与自守表示的整体分类理论具有良好的相容性。另一方面，Kaletha 的构造非常明确，因为它最终建立在环面的局部朗兰兹对应之上（注意，这与朗兰兹在阿基米德情形下的构造 [Lan89] 平行）。如果我们能证明这些不同的构造彼此一致，就能结合它们各自的优点。

基于这一动机，我们首先与 Tokimoto 合作研究了 GL_n 的情形。在 [OT21], 中，我们证明，对于 GL 的任意正则超尖点表示，Kaletha 的构造都精确实现了 Harris–Taylor 和 Henniart 建立的局部朗兰兹对应，只要$_n(F$（注意，现在 Tokimoto 已在 $p \neq 2$ Tok$_n$ 中将此结果推广到了 GL [的所有内形式）。23]

本文旨在建立一种方法，用于比较 Kaletha 的构造与其他构造在更一般的群上的情形。特别地，我们证明以下结果：

定理 1.1 (定理12.11)。 设 $\mathbf{H}$ 是定义在 F 上的拟分裂特殊正交群或辛群。假设 p 充分大。对于 H 的任意“环面的”超尖点表示，Arthur 和 Kaletha 的局部朗兹对应一致：$= \mathbf{H}(F)$。

我们简要解释一下什么是环面超尖点表示（详见第3.1 节）。以下设 $\mathbf{G}$ 是定义在F 上的温和分歧连通约化群。在 [Yu01], 中，Yu 建立了一种生成一大类超尖表示的显式方法，这些表示称为温和超尖表示

表示。Yu 构造将一个温和超尖表示与每个称为尖点 G-数据的元组 ($\vec{\mathrm{G}}$ $\vec{\vartheta}, \vec{r}$, x ρ_0) 关联起来。这里，我们只回顾一下，$\vec{\mathrm{G}}$ $=(\mathrm{G}^0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathrm{G}^d)$ 是 G 的一列温和 Levi 子群，而 ρ_0 是 G^0 的一个开紧模中心子群上的深度零尖点表示（因而可视为有限约化群的一个表示）。在 [Kal19b],中，通过运用 Deligne–Lusztig 理论 [DL76], ，Kaletha 引入了温和超尖表示的正则性概念，并发现正则超尖点表示可以由更为简单的数据（S ϑ）重新参数化，这些数据称为温和椭圆正则对，仅由 G 的一个包含于 G^0 中的温和椭圆极大环面 S，以及一个 ϑ 的特征 $S := \mathrm{S}(F)$组成，并满足某个正则性条件。基于这种重新参数化，他为每个正则超尖点表示赋予了一个 L-参数，并分析了所得 L-包的内部结构。环面超尖点表示是正则超尖点表示中的一个特殊类别；它们是由尖点 G-数据得到的温和超尖表示，其中其 $\vec{\mathrm{G}}$ 具有 $(\mathrm{S} \subsetneq \mathrm{G})$ 的形式。

为证明定理 1.1，我们验证 Kaletha 的环面超尖点 L-包满足扭曲端oscopic特征关系，这正是 Arthur 对应的刻画。因此，我们接下来回顾扭曲端oscopic的基本框架。设 H 是 Kottwitz–Shelstad 意义下 (G θ) 的一个端oscopic群，其中 θ 是 G 的一个 F- 有理、保持钉扎的自同构（见第 5 节）。特别地，H 配备了一个 L-嵌入 $\hat{\ }\xi$: ${}^L\mathrm{H} \hookrightarrow {}^L\mathrm{G}$，这使我们可以将 H 的任意 L-参数 $\phi_{\mathbf{H}}$ 视为 G 的一个 L-参数（记作 ϕ），方法是将 $\phi_{\mathbf{H}}$ 与 ξ复合。假设 G 和 H 的局部朗兰兹对应均已建立，因此我们可以分别将 $\phi_{\mathbf{H}}$ 和 ϕ关联到 L-包$\Pi^{\mathbf{H}}_{\phi_{\mathbf{H}}}$ 和 $\Pi^{\mathbf{G}}_{\phi}$。假设 $\phi_{\mathbf{H}}$ 和 ϕ 均为温和的。

$$\begin{array}{ccccc} \Pi(\mathbf{G}) \supset \Pi^{\mathbf{G}}_{\phi} & \overset{\text{LLC for } \mathbf{G}}{\rightsquigarrow} & & & {}^L\mathbf{G} \\ & & & \overset{\phi}{\nearrow} & \uparrow \hat{\xi} \\ \Pi(\mathbf{H}) \supset \Pi^{\mathbf{H}}_{\phi_{\mathbf{H}}} & \overset{\text{LLC for } \mathbf{H}}{\rightsquigarrow} & W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) & \xrightarrow[\phi_{\mathbf{H}}]{} & {}^L\mathbf{H} \end{array}$$

在这种情况下，预期以下结论成立：

预期 1.2 (扭曲端oscopic特征关系)。对于每个 $\pi \in \Pi^{\mathbf{G}}_{\phi}$，都存在一个常数 $\Delta^{\mathrm{spec}}_{\phi, \pi} \in \mathbb{C}$，使得对任意强正则半单 $\delta \in \mathbf{G}(F)$，以下恒等式成立：

$$\sum_{\pi \in \Pi^{\mathbf{G}}_{\phi}} \Delta^{\mathrm{spec}}_{\phi,\pi} \cdot \Phi_{\tilde{\pi}}(\delta) = \sum_{\gamma \in H/\mathrm{st}} \mathring{\Delta}(\gamma, \delta) \sum_{\pi_{\mathbf{H}} \in \Pi^{\mathbf{H}}_{\phi_{\mathbf{H}}}} \Phi_{\pi_{\mathbf{H}}}(\gamma). \tag{1}$$

这里，

- $\tilde{\mathbf{G}}$ 表示由 $\mathbf{G}$和 θ确定的扭曲空间，即半直积群 $\mathbf{G} \rtimes \langle\theta\rangle$ 中包含 $1 \rtimes \theta$ 的连通分支（见第 4.1节）；
- $\Phi_{\pi_{\mathbf{H}}}$ 是 $\pi_{\mathbf{H}} \in \Pi_{\mathbf{H}\phi_{\mathbf{H}}}$ 的归一化（Harish-Chandra）特征标，而 $\Phi_{\tilde{\pi}}$是 $\pi \in \Pi_{\mathbf{G}\phi}$ 的归一化扭特征标（见第 4.6 节），其仅在 π 为 θ-稳定时才有定义（因此，系数 $\Delta_{\mathrm{spec}\ \phi,\ \pi}$ 除非 π为 θ-稳定，否则为零）；
- 右侧的求和遍历 δ 在 H 意义下的扭曲端oscopy的范数的稳定共轭类（见第 5.2节）；

- $\mathring{\Delta}$ 右侧的是 Kottwitz–Shelstad 传递因子（见第 5.3节）。

我们注意到，根据扭曲特征的线性无关性，上述形式的一族常数 $\{\Delta^{\mathrm{spec}}_{\phi,\pi}\}_{\pi\in\Pi^{\mathbf{G}}_{\phi}}$ 若存在，则唯一。

在非扭曲情形（即 θ 是平凡的）下，Kaletha 证明了预期1.2确实适用于满足关于 L某些假设的环面超尖点 p ([Kal19b，定理 6.3。4]；更一般的非扭曲情形结果见 [FKS23，第 4 节。4]

关键在于，当 H 是拟分裂特殊正交群或辛群时，我们可以找到一个一般线性群 $\mathbf{G}=\mathrm{GL}_n$ ，以及一个对合 θ ，使得 H 是 $(\mathbf{G},\theta)$ 的端oscopic群。于是，预期恒等式 (1) 给出了 H 的每个 L-包 $\Pi^{\mathbf{H}}_{\phi_{\mathbf{H}}}$ 中各表示的特征之和，并将其表示为 $\mathrm{GL}_n(F)$ 上各表示的扭曲特征；根据特征的线性无关性，这些信息足以将 $\Pi^{\mathbf{H}}_{\phi_{\mathbf{H}}}$ 刻画为有限个表示组成的集合。Arthur 所做的是证明：对每个 $\phi_{\mathbf{H}}$，确实存在一个有限集合 $\Pi^{\mathbf{H}}_{\phi_{\mathbf{H}}}$ ，使其满足恒等式 (1)，其中 $\Pi^{\mathbf{G}}_{\phi}$由 GL_n 的局部朗兰兹对应确定。因此，既然我们已经知道 Kaletha 的构造与 Harris–Taylor 和 Henniart 的构造一致，只需验证 Kaletha 的 L-包满足扭曲端oscopic特征关系，即可得到 Kaletha 与 Arthur 的构造一致。

本文的主要结果如下：

定理 1.3 (定理12.9、11.22)。假设 p 足够大。*Kaletha* 的环面超尖点 L-L-包满足预期 *1.2* 在以下情形中成立：

(1) $\mathbf{G}$ $=\mathrm{GL}_n$ 或(2) $\mathbf{G}$ 是一般的， θ 是对合的，并且环面超尖点 L-包来自一个在有限扩张 E/F 上分裂、且具有奇数分歧指数的环面。

下面我们概述定理1.3 的证明。某种意义上，我们的策略相当简单：我们在考虑扭曲 θ的影响的同时，重现 Kaletha 对标准（非扭曲）端oscopic特征关系的证明。因此，我们先简要回顾 Kaletha 在非扭曲情形下的证明。

Kaletha 证明的出发点是 Adler–DeBacker–Spice 给出的温和超尖表示特征的显式公式（[AS09, DS18]）。在环面情形下，该公式如下。设 $\pi_{(\mathbf{S},\vartheta)}$ 是由温和椭圆正则对 $(\mathbf{S},\vartheta)$ 得到的 G 的环面超尖表示。设 $r\in\mathbb{R}_{>0}$ 是特征 ϑ 的深度， $X^*\in(\mathrm{Lie}\ \mathbf{S})^*(F)$ 是一个元素，代表 ϑ 在深度 r 子群 S_r 上的限制（详情见第 4.6 节）。设 $\delta\in G$是任意椭圆正则半单元素。根据 Adler–Spice[AS08], 的理论，我们可以取一个正规 r-近似 $\delta=\delta_{<r}\cdot\delta_{\geq r}$。粗略地说，这是将 δ 作一个良好的乘积式分解，分为“在 p 进赋值意义下比 r更浅”的部分和“在 p 进赋值意义下比 r更深或与之相等”的部分。其重要性质之一是，这两个部分 $\delta_{<r}$ 和 $\delta_{\geq r}$ 相互交换；更强地说，较深的部分 $\delta_{\geq r}$属于较浅部分的连通中心化子 $\mathbf{G}^{\delta_{<r}}:=\mathbf{Z}_{\mathbf{G}}(\delta_{<r})^\circ$ 。Adler–DeBacker–Spice 公式利用正规 r-近似表示为

如下（符号 ${}^g(-)$ 表示共轭 $g(-)g^{-1}$）：

$$\Phi_{\pi_{(\mathbf{S},\vartheta)}}(\delta)=\sum_{\substack{g\in S\backslash G/G_{\delta_{<r}}\\ {}^g\delta_{<r}\in S}}\varepsilon({}^g\delta_{<r})\cdot\vartheta({}^g\delta_{<r})\cdot\hat{\iota}^{\mathbf{G}_{\delta_{<r}}}_{g^{-1}X^*g}(\log(\delta_{\geq r})),\tag{2}$$

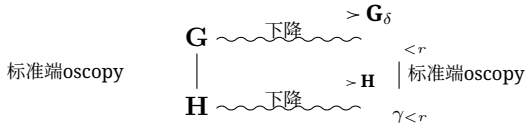
其中，$\varepsilon({}^g\delta_{<r})$ 是由 ${}^g\delta_{<r}$ 确定的某个单位根，而 $\hat{\iota}^{\mathbf{G}_{\delta_{<r}}}_{g^{-1}X^*g}(-)$ 表示相对于 $g^{-1}X^*g$ 在（李代数）$\mathbf{G}_{\delta_{<r}}$ 上取的轨道积分的归一化傅里叶变换。这里的重要观察是，$\hat{\iota}^{\mathbf{G}_{\delta_{<r}}}_{g^{-1}X^*g}(-)$，即表示的 Harish-Chandra特征在李代数中的类比，用于表示更深部分的贡献 $\delta_{\geq r}$。事实上，根据 Waldspurger 和 Ngˆo 的定理（[Wal06、Ngˆo10]；见第8.4节），我们可以比较任意群及其标准端oscopic群之间李代数轨道积分的傅里叶变换（这可以看作标准端oscopic特征关系在李代数中的类比）。Kaletha 策略的主要思想，是通过 Adler–DeBacker–Spice特征公式，利用 Waldspurger–Ngˆo 的李代数传递定理，将标准端oscopic特征关系归约为该定理。

现在设 $\mathbf{H}$ 是 $\mathbf{G}$ 的一个标准（非扭曲）端oscopic群，并假设 $\Pi^{\mathbf{H}}_{\phi_{\mathbf{H}}}$ 和 $\Pi^{\mathbf{G}}_{\phi}$ 均由环面超尖点表示（深度为 $r\in\mathbb{R}_{>0}$）组成。当 $\gamma\in H$ 是 $\delta\in G$ 的一个范数时，我们可以将一个正规 r-近似 $\delta=\delta_{<r}\cdot\delta_{\geq r}$ 转移到 $\gamma=\gamma_{<r}\cdot\gamma_{\geq r}$。因此，对 $\Pi^{\mathbf{G}}_{\phi}$ 和 $\Pi^{\mathbf{H}}_{\phi_H}$ 中的所有表示特征应用 Adler–DeBacker–Spice 公式，并相对于这些 r-近似，$\mathbf{G}$端和 $\mathbf{H}$端的（1）可改写如下：

$$\sum_{\pi_{(\mathbf{S},\vartheta)}\in\Pi^{\mathbf{G}}_{\phi}}\Delta^{\mathrm{spec}}_{\phi,\pi_{(\mathbf{S},\vartheta)}}\sum_{\substack{g\in S\backslash G/G_{\delta_{<r}}\\ {}^g\delta_{<r}\in S}}\varepsilon({}^g\delta_{<r})\cdot\vartheta({}^g\delta_{<r})\cdot\hat{\iota}^{\mathbf{G}_{\delta_{<r}}}_{g^{-1}X^*g}(\log(\delta_{\geq r})),\tag{3}$$

$$\sum_{\gamma\in H/\mathrm{st}}\mathring{\Delta}(\gamma,\delta)\sum_{\pi_{(\mathbf{S_H},\vartheta_{\mathbf{H}})}\in\Pi^{\mathbf{H}}_{\phi_{\mathbf{H}}}}\sum_{\substack{h\in S_{\mathbf{H}}\backslash H/H_{\gamma_{<r}}\\ {}^h\gamma_{<r}\in S_{\mathbf{H}}}}\varepsilon({}^h\gamma_{<r})\cdot\vartheta_{\mathbf{H}}({}^h\gamma_{<r})\cdot\hat{\iota}^{\mathbf{H}_{\gamma_{<r}}}_{h^{-1}X^*_{\mathbf{H}}h}(\log(\gamma_{\geq r})).\tag{4}$$

请注意，李代数轨道积分并非取自 $\mathbf{G}$和 $\mathbf{H}$，而是取自“下降”后的群 $\mathbf{G}^{\delta_{<r}}$ 和 $\mathbf{H}^{\gamma_{<r}}$。这里至关重要的因素是*Langlands–Shelstad* 所提出的标准端*oscopy*下降理论 [LS90]，该理论保证群 $\mathbf{H}^{\gamma_{<r}}$ 仍具有作为 $\mathbf{G}^{\delta_{<r}}$的标准端oscopic群的结构。此外，配对（$\mathbf{G}$，$\mathbf{H}$）的传递因子与下降后配对（$\mathbf{G}^{\delta_{<r}}$，$\mathbf{H}^{\gamma_{<r}}$）的传递因子相关。至此，利用李代数转移的基本设置便已完成。



然而，仍有几个微妙的问题尚待解决。首先，在考虑通过李代数转移来比较（3）和（4）的各项之前，我们必须考察如何比较这两个求和的索引集。另一个相关任务是改写（3）和（4）两边，使轨道积分的傅里叶变换按稳定共轭类中的有理共轭类求和（在 $\mathbf{G}^{\delta_{<r}}$ 或 $\mathbf{H}^{\gamma_{<r}}$中），从而可以应用李代数转移。

Kaletha 通过一种巧妙的重新排列求和的技巧解决了这些问题。根据构造， $\Pi_{\phi}^{\mathbf{G}}$ 中的元素以 S 到 G 的可容许嵌入的稳定共轭类中的有理共轭类为标记（见定义 3.9）。(3) 的第二个索引集可以看作是一个集合，用以衡量 G 中的有理共轭与 G $^{\delta_{<r}}$ 中的有理共轭之间的差异。因此，(3) 中的双重求和合并为一个单重求和，其求和范围是可容许嵌入的稳定 G-共轭类中的 $G_{\delta_{<r}}$-共轭类。若再次根据稳定 G$^{\delta_{<r}}$-共轭对该求和进行划分，便可得到所需索引集上的求和，即稳定 G$^{\delta_{<r}}$-共轭类中的 $G_{\delta_{<r}}$-共轭类。同样的论证也可应用于 H 侧的 (4)。然后，利用在 [Kal15 第 5 节 4], 中建立的“下降引理”，我们可以将稳定 G$^{\delta_{<r}}$-共轭类中的求和与稳定 H-共轭类中的 H$^{\gamma_{<r}}$-共轭类求和联系起来。



其次，我们还必须关联式（ε）和（3）中的求和项里的单位根“4”。这些因子已在 [AS09、DS18]中明确计算；它们体现了根系 Φ（$\mathbf{G}$，$\mathbf{S}$）的对称性。根系是一个有限集，并带有伽罗瓦作用（通常极其非平凡）。Kaletha 首先指出，这部分可以重新诠释为若干具有更鲜明“端oscopic”性质的不变量，例如第二传递因子 Δ_{II} （[Kal19b，推论 4.8。2]）。随后，他通过明确计算传递因子 $\mathring{\Delta}$（γ， δ），并利用关于算术不变量的各种非平凡结果，例如局部根数和韦伊常数，最终证明所有这些微妙的量都完美地契合在一起。

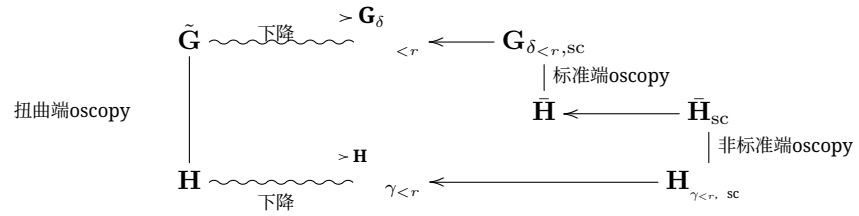
现在，我们转向扭曲情形。下文中，我们令 θ 为 F-有理的非平凡对合，它作用于$\mathbf{G}$，并令$\mathbf{H}$为（$\mathbf{G}$ θ）的一个端oscopic群。我们的首要任务是建立 Adler–DeBacker–Spice 公式的扭曲版本。为此，我们首先必须研究正规 r-逼近这一概念的扭曲版本，因为 Adler–DeBacker–Spice 公式以此为基础。我们在先前的工作 [Oi25]中研究了这些问题。更确切地说，我们首先在扭曲空间的情形下建立了“正规 r-逼近”的定义与构造，随后又为环面超尖点表示的扭曲特征建立了一个显式公式。该公式与 Adler–DeBacker–Spice 公式完全平行，如下所示（参见 [Oi25，定理 7，3] 以及定理4.12）：

$$\Phi_{\tilde{\pi}_{(\mathbf{S},\vartheta)}}(\delta) = \sum_{\substack{g\in S\backslash G/G_{\delta_{<r}} \\ {}^{g}\delta_{<r}\in\tilde{S}}} \tilde{\varepsilon}({}^{g}\delta_{<r})\cdot\tilde{\vartheta}({}^{g}\delta_{<r})\cdot\hat{\iota}^{\mathbf{G}_{\delta_{<r}}}_{g^{-1}X^{*}g}(\log(\delta_{\geq r})). \tag{5}$$

这里，我们在符号~上加上“”以表示这些量是在这一扭曲情形下确定的。（尽管我们将上述公式（5）写成了与（2）平行的形式，但 $\tilde{\varepsilon}$ 的实际表达式比非扭曲情形复杂得多；详情请参见命题 4.13 。）

通过观察公式（5），我们注意到，更深层部分的贡献$\delta_{\geq r}$ 与非扭曲情形一样，是通过相对于下降群$\mathbf{G}^{\delta_{<r}}$ 的李代数轨道积分的傅里叶变换来表示的。因此，

人们或许会预期，同样的策略在这种扭曲情形下也能奏效。遗憾的是，在扭曲情形下，$\mathbf{H}^{\gamma<r}$ 并不总是具有作为$\mathbf{G}^{\delta<r}$的端oscopic群的结构。尽管如此，仍可通过引入标准端oscopy概念的另一种变体——$\mathbf{H}^{\gamma<r}$与$\mathbf{G}^{\delta<r}$ 之间建立联系，这种变体称为非标准端*oscopy*。更确切地说，存在一个群$\mathbf{H}$ ，使得$\mathbf{H}$ 是$\bar{\mathbf{G}}^{\delta<r}$ 的导出子群的单连通覆盖的标准端oscopic群，并且$\mathbf{H}$ 与$\mathbf{H}^{\gamma<r}$ 的导出子群的单连通覆盖构成一个非标准端oscopic对。此外，对于非标准端oscopic对，轨道积分傅里叶变换的李代数传递也同样适用。这就是Waldspurger所建立的框架“扭曲内窥并非那么扭曲”（[Wal08]）。



现在我们有权尝试仿照 Kaletha 的证明。下面讨论如何重新排列扭曲端oscopic特征关系中各求和项索引集的论证。首先的困难在于，只有 θ-稳定的 $\Pi_\phi^{\mathbf{G}}$ 中的元素才会对扭曲端 oscopic 特征关系作出贡献。因此，我们必须用可容许嵌入来明确 θ-稳定性条件，而这些嵌入为 $\Pi_\phi^{\mathbf{G}}$ 中的元素编目。我们通过考察扭曲极大环面的概念来处理这一问题。第二个困难是，比较索引集所必需的 Kaletha 下降引理需要作重大修改。非扭曲情形下下降引理的思路是利用可容许同构；它们是 G 的极大环面与 H 的极大环面之间的 F-有理同构。给定一个从极大环面 $\mathrm{S}_{\mathbf{H}}$ 到 H 的 F-有理可容许嵌入，将其与 $\mathrm{S}_{\mathbf{H}}$ 和 G 中某个极大环面（记作 S）之间的可容许同构复合，便可得到一个从 S 到 G 的 F-有理可容许嵌入。然而，这种构造在扭曲情形下不再适用，因为扭曲端oscopy中的可容许同构，是 H 的一个 F-有理极大环面与 G 的一个极大环面的余不变元（相对于“扭曲”）之间的 F-有理同构。为解决这一问题，我们采用 Waldspurger 引入的图表概念（见定义 7.1）。图表会诱导出可容许同构，同时也包含更多信息。因此，可以将其视为可容许同构的“刚化”。以图表代替可容许同构，我们便能在扭曲情形下重现 Kaletha 下降引理。

接下来，我们讨论 $\mathbf{G}$ 一侧出现的单位根与 $\mathbf{H}$ 一侧出现的单位根之间的比较。我们的基本策略是运用与非扭曲情形类似的技巧，剖析各种算术不变量或根论不变量。然而，不知为何，我们的计算得到了一个非常复杂的量，即 $\mathbf{G}$ 一侧某个求和项与 $\mathbf{H}$ 一侧相应求和项的比值（见（29）以及（35））。我们没有尝试更明确地表示这个比值，而是直接将端oscopic特征关系中的系数“$\Delta^{\mathrm{spec}}_{\phi\,\pi}$,”定义为这个比值。这样一来，端oscopic特征关系几乎就成了恒等式。相反，$\Delta^{\mathrm{spec}}_{\phi\,\pi}$,的良定义性则变得相当不平凡；先验地说，$\Delta^{\mathrm{spec}}_{\phi\,\pi}$,在很大程度上取决于椭圆正则

˜半单元 $\delta \in G$ 在开头选取的。因此，我们接下来要证明，$\Delta^{\mathrm{spec}}_{\phi\,\pi}$ 实际上与 δ 的选取无关。通过考察 $\Delta^{\mathrm{spec}}_{\phi\,\pi}$ ，中涉及的各个因子，我们发现，只需验证量（36）与 δ 的选取无关即可；它比（29）简单得多。事实上，（29）中出现的每个因子都与限制根系中包含的分歧对称根有关（按 Kottwitz–Shelstad 的意义；见第 4.2 节）；这里的限制根系属于与一个 θ-稳定环面超尖点表示 π 相联系的 G 的极大环面 S。因此，如果限制根系不含任何分歧对称根，那么（36）就是平凡的。这正是我们得到定理 1.3（2）的方式。我们最终验证的是，即使 $\mathrm{G} = \mathrm{GL}_n$，（36）也仍然平凡；这是通过明确分类 GL_n 的（限制）根系上可能出现的伽罗瓦作用实现的。

最后，我们以几点总结性评论结束本引言。我们认为，本文结果有可能沿多个方向推广。定理 **1.3** 中对 **或** 作出的人为假设，仅源于证明的最后一部分，即关于$\Delta^{\mathrm{spec}}_{\phi\,\pi}$ 的良定义性。或许可以根据扭曲端oscopy的分类，通过逐案计算一般地处理这一部分；参见 [Wal08，第14章–18]。我们预计，也可以将 Adler–DeBacker–Spice 特征公式替换为 DeBacker–Reeder 的公式，从而建立本文结果的零深度版本 [DR09]。将本文结果推广到一般正则（甚至非奇异）超尖点表示的情形，是一个自然的问题，但这可能需要对 Spice 最近的工作进行扭曲 [Spi18，Spi21],这些工作颇为深入。

最后，我们还想强调，我们的论证也受到 Mezo 对实约化群离散系列 L-包的扭曲端oscopic特征关系的证明的启发（参见 [Mez13]）。我们认为，我们的常数 $\Delta^{\mathrm{spec}}_{\phi\,\pi}$,无非就是所谓的 p-进版本的谱转移因子；在阿基米德情形下，参见第1章以及 [Mez13]中的 (115)–(117)。

本文结构。第 2 节列出基本记号。第 3 节回顾 Kaletha 关于正则超尖点表示的局部朗兰兹对应的构造。第 4 节回顾我们先前关于环面超尖点表示的扭曲特征标公式的结果[Oi25] 。第 5 节回顾扭曲端oscopy框架。第 6 节研究一个 θ-稳定的正则超尖点 L-包的结构。第 7 节考察图表的概念，并建立 Kaletha 的下降引理的扭曲版本。第 8 节简要回顾 Waldspurger框架。第 9 节和第 10 节证明计算谱转移因子所需的一些技术性引理。第 11 节比较端oscopic特征关系的 G侧和 H 侧。尤其是，我们引入谱转移因子。第 12 节证明谱转移因子在 GL_n情形下是良定义的，由此推出扭曲 GL_n的环面超尖点 L-包满足扭曲端oscopic特征关系。

致谢。本项目始于2018年冬季，当时我作为文部科学省卓越研究生院计划的一部分，在密歇根大学访问 Tasho Kaletha。此后，他一直热心解答我的许多问题，并给予了大量宝贵的建议和鼓励。Atsushi Ichino 和 Yoichi Mieda 花了很多时间与我讨论本项目。我谨向他们三位表达由衷的

感谢。我还要感谢 Jeffrey Adler、Alexander Bertoloni Meli、Charlotte Chan、Guy Henniart、Tamotsu Ikeda、Wen-Wei Li、Sug Woo Shin、Loren Spice、Kazuki Tokimoto、Sandeep Varma 和 Alex Youcis，他们就本文内容与我进行了非常有益的讨论。

本研究得到了文部科学省顶尖研究生院计划、日本学术振兴会特别研究员制度以及科研费项目编号 17J05451、19J00846、20K14287的支持。本研究还得到了台湾教育部玉山青年学者计划的支持。谨感谢京都大学白眉中心在2019–2024年间为我提供了优良的研究环境。

2. Notation and assumptions on p

这里概述我们关于 p的基本记号和假设。（另请参见本文末尾的符号表。）

2.1. **记号**。

2.1.1. p-进域。设 p 为素数。固定一个 p-进域 F，即 F 是 $\mathbb{Q}_p$的有限扩张。固定 $\overline{F}$ 的一个代数闭包 F；考察 F的代数扩张时，我们始终在F 内进行。对于 F的任意有限扩张 E，分别用 $\mathcal{O}_E$、 $\mathfrak{p}_E$、 k_E和 Γ_E 表示 E的整数环、 $\mathcal{O}_E$的极大理想、剩余域以及 E的绝对伽罗瓦群 $\mathrm{Gal}(\overline{F}/E)$。当$E = F$时，我们省略这些符号中的下标 F。对于F的任意有限扩张 E，分别用 W_E、 I_E和 P_E 表示 E的韦伊群、其惯性子群和其野惯性子群。对于任意 $r \in \mathbb{R}_{>0}$，令 I_F^r 表示 I_F的第 r个上分歧滤过。固定 F上的一个赋值 val_F，使得 $\mathrm{val}_F(F^\times) = \mathbb{Z}$。将其延拓至$\overline{F}$，并仍记为 val_F。定义F上的绝对值 $|\cdot|_F$为 $|\cdot|_F := q^{-\mathrm{val}_F(\cdot)}$，其中 q是剩余域 k_F的基数。

我们固定一个层级为 1 的加性特征 $\psi_F\colon F \to \mathbb{C}^\times$，即 $\psi_F|_{\mathfrak{p}} \equiv \mathbb{1}$ 和 $\psi_F|_{\mathcal{O}} \neq \mathbb{1}$。

2.1.2. 代数簇与代数群。本文中，代数簇用粗体字母表示；当其定义在 F 上时，其 F 值点集用斜体字母表示。例如，若$\mathbf{X}$ 是定义在 F 上的代数簇，则 $X := \mathbf{X}(F)$。

对于任意代数群$\mathbf{G}$，我们分别用 $X^*(\mathbf{G})$ 和 $X_*(\mathbf{G})$ 表示$\mathbf{G}$的特征群和余特征群。令$\mathbf{Z}_\mathbf{G}$ 表示$\mathbf{G}$的中心。当$\mathbf{G}$ 定义在 F 上时，$\mathbf{Z}_\mathbf{G}$ 也定义在其上，其 F 值点集记为 $Z_\mathbf{G}$。

对于任意配备自同构 $\theta_\mathbf{S}$ 的环面$\mathbf{S}$，我们分别用$\mathbf{S}^{\theta_\mathbf{S}}$ 和$\mathbf{S}_{\theta_\mathbf{S}}$ 表示$\mathbf{S}$ 关于 $\theta_\mathbf{S}$ 的不变部分和余不变元。

2.1.3. 中心化子与正规化子。设$\mathbf{G}$是一个代数群，$\mathbf{X}$是一个代数簇，并赋有$\mathbf{G}$的左作用和右作用，记作$\mathbf{G} \times \mathbf{X} \times \mathbf{G} \to \mathbf{X}$: $(g_1, x, g_2) \mapsto g_1 \cdot x \cdot g_2$。于是定义$\mathbf{G}$ 在$\mathbf{X}$ 上的共轭作用为$\mathbf{G} \times \mathbf{X} \to \mathbf{X}$: $(g, x) \mapsto g \cdot x \cdot g^{-1}$。引入以下记号：

- 对于 $g \in \mathbf{G}$，令 $[g]$ 表示共轭自同构$\mathbf{X} \to \mathbf{X}$: $x \mapsto g \cdot x \cdot g^{-1}$。我们也常记作 ${}^g x := [g](x) = g \cdot x \cdot g^{-1}$。
- 对于 $x \in \mathbf{X}$，令$\mathbf{G}^x$ 表示 x 在$\mathbf{G}$ 中相对于共轭作用的完全稳定子，即$\mathbf{G}^x := \{g \in \mathbf{G} \mid [g](x) = x\}$。
- 对于 $x \in \mathbf{X}$，令 $\mathbf{G}_x$ 表示关于共轭作用，x 在 $\mathbf{G}$ 中的连通稳定子，即 $\mathbf{G}_x := \mathbf{G}^{x,\circ}$。

注意，当 $\mathbf{G}$ 和 $\mathbf{X}$ 是 F-有理的时，如果 $g \in \mathbf{G}(F)$，$[g]$ 也是 F-有理的。类似地，如果 $x \in \mathbf{X}(F)$，$\mathbf{G}^x$ 和 $\mathbf{G}_x$ 是 F-有理的。

对于任意子集$\mathbf{H} \subset \mathbf{G}$ 和 $Y \subset \mathbf{X}$，记

- $\mathbf{Z}_{\mathbf{H}}(Y) := \{g \in \mathbf{H} \mid [g](y) = y，\text{其中 } y \in Y\}$ 和
- <style 恒等映射='2'>$\mathbf{N}_{\mathbf{H}}(Y) := \{g \in \mathbf{H} \mid [g](Y) \subset Y\}$.

当 Y 是单元素集 $\{y\}$ 时，我们简记$\mathbf{Z}_{\mathbf{H}}(y) := \mathbf{Z}_{\mathbf{H}}(Y) = \mathbf{N}_{\mathbf{H}}(Y)$。若$\mathbf{G}$和$\mathbf{X}$ 定义在 F 上，且 Y 是$\mathbf{X}(F)$ 的子集，则$\mathbf{Z}_{\mathbf{G}}(Y)$ 和$\mathbf{N}_{\mathbf{G}}(Y)$ 定义在 F 上，其 F 值点集分别记为 $Z_{\mathbf{G}}(Y)$ 和$N_{\mathbf{G}}(Y)$。

2.1.4. 约化群。对于任意连通约化群 G 及其极大环面 S，分别用 Φ(G, S) 和 $\Phi^\vee$(G, S) 表示 S 在 G 中的根集和余根集。注意，当 G 和 S 都定义在 F 上时，集合 Φ(G, S) 和 $\Phi^\vee$(G, S) 带有 Γ 的作用。令 $\Omega_{\mathbf{G}}$(S) 表示 S 在 G 中的魏尔群，即 $\Omega_{\mathbf{G}}$(S) := $\mathbf{N}_{\mathbf{G}}$(S)/S。当上下文已明确极大环面 S 的选择时（例如，S 是属于 G 的某个分裂的极大环面），有时也宽泛地将 $\Omega_{\mathbf{G}}$ 写作 $\Omega_{\mathbf{G}}$(S)。

我们将 $\mathfrak{g}$ 记作$\mathbf{G}$的李代数。当$\mathbf{G}$ 定义在 F上时，$\mathfrak{g}$ 是 F上的代数簇，因此按照上文所述的约定，我们记作 $\mathfrak{g} := \mathfrak{g}(F)$。

2.1.5. 布鲁哈–蒂茨理论。设 G 是定义在 F上的连通约化群。我们沿用 [AS08、AS09、DS18]中使用的布鲁哈–蒂茨理论记号。（有关详细内容，参见例如 [AS08，第 3 节。1]）特别地，$\mathcal{B}$(G F)（分别为 $\mathcal{B}^{\mathrm{red}}$(G F)）表示 G 在 F上的扩展（分别为约化）布鲁哈–蒂茨建筑。对于 x $\in \mathcal{B}$(G F)（或 x $\in \mathcal{B}^{\mathrm{red}}$(G F)），我们令 $G_{\mathbf{x}}$表示 x 在 G中的稳定子。

˜我们将 $\mathbb{R}$定义为集合 $\mathbb{R} \sqcup \{r+ \mid r \in \mathbb{R}\} \sqcup \{\infty\}$，并赋予其自然序。于是，对于任意 $r \in \tilde{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ 以及 x $\in \mathcal{B}^{\mathrm{red}}$(G F)，我们可以考虑关于点 x 的 r-次莫伊–普拉萨德滤过˜$G_{\mathbf{x}、\,r}$。对于满足 $r < s$的任意 r、$s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$，我们将˜$G_{\mathbf{x}、\,r:s}$ 记作商 $G_{\mathbf{x}、\,r}/G_{\mathbf{x}、\,s}$。对于 $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$，我们置 $G_r := \bigcup_{\mathbf{x} \in \mathcal{B}^{\mathrm{red}}(\mathbf{G}\ F)} G_{\mathbf{x}、\,r}$。类似地，我们在李代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(F)$上有莫伊–普拉萨德滤过 $\{\mathfrak{g}_{\mathbf{x},r}\}_r$，其商为 $\mathfrak{g}_{\mathbf{x}、\,r:s}$，并有并集 $\mathfrak{g}_{r\circ}$ 我们还在对偶李代数 $\mathfrak{g}^* := \mathrm{Hom}_F(\mathfrak{g}, F)$上定义莫伊–普拉萨德滤过如下：

$$\mathfrak{g}^*_{\mathbf{x},r} := \{Y^* \in \mathfrak{g}^* \mid \langle \mathfrak{g}_{\mathbf{x},(-r)+}, Y^* \rangle \subset \mathfrak{p}\}$$

对于任意 $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ 和$\mathbf{x} \in \mathcal{B}^{\mathrm{red}}(\mathbf{G}\ F)$（$\mathfrak{g}^*_{\mathbf{x},\,r+}$定义为$\bigcup_{s>r} \mathfrak{g}^*_{\mathbf{x},\,s}$）。

设 S 是 G 的一个温和分歧的（即，F有理且在 F的某个温和分歧扩张上分裂的）极大环面。通过固定一个 S-等变嵌入，将 $\mathcal{B}$(S F) 嵌入 $\mathcal{B}$(G F)，我们可以将 $\mathcal{B}$(S F) 视为 $\mathcal{B}$(G F) 的子集。于是，对于任意点 x $\in \mathcal{B}$(G F)，“x 属于 $\mathcal{B}$(S F) 的像”这一性质不依赖于此类嵌入的选择（详见 [FKS23 的第二段，3] 节）。对于属于 $\mathcal{B}$(S F) 的任意点 x $\in \mathcal{B}$(G F)，有 $S_{\mathrm{b}} \subset G_{\mathbf{x}}$，其中 S_{b} 表示 S的极大有界子群。当 S 在 G 中是椭圆的时，$\mathcal{B}$(S F) 在 $\mathcal{B}^{\mathrm{red}}$(G F) 中的像只包含一个点。如果 x $\in \mathcal{B}$(G F) 属于 $\mathcal{B}$(S F) 的像，我们就称“x 与 S 相关”。

我们还固定一族拟指数映射 $\mathfrak{g}_{\mathbf{x},\,r} \to G_{\mathbf{x},\,r}$用于 $x \in \mathcal{B}(\mathbf{G}\ F)$˜和 $r \in \mathbb{R}_{>0}$，并简称其为“exp”（参见 [AS09，附录 A]；另参见 [Hak18，第 3 节。4]）。我们用“log”表示 exp 的逆映射。根据 [AS09，附录 A]，当 p 不整除 $\mathbf{G}$的绝对魏尔群的阶时，保证存在模拟指数映射。

2.1.6. 带伽罗瓦作用的有限集。令 $\Sigma := \Gamma \times \{\pm 1\}$。设 Φ是一个带有 Σ作用的有限集，例如，连通约化群中一个 F-有理极大环面的根集（在此情形下，-1 通过 $\alpha \mapsto -\alpha$ 作用于 Φ ）。按照 [AS09], ，令 $\Phi := \Phi/\Gamma$ 且 $\Phi := \Phi/\Sigma$。此外，只要不会引起混淆，我们就简记 $\dot{\alpha} := \Gamma\alpha$ 和 $\ddot{\alpha} := \Sigma\alpha$。

对于每个 $\alpha \in \Phi$，我们将 Γ_α（分别将 $\Gamma_{\pm\alpha}$）定义为 Γ 中 α（分别为 $\{\pm\alpha\}$）的稳定子。令 F_α（分别为 $F_{\pm\alpha}$）为 F 中由 Γ_α（分别由 $\Gamma_{\pm\alpha}$）固定的子域。因此，我们有 $\Gamma_\alpha = \Gamma_{F_\alpha}$ 和 $\Gamma_{\pm\alpha} = \Gamma_{F_{\pm\alpha}}$:

$$F \subset F_{\pm\alpha} \subset F_\alpha \quad \longleftrightarrow \quad \Gamma \supset \Gamma_{\pm\alpha} \supset \Gamma_\alpha.$$

我们将 F_α 的剩余域 k_{F_α}（分别将 $F_{\pm\alpha}$ 的剩余域 $k_{F_{\pm\alpha}}$ ）简记为 k_α（分别为 $k_{\pm\alpha}$）。

若 $F_\alpha = F_{\pm\alpha}$ ，则称 $\alpha \in \Phi$ 为非对称；若 $F_\alpha \supsetneq F_{\pm\alpha}$，则称 α 为对称的。我们指出，当且仅当 α 的 Γ-轨道包含 $-\alpha$ 时， α 才是对称的。注意到若 α 对称，则扩张 $F_\alpha/F_{\pm\alpha}$ 必为二次扩张，因此，若 $F_\alpha/F_{\pm\alpha}$ 非分歧（分别为分歧的），则称 α 为（对称）非分歧（分别为 分歧的）。我们用 Φ_{asym}、Φ_{ur}、Φ_{ram} 和 Φ_{sym} 分别表示 Φ 中非对称元素、对称非分歧元素、对称分歧元素和对称元素的集合。

对于 $\alpha \in \Phi_{\mathrm{sym}}$，我们令 $\kappa_\alpha\colon\ F_{\pm\alpha}^\times \to \mathbb{C}^\times$ 表示对应于二次扩张 $F_\alpha/F_{\pm\alpha}$ 的 $F_{\pm\alpha}^\times$二次特征，该对应关系由局部类域论给出。

注意，若 α 是对称的，则 $\dot{\alpha} = \ddot{\alpha}$。这意味着集合 $\dot{\Phi}_{\mathrm{sym}}$ 和 $\ddot{\Phi}_{\mathrm{sym}}$可以自然地视为相同（当然， Φ_{ur} 或 Φ_{ram}也同样如此）。

2.1.7. 若干算术不变量。 对于任意有限扩张 $E_\pm / F$ 及其二次扩张 E，我们令 $\lambda_{E/E_\pm} := \lambda_{E/E_\pm}(\psi_F \circ \mathrm{Tr}^{E_\pm/F}$表示相对于非平凡加性特征 $\psi_F \circ \mathrm{Tr}^{E_\pm/F}$ 的朗兰兹常数 $E_\pm$（参见，例如， [BH06，30。4]）。当二次扩张 $E/E_\pm$ 如第 $F_\alpha/F_{\pm\alpha}$ 节所述由 2.1.6 给出时，我们简记为 λ_α ，表示 $\lambda_{F_\alpha/F_{\pm\alpha}}$。

本文中，我们常考虑与一个 F-有理环面 S 相关联的伽罗瓦表示 $X^*(S)_{\mathbb{C}}$ 的 ε-因子的根数 $\varepsilon(\frac{1}{2}, X^*(S)_{\mathbb{C}}, \psi_F)$（关于 ε-因子的定义，见 [BH06, 第 30]节，或 [Tat79, 第 3.6] 节）。简记为 $\varepsilon(S) := \varepsilon(\frac{1}{2}, X^*(S)_{\mathbb{C}}, \psi_F)$。

2.1.8. 有限域。 设 k 是奇特征 p 的有限域。那么乘法群 $k^\times$ 是偶数阶循环群，因此存在唯一的非平凡二次特征 $k^\times \to \{\pm 1\}$。我们将此特征记为 $\mathrm{sgn}_{k^\times}(-)$。

接下来，我们进一步假设 $[k : \mathbb{F}_p]$ 是偶数。于是，存在唯一一个满足 $[k : k_\pm] = 2$的子扩张 $k_\pm$。令 k^1表示范数映射 $\mathrm{Nr}^{k/k_\pm}\colon\ k^\times \to k_\pm^\times$的核。注意到 k^1 也是偶数阶循环群，我们将其唯一的非平凡二次特征记为 $\mathrm{sgn}_{k^1}(-)$。

2.2. **关于 p 的假设。** 在本文中，我们始终假设 $\mathbf{G}$ 是定义在 F上的温和分歧连通约化群。此外，我们假设 p 为奇数，且不整除 $\mathbf{G}$的绝对魏尔群的阶。从第 8节起直到本文末尾，我们还假设 p 大于或等于 $(2 + e_F)\, n$，其中 n 是 $\mathbf{G}$ 的忠实表示的维数与 e_F 的分歧次数中的较小者。 $F/\mathbb{Q}_p$。

3. Kaletha's regular supercuspidal local Langlands correspondence

3.1. **正则超尖点表示。** 在 [Yu01], 中，Yu 建立了一套通用方法，以显式方式构造温和分歧 p-进约化群的超尖表示。Yu 构造的输入数据称为一个 尖点 **G**-数据；因此，Yu 构造给出了从尖点 **G**-数据集合到 G的超尖表示同构类集合的一个映射。Yu 构造的像中的超尖表示称为 温和超尖表示。已知 Yu 构造给出了大量超尖表示；事实上，在我们关于 p 的假设下，任意超尖表示都是温和的（Fintzen 的穷尽结果 [Fin21b], 改进了 Kim 的 [Kim07]）。由于本文只处理"正则超尖点表示"这一类特殊的温和超尖表示，而这类表示可以通过如下不同的输入数据重新参数化，因此我们在此不回顾尖点 **G**-数据的定义。

Hakim–Murnaghan 研究了 Yu 构造的"纤维" [HM08]。他们引入了一种称为 **G**-等价的等价关系，并证明两个尖点**G**-数据产生同构的超尖点表示，当且仅当这两个数据**G**-等价。因此，Yu 构造给出一个双射

$$\{\text{cusp. } \mathbf{G}\text{-data}\}/\mathbf{G}\text{-eq.} \xrightarrow[\text{Yu's construction}]{1:1} \{\text{tame s.c. rep'ns of } G\}/\sim.$$

在 [Kal19b], 中，Kaletha 针对尖点G-数据引入了（额外）正则性的概念（参见 [Kal19b，第 3]节）。由（额外）正则尖点**G**-数据得到的温和超尖点表示称为（额外）正则超尖点表示。根据 Kaletha 的重新参数化结果 [Kal19b，命题 3.7，**G**-等价的（额外）正则尖点**G**-数据的等价类与 G共轭类一一对应，这些共轭类由称为温和椭圆（额外）正则对的简单得多的数据给出（参见 [Kal19b，定义 3.7]）。我们将$\pi_{(\mathbf{S},\vartheta)}$ 记作与温和椭圆（额外）正则对（$\mathbf{S}$ ϑ）相对应的（额外）正则超尖点表示。

$$\begin{array}{ccc}
\{\text{尖点。}\mathbf{G}\text{-数据}\}/\mathbf{G}\text{-等价。} & \xrightarrow{1:1} & \{\ G\}/\sim \text{的温和超尖表示} \\
\cup & & \cup \\
\{\text{（例）正则尖点 }\mathbf{G}\text{-数据}\}/\mathbf{G}\text{-等价。} & \xrightarrow{1:1} & \{\text{（例）}\ G\}/\sim \text{的正则超尖表示} \\
\{\text{温和椭圆（例）正则对}\}/G\text{-共轭。} & \xrightarrow{(\mathbf{S}\ \vartheta)\mapsto\pi_{(\mathbf{S},\vartheta)}} & \\
\end{array}$$

定义 3.1. 称一个温和椭圆正则对 $(\mathbf{S}\ \vartheta)$ 为一个环面对，如果 ϑ在 $r>0$ 的意义下是深度为 $r>0$ [Yu01第 8]节所述的 **G**-泛型。称 的一个正则超尖点表示 π 为 G是环面的，如果 π 它来自一个环面对。

注 3.2. (1) 若一个温和椭圆正则对是环面的，则它是额外正则的。(2) 术语"环面的"的含义取决于文献。例如，我们的"环面的"在 [FS21]中称为"0-环面的"。本文遵循 [DS18] 和 [Kal19b]，使用 " 环面的 " 而非 "0- 环面的 "。

我们简要回顾环面超尖点表示情形下的 Yu 构造。固定 $\mathbf{S}$ ϑ（**G** 的一个温和椭圆环面对）。令 $\mathbf{x}\in\mathcal{B}^{\mathrm{red}}(\mathbf{G}\ F)$ 为

与 **S** 相关联的点，并令 $r \in \mathbb{R}_{>0}$ 为 ϑ 的深度。设 $s := r/2$，并定义 G 的子群 K、J 和 J_+ 如下：

$$K := SG_{\mathbf{x},s}, \quad J := (S,G)_{\mathbf{x},(r,s)}, \quad J_+ := (S,G)_{\mathbf{x},(r,s+)},$$

其中 $(S,G)_{\mathbf{x},(r,s)}$ 和 $(S,G)_{\mathbf{x},(r,s+)}$ 是按照 Yu 的方法定义的群（参见 [Yu01，第 1 节和 2]）。注意，我们有 $K = SJ$。

由于关于 J_+ 满足 $\hat{\vartheta}|_{(S,G)_{\mathbf{x},(r,s+)}} = \mathbb{1}$，我们可以将 $\hat{\vartheta}$ 扩张为一个特征 $\hat{\vartheta}$。然后，根据**G**-泛型性的定义，存在一个元素 X^* 属于 $\mathfrak{s}^*_{-r}$，它是深度为**G**-一般的 r，其含义见 [Yu01，第 8]节，并且满足

$$\hat{\vartheta}(\exp(Y)) = \psi_F(\langle Y, X^* \rangle)$$

对于任意 $Y \in \mathfrak{g}_{\mathbf{x},s+:r+}$（或者等价地，对于任意 $Y \in \mathfrak{s}_{s+:r+}$）。这里，正如[Yu01 第 8], 节中所解释的，我们可以通过考虑 S 对 $\mathfrak{g}^*$ 的余伴随作用，将 $\mathfrak{s}^*$ 视为 $\mathfrak{g}^*$ 的子空间。我们回顾一下，G-泛型性定义包含两个条件 GE1 和 GE2。条件 GE1 要求，对于任意 $\alpha \in \Phi(G, S)$，均有 $\mathrm{val}_F(\langle H_\alpha, X^* \rangle) = -r$，其中 $H_\alpha := d\alpha^\vee(1)$。我们不回顾条件 GE2，因为当 p 不是 G 的对偶带基根数据的挠素数时，根据 [Yu01 引理 8.1]，GE1 蕴含 GE2；而由我们的假设 $p \nmid |\Omega_{\mathbf{G}}|$，结合 [Fin21a 引理 3.2]，可知这一点成立。

$\hat{}$ 这一构造的关键在于，通过令 $N := \mathrm{Ker}\,\vartheta \subset J_+$，商$J/N$ 具有有限海森堡群的结构：

- J/N 的中心为 J_+/N，它通过 ϑ与 $\mu_p \cong \mathbb{F}_p$ 同构（此处我们固定一个同构 $\mu_p \cong \mathbb{F}_p$）$\hat{}$。
- 商 J/J_+ 关于配对构成一个辛空间

$$(J/J_+) \times (J/J_+) \to \mu_p \cong \mathbb{F}_p : (g, g') \mapsto \hat{\vartheta}([g, g'])$$

（见 [Yu01，第 11]节；我们将在第J/J_+ 节更详细地回顾辛空间4.3的结构。

根据Stone–von Neumann定理，存在唯一一个不可约表示 J/N，其在 J_+/N 上的中心特征由 ϑ给出。此外，由于 S 在 J 上的共轭作用保持 J_+ 和 N，并在J/J_+ 上诱导出辛作用，我们可以将 J 的表示（的膨胀）延拓到半直积群 $S \ltimes J$，记作 $\omega_{(\mathbf{S},\vartheta)}$（所谓的海森堡–韦伊表示）。于是，$S \ltimes J$的张量表示 $\omega_{(\mathbf{S},\vartheta)} \otimes (\vartheta \ltimes \mathbb{1})$下降到 $SJ = K$（经由典范映射 $S \ltimes J \twoheadrightarrow K$分解）。我们将 K的下降表示记为$\rho_{(\mathbf{S},\vartheta)}$。环面超尖点表示$\pi_{(\mathbf{S},\vartheta)}$ 定义为

$$\pi_{(\mathbf{S},\vartheta)} := \text{c-Ind}_K^G \rho_{(\mathbf{S},\vartheta)}.$$

3.2. **局部朗兰兹对应构造中的若干不变量**。接下来，我们概述在 Kaletha 的构造中发挥重要作用的若干不变量，该构造用于正则超尖点表示的局部朗兰兹对应 [Kal19b],主要聚焦于环面超尖点表示的情形。

在下文中，假设**G** 在 F 上准分裂，我们固定 $\mathbf{spl_G} = (\mathbf{B}, \mathbf{T}\ \{X_\alpha\}_\alpha)$，即 **G** 的一个 F-分裂。令**G** 为**G**的朗兰兹对偶群。更准确地说，**G** 是 $\mathbb{C}$ 上的一个连通约化群，其

- a Γ-作用在**G**上$\hat{}$，$\hat{}\hat{}\hat{}$
- 一个 Γ-稳定分解 $\mathbf{spl}^{\hat{}}\mathbf{G} = (\mathbf{B}, \mathbf{T}\{\mathcal{X}_{\alpha^\vee}\}_{\alpha^\vee})$，以及 **G** 的

- $\hat{\mathbf{G}}$ 与 $\mathbf{G}$ 的带基根数据之间的一个 Γ-等变同构 $\Psi(\hat{\mathbf{G}})$。

我们令 ${}^L\mathbf{G} := \hat{\mathbf{G}} \rtimes W_F$。

设 $(\mathbf{S}\ \vartheta)$ 是 $\mathbf{G}$ 的温和椭圆环面对。注意，此时 $\Phi(\mathbf{G},\mathbf{S})$ 中 $\mathbf{G}$ 内$\mathbf{S}$ 的根构成一个带有 Γ-作用的有限集。

定义 3.3. 若一族 $\{a_\alpha\}_{\alpha\in\Phi(\mathbf{G},\mathbf{S})}$ 元素 $a_\alpha \in F_\alpha^\times$ 满足以下条件，则称其为一组a-数据（相对于 $\mathbf{S}$）：

- $a_{-\alpha} = a_\alpha^{-1}$对于任意 $\alpha \in \Phi(\mathbf{G},\mathbf{S})$，以及
- $a_{\sigma(\alpha)} = \sigma(a_\alpha)$ 对任意 $\alpha \in \Phi(\mathbf{G},\mathbf{S})$ 和 $\sigma \in \Gamma$ 均成立。

根据 [Kal19b，第 4 节，7], 我们按如下方式将一组 $a_\vartheta = \{a_{\vartheta,\alpha}\}_{\alpha\in\Phi(\mathbf{G},\mathbf{S})}$ 的 a-数据与 $(\mathbf{S}\ \vartheta)$ 关联起来（注意， a_ϑ 在 [Kal19b第 4 节中 a 简单记作7]）：

$$a_{\vartheta,\alpha} = \langle H_\alpha, X^*\rangle,$$

其中 $H_\alpha := d\alpha^\vee(1) \in \mathfrak{s}(F_\alpha)$ 以及 $X^* \in \mathfrak{s}^*_{-r}$ 是与 ϑ 相关的一个元素（参见第 3.1节）。我们将 a_ϑ 称为***Kaletha*** 的 a-数据，与 $(\mathbf{S}\ \vartheta)$ 相关。

定义 3.4 ([Kal19b，定义 4.6。1])。 一族 $\{\chi_\alpha\}_{\alpha\in\Phi(\mathbf{G},\mathbf{S})}$ 特征χ_α： $F_\alpha^\times \to \mathbb{C}^\times$ 称为一组 χ-数据（相对于 $\mathbf{S}$），如果满足以下条件:

- $\chi_{-\alpha} = \chi_\alpha^{-1}$对于任意 $\alpha \in \Phi(\mathbf{G},\ \mathbf{S})$,
- $\chi_{\sigma(\alpha)} = \chi_\alpha \circ \sigma^{-1}$ 对于任意 $\alpha \in \Phi(\mathbf{G},\ \mathbf{S})$ 和 $\sigma \in \Gamma$，并且
- $\chi_\alpha|_{F^\times_{\pm\alpha}}$ 对于任意 $\alpha \in \Phi(\mathbf{G},\ \mathbf{S})_{\mathrm{sym}}$，等于二次特征 κ_α。

我们称 $\{\chi_\alpha\}_{\alpha\in\Phi(\mathbf{G},\mathbf{S})}$ 是最小分歧的，如果还满足以下条件:

- $\chi_\alpha = \mathbb{1}$ 对于任意 $\alpha \in \Phi(\mathbf{G},\ \mathbf{S})_{\mathrm{asym}}$,
- χ_α 对于任意 $\alpha \in \Phi(\mathbf{G},\ \mathbf{S})_{\mathrm{ur}}$，均为非分歧，且
- χ_α 对于任意 $\alpha \in \Phi(\mathbf{G},\ \mathbf{S})_{\mathrm{ram}}$，均为温和分歧。

按照 [Kal19b第 4 节，7], 我们如下关联一个集合 $\chi_\vartheta = \{\chi_{\vartheta,\alpha}\}_{\alpha\in\Phi(\mathbf{G},\mathbf{S})}$，其由极小分歧的 χ-数据构成，关联于 $(\mathbf{S}\ \vartheta)$，如下所示（χ_ϑ 在 χ' 中记作 [Kal19b第 4 节7]）：

- 对于 $\alpha \in \Phi(\mathbf{G},\ \mathbf{S})_{\mathrm{asym}}$，令 $\chi_{\vartheta,\ \alpha}$ 为 $F_\alpha^\times$ 的平凡特征。
- 对于 $\alpha \in \Phi(\mathbf{G},\ \mathbf{S})_{\mathrm{ur}}$，令 $\chi_{\vartheta,\ \alpha}$ 为 $F_\alpha^\times$ 唯一的非平凡非分歧二次特征。
- 对于 $\alpha \in \Phi(\mathbf{G},\mathbf{S})_{\mathrm{ram}}$，令 $\chi_{\vartheta,\alpha}$ 为由以下性质刻画的唯一温和分歧特征:

$$\chi_{\vartheta,\alpha}|_{F^\times_{\pm\alpha}} = \kappa_\alpha \quad \text{and} \quad \chi_{\vartheta,\alpha}(2a_{\vartheta,\alpha}) = \lambda_\alpha.$$

我们将 χ_ϑ 称为与 $(\mathbf{S}\ \vartheta)$ 相关联的 ***Kaletha*** 的 χ-数据 。

注记 3.5。 对于一般的（即可能非环面的）温和椭圆正则对 $(\mathbf{S}\ \vartheta)$，Kaletha 的 a-数据 a_ϑ 和 χ-数据 χ_ϑ 通过注意到由 $\Phi(\mathbf{G},\mathbf{S})$ 的温和扭曲李子群确定的归纳结构来定义$\mathbf{G}$ 所给出的 $(\mathbf{S}\ \vartheta)$。详见 [Kal19b第 4 节。7] （另见 [OT21第 6] 节）。

定义 3.6。 设$\mathbf{S}$ 是$\mathbf{G}$的一个 F-有理极大环面。设 $a = \{a_\alpha\}_\alpha$ 为一组 a-数据, $\chi = \{\chi_\alpha\}_\alpha$ 为关于$\mathbf{S}$的一组 χ-数据。我们定义一个函数

$\Delta_{\mathbf{G},\,\mathrm{II}}[a,\chi]$: $S\to\mathbb{C}^\times$ 如下

$$\Delta_{\mathbf{G},\mathrm{II}}[a,\chi](s):=\prod_{\substack{\dot\alpha\in\dot\Phi(\mathbf{G},\mathbf{S})\\ \alpha(s)\neq 1}}\chi_\alpha\Big(\frac{\alpha(s)-1}{a_\alpha}\Big).$$

下面我们回顾 S DeBacker–Spice 引入的符号特征[DS18第 4 节3]，它们是在研究温和超尖点表示的特征公式时引入的。我们定义一个特征 ϵ_α: $S\to\mathbb{C}^\times$ 对于 $\alpha\in\Phi(\mathbf{G},\mathbf{S})\smallsetminus\Phi(\mathbf{G},\mathbf{S})_{\mathrm{ram}}$ 如下:

$$\epsilon_\alpha(s):=\begin{cases}\mathrm{sgn}_{k_\alpha^\times}(\overline{\alpha(s)}) & \text{if } \alpha\in\Phi(\mathbf{G},\mathbf{S})_{\mathrm{asym}},\\ \mathrm{sgn}_{k_\alpha^1}(\overline{\alpha(s)}) & \text{if } \alpha\in\Phi(\mathbf{G},\mathbf{S})_{\mathrm{ur}}.\end{cases}$$

这里，$\overline{\alpha(s)}$ 表示 $\alpha(s)\in\mathcal{O}_{F_\alpha}$ 在剩余域 k_α中的像。

回顾正则超尖点表示 $\pi_{(\mathbf{S},\vartheta)}$的构造，我们注意到子商 J/N 在 G 中具有有限海森堡群的结构（见第 3.1 节）。正如我们稍后将回顾的，辛商 $V:=J/J_+$ 的J/N具有一个正交分解 $V=\bigoplus_{\ddot\alpha\in\ddot\Phi}V_{\ddot\alpha}$，该分解由 $\mathfrak{g}$相对于$\mathbf{S}$的根空间分解所诱导（见第4.3 节）。$\ddot\Phi$ 中每个部分 $V_{\ddot\alpha}$ 都可能为零；我们定义子集 $\Xi\subset\Phi$为所有满足 $V_{\ddot\alpha}\neq 0$的 $\ddot\alpha\in\Phi$的集合。我们通过对 Ξ上的ϵ_α 取乘积，定义 S 的特征 $\epsilon_{\vartheta,\,\mathrm{asym}}$ 和 $\epsilon_{\vartheta,\,\mathrm{ur}}$：

$$\epsilon_{\vartheta,\mathrm{asym}}(s):=\prod_{\ddot\alpha\in\ddot\Xi_{\mathrm{asym}}}\epsilon_\alpha(s)\quad\text{and}\quad\epsilon_{\vartheta,\mathrm{ur}}(s):=\prod_{\ddot\alpha\in\ddot\Xi_{\mathrm{ur}}}\epsilon_\alpha(s).$$

注记 3.7. 在 [DS18，第 4 节中，3], 这些乘积取遍满足条件“ $\ddot\alpha\in\Phi$ $\mathrm{ord}_2^r\in(\mathbf{x})$”的$\alpha$，其中 $\bar r$ 是 ϑ 的深度，而 $\mathrm{ord}_{\mathbf{x}}(\alpha)$ 是 [DS18定义 36]中定义的集合。该条件等价于 $\alpha\in\Xi$ （见 [OT21命题 512]的证明）。

最后，我们回顾一下 S 的特征 $\epsilon_{\mathbf{S},\mathrm{ram}}$，它在 [Kal19b，定义 4.7.3]中定义。正如 [Kal19b，引理 4.7.4], 中所解释的，它可以表示为对称分歧根 α对应的环面不变量 $f_{(\mathbf{G},\mathbf{S})}(\alpha)$ 的乘积；这些不变量在[Kal15，第 4 节1]中引入。我们回顾一下，$\alpha\in\Phi(\mathbf{G},\mathbf{S})_{\mathrm{sym}}$（不一定是分歧的）的环面不变量 $f_{(\mathbf{G},\mathbf{S})}(\alpha)$ 定义如下。我们固定一个元素 $\tau_\alpha\in\Gamma_{\pm\alpha}\smallsetminus\Gamma_\alpha$（即，$\tau_\alpha\in\Gamma_{\pm\alpha}$ 是满足 $\tau_\alpha(\alpha)=-\alpha$ 的元素）。取一个 F_α-有理根向量 $X_\alpha\in\mathfrak{g}_\alpha(F_\alpha)$，则 $\tau_\alpha(X_\alpha)$ 属于 $\mathfrak{g}_{-\alpha}(F_\alpha)$，且 $[X_\alpha,\tau_\alpha(X_\alpha)]$与 $H_\alpha:=d\alpha^\vee(1)\in\mathfrak{s}(F_\alpha)$ 的比值属于 $F_{\pm\alpha}^{\times}$。注意到 $\frac{[X_\alpha,\tau_\alpha(X_\alpha)]}{H_\alpha}$ 在模 $\mathrm{Nr}_{F_\alpha/F_{\pm\alpha}}(F_\alpha^\times)$ 的乘法意义下定义良好，我们置

$$f_{(\mathbf{G},\mathbf{S})}(\alpha):=\kappa_\alpha\Big(\frac{[X_\alpha,\tau_\alpha(X_\alpha)]}{H_\alpha}\Big)\in\{\pm1\}.$$

于是我们有

$$\epsilon_{\mathbf{S},\mathrm{ram}}(s)=\prod_{\substack{\dot\alpha\in\dot\Phi(\mathbf{G},\mathbf{S})_{\mathrm{ram}}\\ \alpha(s)\neq1\\ \mathrm{val}_F(\alpha(s)-1)=0}}f_{(\mathbf{G},\mathbf{S})}(\alpha).$$

注记 3.8. 与 a_ϑ 和 χ_ϑ的定义类似，对于一般的温和椭圆正则对 $(\mathbf{S},\vartheta)$，通过考察由以下温和扭曲李子群确定的 $\Phi(\mathbf{G},\mathbf{S})$ 的归纳结构，可定义特征 $\epsilon_{\vartheta,\mathrm{asym}}$ 和 $\epsilon_{\vartheta,\mathrm{ur}}$：

$(\mathbf{S}, \vartheta)$。详情请参见 [Kal19b，第 4.3] 节（另请参见 [OT21，第 6] 节）。我们还指出，在 [Kal19b]，中，乘积 $\epsilon_{\vartheta,\mathrm{asym}} \cdot \epsilon_{\vartheta,\mathrm{ur}}$ （分别为 $\epsilon_{\mathbf{S},\mathrm{ram}}$）记作 ϵ^{ram} （分别记作 ϵ_{ram}）。

3.3. **正则超尖点 L参数的构造**。 现在我们说明 Kaletha 如何构造正则超尖点 L 参数（[Kal19b，命题 5.2 的证明。7]）。

设给定一对（$\mathbf{S}$，$\hat{}\jmath$），其中

- $\mathbf{S}$ 是一个 F-有理温和环面，其秩与 $\mathbf{G}$ 相同，且 $\hat{}\hat{}\hat{}$
- $\hat{}\jmath\colon \mathbf{S} \hookrightarrow \mathbf{G}$ 是一个嵌入，其 $\mathbf{G}$-共轭类是 Γ-稳定的。

这里，注意到 $\hat{}\jmath(\hat{}\mathbf{S})$ 是 $\hat{}\mathbf{G}$ 的一个极大环面，我们通过将 $\hat{}\jmath$ 替换为其共轭元，假设 $\hat{}\jmath(\hat{}\mathbf{S})$ 本身等于 $\hat{}\mathbf{T}$ 。

定义 3.9。 设 $j\colon \mathbf{S} \hookrightarrow \mathbf{G}$ 是将 $\mathbf{S}$ 嵌入 $\mathbf{G}$ 的一个嵌入。由秩条件，其像$\mathbf{S}j := j(\mathbf{S})$ 是 $\mathbf{G}$ 的一个极大环面，因此存在一个元素$g \in \mathbf{G}$ ，使得 $[g](\mathbf{S}j) = \mathbf{T}$。若同构 $[g] \circ j\colon \mathbf{S} \to \mathbf{T}$ 的对偶映射的逆与 $\hat{}\mathbf{G}$ 中的 $\hat{}\jmath\colon \hat{}\mathbf{S} \xrightarrow{\sim} \hat{}\mathbf{T}$ 共轭，则称 j 为 $\hat{}\jmath$-可容许的 。

我们将 $\mathcal{J}_F^{\mathbf{G}}$ 记为 S 到 G 的 $\hat{}\jmath$-可容许嵌入的 G-共轭类。由于 $\hat{}$G-共轭类 $\jmath$ 是 Γ-稳定的，因此 $\mathcal{J}_F^{\mathbf{G}}$ 也是如此（见 [Kal19b，第 5.1] 节）。于是，根据 Kottwitz 关于有理共轭的结果（[Kot82，推论 2.2]），G 的准分裂性意味着 $\mathcal{J}$G $_F$有一个 F-有理点。换言之，存在一个 S 到 G的 F-有理 $\hat{}\jmath$-可容许嵌入。我们将 $\mathcal{J}$G 记为 $\mathcal{J}$ G $_F$的 F-有理点集。对于每个 $j \in \mathcal{J}$G（即， j 是一个 F-有理 $\hat{}\jmath$-可容许嵌入的 G-共轭类），取 j 的一个代表元，并仍记为 j ，则 S$j := j$(S) 是 G 的一个 F-有理极大环面。因此，我们得到

- 一个 F-有理嵌入 $\mathbf{Z}_{\mathbf{G}} \hookrightarrow \mathbf{S}j$,
- 一个 Γ-稳定子集 $\Phi(\mathbf{G},\mathbf{S}j)$，属于 $X^*(\mathbf{S}j)$，并且
- 一个 Γ-稳定子群 $\Omega_{\mathbf{G}}(\mathbf{S}j)$，属于 Aut(S$j$)。

由于 $j\colon \mathbf{S} \xrightarrow{\sim} \mathbf{S}j$ 是一个 F-有理同构，通过经由 j拉回这些对象，我们得到

- 一个 F-有理嵌入 $\mathbf{Z}_{\mathbf{G}} \hookrightarrow \mathbf{S}$,
- 一个 Γ-稳定子集 $j^*\Phi(\mathbf{G},\mathbf{S}j)$，属于 $X^*(\mathbf{S})$，并且
- 由 Γ稳定的子群 $j^*\Omega_{\mathbf{G}}(\mathbf{S}j)$，它是 Aut(S) 的子群。

注意到这些都与 $j \in \mathcal{J}^{\mathbf{G}}$ 的选择（以及其代表元的选择）无关，我们记 $\Phi(\mathbf{G}, \mathbf{S}j) := j^*\Phi(\mathbf{G}, \mathbf{S}j)$，并记 $\Omega_{\mathbf{G}}(\mathbf{S}j) := j^*\Omega_{\mathbf{G}}(\mathbf{S}j)$。

定义 3.10 ([Kal19b，定义 5.2。4])。 一个 正则超尖点 L-包的数据（*datum*）$\mathbf{G}$ 是一个元组 $(\mathbf{S}, \hat{}\jmath, \chi, \vartheta)$，由以下部分组成：

(1) 一个 F-有理温和环面$\mathbf{S}$ ，其秩与$\mathbf{G}$相同； (2) 一个嵌入$\hat{}\jmath\colon \mathbf{S} \hookrightarrow \mathbf{G}$ ，其$\mathbf{G}$-共轭类由 Γ稳定；(3) 一组适用于 $\Phi(\mathbf{G}, \mathbf{S}j)$的最小分歧 χ-数据；以及(4) 一个特征 $\vartheta\colon S \to \mathbb{C}^\times$

满足以下条件：

(i) $\mathbf{S}$ 在$\mathbf{G}$ 中是椭圆的（即，$\mathbf{S}/\mathbf{Z}_{\mathbf{G}}$ 是各向异性的），

(ii) χ 是 $\Omega_{\mathbf{G}^0}(\mathbf{S}j)(F)$-不变的，且 (iii) $(\mathbf{S}, \vartheta)$ 是$\mathbf{G}$的温和椭圆额外正则对。

将 (iii) 中的“额外正则”替换为“环面的”后，我们也定义了一个 环面超尖点L-数据包，其所属群为 $\mathbf{G}$。

我们再补充几条说明，阐明定义 3.10 中条件 (ii) 和 (iii) 的确切含义（详见 [Kal19b，第 5.1 节和第 5.2] 节）。条件 (i) 表明，对于任意 $j \in \mathcal{J}^{\mathbf{G}}$，$\mathbf{S}^j$ 都是$\mathbf{G}$ 的温和椭圆极大环面。条件 (iii) 意味着，对于任意 $j \in \mathcal{J}_{\mathbf{G}}$，$(\mathbf{S}^j, \vartheta_j)$ 都是$\mathbf{G}$的温和椭圆额外正则对，其中 $\vartheta_j := \vartheta \circ j^{-1}$（这等价于：对于“某个” $j \in \mathcal{J}_{\mathbf{G}}$，$(\mathbf{S}^j, \vartheta_j)$ 是$\mathbf{G}$ 的温和椭圆额外正则对）。我们定义 $\Phi(\mathbf{G}^0,\mathbf{S}^j)$ 的一个子集 $\Phi(\mathbf{G},\mathbf{S}^j)$，如下：

$$\Phi(\mathbf{G}^0, \mathbf{S}_j) := \{\alpha \in \Phi(\mathbf{G}, \mathbf{S}_j) \mid \vartheta \circ \mathrm{Nr}_{E/F} \circ \alpha^\vee(1 + \mathfrak{p}_E) = 1\},$$

其中 E 是分裂$\mathbf{S}$的 F 的驯 ramified有限扩张。于是，$\Phi(\mathbf{G}^0,\mathbf{S}^j)$ 是 $\Phi(\mathbf{G},\mathbf{S}^j)$ 的一个 Levi 子系，并典范地对应于 $\Omega_{\mathbf{G}^0}(\mathbf{S}^j)$ 的一个 Γ-稳定子群 $\Omega_{\mathbf{G}}(\mathbf{S}^j)$。

我们取 G 的一个正则超尖点 L-分包数据 $(\mathbf{S}, \hat{}\jmath, \chi, \vartheta)$。将 ϑ应用于 S 的局部朗兰兹对应后，我们得到 S 的一个 L-参数 ϕ_ϑ，它是从 W_F 到 ${}^L\mathbf{S}$ 的同态。另一方面，通过使用 χ 组 χ-数据，根据 Langlands–Shelstad 构造（[LS87，第 2.6] 节），我们可以将 $\hat{}\jmath$延拓为一个 L-嵌入 ${}^L j_\chi$，使其从 ${}^L\mathbf{S}$ 映到 ${}^L\mathbf{G}$。将这两个同态复合起来，我们便得到 G 的一个 L-参数 ϕ：

$$\phi\colon W_F \xrightarrow{\phi_\vartheta} {}^L\mathbf{S} \xrightarrow{{}^L j_\chi} {}^L\mathbf{G}.$$

以这种方式构造的 L-参数可以用纯粹的伽罗瓦论方式刻画：

命题 3.11 ([Kal19b，命题 5.2.7、6.1。2])。 *Kaletha* 的构造在 G 的（环面）正则超尖点$\hat{}L$-分包数据的同构类与 G 的（环面）正则超尖点L-参数的 $\mathbf{G}$-共轭类之间给出一个双射。

正则超尖点 L-分包数据之间的同构定义将在下一小节中回顾。 (环面的)正则超尖点 L-参数定义如下。

定义 3.12 ([Kal19b，定义 5.2。3])。 我们称一个 L-参数 $\phi\colon W_F \rtimes \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to {}^L\mathbf{G}$ 为 正则超尖点 若其满足以下条件：

(0) $\phi|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}$ 是平凡的，且 ϕ 是离散的，即 $S_\phi^\circ := \mathrm{Z}_{\hat{\mathbf{G}}}(\phi(W_F))^\circ \subset \mathrm{Z}_{\hat{\mathbf{G}}}$, $\hat{}$ (1) $\phi(P_F)$ 包含于 G 的一个环面中（注意，此时 $\mathcal{M} := \mathrm{Z}_{\hat{\mathbf{G}}}(\phi(P_F))^\circ$ 是 G 的一个 Levi 子群）。(2) $\mathcal{C} := \mathrm{Z}_{\hat{\mathbf{G}}}(\phi(I_F))^\circ$ 是一个环面（注意，此时 $\mathcal{T} := \mathrm{Z}_{\mathcal{M}}(\mathcal{C})$ 是 $\mathcal{M}$ 的一个极大环面。我们令 S 为 Γ- 模 $\mathcal{T}$，其 Γ- 作用由 $[\phi(\text{–})]$ 给出）。(3) 若 $n \in \mathrm{N}_{\mathcal{M}}(\mathcal{T})$ 映射到 $\Omega_{\mathcal{M}}(\hat{}\mathrm{S})^\Gamma$ 中的一个非平凡元素，则 $n \notin \mathrm{Z}_{\hat{\mathbf{G}}}(\phi(I_F))$。

定义 3.13 ([Kal19b，定义 6.1。1])。 我们称一个正则超尖点L参数 $\phi\colon \ W_F \to {}^L\mathbf{G}$ 是深度为 $r > 0$ 的环面的，当且仅当它满足以下条件：

(1) ϕ 在 I_F^{r+} 上是平凡的，也就是说，对任意 $\sigma \in I_F^{r+}$，$\phi(\sigma) = 1 \rtimes \sigma$；并且 (2) $\mathrm{Z}_{\hat{\mathbf{G}}}(\phi(I_F^r))$ 是 $\hat{}\mathbf{G}$ 中包含 $\phi(P_F)$ 的极大环面。

3.4. **正则超尖点 L-包**。最后，我们介绍 Kaletha 的正则超尖点 L-包的构造（[Kal19b，第 5 节。3]）。

定义 3.14（[Kal19b，定义 5.3.2]）。设 $(\mathbf{S}, \hat{\jmath}, \chi, \vartheta)$ 是 $\mathbf{G}$ 的一个正则超尖点 L-包数据。设 $\mathcal{J}\mathbf{G}$ 为 $\mathbf{S}$ 到 $\mathbf{G}$ 的 F-有理 $\hat{\jmath}$-可容许嵌入的 $\mathbf{G}$-共轭类（见第 3.3 节）。一个正则超尖点数据（位于正则超尖点 L-包数据 $(\mathbf{S}, \hat{\jmath}, \chi, \vartheta)$ 之上）是一个元组 $(\mathbf{S}, \hat{\jmath}, \chi, \vartheta, j)$，其中 j 是 $\mathcal{J}^{\mathbf{G}}$ 的一个元素。

注记 3.15。在 [Kal19b，定义 5.3.2]，给出的原始定义中，正则超尖点数据是一个元组 $(\mathbf{S}, \hat{\jmath}, \chi, \vartheta, (\mathbf{G}', \psi, z)\ j)$，此外还包含 $\mathbf{G}$ 的一个刚性内扭 $(\mathbf{G}', \psi, z)$（按 [Kal16] 的含义）。事实上，Kaletha 在 [Kal19b] 中构造的 L-包不仅由 $\mathbf{G}$ 的表示构成，还包括 $\mathbf{G}$ 的所有刚性内形式的表示。本文只关注准分裂情形，因此我们总是将正则超尖点数据中的刚性内扭 $(\mathbf{G}', \psi, z)$ 取为平凡扭曲 $(\mathbf{G}, \mathrm{id}, 1)$，并在记号中省略它。

定义 3.16 ([Kal19b，定义 4.6.4、4.6.5])。设 $\mathbf{S}$ 是 F-有理的 $\mathbf{G}$的极大环面。称一族 $\{\zeta_\alpha\}_{\alpha\in\Phi(\mathbf{G},\mathbf{S})}$ 特征 $\zeta_\alpha\colon\ F_\alpha^\times \to \mathbb{C}^\times$ 为一组 ζ-数据，对于 $\Phi(\mathbf{G}, \mathbf{S})$，若满足以下条件：

- $\zeta_{-\alpha} = \zeta_\alpha^{-1}$对任意 $\alpha \in \Phi(\mathbf{G}, \mathbf{S})$，
- $\zeta_{\sigma(\alpha)} = \zeta_\alpha \circ \sigma^{-1}$ 对任意 $\alpha \in \Phi(\mathbf{G}, \mathbf{S})$ 和 $\sigma \in \Gamma$，且
- $\zeta_\alpha|_{F^\times_{\pm\alpha}} = \mathbb{1}$ 对任意 $\alpha \in \Phi(\mathbf{G}, \mathbf{S})$对称。

对于一组 $\zeta = \{\zeta_\alpha\}$ ζ-数据，关于 $\Phi(\mathbf{G}, \mathbf{S})$，我们定义一个特征 $\zeta_S\colon\ S \to \mathbb{C}^\times$ 如下

$$\zeta_S := \prod_{\ddot{\alpha}\in\ddot{\Phi}(\mathbf{G},\mathbf{S})} \zeta_{\ddot{\alpha}},$$

其中

- 我们令 $\zeta_{\ddot{\alpha}} := \zeta_\alpha \circ \alpha$，若 $\ddot{\alpha} \in \ddot{\Phi}(\mathbf{G}, \mathbf{S})$渐近 且
- 我们令 $\zeta_{\ddot{\alpha}}$ 为复合映射 $S \xrightarrow{\alpha} F_\alpha^1 \cong F_\alpha^\times/F_{\pm\alpha}^\times \xrightarrow{\zeta_\alpha} \mathbb{C}^\times$，若 $\ddot{\alpha} \in\ddot{\Phi}(\mathbf{G}, \mathbf{S})$ur（此处，$F_\alpha^1$ 表示范数映射 $\mathrm{Nr}_{F_\alpha/F_{\pm\alpha}}$ 的核，而中间的同构由希尔伯特第90定理给出）。

注 3.17。当我们有两个 χ-数据集 $\chi = \{\chi_\alpha\}_{\alpha\in\Phi(\mathbf{G},\mathbf{S})}$ 和 $\chi' = \{\chi'_\alpha\}_{\alpha\in\Phi(\mathbf{G},\mathbf{S})}$时，可以通过取 $\{\chi'_\alpha\}_{\alpha\in\Phi(\mathbf{G},\mathbf{S})}$与 $\{\chi_\alpha\}_{\alpha\in\Phi(\mathbf{G},\mathbf{S})}$的比值，构造一个 ζ-数据集。我们用 $\zeta_{\chi'/\chi}$ 表示以这种方式定义的 ζ-数据集：

$$\zeta_{\chi'/\chi} = \{\zeta_{\chi'/\chi,\alpha}\}_{\alpha\in\Phi(\mathbf{G},\mathbf{S})},\quad \zeta_{\chi'/\chi,\alpha} := \chi'_\alpha \cdot \chi_\alpha^{-1}.$$

定义 3.18 ([Kal19b，定义 5.2。5])。一个 同构 在两个正则超尖点 L-丛数据（$\mathbf{S}$、$\hat{\jmath}$，χ，ϑ）和（$\mathbf{S}'$、$\hat{\jmath}'$，χ'，ϑ'）之间是一个元组

$$(\iota, g, \zeta)\colon (\mathbf{S}, \hat{\jmath}, \chi, \vartheta) \to (\mathbf{S}', \hat{\jmath}', \chi', \vartheta')$$

由以下部分组成

(1) 环面之间的一个 F-有理同构 $\iota\colon\ \mathbf{S} \to \mathbf{S}'$，(2) $\hat{\mathbf{G}}$ 的一个元素 g，满足 $\hat{\jmath}\,\hat{\alpha} = [g] \circ \hat{\jmath}'$，以及 (3) 一个集合 $\zeta = \{\zeta_{\alpha'}\}_{\alpha'\in\Phi(\mathbf{G},\mathbf{S}'_{j'})}$，它是 $\Phi(\mathbf{G},\mathbf{S}'_{j'})$ 的 ζ-数据，由 $\chi_{\alpha'\circ\iota} = \chi'_{\alpha'} \cdot \zeta_{\alpha'}$ 给出并满足等式

$$(\zeta_{S'}^{-1} \cdot \vartheta') \circ \iota = \vartheta.$$

注 3.19。根据定义 3.18 的条件 (2)，对于任意 F-有理的 $\hat{\jmath}'$-可容许嵌入 $j'\colon \mathrm{S}' \hookrightarrow \mathrm{G}$，我们可以验证 $j'\circ\iota\colon \mathrm{S} \hookrightarrow \mathrm{G}$ 是一个 F-有理的 $\hat{\jmath}$-可容许嵌入。这意味着我们有一个同一化 $\Phi(\mathrm{G},\mathrm{S}'_{j'}) \cong \Phi(\mathrm{G},\mathrm{S}'_{j'}) \cong \Phi(\mathrm{G},\mathrm{S}_{j'\circ\iota}) \cong \Phi(\mathrm{G},\mathrm{S}_j)$，由 $\alpha'\mapsto\alpha'\circ\iota$ 给出。若通过此同一化将 χ-数据集合 χ 从 $\Phi(\mathrm{G},\mathrm{S}_j)$ 搬运至 $\Phi(\mathrm{G},\mathrm{S}'_{j'})$，并将其记为 $\iota_*(\chi)$，则条件 (3) 中的 ζ-数据集合 ζ 就是 $\zeta_{\iota_*(\chi)/\chi'}$，记号同注 3.17。

定义 3.20 ([Kal19b，定义 5.3。3])。两个正则超尖点数据 $(\mathbf{S},\hat{\jmath},\chi,\vartheta,j)$ 和 $(\mathbf{S}',\hat{\jmath}',\chi',\vartheta',j')$ 之间的同构是一个元组

$$(\iota,g,\zeta,f)\colon(\mathbf{S},\hat{\jmath},\chi,\vartheta,j)\to(\mathbf{S}',\hat{\jmath}',\chi',\vartheta',j')$$

由以下部分构成：

(1) 正则超尖点 L-包数据的同构

$$(\iota,g,\zeta)\colon(\mathbf{S},\hat{\jmath},\chi,\vartheta)\to(\mathbf{S}',\hat{\jmath}',\chi',\vartheta'),\quad \text{and}$$

(2) 一个自同构 f，它由 G-共轭给出，并满足 $j'\circ\iota = f\circ j$。

注 3.21。在 [Kal19b，定义 5.3。3]，元组 $(\iota,\ g,\ \zeta,\ f)$ 的第四个参数是刚性内扭的一个同构。如注 3.15 所述，本文始终将刚性内扭取为平凡的。由于刚性内扭的任何自同构必然是有理共轭（[Kal16，事实 5。1]），我们可以假设 f 如定义 3.20所述。

我们来考察固定正则超尖点 L-包数据下正则超尖点数据的同构类。设 $(\mathrm{S},\hat{\jmath},\chi,\vartheta)$ 是一个正则超尖点 L-包数据。若 $(\iota,g,\zeta,f):(\mathrm{S},\hat{\jmath},\chi,\vartheta,j)\to(\mathrm{S},\hat{\jmath},\chi,\vartheta,j')$ 是正则超尖点数据 $(j,j'\in\mathcal{J}\mathrm{G})$ 的一个同构，则根据 Kal19b 引理 5.2.6]，ι 必定是恒等映射。特别地，定义 3.20 中的等式 $j'\circ\iota = f\circ j$ 意味着 j 和 j' 共轭于 G。反过来，只要 j 和 j' 共轭于 G，两个正则超尖点数据 $(\mathrm{S},\hat{\jmath},\chi,\vartheta,j)$ 和 $(\mathrm{S},\hat{\jmath},\chi,\vartheta,j')$ 就是同构的。因此，具有固定正则超尖点 L-包数据 $(\mathrm{S},\hat{\jmath},\chi,\vartheta)$ 的正则超尖点数据的同构类由以下集合参数化

$$\mathcal{J}_G^{\mathbf{G}} := \mathcal{J}^{\mathbf{G}}/\!\sim_G = \{\hat{\jmath}\text{-admissible } F\text{-rational embeddings } \mathbf{S}\hookrightarrow\mathbf{G}\}/\!\sim_G,$$

其中，$\sim_G$ 表示由 G-共轭所给出的等价关系。下文中，只要不会引起混淆，我们常通过固定一组代表元，将 $\mathcal{J}_{\mathbf{G}G}$ 视为 $\mathcal{J}^{\mathbf{G}}$ 的子集。

现在我们说明 Kaletha 的正则超尖点 L-L-包（[Kal19b，第 1153–1154 页]）的构造。设 $(\mathbf{S},\hat{\jmath},\chi,\vartheta,j)$ 是一个满足 $j\in\mathcal{J}_{\mathbf{G}G}$ 的正则超尖点数据。根据正则超尖点数据的定义，$(\mathbf{S}_j,\vartheta_j) := (j(\mathbf{S}),\vartheta\circ j^{-1})$ 是 $\mathbf{G}$ 的温和椭圆额外正则对。我们定义 S_j 上的一个特征 ϵ_{ϑ_j}，如下：

$$\epsilon_{\vartheta_j} := \epsilon_{\vartheta_j,\mathrm{asym}}\cdot\epsilon_{\vartheta_j,\mathrm{ur}}\cdot\epsilon_{\mathbf{S}_j,\mathrm{ram}}.$$

按照第 χ 节的方式，我们得到一个用于 $\Phi(\mathrm{G},\mathrm{S}_j)$ 的 χ_{ϑ_j} 数据集。通过同一化 $\Phi(\mathrm{G},\mathrm{S}_j)\cong\Phi(\mathrm{G},\mathrm{S}_{\hat{\jmath}})$，这导出一个用于 $\Phi(\mathrm{G},\mathrm{S}_{\hat{\jmath}})$ 的 χ_{ϑ_j} 数据集，该数据集与 j 的选择无关。将 χ_{ϑ_j} 与包含在 $(\mathrm{S},\hat{\jmath},\chi,\vartheta)$ 中的 χ 数据集 χ 进行比较，我们得到一个 ζ 数据集 $\zeta_{\chi_{\vartheta_{\hat{\jmath}}}/\chi}$（注 3.17）。我们定义 G 的一个温和椭圆正则对 $(\mathrm{S}_j,\vartheta'_j)$ 如下：

$$\vartheta'_j := \epsilon_{\vartheta_j}\cdot(\vartheta\cdot\zeta^{-1}_{\chi_{\vartheta_{\hat{\jmath}}}/\chi,S})\circ j^{-1}\colon S_j\to\mathbb{C}^\times.$$

于是我们得到与温和椭圆正则对 $(\pi_{(\mathbf{s}_j,\vartheta'_j)}$ 相关联的正则超尖点表示 G（参见第 **3.1**j节 ϑ'_j）。注意，$(\mathbf{S}j,\vartheta'_j)$ 的 G 共轭类与 j 的代表元选择无关，因此 $\pi_{(\mathbf{s}_j,\vartheta'_j}$ 的同构类也与之无关。我们记

$$\Pi_\phi^{\mathbf{G}} := \{\pi_{(\mathbf{s}_j,\vartheta'_j)} \mid j \in \mathcal{J}_G^{\mathbf{G}}\}.$$

4. Twisted character formula for toral supercuspidal representations

本节回顾我们先前关于以下内容的工作 [Oi25] ： 环面超尖表示的扭曲 Harish-Chandra特征的显式公式，这是对 Adler–Spice 工作的推广 [AS09] 以及 DeBacker–Spice 工作的推广 [DS18]。

4.1. **扭曲空间与扭曲特征**。 设$\mathbf{G}$是定义在 F上的准分裂连通约化群，并具有一个 F-分裂$\mathbf{spl_G}$ $=(\mathbf{B},\ \mathbf{T}\ \{X_\alpha\}_\alpha)$。设 θ是一个F-有理对合$\mathbf{G}$ （即$\mathbf{G}$ 的一个阶为 2 且保持 $\mathbf{spl_G}$的自同构）。我们假设（$\mathbf{G}$，$\mathbf{T}$ θ）在 [KS99]的意义下没有类型 2 或 3 的限制根。

遵循 Labesse（[Lab04]）和 Waldspurger（[Wal08]），我们采用如下的扭曲空间形式体系。令

$$\tilde{\mathbf{G}} := \mathbf{G} \rtimes \theta = \mathbf{G}\theta,$$

˜也就是说，$\mathbf{G}$ 是非连通约化群$\mathbf{G} \rtimes \langle\theta\rangle$的非恒等连通分支。这是 Labesse 意义下的一个扭曲空间，即一个˜上的代数簇˜，它是一个双$\mathbf{G}$-主齐性空间。作为代数簇，$\mathbf{G}$通过映射˜ $g \mapsto g\theta$与$\mathbf{G}$同构。$\mathbf{G}$ 在$\mathbf{G}$ 上的右作用和左作用由下式给出：

$$g_1 \cdot (g\theta) \cdot g_2 = (g_1 g\theta(g_2))\theta.$$

˜因此，$\mathbf{G}$ 在$\mathbf{G}$上的共轭作用由下式给出：

$$[g_1](g\theta) := g_1 \cdot (g\theta) \cdot g_1^{-1} = (g_1 g\theta(g_1)^{-1})\theta.$$

注意，θ在$\mathbf{G}$ 中的扭曲共轭（如 [KS99]所述）相当于$\mathbf{G}$-共轭˜ ˜ ˜在$\mathbf{G}$中。
$\mathbf{G}$ 在$\mathbf{G}$ 上的共轭作用也定义如下：对 $\delta = g\theta \in \mathbf{G}$,

$$[\delta] := [g] \circ \theta \colon \mathbf{G} \to \mathbf{G}.$$

注记 4.1。 我们认为，关于限制根的假设对于我们的研究目的——研究环面超尖点表示的扭曲特征——并无妨碍。众所周知，只有当$\mathbf{G}$ 含有一个类型为 A_{2n} 的因子，且 θ 在其上作用非平凡时，才会出现类型 2 或 3 的限制根； [KS99， （1.3.3）]。不过，例如，已知当$_{2n+1}$ 为这样的 θ时，GL θ 不存在 $p \neq 2$ -稳定的不可约超尖表示（[Pra99，命题 4]）。

我们回顾一下不可约可容许表示的扭曲（Harish-Chandra）特征的一些基础知识（更多详情参见 [LH17，第 2 节。6] ）。

令G_η 那么， $[\eta]$ 是$\mathbf{G}$的一个 F-有理自同构。回顾一下，对于作用在 $\mathbb{C}$-向量空间 V上的扭曲η，若 π 是 G 的一个不可约可容许表示，则其定义为以下作用

$$\pi^\eta(g) := \pi \circ [\eta](g) = \pi(\eta g \eta^{-1})$$

在同一表示空间 V上。若 π^η 与 π 作为 G的表示同构，我们称 π 是 η-稳定的。

设 π 是 η-稳定的 G 不可约可容许表示。我们固定一个交织算子

$$I_\pi^\eta \colon \pi \xrightarrow{\sim} \pi^\eta$$

（注意，由于 π 不可约，这样的 I_π^η 在相差一个 $\mathbb{C}^\times$ 倍的意义下是唯一的），并令

$$\tilde{\pi}(g\eta) := \pi(g) \circ I_\pi^\eta$$

对任意满足 $g \in G$ 的 $g\eta \in G$，令˜。于是我们在 π 的表示空间 V 上得到 G 的一个表示 $\tilde{\pi}$，即一个映射 $\tilde{\pi}\colon\ G \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V)$，满足以下关系˜对任意 $g_1,\ g_2 \in G$ 和 $\delta \in G$:

$$\tilde{\pi}(g_1 \cdot \delta \cdot g_2) = \pi(g_1) \circ \tilde{\pi}(\delta) \circ \pi(g_2).$$

˜对任意 $f \in C_c^\infty(G)$，在 V 上定义算子 $\tilde{\pi}(f)$ 如下:

$$\tilde{\pi}(f) := \int_{\tilde{G}} f(\delta)\tilde{\pi}(\delta)\, d\delta,$$

˜其中，$d\delta$ 是通过双射 $G \to G\colon\ g \mapsto g\eta$ 将 G 上的 Haar 测度 dg 转移到 G 上所得的测度。于是，与非扭曲情形一样，算子 $\tilde{\pi}$（f）是有限秩的，因此我们可以定义其迹。此外，所得的分布$f \mapsto \mathrm{tr}\ \tilde{\pi}(f)$ 在 $C_c^\infty(\tilde{G})$ 上已知是局部 L^1的。在这一设定下，π 的 (η-) 扭曲 (*Harish-Chandra*) 特征 $\Theta_{\tilde{\pi}}$ 被定义为 G_{rs} 上满足以下条件的唯一局部常值˜函数:

$$\mathrm{tr}\,\tilde{\pi}(f) = \int_{\tilde{G}_{\mathrm{rs}}} \Theta_{\tilde{\pi}}(\delta) f(\delta)\, d\delta$$

˜ ˜ ˜对于满足 $\mathrm{supp}(f) \subseteq G_{\mathrm{rs}}$ 的每个 $f \in C_c^\infty(G)$，其中 G_{rs} 表示 G 的正则˜半单元素集合。

我们强调，扭曲表示 $\tilde{\pi}$ 和扭曲特征 $\Theta_{\tilde{\pi}}$ 取决于 π 与 π^η 之间交织算子 I_π^η 的选择，尽管这种依赖性并未反映在符号 $\tilde{\pi}$中。

4.2. **扭曲极大环面**。我们将研究由$\mathbf{G}$的“扭曲极大环面”所产生的环面的˜超尖点表示 G的扭曲特征。$\mathbf{G}$ 的一个-有理扭曲极大环面是一个二元组 $(\mathbf{S},\ \mathbf{S})$，由

- 一个$\mathbf{S}$ 的$\mathbf{G}$ 中 F-有理极大环面，以及˜ ˜ ˜
- 一个$\mathbf{S}$的$\mathbf{G}$ 中 F-有理$\mathbf{S}$ -扭曲子空间（即$\mathbf{G}$ 的子簇，它在$\mathbf{S}$ $\subset\mathbf{G}$上的双$\mathbf{S}$作用下是一个˜ ˜双 $\mathbf{S}$-挠子）。

满足以下条件:

（1）存在 $\mathbf{G}$ 的一个博雷尔子群 $\mathbf{B_S}$（不一定是 F-有理的），其中包含 $\mathbf{S}$，并满足 $\mathbf{S} = \mathbf{N}_{\mathbf{G}}(\mathbf{S}) \cap \mathbf{N}_{\tilde{\mathbf{G}}}(\mathbf{B_S})$; ˜ ˜ ˜（2）$\mathbf{S}$ 的 F-值点集合 $S = \mathbf{S}(F)$ 非空。

˜ ˜当 $(\mathbf{S}, \mathbf{S})$ 是 $\mathbf{G}$ 的 F-有理扭曲极大环面时，我们通常简略地称其为“$\mathbf{S}$ 是 $\mathbf{G}$ 的 F-有理扭曲极大环面”。由条件 (1)，每个 $\eta \in \mathbf{S}$ 都通过共轭 $[\eta]$作用于 $\mathbf{S}$。由于 $\mathbf{S}$ 是交换的，这一作用与 η 的选取无关。我们用 $\theta_{\mathbf{S}}$ 表示 $\mathbf{S}$ 的这个自同构。注意，根据条件 (2)，我们可以取 η 为 F-有理的，因此 $\theta_{\mathbf{S}}$ 是 F-有理的。此外，由于 θ

是对合的，$\theta_{\mathbf{S}}$ 也如此（见 [Oi25，引理 3.3]）。我们定义 $\mathbf{S}^{\natural} := \mathbf{S}^{\theta_{\mathbf{S}},\circ}$。注意，对任意 $\eta \in \tilde{\mathbf{S}}$，都有 $\mathbf{S}^{\natural} = \mathbf{S}_{\eta} \subset \mathbf{G}_{\eta}$。

回忆，元素 $\delta \in \tilde{\mathbf{G}}$ 称为

- 半单，如果 $[\delta]$ 是准半单的，
- 正则半单，如果 δ 是半单的，且 $\mathbf{G}_{\delta}$ 是一个环面，并且
- 强正则半单，如果 δ 是半单的，且 $\mathbf{G}^{\delta}$ 是阿贝尔的

（参见 [KS99，第 3.2 节及 3.3]）。若一个 F-有理扭曲极大环面 $\tilde{\mathbf{S}}$ 属于 $\tilde{\mathbf{G}}$，则称其为椭圆的，如果 $\mathbf{S}^{\natural}$ 模 $\mathbf{A}_{\mathbf{G}}$ 是各向异性的，其中 $\mathbf{A}_{\mathbf{G}}$ 表示 $\mathbf{Z}_{\mathbf{G}}^{\theta}$ 的极大分裂子环面（注意，此条件弱于 S 为椭圆的条件；参见 [Oi25，注 3.7]）。若半单元 $\delta \in G$ 满足存在一个包含 δ 的 G 中的 F-有理椭圆扭曲极大环面 S，则称其为椭圆的。

下面我们总结扭曲极大环面的一些基本性质。

引理 *4.2*（[*Oi25*，引理 *3.8*]）。设 S 是 G 的一个 F-有理极大环面。若存在一个半单元 $\eta \in G$ 以及一个包含 S 的博雷尔子群 $B_{\mathbf{S}}$，使得 $(B_{\mathbf{S}}, S)$ 在 $[\eta]$ 下保持不变，则 $(S, S) := (S\eta, S)$ 是 (G, G) 的一个 F-有理扭曲极大环面。

命题 *4.3*（[*Oi25*，命题 *3.5*]）。对于 $\tilde{G}$ 的任意一个 F-有理扭曲极大环面 $\tilde{S}$，我们有 $Z_{\mathbf{G}}(S^{\natural}) = S$ 以及 $Z_{\mathbf{G}}(\tilde{S})^{\circ} = S^{\natural}$。此外，对于任意 $\eta \in \tilde{S}$，$G\eta$ 是一个以极大环面 $S^{\natural}$ 为极大环面的连通约化群（当 $\eta \in \tilde{S}$ 时，S 和 $G\eta$ 均为 F-有理）。

这里，连通中心化子 $\mathbf{G}_{\eta}$ 关于 $\eta \in S$ 的结构描述如下（更多细节见 [Wal08，第 3.3] 节）。设 S 是 G 的一个 F-有理扭曲极大环面，$\mathbf{B}_{\mathbf{S}}$ 是包含 S 且在 S 的作用下保持不变的一个博雷尔子群。取一个满足 $[g_{\mathbf{S}}](\mathbf{B}_{\mathbf{S}}, \mathbf{S}) = (\mathbf{B}, \mathbf{T})$ 的元素 $g_{\mathbf{S}} \in \mathbf{G}$ 后，我们得到一个同构 $[g_{\mathbf{S}}] : (\tilde{\mathbf{S}}, \mathbf{S}) \xrightarrow{\sim} (\tilde{\mathbf{T}}, \mathbf{T})$。注意，同构 $[g_{\mathbf{S}}] : \mathbf{S} \xrightarrow{\sim} \mathbf{T}$ 与 $g_{\mathbf{S}} \in \mathbf{G}$ 的选取无关，并且 S 上的自同构 $\theta_{\mathbf{S}}$ 通过 $[g_{\mathbf{S}}]$ 传递到 T 上的 θ，即 $\theta \circ [g_{\mathbf{S}}] = [g_{\mathbf{S}}] \circ \theta_{\mathbf{S}}$。

记

- $Y^*(\mathbf{T}) := X^*(\mathbf{T})/(X^*(\mathbf{T}) \cap (1-\theta)X^*(\mathbf{T})_{\mathbb{Q}})$ and
- $Y_*(\mathbf{T}) := X_*(\mathbf{T})/(X_*(\mathbf{T}) \cap (1-\theta)X_*(\mathbf{T})_{\mathbb{Q}})$.

我们将自然满射记作 $p^* : X^*(\mathbf{T}) \to Y^*(\mathbf{T})$ 和 $p_* : X_*(\mathbf{T}) \to Y_*(\mathbf{T})$。于是有如下结果：

(1) $Y^*(\mathbf{T}) \cong X^*(\mathbf{T}^{\theta, \circ})$ 是 $\mathbb{Z}$-对偶于 $X_*(\mathbf{T})^{\theta} \cong X_*(\mathbf{T}^{\theta, \circ})$；

(2) $Y_*(\mathbf{T})$ 是 $\mathbb{Z}$-对偶于 $X^*(\mathbf{T})^{\theta}$。

我们记 $\Theta := \langle\theta\rangle$。注意，$\Theta$ 在 $(\mathbf{G}, \mathbf{T})$ 上的作用诱导出在 $\Phi(\mathbf{G}, \mathbf{T})$ 上的作用。对于任意 $\alpha \in \Phi(\mathbf{G}, \mathbf{T})$，我们令 l_{α} 为 $\Phi(\mathbf{G}, \mathbf{T})$ 中 α 的 Θ-轨道的基数，并定义一个元素 $N(\alpha) \in \Phi(\mathbf{G}, \mathbf{T})$

$$N(\alpha) := \sum_{i=0}^{l_{\alpha}-1} \theta^i(\alpha) = \sum_{\beta \in \Theta(\alpha)} \beta.$$

我们也以相同方式定义任意 $\alpha^{\vee} \in \Phi^{\vee}(\mathbf{G}, \mathbf{T})$ 的 $l_{\alpha^{\vee}}$ 和 $N(\alpha^{\vee})$。对于 $\alpha \in \Phi(\mathbf{G}, \mathbf{T})$，我们简记为 $\alpha_{\mathrm{res}} := p^*(\alpha)$。我们定义集合 $\Phi_{\mathrm{res}}(\mathbf{G}, \mathbf{T})$ 如下：

$$\Phi_{\mathrm{res}}(\mathbf{G}, \mathbf{T}) = \{p^*(\alpha) \mid \alpha \in \Phi(\mathbf{G}, \mathbf{T})\} \subset Y^*(\mathbf{T}) \cong X^*(\mathbf{T}^{\theta, \circ}).$$

一般而言，$\Phi_{\mathrm{res}}(\mathbf{G},\mathbf{T})$ 构成一个（可能非约化的）根系。我们称 $\Phi_{\mathrm{res}}(\mathbf{G},\mathbf{T})$ 的元素为限制根。回忆一下，我们假设 $(\mathbf{G},\mathbf{T}\ \theta)$ 不含类型 2 或 3 的限制根；这意味着 $\Phi_{\mathrm{res}}(\mathbf{G},\mathbf{T})$ 是一个约化根系。

我们还定义集合 $\Phi^{\vee}_{\mathrm{res}}(\mathbf{G},\ \mathbf{T})$ 如下：

$$\Phi^{\vee}_{\mathrm{res}}(\mathbf{G},\mathbf{T}) = \{N(\alpha^{\vee}) \mid \alpha \in \Phi^{\vee}(\mathbf{G},\mathbf{T})\} \subset X_*(\mathbf{T})^{\theta} \cong X_*(\mathbf{T}^{\theta,\circ}).$$

于是我们得到双射

$$\Phi(\mathbf{G},\mathbf{T})/\Theta \xrightarrow{1:1} \Phi_{\mathrm{res}}(\mathbf{G},\mathbf{T})\colon \alpha \mapsto \alpha_{\mathrm{res}}\ (:= p^*(\alpha)),$$

$$\Phi^{\vee}(\mathbf{G},\mathbf{T})/\Theta \xrightarrow{1:1} \Phi^{\vee}_{\mathrm{res}}(\mathbf{G},\mathbf{T})\colon \alpha \mapsto N(\alpha).$$

(注意，$\Phi_{\mathrm{res}}(\mathbf{G},\ \mathbf{T})$ 和 $\Phi^{\vee}_{\mathrm{res}}(\mathbf{G},\ \mathbf{T})$ 在 Σ^{res} 和 $\check{}\Sigma^{\mathrm{res}}$ Wal08第 3 节中分别记为。3],)

˜现在设 η 是 S 的一个元素，并令 $\nu \in \mathbf{T}$ 为满足下述条件的元素：

$$[g_{\mathbf{S}}](\eta) = \nu\theta \in \tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{T}\theta.$$

于是 $[g_{\mathbf{S}}]$: G $\to$ G 在 (Gη, S$\natural$) 与 (G$_{\nu\theta}$, T$^{\theta}$,$\circ$) 之间诱导出一个同构。特别地，集合 Φ (Gη, S$\natural$) 和 $\Phi^{\vee}$(Gη, S$\natural$) 可分别与 Φ(G$_{\nu\theta}$, T$^{\theta}$,$\circ$) 和 $\Phi^{\vee}$(G$_{\nu\theta}$, T$^{\theta}$,$\circ$) 等同（注意，此处我们忽略伽罗瓦作用）。后两个集合可用限制根和余根描述如下：

$$\Phi(\mathbf{G}_{\nu\theta},\mathbf{T}^{\theta,\circ}) = \{p^*(\alpha) \mid \alpha \in \Phi(\mathbf{G},\mathbf{T}); N(\alpha)(\nu) = 1\} \subset \Phi_{\mathrm{res}}(\mathbf{G},\mathbf{T}),$$

$$\Phi^{\vee}(\mathbf{G}_{\nu\theta},\mathbf{T}^{\theta,\circ}) = \{N(\alpha^{\vee}) \mid \alpha^{\vee} \in \Phi^{\vee}(\mathbf{G},\mathbf{T}); N(\alpha)(\nu) = 1\} \subset \Phi^{\vee}_{\mathrm{res}}(\mathbf{G},\mathbf{T}).$$

注意，这些集合被视为 $X^*(\mathbf{T}^{\theta,\ \circ})$ 和 $X_*(\mathbf{T}^{\theta,\ \circ})$ 的子集。在同构 $[g_{\mathbf{S}}]$ 下，我们可以将 $\Phi(\mathbf{G}\eta,\ \mathbf{S}\natural)$ 和 $\Phi^{\vee}(\mathbf{G}\eta,\ \mathbf{S}\natural)$ 分别视为 $\Phi_{\mathrm{res}}(\mathbf{G},\ \mathbf{S})$ 和 $\Phi^{\vee}_{\mathrm{res}}(\mathbf{G},\ \mathbf{S})$ 的子集，其中关于 $(\mathbf{G},\ \mathbf{S})$ 的限制根和余根按与上文相同的方式定义。

4.3. **海森堡商的结构**。从现在起（直到第 4 节结束），假设如下：

- 一个 F-有理温和椭圆扭曲极大环面（$\mathbf{S},\mathbf{S}$），属于（$\tilde{\mathbf{G}},\mathbf{G}$），以及
- 一个深度为 $r \in \mathbb{R}_{>0}$ 的温和椭圆环面对（$\mathbf{S},\vartheta$），它是 η-不变的，即（$\mathbf{S}\ \vartheta$）$=$（$\mathbf{S}\ \vartheta$）$^{\eta}$:=（$[\eta]^{-1}$（$\mathbf{S}$）$\ \vartheta \circ [\eta]$），其中 $\eta \in \tilde{S}$。（注意，对于某个 $\eta \in S$，如果（$\mathbf{S}\ \vartheta$）是˜ ¬η-不变的，那么对于任意 $\eta \in S$ 也成立，反之亦然。）

正如我们将在下一小节看到的，与这样的（S ϑ）相关联的 G 的环面超尖点表示 $\pi_{(\mathbf{S},\vartheta)\tilde{}}$ 是 θ-稳定的（或者等价地，对于任意 $\eta \in S$，都是 η-稳定的）。本节的目的是给出 $\pi_{(\mathbf{S},\vartheta)}$ 的扭曲特征的显式公式。为此，我们首先需要指定一个将 $\pi_{(\mathbf{S},\vartheta)}$ 与其 η-扭曲 π^{η} (S ϑ) 联系起来的交织算子的选取，因为扭曲特征的定义取决于此（见第 4.1 节）。 [Oi25 第 6] 节中给出的这类交织算子的选取，基于与（S ϑ）相关联的海森堡群 J/N 的结构（符号见第 3.1 节），因此我们在此回顾相关内容。

固定一个有限温和分歧扩张 E，它是 F 的扩张并分裂$\mathbf{S}$，我们定义

$$\mathbf{V} := \mathrm{Lie}(\mathbf{S},\mathbf{G})(E)_{\mathbf{x},(r,s):(r,s+)} \quad \text{and} \quad V := \mathbf{V}^{\Gamma}.$$

于是我们有

$$J/J_+ \cong (S,G)_{\mathbf{x},(r,s):(r,s+)} = (\mathbf{S},\mathbf{G})(E)^{\Gamma}_{\mathbf{x},(r,s):(r,s+)}.$$

因此，指数映射 $\mathbf{Lie(S,G)}(E)_{\mathbf{x},(r,s):(r,s+)} \xrightarrow{\sim} \mathbf{(S,G)}(E)_{\mathbf{x},(r,s):(r,s+)}$ 诱导出一个同一化

$$V \xrightarrow{\sim} J/J_+.$$

让我们利用相对于 $\mathbf{G}$ 中极大环面 $\mathbf{S}$ 的 $\mathfrak{g}$ 的根空间分解，来研究空间 V。对于 $\alpha \in \Phi(\mathbf{G},\mathbf{S})$，我们令 $\mathbf{V}_\alpha$ 为 $\mathfrak{g}_\alpha(E) \cap \mathbf{Lie(S,G)}(E)_{\mathbf{x},(r,s)}$ 在 $\mathbf{Lie(S,G)}(E)_{\mathbf{x},(r,s):(r,s+)}$ 中的像。于是，根空间分解 $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{s} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Phi(\mathbf{G},\mathbf{S})} \mathfrak{g}_\alpha$ 自然诱导出一个分解

$$\mathbf{V} = \bigoplus_{\alpha\in\Phi(\mathbf{G},\mathbf{S})} \mathbf{V}_\alpha.$$

对于每个 $\alpha \in \Phi(\mathbf{G},\mathbf{S})$，我们令 $V_\alpha := \mathbf{V}_\alpha^{\Gamma_\alpha}$（回忆一下，$\Gamma_\alpha$ 是 Γ 中 α 的稳定子）。这里请注意，$\mathbf{V}_\alpha$ 和 V_α 可能根据 $\alpha \in \Phi(\mathbf{G},\mathbf{S})$ 的不同而为零。我们定义 $\Xi(\mathbf{G},\mathbf{S})$ 的一个子集，它包含于 $\Phi(\mathbf{G},\mathbf{S})$，定义如下：

$$\Xi(\mathbf{G},\mathbf{S}) := \{\alpha \in \Phi(\mathbf{G},\mathbf{S}) \mid V_\alpha \neq 0\}.$$

注意，对于任意 $\alpha \in \Xi(\mathbf{G},\mathbf{S})$，空间 V_α（非典范地）同构于 F_α 的剩余域 k_α。还要注意，$\Xi(\mathbf{G},\mathbf{S})$ 在 $\Phi(\mathbf{G},\mathbf{S})$ 上的 $\Sigma = \Gamma \times \{\pm 1\}$ 作用下保持不变。下文中，我们简记 $\Xi(\mathbf{G},\mathbf{S})$ 为 Ξ。可以验证，集合 Ξ 不包含任何对称分歧根（参见 [Oi25，引理 6.2]）。

˙对于 $\dot\alpha \in \Phi(\mathbf{G},\mathbf{S})$，我们定义

$$\mathbf{V}_{\dot\alpha} := \bigoplus_{\beta\in\dot\alpha} \mathbf{V}_\beta \quad \text{and} \quad V_{\dot\alpha} := \mathbf{V}_{\dot\alpha}^{\Gamma}.$$

˙于是，对于任意 $\dot\alpha \in \Phi(\mathbf{G},\mathbf{S})$，有

$$V_\alpha \xrightarrow{\sim} V_{\dot\alpha} = \Big(\bigoplus_{\beta\in\dot\alpha} \mathbf{V}_\beta\Big)^{\Gamma} : X_\alpha \mapsto \sum_{\sigma\in\Gamma/\Gamma_\alpha} \sigma(X_\alpha).$$

因此得到

$$V \cong \bigoplus_{\dot\alpha\in\dot\Xi} V_{\dot\alpha} = \bigoplus_{\ddot\alpha\in\ddot\Xi} V_{\ddot\alpha}, \tag{6}$$

其中，对 $\alpha \in \Xi_{\mathrm{asym}}$，我们定义 $V_{\ddot\alpha} := V_{\dot\alpha} \oplus V_{-\dot\alpha}$；对 $\alpha \in \Xi_{\mathrm{sym}}$，我们定义 $V_{\ddot\alpha} := V_{\dot\alpha}$。

回忆一下，由于 $V \cong J/J_+$ 具有辛 $\mathbb{F}_p$-向量的结构

$$(J/J_+) \times (J/J_+) \to \mu_p \cong \mathbb{F}_p : (g,g') \mapsto \hat\vartheta([g,g'])$$

（参见第 3.1 节）。事实上，上述分解（6）给出了 的一个正交分解，其子空间为辛子空间。关于各个辛子空间的详细描述，请参见 [Oi25，第 6 节。1] $V_{\ddot\alpha}$。

˜现在令 $\eta \in S$ 表示任意拓扑半单元素，即˜在 $S/A_{\tilde{\mathbf{G}}}$ 中的 η 阶数有限且与p互素。

回顾一下，在第 4.2 节中，我们引入了限制根的概念。更˜确切地说，$[\eta]$ 对 $\mathfrak{g}$ 的作用（对任意 $\eta \in S$）在 $\Phi(\mathbf{G},\mathbf{S})$˜的集合上诱导出一个 2 阶作用。由于该作用不依赖于 $\eta \in S$的选取，我们滥用记号，将此作用记为$\theta_{\mathbf{S}}$，并将由$\theta_{\mathbf{S}}$生成的群 $\langle\theta_{\mathbf{S}}\rangle$记为 $\Theta_{\mathbf{S}}$。具体而言，对于任意 $\alpha \in \Phi(\mathbf{G},\mathbf{S})$，$\theta_{\mathbf{S}}(\alpha)$是由 $\theta_{\mathbf{S}}(\alpha) = \alpha \circ [\eta]^{-1}$给出的根。只要不致引起混淆，我们甚至将 $\theta_{\mathbf{S}}(\alpha)$简写为 $\theta(\alpha)$（并将 Θ 记为 $\Theta_{\mathbf{S}}$）。注意，对于 $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$，$[\eta](X_\alpha)$属于$\mathfrak{g}_{\theta(\alpha)}$。我们还注意到，由于 η是 F-有理的，$\Theta_{\mathbf{S}}$和 $\Sigma = \Gamma \times \{\pm 1\}$在 $\Phi(\mathbf{G},\mathbf{S})$上的作用

彼此可交换。特别是， $\Theta_{\mathbf{S}}$保持 $\Phi(\mathbf{G},\mathbf{S})$的对称性。每个限制根 $\alpha_{\mathrm{res}} \in \Phi_{\mathrm{res}}(\mathbf{G},\mathbf{S})$自然对应于 $\Phi(\mathbf{G},\mathbf{S})$中 α 的 $\Theta_{\mathbf{S}}$-轨道 $\Theta_{\mathbf{S}}\alpha$：

$$\Phi(\mathbf{G},\mathbf{S}) \twoheadrightarrow \Phi(\mathbf{G},\mathbf{S})/\Theta_{\mathbf{S}} \xrightarrow{1:1} \Phi_{\mathrm{res}}(\mathbf{G},\mathbf{S}) \colon \alpha \mapsto \alpha_{\mathrm{res}}.$$

注意到，由于 $\Phi_{\mathrm{res}}(\mathbf{G},\mathbf{S})$ 携带由 $\Phi(\mathbf{G},\mathbf{S})$ 上的伽罗瓦作用诱导的伽罗瓦作用，我们也可以讨论限制根的对称性。对于任意 $\alpha \in \Phi(\mathbf{G},\mathbf{S})$，我们将 $\Gamma_{\alpha_{\mathrm{res}}}$ 定义为 Γ 中限制根 α_{res} 的稳定子（或者等价地， α的$\Theta_{\mathbf{S}}$-轨道 $\Theta_{\mathbf{S}}\alpha$ ）：

$$\Gamma_{\alpha_{\mathrm{res}}} := \{\sigma \in \Gamma \mid \sigma(\alpha_{\mathrm{res}}) = \alpha_{\mathrm{res}}\} = \{\sigma \in \Gamma \mid \sigma(\Theta_{\mathbf{S}}\alpha) = \Theta_{\mathbf{S}}\alpha\}.$$

同样，我们将 $\Gamma_{\pm\alpha_{\mathrm{res}}}$ 定义为 Γ 中集合 $\{\pm\alpha_{\mathrm{res}}\}$的稳定子：

$$\Gamma_{\pm\alpha_{\mathrm{res}}} := \{\sigma \in \Gamma \mid \sigma(\{\pm\alpha_{\mathrm{res}}\}) = \{\pm\alpha_{\mathrm{res}}\}\} = \{\sigma \in \Gamma \mid \sigma(\{\pm\Theta_{\mathbf{S}}\alpha\}) = \{\pm\Theta_{\mathbf{S}}\alpha\}\}.$$

令 $F_{\alpha_{\mathrm{res}}}$ 和 $F_{\pm\alpha_{\mathrm{res}}}$ 分别表示由 $\Gamma_{\alpha_{\mathrm{res}}}$ 和 $\Gamma_{\pm\alpha_{\mathrm{res}}}$固定的 F 的子域。

$$\begin{array}{ccc} F_{\alpha_{\mathrm{res}}} & \subset & F_{\alpha} \\ \cup & & \cup \\ F_{\pm\alpha_{\mathrm{res}}} & \subset & F_{\pm\alpha} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \Gamma_{\alpha_{\mathrm{res}}} & \supset & \Gamma_{\alpha} \\ \cap & & \cap \\ \Gamma_{\pm\alpha_{\mathrm{res}}} & \supset & \Gamma_{\pm\alpha} \end{array}$$

如第 4.2 节所述，群 $\mathbf{G}^{\eta}$ 是一个连通约化群，具有极大环面 $\mathbf{S}^{\natural}$。此外， $\Phi(\mathbf{G}^{\eta},\mathbf{S}^{\natural})$ 可视为集合$\Phi_{\mathrm{res}}(\mathbf{G},\mathbf{S})$ 的子集。根据 [Oi25，命题 5.6]，，点 $\mathbf{x}$ 可视为$\mathcal{A}(\mathbf{S}^{\natural},F)$ $\subset \mathcal{B}(\mathbf{G}^{\eta},F)$中的一个点。我们以与 J（分别为 J_{+}）相同的方式引入子群 J_{η}（分别为 $J_{\eta,+}$），但使用 $(\mathbf{G}^{\eta},\mathbf{S}^{\natural},\mathbf{x}\ r,s(+))$ 替代 $(\mathbf{G},\mathbf{S},\mathbf{x}\ r,s(+))$，即，

$$J_{\eta} := (S^{\natural},G_{\eta})_{\mathbf{x},(r,s)} \quad \text{and} \quad J_{\eta,+} := (S^{\natural},G_{\eta})_{\mathbf{x},(r,s+)}.$$

根据上述相同的讨论，如果令

$$\mathbf{V}_{\eta} := \mathrm{Lie}(\mathbf{S}_{\eta},\mathbf{G}_{\eta})(E)_{\mathbf{x},(r,s):(r,s+)} \quad \text{and} \quad V_{\eta} := \mathbf{V}_{\eta}^{\Gamma}$$

那么我们有$J_{\eta}/J_{\eta,+} \cong V_{\eta}$ 以及类似于（6）的根空间分解：

$$V_{\eta} \cong \bigoplus_{\ddot{\alpha}_{\mathrm{res}} \in \ddot{\Xi}_{\eta}} V_{\eta,\ddot{\alpha}_{\mathrm{res}}},$$

其中我们使用与第4.3节中以相同方式定义的记号，例如，

$$\Xi_{\eta} := \Xi(\mathbf{G}_{\eta},\mathbf{S}^{\natural}) := \{\alpha_{\mathrm{res}} \in \Phi(\mathbf{G}_{\eta},\mathbf{S}^{\natural}) \mid V_{\eta,\alpha_{\mathrm{res}}} \neq 0\}.$$

我们有一个自然的同一化

$$V_{\eta} \cong (S^{\natural},G_{\eta})_{\mathbf{x},(r,s):(r,s+)} \cong (S,G)^{\eta}_{\mathbf{x},(r,s):(r,s+)} \cong V^{\eta},$$

其中 $(S,\ G)^{\eta}{}_{\mathbf{x},\ (r,\ s):\ (r,\ s+)}$ 以及 V^{η} 分别表示 $(S,\ G)_{\mathbf{x},\ (r,s):(r,s+)}$和 V 中的 $[\eta]$-不动点集合。下面让我们更精确地研究这一同一化。

$\mathbf{G}^{\eta}$ 的李代数 $\mathfrak{g}_{\eta}$ 自然地同一化为$\mathbf{G}$的李代数 $\mathfrak{g}$ 的 $[\eta]$-不动点 $\mathfrak{g}^{\eta}$ 。如果 $\alpha_{\mathrm{res}} \in \Phi(\mathbf{G}^{\eta},\mathbf{S}^{\natural})$ 是由$\alpha \in \Phi(\mathbf{G},\mathbf{S})$ 得到的限制根，那么 $\mathfrak{g}_{\eta}$ 的根子空间 $\mathfrak{g}_{\eta,\alpha_{\mathrm{res}}}$ 同一化为 $\mathfrak{g}$的根子空间之和 $\bigoplus_{\alpha' \in \Theta\alpha} \mathfrak{g}_{\alpha'}$ 中的 $[\eta]$-不动点：

$$\mathfrak{g}_{\eta,\alpha_{\mathrm{res}}} \cong \Big(\bigoplus_{\alpha' \in \Theta\alpha} \mathfrak{g}_{\alpha}\Big)^{\eta}.$$

这诱导出一个同一化

$$V_{\eta,\ddot{\alpha}_{\mathrm{res}}} \cong \Big(\bigoplus_{\ddot{\beta}\in\Sigma\setminus(\Sigma\times\Theta)\alpha} V_{\ddot{\beta}} \Big)^{\eta}$$

对任意 $\alpha_{\mathrm{res}} \in \Xi_\eta$。令 $V_{\Theta(\ddot{\alpha})} := \bigoplus_{\ddot{\beta}\in\Sigma\setminus(\Sigma\times\Theta)\alpha} V_{\ddot{\beta}}$。特别地，令$\Xi_{\mathrm{res}}$ 为与 Ξ相关联的限制根集，则集合 Ξ_η 可视为限制根 $\alpha_{\mathrm{res}} \in \Xi_{\mathrm{res}}$ 的集合，其中 $[\eta]$-作用在 $V_{\Theta(\ddot{\alpha})}$中有非零不动点。

$$\begin{array}{ccccccc}
\Phi(\mathbf{G},\mathbf{S}) & \twoheadrightarrow & \Phi(\mathbf{G},\mathbf{S})/\Theta_{\mathbf{S}} & \xrightarrow{1:1} & \Phi_{\mathrm{res}}(\mathbf{G},\mathbf{S}) & \supset & \Phi(\mathbf{G}_\eta,\mathbf{S}^\natural) \\
\cup & & \cup & & \cup & & \cup \\
\Xi & \twoheadrightarrow & \Xi/\Theta_{\mathbf{S}} & \xrightarrow{1:1} & \Xi_{\mathrm{res}} & \supset & \Xi_\eta
\end{array}$$

4.4. **环面超尖点表示的交织算子**。在上一小节中，我们已固定

- 一个 F-有理的温和椭圆扭曲极大环面 $(\mathbf{S},\mathbf{S})$ $(\mathbf{G},\tilde{\mathbf{G}})$，以及
- 一个深度为 $r \in \mathbb{R}_{>0}$、η-不变的温和椭圆环面对 $(\mathbf{S},\vartheta)$，即 $(\mathbf{S},\vartheta) = (\mathbf{S},\vartheta)^\eta$，其中 $\eta \in S$。

回顾第3.1 节，$\pi_{(\mathbf{S},\vartheta)}$ 定义为某个开紧模中心子群$K = SJ$ 的表示$\rho_{(\mathbf{S},\vartheta)}$ 的紧诱导 $\mathrm{c\text{-}Ind}_K^G \rho_{(\mathbf{S},\vartheta)}$。因此，$\eta$-扭曲表示 $\pi^\eta{}_{(\mathbf{S},\vartheta)}$ 同构于由 $\eta^{-1}K\eta = K$ 到 G的$\rho^\eta{}_{(\mathbf{S},\vartheta)}$ 的紧诱导，其显式交织算子如下：

$$\mathrm{c\text{-}Ind}_K^G \rho^\eta_{(\mathbf{S},\vartheta)} \xrightarrow{\sim} (\mathrm{c\text{-}Ind}_K^G \rho_{(\mathbf{S},\vartheta)})^\eta = \pi^\eta_{(\mathbf{S},\vartheta)} : f \mapsto f\circ[\eta]^{-1}. \tag{1}$$

我们来考察表示$\rho^\eta{}_{(\mathbf{S},\vartheta)}$ 与$\rho_{(\mathbf{S},\vartheta)}$ 之间的关系，它们属于K。$\rho_{(\mathbf{S},\vartheta)}$ 的表示 K 定义为表示$\omega_{(\mathbf{S},\vartheta)} \otimes (\vartheta \ltimes \mathbb{1})$沿自然乘法映射 $S \ltimes J \twoheadrightarrow SJ$的推出。因此，$\rho^\eta{}_{(\mathbf{S},\vartheta)}$ 是 $\omega^\eta{}_{(\mathbf{S},\vartheta)} \otimes (\vartheta^\eta \ltimes \mathbb{1})$沿 $S \ltimes J \twoheadrightarrow SJ$的推出。注意，$\omega^\eta{}_{(\mathbf{S},\vartheta)}$ 与$\omega_{(\mathbf{S},\vartheta)}$ 都是中心特征为$\hat{}\vartheta^\eta = \hat{}\vartheta$的海森堡–韦伊表示。因此，根据 Stone–von Neumann定理，$\omega^\eta{}_{(\mathbf{S},\vartheta)}$ 与$\omega_{(\mathbf{S},\vartheta)}$同构。我们固定一个交织算子

$$I^\eta_{\omega_{(\mathbf{S},\vartheta)}} : \omega_{(\mathbf{S},\vartheta)} \xrightarrow{\sim} \omega^\eta_{(\mathbf{S},\vartheta)},$$

它自然诱导出一个交织算子

$$I^\eta_{\rho_{(\mathbf{S},\vartheta)}} : \rho_{(\mathbf{S},\vartheta)} \xrightarrow{\sim} \rho^\eta_{(\mathbf{S},\vartheta)}.$$

于是，我们得到一个从 $\mathrm{c\text{-}Ind}_K^G \rho_{(\mathbf{S},\vartheta)}$ 到 $\mathrm{c\text{-}Ind}_K^G \rho^\eta{}_{(\mathbf{S},\vartheta)}$ 的交织算子，其定义为

$$\mathrm{c\text{-}Ind}_K^G \rho_{(\mathbf{S},\vartheta)} \xrightarrow{\sim} \mathrm{c\text{-}Ind}_K^G \rho^\eta_{(\mathbf{S},\vartheta)} : f \mapsto I^\eta_{\rho_{(\mathbf{S},\vartheta)}} \circ f. \tag{2}$$

因此，结合 (1) 与 (2)，我们得到一个交织算子 $I^\eta_{\pi_{(\mathbf{S},\vartheta)}}$，其作用于 $\pi_{(\mathbf{S},\vartheta)}$ 与 $\pi^\eta{}_{(\mathbf{S},\vartheta)}$ 之间，定义为 $f \mapsto I^\eta_{\rho_{(\mathbf{S},\vartheta)}} \circ f \circ [\eta]^{-1}$：

$$\pi_{(\mathbf{S},\vartheta)} = \mathrm{c\text{-}Ind}_K^G \rho_{(\mathbf{S},\vartheta)} \xrightarrow{(2)} \mathrm{c\text{-}Ind}_K^G \rho^\eta_{(\mathbf{S},\vartheta)} \xrightarrow{(1)} (\mathrm{c\text{-}Ind}_K^G \rho_{(\mathbf{S},\vartheta)})^\eta = \pi^\eta_{(\mathbf{S},\vartheta)}.$$

我们强调，尚未指定海森堡–外尔表示的交织算子 $I^\eta_{\omega_{(\mathbf{S},\vartheta)}}$的选取。

从现在起，我们固定一个拓扑半单的“基点” $\eta \in S$ 。请注意，我们总能找到这样的元素：先任取一个元素 $\eta \in S$，再将其替换为拓扑 Jordan 分解意义下的拓扑半单部分。下文将说明我们为该元素η选取交织算子 $I^{\eta}_{\omega(\mathbf{S},\vartheta)}$ 的方式。

我们来考察作用 $[\eta]$ 通过 J/J_+ 这一同构 $V \cong J/J_+$以及 V的分解（6）。注意， $[\eta]$ 保持 V的辛结构。事实上，对于任意 g， $g' \in J/J_+$，我们有

$$\hat{\vartheta}([[\eta](g),[\eta](g')]) = \hat{\vartheta}([\eta g \eta^{-1}, \eta g' \eta^{-1}]) = \hat{\vartheta}([\eta]([g,g'])) = \hat{\vartheta}([g,g']).$$

此外，每个 $V_{\ddot{\alpha}}$ 分别映射到 $V_{\theta(\ddot{\alpha})}$。特别地，$\Theta_{\mathbf{S}}$ 在 $\Phi(\mathbf{G},\mathbf{S})$ 上的作用保持 Ξ。

与第 4.2 节一样，对于任意 $\alpha \in \Phi(\mathbf{G},\mathbf{S})$，我们令 l_α 表示 $\Theta_{\mathbf{S}}$ 对 α 的轨道大小。我们还引入一个记作 m_α 的数，如下定义：

定义 4.4。对于 $\alpha \in \Phi(\mathbf{G},\mathbf{S})$，令 m_α 为 $\Sigma\backslash(\Sigma \times \Theta_{\mathbf{S}})\alpha$的阶。换言之， m_α 是满足 $\theta^{m_\alpha}(\ddot{\alpha}) = \ddot{\alpha}$ （因此 $m_\alpha \mid l_\alpha$）的最小正整数。

对于 $\ddot{\alpha} \in \Xi$，我们将 $(\omega_{\ddot{\alpha}},\ W_{\ddot{\alpha}})$ 记为 $\mathrm{Sp}(V_{\ddot{\alpha}}) \ltimes \mathbb{H}(V_{\ddot{\alpha}})$ 的海森堡–韦伊表示，其中心特征由 ϑ 给出，并且在同构意义下唯一。由于作用 $[\eta]$ 在 V 上诱导了从 $V_{\ddot{\alpha}}$ 到 $V_{\theta(\ddot{\alpha})}$ 的辛同构，因此诱导出一个从 $\mathrm{Sp}(V_{\ddot{\alpha}}) \ltimes \mathbb{H}(V_{\ddot{\alpha}})$ 到 $\mathrm{Sp}(V_{\theta(\ddot{\alpha})}) \ltimes \mathbb{H}(V_{\theta(\ddot{\alpha})})$ 的同构（记作 $[\eta]_*$）。于是，通过 $[\eta]_*$ 将 $\mathrm{Sp}(V_{\theta(\ddot{\alpha})}) \ltimes \mathbb{H}(V_{\theta(\ddot{\alpha})})$ 的海森堡 – 韦伊表示$W_{\theta(\ddot{\alpha})}$拉回到 $\mathrm{Sp}(V_{\ddot{\alpha}}) \ltimes \mathbb{H}(V_{\ddot{\alpha}})$ 所得的表示 $(\omega^{\eta}_{\theta(\ddot{\alpha})}, W_{\theta(\ddot{\alpha})})$，与 $(\omega_{\ddot{\alpha}},\ W_{\ddot{\alpha}})$ 同构。对每个 $\ddot{\alpha} \in \Xi$，我们固定一个交织算子

$$I^{\eta}_{\ddot{\alpha}} \colon \omega_{\ddot{\alpha}} \xrightarrow{\sim} \omega^{\eta}_{\theta(\ddot{\alpha})}$$

如下。若令

$$I^{\eta}_{\Theta(\ddot{\alpha})} := I^{\eta}_{\theta^{m_\alpha - 1}(\ddot{\alpha})} \circ \cdots \circ I^{\eta}_{\ddot{\alpha}},$$

那么 $I^{\eta}_{\Theta(\ddot{\alpha})}$ 是 $W_{\ddot{\alpha}}$ 的一个自同构，使得

$$\begin{array}{ccc} W_{\ddot{\alpha}} & \xrightarrow{I^{\eta}_{\Theta(\ddot{\alpha})}} & W_{\ddot{\alpha}} \\ {\scriptstyle \omega_{\ddot{\alpha}}(g,h)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \omega_{\ddot{\alpha}}([\eta]_*^{m_\alpha}(g,h))} \\ W_{\ddot{\alpha}} & \xrightarrow[I^{\eta}_{\Theta(\ddot{\alpha})}]{} & W_{\ddot{\alpha}} \end{array}$$

对任意 $(g,\ h) \in \mathrm{Sp}(V_{\ddot{\alpha}}) \ltimes \mathbb{H}(V_{\ddot{\alpha}})$，它都是交换的。注意， $[\eta]^{m_\alpha}$ 是保持 $V_{\ddot{\alpha}}$ 的 V 的辛自同构。因此，$I^{\eta}_{\Theta(\ddot{\alpha})}$ 必须是海森堡 –韦伊作用 $\omega_{\ddot{\alpha}}([\eta]^{m_\alpha})$ 的一个标量倍。我们为每个 $\ddot{\alpha} \in \Xi$ 选取 $I^{\eta}_{\ddot{\alpha}}$，使得

$$I^{\eta}_{\Theta(\ddot{\alpha})} = \omega_{\ddot{\alpha}}([\eta]^{m_\alpha}).$$

（这一选择仍未能唯一确定每个 $I^{\eta}_{\ddot{\alpha}}$，但这种不确定性不影响以下讨论。）

回顾一下，表示 $\omega = \omega_{(\mathbf{S},\vartheta)}$ 是 $\mathrm{Sp}(V) \ltimes \mathbb{H}(V)$ 的海森堡–韦伊表示 $\hat{}$，其中心特征为 ϑ。由于我们有分解 (6)，ω 可以通过对海森堡–韦伊表示取张量积来实现 $\omega_{\ddot{\alpha}}$，其中 $\ddot{\alpha} \in \Xi$。

此外，将固定的交织算子 $I_{\vec{\alpha}}^{\eta}$ 取张量积，可得到一个交织算子，它连接ω 与其 $[\eta]_*$-扭曲 ω^{η}。我们将以此方式得到的交织算子记为 I_{ω}^{η}：

$$I_{\omega}^{\eta} = I_{\omega_{(\mathbf{S},\vartheta)}}^{\eta} : \omega_{(\mathbf{S},\vartheta)} \xrightarrow{\sim} \omega_{(\mathbf{S},\vartheta)}^{\eta}.$$

现在我们得到了一个交织算子 $I_{\pi_{(\mathbf{S},\vartheta)}}^{\eta}$，它位于$\pi_{(\mathbf{S},\vartheta)}$ 与其$[\eta]_*$-扭曲π^{η} $_{(\mathbf{S},\vartheta)}$ 之间。令 $\Theta_{\tilde{\pi}_{(\mathbf{S},\vartheta)}}$ 为相对于 $I_{\pi_{(\mathbf{S},\vartheta)}}^{\eta}$的$\pi_{(\mathbf{S},\vartheta)}$ 的扭曲特征。

4.5. **扭曲空间中的良好乘积展开**。 在开始讨论扭曲特征 $\Theta_{\tilde{\pi}_{(\mathbf{S},\vartheta)}}$的显式公式之前，我们还将介绍 Adler 和 Spice 的良好乘积展开理论的扭曲版本 [AS08] （详见[Oi25，第 3 节。4]）。

我们首先回顾非扭曲情形下 p-进群元素的良好乘积展开的定义。暂时令$\mathbf{G}$为 F 上的任意温和分歧的连通约化群。令$\mathbf{G}$ 表示群$\mathbf{G}$ 关于$\mathbf{G}$的中心$\mathbf{Z}_{\mathbf{G}}$ 的单位连通分支的商$\mathbf{G}/\mathbf{Z}_{\mathbf{G}}^{\circ}$ 。

定义 4.5（[AS08，定义 4.11 和 6.1]）。(1) 若元素$\gamma \in G$ 为零深度良好元素，则称其为零深度良好元素，当且仅当 γ 是半单的，且其在 G 中的像 $\bar{\gamma}$ 是绝对半单的，即 $\bar{\gamma}$ 的每个特征值（见 [AS08，定义 A.4]）的阶都是有限且与素数 p 互素。(2) 对于 $d \in \mathbb{R}_{>0}$，若存在一个 F-有理的中心模温和环面 S $\subset$ G，使得元素 $\gamma \in G$ 是深度为 d 的良好元素，并且

- $\gamma \in S_d \smallsetminus S_{d+}$，且
- 对每个 $\alpha \in \Phi(\mathbf{G}, \mathbf{S})$， $\alpha(\gamma) = 1$ 或 $\mathrm{val}_F(\alpha(\gamma) - 1) = d$。

定义 4.6 （[AS08，定义 6.4]）。对于 $r \in \mathbb{R}$，若序列 $\gamma = (\gamma_i)_{0 \le i < r}$ 是 G 中由实数索引的元素序列 $0 \le i < r$，则称其为良好序列，如果

- γ_i 是深度为 i 的良好 $0 \le i < r$中的 1，且
- 存在一个 F-有理的温和环面 $\mathbf{S} \subset \mathbf{G}$，使得对每个$0 \le i < r$都有 $\gamma_i \in S$。

对于良好序列 $\gamma = (\gamma_i)_{0 \le i < r}$，我们如下将 $\mathbf{G}$ 的子群与 γ 相关联：

$$C_{\mathbf{G}}^{(r)}(\gamma) := \Big(\bigcap_{0 \le i < r} \mathbf{Z}_{\mathbf{G}}(\gamma_i) \Big)^{\circ}, \quad Z_{\mathbf{G}}^{(r)}(\gamma) := \mathbf{Z}_{C_{\mathbf{G}}^{(r)}(\gamma)}.$$

定义 4.7 ([AS08，定义 6.8])。对于 $\gamma \in G$，如果存在点 $\mathbf{x} \in \mathcal{B}(C^{(r)}{}_{\mathbf{G}}(\gamma), F)$ 满足 $\gamma \in (\prod_{0 \le i < r} \gamma_i) G_{\mathbf{x}, r}$，则良好序列$\gamma = (\gamma_i)_{0 \le i < r} (r \in \tilde{\mathbb{R}}_{>0})$称为到 γ的 r-近似。当有 $\gamma \in C^{(r)}{}_{\mathbf{G}}(\gamma)$时，我们称 γ 是到 γ的正规 r-近似。

当我们有到 γ的正规 r-近似 γ 时，令

$$\gamma_{<r} := \prod_{0 \le i < r} \gamma_i, \quad \gamma_{\ge r} := \gamma \cdot \gamma_{<r}^{-1}$$

并简单地说“$\gamma = \gamma_{<r} \cdot \gamma_{\ge r}$ 是一个正规 r-逼近”。注意，当 $\gamma = \gamma_{<r} \cdot \gamma_{\ge r}$ 是一个正规 r-逼近时， $\gamma_{\ge r}$与 $\gamma_{<r}$ 可交换。

现在我们转向扭曲空间的情形。设 $(\mathbf{G}, \theta)$ 如第4.1节所述。特别地，我们有一个扭曲空间 $\tilde{\mathbf{G}} = \mathbf{G}\theta$。令 $\mathbf{G}^{\dagger} := \mathbf{G} \rtimes \langle\theta\rangle$。注意，这是一个非连通约化群，其单位连通分支为$\mathbf{G}$

˜而非恒等单位连通分支由 $\mathbf{G}$ 给出。回顾一下，$\mathbf{A}_{\tilde{\mathbf{G}}}$ 是 $\mathbf{Z}^{\theta}_{\mathbf{G}}$ 的极大分裂子环面。为了将 Adler–Spice 理论推广到 $\mathbf{G}^{\dagger}$，我们采用 Spice 的拓扑 Jordan 分解。

定义 4.8 ([Spi08，定义 1.6])。 对于 $\gamma \in G^{\dagger}$，我们称一对 (γ_0, γ_+) 的元素属于一个拓扑 *p-Jordan* 分解模 $A_{\tilde{\mathbf{G}}}$ γ，如果

- $\gamma = \gamma_0\gamma_+ = \gamma_+\gamma_0$，
- γ_0 是模 A ˜$\mathbf{G}$绝对 p-半单的，也就是说，γ_0 在 $G^{\dagger}/A$ ˜$\mathbf{G}$中的像 $\bar{\gamma}_0$ 具有有限的、与 p互素的阶，并且
- γ_+ 是模 A ˜$\mathbf{G}$拓扑 p-幺正的，也就是说，γ_+ 在$G^{\dagger}/A$ ˜$\mathbf{G}$ 中的像 $\bar{\gamma}_+$ 满足 $\lim_{n\to\infty} \bar{\gamma}_+^{p^n} = 1$。

在本文中，我们将模 $A_{\tilde{\mathbf{G}}}$的拓扑 p-Jordan 分解简称为拓扑 *Jordan* 分解。同样地，当元素 γ 模 A ˜$\mathbf{G}$ 绝对 p-半单（分别为模 $A_{\tilde{\mathbf{G}}}$拓扑 p-幺正）时，只要没有混淆的风险，我们通常就简称 γ 为拓扑半单（分别为拓扑幺正）。

˜**定义 4.9**。 设 $\delta \in G$ 为椭圆半单元素。 δ $(r \in \mathbb{R}_{>0})$的正规 r-˜近似是一个二元组（$\delta = \delta_0\delta_+$， δ_+），其中

- 一个 δ 的拓扑 Jordan 分解 $\delta = \delta_0\delta_+$，满足 $\delta_0 \in G$ 和 $\delta_+ \in G_{\delta_0,\ 0+}$，以及
- 一个 r-近似 δ_+ =$(\delta_i)_{0<i<r}$，它是 G_{δ_0} 中 δ_+ 的正规近似。

对于温和椭圆半单元 $\delta \in G$ 的正规 r-近似（$\delta = \delta_0\delta_+$， δ_+），记

$$\delta^{+}_{<r} := \prod_{0<i<r} \delta_i, \quad \delta_{<r} := \prod_{0\le i<r} \delta_i, \quad \delta_{\ge r} := \delta^{-1}_{<r}\delta,$$

$$C^{(r)}_{\mathbf{G}}(\delta) := C^{(r)}_{\mathbf{G}_{\delta_0}}(\delta_+).$$

当（$\delta = \delta_0\delta_+$， δ_+）是 δ 的正规 r-近似时，我们通常简单地说：“$\delta = \delta_0\delta^{+}_{<r}\delta_{\ge r}$ 是 δ 的正规 r-近似”。

命题 4.10 ([Oi25，命题 3.20])。 假设 $\mathbf{G}$ 是温和分歧的，且 p 不整除 $\mathbf{G}$ 的绝对魏尔群的阶。则任意椭圆˜半单元素 $\delta \in G$ 都有一个正规 r-近似。

˜**引理 4.11** ([Oi25，引理 3.22])。 设 $\delta \in G$ 是一个具有正规 r-近似 $\delta = \delta_0\delta^{+}_{<r}\delta_{\ge r}$的温和椭圆半单元素。那么我们有

$$(\mathbf{G}_{\delta_0})_{\delta^{+}_{<r}} = \mathbf{G}_{\delta_{<r}}$$

4.6. 扭曲特征标公式。 现在我们说明环面超尖点表示 $\pi_{(\mathbf{S},\vartheta)}$ 的扭曲特征 $\Theta_{\tilde{\pi}_{(\mathbf{S},\vartheta)}}$ 的一个显式公式。

˜固定一个椭圆正则半单元素 $\delta \in G$，它具有正规的 r- 逼近 $\delta = \delta_0\delta^{+}_{<r}\delta_{\ge r}$。记 $\eta := \delta_{<r} \in \tilde{G}$。我们的目标是用 $\Theta_{\tilde{\pi}_{(\mathbf{S},\vartheta)}}(\delta$- 逼近 $r)$ 来描述 $\delta = \delta_0\delta^{+}_{<r}\delta_{\ge r}$。为得到更简洁的公式，我们用扭曲 Weyl 判别式（亦称第四绝对传递因子；参见第 10.4 节或 [KS99第 4 节）对其进行归一化，具体如下：5]

$$\Phi_{\tilde{\pi}}(\delta) := \Delta^{\tilde{\mathbf{G}}}_{\mathrm{IV}}(\delta) \cdot \Theta_{\tilde{\pi}}(\delta).$$

回顾一下，根据 ϑ 的环面性，存在一个 $\mathbf{G}$-泛型元素 $X^* \in \mathfrak{s}^*_{-r}$，其深度为 r，它提升了 $\mathfrak{s}^*_{-r:-r+}$ 中满足条件的唯一元素 $\vartheta(\exp(Y)) = \psi_F(\langle Y,\ X^*\rangle)$（对任意 $Y \in \mathfrak{s}_{s+:r+}$）。我们可以且确实选择 $X^* \in \mathfrak{s}^*_{-r}$ 使其 $[\eta]$-不变（[Oi25，引理 54]）。

假设 $g \in G$ 满足 ${}^g\eta \in \tilde{S}$，这意味着 $\mathbf{S}^\natural \subset \mathbf{G}^{{}^g\eta}$。那么$X^*$ 可视为 $\mathbf{G}^{{}^g\eta}$的对偶李代数中的一个元素。由于 ${}^g\delta_{\geq r}$属于 $G_{{}^g\eta}$，其对数像 $\log({}^g\delta_{\geq r})$ 属于 $\mathbf{G}^{{}^g\eta}$的李代数。因此，考虑李代数轨道积分 $\iota_{X^*}^{\mathbf{G}^{{}^g\eta}}(\log({}^g\delta_{\geq r}))$ 的归一化傅里叶变换是有意义的。更准确地说，令 $\hat{\mu}^{\mathbf{G}_\eta}\ \mathrm{Wal}\ X^*$ 为通过 Waldspurger 的归一化 Haar 测度定义的李代数轨道积分的傅里叶变换。然后我们定义

$$\hat{\iota}_{X^*}^{\mathbf{G}_\eta}(-) := |D^{\mathrm{red}}_{G_\eta}(X^*)|^{\frac{1}{2}} \cdot |D^{\mathrm{red}}_{G_\eta}(-)|^{\frac{1}{2}} \cdot \hat{\mu}^{\mathbf{G}_\eta}_{\mathrm{Wal},X^*}(-).$$

参见 [Kal19b，第 4 节。2] 另请参见 [Oi25，第 7] 节，了解详情。

我们还注意到，对于 $\alpha \in \Xi_{\mathrm{asym}}$，其限制根 α_{res} 为

$$\begin{cases} \text{asymmetric} & \text{if } \theta(\alpha) = \alpha, \\ \text{asymmetric} & \text{if } \theta(\alpha) \neq \alpha,\ \theta(\alpha) \notin \ddot{\alpha}, \\ \text{asymmetric} & \text{if } \theta(\alpha) \neq \alpha,\ \theta(\alpha) \in \dot{\alpha}, \\ \text{unramified or ramified} & \text{if } \theta(\alpha) \neq \alpha,\ \theta(\alpha) \in -\dot{\alpha}, \end{cases}$$

并且，对于 $\alpha \in \Xi_{\mathrm{sym}}$，其限制根 α_{res} 为

$$\begin{cases} \text{unramified} & \text{if } \theta(\alpha) = \alpha, \\ \text{unramified} & \text{if } \theta(\alpha) \neq \alpha,\ \theta(\alpha) \notin \dot{\alpha}, \\ \text{unramified or ramified} & \text{if } \theta(\alpha) \neq \alpha,\ \theta(\alpha) \in \dot{\alpha}. \end{cases}$$

我们定义符号特征 $\tilde{\epsilon}_\Xi\colon\ S \to \mathbb{C}^\times$ 如下

$$\tilde{\epsilon}_\Xi(s) := \prod_{\substack{\ddot{\alpha} \in \ddot{\Xi} \\ \alpha_{\mathrm{res}}\colon \mathrm{asym/ur}}} \epsilon_\alpha(s).$$

以下是 [Oi25]的主要结果。

定理 4.12 ([Oi25，定理 7。3])。对每个满足${}^g\eta = s_g \cdot \eta \in S$ 的 $g \in G$，我们记 ${}^g\eta \in S$。则

$$\Phi_{\tilde{\pi}}(\delta) = C_\eta \cdot (-1)^{|\ddot{\Xi}_{\eta_0,\mathrm{ur}}|} \cdot \sum_{\substack{g \in S\backslash G/G_\eta \\ {}^g\eta \in \tilde{S}}} \tilde{\epsilon}_\Xi(s_g) \cdot \vartheta(s_g) \cdot \mathfrak{G}_{\mathbf{G}_{{}^g\eta_0}}(\vartheta, {}^g\eta_+) \cdot \hat{\iota}_{X^*}^{\mathbf{G}_{{}^g\eta}}(\log({}^g\delta_{\geq r})),$$

其中C_η是一个与 δ 及 $\mathfrak{G}_{\mathbf{G}_{{}^g\eta_0}}(\vartheta,\ {}^g\eta_+)$ 无关的常数，该常数定义于 [DS18，定义 5.3。2]。

利用第二绝对传递因子（见第 3.2 节），我们可以进一步将上述公式改写如下。首先注意到，对任意 $\eta \in S$，限制 $(\mathbf{S}^\natural, \vartheta^\natural := \vartheta|_{S^\natural})$ 给出 $\mathbf{G}_\eta$ 的一个深度为 r 的温和椭圆环面对（见[Oi25，引理 5.5]）。令 $a^\natural_\vartheta$ 和 $\chi^\natural_\vartheta$ 分别为与第 3.2 节中 $\mathbf{G}_{{}^g\eta_0}$ 的温和椭圆环面对 $(\mathbf{S}^\natural, \vartheta^\natural)$ 相关联的 Kaletha 的 a-数据和 χ-数据集合。

命题 4.13。 沿用上述记号，我们有

$$\Phi_{\tilde{\pi}}(\delta) = C_{\underline{\eta}} \cdot (-1)^{|\ddot{\Xi}_{\eta_0,\mathrm{ur}}|} \cdot e(\mathbf{G}_{\eta_0}) \cdot e(\mathbf{G}_{\eta}) \cdot \varepsilon(\mathbf{T}_{\mathbf{G}^*_{\eta_0}}) \cdot \varepsilon(\mathbf{T}_{\mathbf{G}^*_{\eta}})^{-1} \sum_{\substack{g \in S\backslash G/G_\eta \\ {}^g\eta \in \tilde{S}}} \tilde{\epsilon}_\Xi(s_g) \cdot \vartheta(s_g) \cdot \Delta_{\mathrm{II}}^{\mathbf{G}_{{}^g\eta_0}}[a^\natural_\vartheta, \chi^\natural_\vartheta]({}^g\eta_+) \cdot \hat{\imath}^{\mathbf{G}_{{}^g\eta}}_{X^*}(\log({}^g\delta_{\geq r})),$$

其中， $e(-)$ 表示 *Kottwitz* 符号，而$\mathbf{G}^*_{\eta_0}$ 和（分别地，$\mathbf{G}^*_{\eta}$）表示$\mathbf{G}_{\eta_0}$ （分别地，$\mathbf{G}_{\eta}$）的准分裂内形式。

证明。 我们考察定理4.12右端和式中的各个加项。由 [DS18，命题 4.21]， $\mathfrak{G}_{\mathbf{G}_{{}^g\eta_0}}(\vartheta,\ {}^g\eta_+)$ 给出如下

$$\varepsilon_{\mathbf{G}_{{}^g\eta_0}}(\vartheta, {}^g\eta_+)^{-1} \cdot \varepsilon_{\mathbf{G}_{{}^g\eta_0},\mathrm{ram}}(\pi', {}^g\eta_+) \cdot \varepsilon^{\mathrm{ram}}_{\mathbf{G}_{{}^g\eta_0}}(\pi', {}^g\eta_+) \cdot \tilde{e}(\pi', {}^g\eta_+)$$

其中记号同 *loc. cit.* 。由于 ${}^g\eta_+$ 的零深度部分是平凡的，我们有$\varepsilon_{\mathbf{G}_{{}^g\eta_0}}(\vartheta,\ {}^g\eta_+) = 1$（见 [AS09，命题 3.8]）以及 $\varepsilon^{\mathrm{ram}}_{\mathbf{G}_{{}^g\eta_0}}(\pi',\ {}^g\eta_+) = 1$（见 [DS18，记号 4.14]）。另一方面，根据 [Kal19b，推论 4.7.6]，，乘积$\varepsilon_{\mathbf{G}_{{}^g\eta_0},\ \mathrm{ram}}(\pi',\ {}^g\eta_+) \cdot \tilde{e}(\pi',\ {}^g\eta_+)$ 等于

$$\varepsilon_{\mathbf{S}^\natural,\mathrm{ram}}({}^g\eta_+) \cdot e(\mathbf{G}_{{}^g\eta_0}) \cdot e(\mathbf{G}_{{}^g\eta}) \cdot \varepsilon(\mathbf{T}_{\mathbf{G}^*_{{}^g\eta_0}}) \cdot \varepsilon(\mathbf{T}_{\mathbf{G}^*_{{}^g\eta}})^{-1} \cdot \Delta_{\mathrm{II}}^{\mathbf{G}_{{}^g\eta_0}}[a^\natural_\vartheta, \chi^\natural_\vartheta]({}^g\eta_+).$$

注意，$\varepsilon_{\mathbf{S}^\natural,\ \mathrm{ram}}({}^g\eta_+)$ 是平凡的，因为 ${}^g\eta_+$ 没有零深度部分。此外，由于任何 $g \in G$ 都不会通过共轭 η 改变 $e(\mathbf{G}_{\eta_0}) \cdot e(\mathbf{G}_{\eta}) \cdot \varepsilon(\mathbf{T}^{\mathbf{G}^*_{\eta_0}}) \cdot \varepsilon(\mathbf{T}^{\mathbf{G}^*_{\eta}})$，我们便得到所需的公式。□

5. Framework of twisted endoscopy

本节回顾 Kottwitz– Shelstad [KS99] 和Waldspurger [Wal08]提出的扭曲端oscopy框架。

5.1. 本文讨论的端oscopic数据。我们按照 [KS99 第 1 节2] 和 [Wal08 第 ˆ 1 节3]，在 L-群 ${}^L\mathbf{G}$ 上引入一种扭曲空间结构。自同构 θ 和固定分裂 $\mathrm{spl}_{\hat{\mathbf{G}}}$ 定义了 ˆ ˆ ˆ G 的一个自同构 θ；也就是说， θ 是 G 上唯一一个保持 $\mathrm{spl}_{\hat{\mathbf{G}}}$且在同构 $\Psi(\hat{\mathbf{G}}) \cong \Psi(\mathbf{G})^\vee$ 下与 θ 相容的自同构。由于 ˆθ 与Γ 在 ˆG 上的作用可交换，我们可以将其扩展为 ${}^L\mathbf{G}$ 的一个自同构 ${}^L\theta$，定义为：对于 $(x,w) \in {}^L\mathbf{G} = \hat{\mathbf{G}} \rtimes W_F$， ${}^L\theta(x,w) := (\hat{\theta}(x)\ w)$。我们在对偶侧定义扭曲空间： ${}^L\tilde{\mathbf{G}} := {}^L\mathbf{G}{}^L\theta$。

接下来我们按照 [KS99 第 2 节1] 和 ˆ[Wal08 第 1 节3]，回顾端oscopic数据的概念。若四元组 $(\mathbf{H}\ \mathcal{H}, s, \xi)$ 是三元组$(\mathbf{G}\ \theta, \mathbb{1})$ 的端oscopic数据，当且仅当

- $\mathbf{H}$ 是定义在 F 上的准分裂连通约化群，ˆ
- $\mathcal{H}$ 是分裂扩张 $1 \to \mathbf{H} \to \mathcal{H} \to W_F \to 1$，使得 W_F 在 $\mathbf{H}$ 上诱导的ˆ ˆ 作用，与由 $\mathbf{H}$ 的ˆF-有理结构诱导的 W_F 在 $\mathbf{H}$ 上的作用相差一个 $\mathbf{H}$ 的内自同构，ˆ ˆ

- $s \in \mathbf{G}$ 使得自同构 $[s] \circ \theta$ 是准半单的，并且
- ˆξ: $\mathcal{H} \hookrightarrow {}^L\mathbf{G}$ 是一个 L-同态（即连续且与到 W_F 的投影相交换），满足以下条件： – $[s] \circ {}^L\theta \circ \hat{\xi} = \hat{\xi}, - \hat{\xi}|_{\hat{\mathbf{H}}} : \hat{\mathbf{H}} \xrightarrow{\sim} \hat{\mathbf{G}}_{s^L\theta} = \mathbf{Z}_{\hat{\mathbf{G}}}(s^L\theta)^\circ$。

ˆ 给定一组端oscopic数据（$\mathbf{H}$ $\mathcal{H}, s, \xi$），将其替换为等价数据后（见 [KS99, 第3节。1] 其中定义了端oscopic数据上的等价关系），我们可以假设

- s 属于钉扎极大环面$\mathbf{T}$，并且 ˆ
- $(\hat{\mathbf{B}}_{\mathbf{H}}, \hat{\mathbf{T}}_{\mathbf{H}}) := \hat{\xi}^{-1}(\hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{T}})$ 是 $\hat{\mathbf{H}}$ 的一个 Γ-稳定Borel对。

本文中，我们假设

$$\mathcal{H} \text{ in the endoscopic data } (\mathbf{H}, \mathcal{H}, s, \hat{\xi}) \text{ is equal to } {}^{L}\mathbf{H}.$$

以下固定这样的一个端oscopic数据 $(\mathbf{H}\ {}^{L}\mathbf{H}\ s, \hat{\xi})$。

注意到，$(\mathbf{T}_{\mathbf{H}})$ 的绝对魏尔群 $\Omega_{\mathbf{H}}\mathbf{H}$ 可与 $\mathbf{G}$ $(\mathbf{T})$ 的绝对魏尔群 $\Omega_{\mathbf{G}}$(见第5.2节) 的一个子群等同。特别地，我们关于$p \nmid |\Omega_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})|$ 的假设蕴含 $p \nmid |\Omega_{\mathbf{H}}(\mathbf{T}_{\mathbf{H}})|$。

5.2. **扭曲端oscopy中的范数对应**。我们简要回顾扭曲端oscopy中范数的概念。（详见 [KS99，第 3] 节。）

我们固定一个在 F 上定义的$\mathbf{B}_{\mathbf{H}}$,$\mathbf{T}_{\mathbf{H}}$这一$\mathbf{H}$ 的 Borel对，使得$\mathbf{H}$ 的朗朗兹对偶群 $\hat{\mathbf{H}}$ 配备了同构 $\Psi(\hat{\mathbf{H}}) \cong \Psi(\mathbf{H})^{\vee}$。特别地，ˆ ˆ 我们有同构 $X^{*}(\mathbf{T}_{\mathbf{H}}) \cong X_{*}(\mathbf{T}_{\mathbf{H}})$ 和 $X_{*}(\mathbf{T}_{\mathbf{H}}) \cong X^{*}(\mathbf{T}_{\mathbf{H}})$。由于 ξ 对$\mathbf{T}_{\mathbf{H}}$ 的限制诱导

$$\hat{\xi}|_{\hat{\mathbf{T}}_{\mathbf{H}}} : \hat{\mathbf{T}}_{\mathbf{H}} \xrightarrow{\sim} \hat{\mathbf{T}}^{\hat{\theta},\circ},$$

ˆ 取 $\xi|_{\hat{\mathbf{T}}_{\mathbf{H}}}$的对偶后，我们得到一个 F-有理同构

$$\xi : \mathbf{T}_{\theta} \xrightarrow{\sim} \mathbf{T}_{\mathbf{H}}.$$

为简便起见，我们常将 ξ 也用于表示同态 $\mathbf{T} \twoheadrightarrow \mathbf{T}_{\theta} \xrightarrow{\xi} \mathbf{T}_{\mathbf{H}}$。通过同构 ξ，绝对魏尔群 $\Omega_{\mathbf{H}}$ 被识别为 Ω 的一个子群$\Omega_{\mathbf{G}}^{\theta}$ (参见 [KS99，第 1 节1])。因此 ξ^{-1} 诱导一个满射

$$\mathbf{T}_{\mathbf{H}}/\Omega_{\mathbf{H}} \twoheadrightarrow \mathbf{T}_{\theta}/\Omega_{\mathbf{G}}^{\theta}. \tag{7}$$

注意，$\mathbf{T}_{\mathbf{H}}/\Omega_{\mathbf{H}}$ 和 $\mathbf{T}_{\theta}/\Omega_{\mathbf{G}}^{\theta}$ 分别参数化了$\mathbf{H}$˜和 $\mathbf{G}$的半单共轭类。此外，映射 (7) 是 Γ-等变的。

˜我们用 G_{ss} （分别用 H_{ss}）表示 G（分别为 H）的半单轨迹。对于 $\gamma \in \mathrm{H}_{\mathrm{ss}}$˜和 $\delta \in \mathrm{G}_{\mathrm{ss}}$，若 γ 与 δ 在映射 (7) 下对应的共轭类相对应，则称它们相对应。若 $\gamma \in \mathrm{H}_{\mathrm{ss}}$ 对应于 G 中一个强正则半单共轭类，则称其为 G-强正则。注意，若˜ ˜ $\gamma \in \mathrm{H}_{\mathrm{ss}}$ 是 G-强正则的，则它是强正则的。我们用 $\mathrm{G}_{\mathrm{srs}}$ （分别用˜ ˜$\mathrm{H}_{\tilde{\mathbf{G}}\text{-srs}}$）表示 G 的强正则半单轨迹（分别表示 H 的 G-强正则半单轨迹）。

˜对于 G_{srs}（分别对于 $H_{\tilde{\mathbf{G}}\text{-srs}}$）中的两个 F-有理元素 δ和 δ'（分别为 γ和 γ'），若它们可由$\mathbf{G}$ （分别由$\mathbf{H}$）中的一个元素共轭，则称它们稳定共轭 。

当一个 F-有理元素$\gamma \in H_{\tilde{\mathbf{G}}\text{-正则半单元}}$对应于一个 F-有理元素 ˜$\delta \in G_{\mathrm{srs}}$时，我们称 γ是 δ的范数。

我们将 $\mathcal{D}$定义为 $H_{\tilde{\mathbf{G}}\text{-正则半单}} \times G_{\mathrm{srs}}$中由满足如下条件的有序对 $(\gamma,\ \delta)$ 构成的子集：γ 是 δ 的范数。

5.3. **传递因子**。我们有一个函数 n

$$\Delta_{\mathbf{H},\tilde{\mathbf{G}}}: H_{\mathbf{G}\text{-srs}} \times \tilde{G}_{\text{srs}} \to \mathbb{C}$$

称为朗兰兹–科特维茨–谢尔斯塔德的（几何）绝对传递因子(in-˜，引入于 [LS87、KS99和KS12])。当群$\mathbf{H}$ 和$\mathbf{G}$ 在上下文中显而易见时，我们常省略记号中的下标，直接写作 Δ 表示$\Delta_{\mathbf{H},\ \tilde{\mathbf{G}}}$。我们不回顾其精确定义，而仅对其基本性质作几点说明；详情请参阅 [KS99第 4, 5], [Wal08章7], 以及 [KS12]。

(1) 对任意 (γ,δ)，$\Delta(\gamma,\delta) \neq 0$ 当且仅当 $(\gamma,\delta) \in \mathcal{D}$，也就是说，$\gamma$ 是 δ的范数。
(2) 传递因子 $\Delta(\gamma,\delta)$取决于 G 的一个 θ-稳定 Whittaker 数据的选择。本文中，我们选择由 G 的固定 θ-稳定分裂 $\text{spl}_{\mathbf{G}}$ 确定的 G 的一个 θ-稳定 Whittaker 数据 $\mathfrak{w}$，以及非平凡加性特征 ψ_F（关于如何由 $\text{spl}_{\mathbf{G}}$ 和 ψ_F构造 $\mathfrak{w}$，见 [KS99 第 5.3]节）。
(3) 传递因子 $\Delta(\gamma,\delta)$ 定义为根数比值 $\varepsilon(\mathrm{T}^{\theta},\circ) \cdot \varepsilon(\mathrm{T}_{\mathbf{H}})^{-1}$ 与四个因子 $\Delta_{\mathrm{I}}(\gamma,\delta)$、$\Delta_{\mathrm{II}}(\gamma,\delta)$、$\Delta_{\mathrm{III}}(\gamma,\delta)$ 和 $\Delta_{\mathrm{IV}}(\gamma,\delta)$ 的乘积。在这些因子中，$\Delta_{\mathrm{I}}(\gamma,\delta)$、$\Delta_{\mathrm{II}}(\gamma,\delta)$ 和 $\Delta_{\mathrm{III}}(\gamma,\delta)$ 取决于 G 中 F-有理极大环面 $\mathrm{Z}_{\mathbf{G}}(\mathrm{Z}_{\mathbf{G}}(\delta))$ 的限制根系所选取的 a-数据和 χ-数据，尽管整个乘积并不取决于它们。因此，当我们想强调其对 a-数据 a和 χ-数据 χ 的依赖时，记作 $\Delta_{\bullet}[a,\chi](\gamma,\delta)$（其中 $\bullet \in \{\mathrm{I},\mathrm{II},\mathrm{III}\}$）。

(4) 根据 [Kal19b], 我们令 Δ 表示不含第四因子的传递因子 Δ Δ_{IV}。

(5) 绝对传递因子的比值

$$\Delta(\gamma,\delta;\gamma',\delta') := \Delta(\gamma,\delta)/\Delta(\gamma',\delta')$$

称为相对传递因子。我们也以同样的方式定义$\Delta_{\bullet}$对于 $\bullet \in \{\mathrm{I},\mathrm{II},\mathrm{III},\mathrm{IV}\}$ 的相对版本。

(6) [KS99] 中给出的传递因子定义需要作出修改，正如 [KS12]中所宣布的（另见 [Wal09, 第 2]节或 [Kal21, 附录]）。我们采用修改后的版本“Δ'”，它与局部类域论的经典规范化相容（因此也与，尤其是，[LS87],[MW16],[Kal19b]一致）。更具体地说，因子 Δ' 定义为 Δ^{new}、$_{-1}$ I、$\Delta_{\mathrm{II}}^{\mathrm{KS}}$、$\Delta^{\mathrm{KS}}$、$_{-1}$ III 和 $\Delta_{\mathrm{IV}}^{\mathrm{KS}}$（以及 epsilon 因子）的乘积，其中 $\Delta_{\mathrm{I}}^{\text{new}}$是 [KS12, 第 3 节4] 中定义的因子，而 $\Delta_{\mathrm{II}}^{\mathrm{KS}}$、$\Delta_{\mathrm{III}}^{\mathrm{KS}}$ 和 $\Delta_{\mathrm{IV}}^{\mathrm{KS}}$ 是 [KS99]中定义的因子。我们注意到，当不存在类型 2 或 3 的限制根时，$\Delta_{\mathrm{I}}^{\text{new}}$等于 [KS99] 中定义的因子 $\Delta_{\mathrm{I}}^{\mathrm{KS}}$；本文讨论的情形正是如此。本文中的符号$\Delta_{\mathrm{I}}$、$\Delta_{\mathrm{II}}$、$\Delta_{\mathrm{III}}$和 Δ_{IV} 分别表示 $\Delta^{\text{new}}\mathrm{I}$、$_{-1}$、$\Delta_{\mathrm{II}}^{\mathrm{KS}}$、$\Delta^{\mathrm{KS}}\mathrm{III}$ 和$_{-1}$ $\Delta_{\mathrm{IV}}^{\mathrm{KS}}$。

6. Analysis of θ-stable regular supercuspidal L-packets

6.1. 正则超尖点 L-数据包和 L-参数的扭曲。设 $(\mathbf{S},\hat{\jmath},\chi,\vartheta)$ 是 G 的一个正则超尖点 L-数据包数据。令 ϕ 为与 $(\mathbf{S},\hat{\jmath},\chi,\vartheta)$ 相关联的 G 的 L-参数，即 $\phi := {}^{L}j_{\chi} \circ \phi_{\vartheta}$（见第 3.3 节）。

我们令 $j: \mathbf{T} \to \mathbf{S}$ 为 $\hat{\jmath}$ 的对偶同构。回顾一下，$\mathcal{J}_{\mathbf{G}} := \{\hat{\jmath}$-可容许的 F-有理嵌入 $\mathbf{S} \hookrightarrow \mathbf{G}\}$。下面考察 $\hat{\jmath}$-可容许性

条件。根据定义，嵌入 $j\colon \mathbf{S} \hookrightarrow \mathbf{G}$ 是 $\hat{}j$-可容许的，当且仅当存在元素 $g \in \mathbf{G}$，使得 $[g]\circ j(\mathbf{S}) = \mathbf{T}$，且 $[g]\circ j\hat{}\,\hat{}$ 的对偶的逆与 $\hat{}j$ 在 $\mathbf{G}$ 下共轭。由于 $\hat{}j$ 的像被假设为 $\mathbf{T}$，这等价于存在元素 $\hat{}w \in \Omega_{\hat{}\mathbf{G}} := \Omega_{\hat{\mathbf{G}}}(\mathbf{T})$，使得 $[g]\circ j$ 的对偶的逆为 $[\hat{}w]\circ \hat{}j$。令 $w \in \Omega_{\mathbf{G}}$ 为与 $\hat{}w \in \Omega_{\hat{\mathbf{G}}}$ 对应的元素，则该条件等价于 $[g]\circ j = [w]^{-1}\circ j^{-1}$。因此，我们看到，$\hat{}j$-可容许条件仅仅意味着 j 和 j^{-1} 在 $\mathbf{G}$ 下共轭。

以下引理由这一观察可得。

引理 6.1。 若我们令 $\theta^{-1}\circ\mathcal{J}_{\mathbf{G}} := \{\theta^{-1}\circ j \mid j \in \mathcal{J}^{\mathbf{G}}\}$，则有

$$\theta^{-1}\circ\mathcal{J}^{\mathbf{G}} = \{\hat{\theta}\circ\hat{j}\text{-}admissible\ F\text{-}rational\ embeddings\ \mathbf{S}\hookrightarrow\mathbf{G}\}.$$

回忆一下，$\chi = \{\chi_\alpha\}_\alpha$ 是 $\Phi(\mathrm{G}, \mathrm{S}j) \cong \Phi(\mathrm{G}, \mathrm{S}j)$ 的一组 χ-数据（对任意$j \in \mathcal{J}_{\mathrm{G}G}$）。由于 $\Phi(\mathrm{G}, \mathrm{S}j) \xrightarrow{\sim} \Phi(\mathrm{G}, \mathrm{S}^{\theta^{-1}\circ j})$，我们可以将 χ 传输为 $\Phi(\mathrm{G}, \mathrm{S}^{\theta^{-1}\circ j})$ 的一组 χ-数据，记作 $\theta(\chi)$。于是我们得到一个正则超尖点 $\hat{}L$-分包数据 $(\mathbf{S}\ \theta\circ\hat{}j, \theta(\chi)\ \vartheta)$。

以下引理也见于 [Zha20，引理 4。9]。

引理 6.2。 L-参数 ${}^L\theta\circ\phi$ 对应于正则超尖点 L-$\hat{}$分包数据 $(\mathbf{S}\ \theta\circ\hat{}j, \theta(\chi)\ \vartheta)$。

证明。通过追踪 Langlands–Shelstad 构造（[LS87，第 2.6] 节）所得的 L-嵌入 ${}^Lj_\chi\colon {}^L\mathrm{S} \hookrightarrow {}^L\mathrm{G}$，我们可以验证，${}^L\theta\circ{}^Lj_\chi$ 不过是将 Langlands–Shelstad 构造应用于嵌入 $\theta\circ\hat{}j\colon \mathrm{S} \hookrightarrow \mathrm{G}$，并使用 χ-数据 $\theta(\chi)$ 后得到的L-嵌入。换言之，L-参数${}^L\theta\circ{}^Lj_\chi\circ\phi_\vartheta$ 与正则超尖点 L-包数据 $(\mathrm{S}, \hat{}\theta\circ\hat{}j, \theta(\chi)\ \vartheta)$ 相对应。□

引理 6.3。 L-包 $\Pi^{\mathbf{G}}_{{}^L\theta\circ\phi}$ 由正则超尖点表示组成，其正则超尖点数据由$(\mathbf{S}, \hat{}\theta\circ\hat{}j, \theta(\chi)\ \vartheta, \theta^{-1}\circ j)$ 给出，适用于 $j \in \mathcal{J}_{\mathbf{G}G}$。

证明。 由引理 6.2 可知，只需注意到引理 6.1

$$\theta^{-1}\circ\mathcal{J}^{\mathbf{G}} = \{\hat{\theta}\circ\hat{j}\text{-admissible } F\text{-rational embeddings } \mathbf{S}\hookrightarrow\mathbf{G}\}$$

诱导出一个同一化

$$\theta^{-1}\circ\mathcal{J}^{\mathbf{G}}_G \cong \{\hat{\theta}\circ\hat{j}\text{-admissible } F\text{-rational embeddings } \mathbf{S}\hookrightarrow\mathbf{G}\}/\sim_G.$$

□

引理 6.4。 设 $\pi \in \Pi^{\mathbf{G}}_\phi$ 是一个正则超尖点表示，其正则超尖点数据为 $(\mathbf{S}, \hat{}j, \chi, \vartheta, j)$。则其 θ-扭曲 $\pi^\theta := \pi\circ\theta$ 来自正则超尖点数据 $(\mathbf{S}, \hat{}\theta\circ\hat{}j, \theta(\chi)\ \vartheta, \theta^{-1}\circ j)$。

证明。 我们首先注意到，对于 $\mathbf{S}_0, \vartheta_0)$ 这一 $\mathbf{G}$ 的温和椭圆正则对，其 θ-扭曲 $\pi^\theta_{(\mathbf{S}_0,\vartheta_0)}$ 相应的正则超尖点表示$\pi_{(\mathbf{S}_0,\vartheta_0)}$ 等价于$\pi_{(\theta^{-1}(\mathbf{S}_0)\ \vartheta_0\circ\theta)}$。（这可以按照第 4.4 节处理环面情形的相同方法轻松验证。）因此我们有

$$\pi^\theta = \pi^\theta_{(\mathbf{S}_j,\vartheta'_j)} \cong \pi_{(\theta^{-1}(\mathbf{S}_j),\vartheta'_j\circ\theta)}.$$

这里回顾一下，ϑ'_j 是 $S_j = j(S)$的一个特征，定义如下：

$$\vartheta'_j := \epsilon_{\vartheta_j}\cdot(\vartheta\cdot\zeta^{-1}_{\chi_{\vartheta_j}/\chi,S})\circ j^{-1}.$$

另一方面，与数据（$\mathbf{S}$，$\hat{}\theta\circ\hat{}\jmath$，$\theta(\chi)$ ϑ，$\theta^{-1}\circ j$）相关联的正则超尖点表示由$\pi_{(\theta^{-1}(\mathbf{S}^j)\ \vartheta'_{\theta^{-1}\circ j})}$给出，其中

$$\vartheta'_{\theta^{-1}\circ j}=\epsilon_{\vartheta_{\theta^{-1}\circ j}}\cdot(\vartheta\cdot\zeta^{-1}_{\chi_{\vartheta_{\hat{\theta}\circ\hat{j}}}/\theta(\chi),S})\circ(\theta^{-1}\circ j)^{-1}.$$

根据特征 ϵ 的定义，我们很容易看出 $\epsilon_{\vartheta_j}\circ\theta=\epsilon_{\vartheta_j\circ\theta}$。此外，也很容易验证 $\zeta_{\chi_{\vartheta_j}/\chi,\ S}$ 等于 $\zeta_{\chi_{\vartheta_{\hat{\theta}\circ\hat{j}}}/\theta\ (\chi)\ \ S}$。因此我们得出特征 $\vartheta'_j\circ\theta$ 和 $\vartheta'_{\theta^{-1}\circ j}$ 相等，这意味着 $\pi^{\theta}\cong\pi_{(\theta^{-1}(\mathbf{S}^j)\ \vartheta'_{\theta^{-1}\circ j})}$。□

引理6.3 和 6.4 推出以下结论：

命题 6.5. 我们有 $\Pi^{\mathbf{G}}_{\phi}\circ\theta=\Pi^{\mathbf{G}}_{{}^L\theta\circ\phi}$。

6.2. θ-稳定 L-包的结构。沿用第 6.1 节中的记号。因此，ϕ 表示附属于正则超尖点 L-包数据 $(\mathbf{S},\hat{}\jmath,\chi,\vartheta)$ 的 L-参数，即 $\phi={}^Lj_\chi\circ\phi_\vartheta$。下文假设 ϕ 经由 L-嵌入 $\hat{}\xi\colon {}^L\mathrm{H}\hookrightarrow{}^L\mathrm{G}$ 分解。由于我们有 $[s]\circ{}^L\theta\circ\hat{}\xi=\hat{}\xi$，这一假设意味着我们有 $[s]\circ{}^L\theta\circ\phi=\phi$。特别地，$L$-参数 ${}^L\theta\circ\phi$ 和 $\hat{}\phi$ 是 $\mathbf{G}$-共轭的，且共轭由 s给出。因此，根据引理 6.3 和命题 3.11，正则超尖点 $\hat{}L$-包数据 $(\mathbf{S},\hat{}\jmath,\chi,\vartheta)$ 与 $(\mathbf{S}\ \theta\circ\hat{}\jmath,\theta(\chi)\ \vartheta)$ 之间存在同构。我们来探究如何显式构造这样的同构。

下文中，令 $\phi':={}^L\theta\circ\phi$、$\hat{}\jmath':=\hat{}\theta\circ\hat{}\jmath$，以及 $\chi':=\theta(\chi)$。我们可以并且确实假设 $\hat{}\jmath$ 的像为 $\mathbf{T}$。我们定义 $\mathbf{S}$ 的自同构 $\mathbf{S}$，使得 $\hat{}\theta_{\mathbf{S}}:=\hat{}\jmath^{-1}\circ\hat{}\jmath'=\hat{}\jmath^{-1}\circ\hat{}\theta\circ\hat{}\jmath$。令 $\theta_{\mathbf{S}}$ 为 $\mathbf{S}$ 的自同构，它与 $\hat{}\ \theta_{\mathbf{S}}$ 对偶。注意，$\theta_{\mathbf{S}}$ 和 $\theta_{\mathbf{S}}$ 都是对合的。

$\hat{}$ $\hat{}$**引理 6.6.** $\mathbf{S}$ 的自同构 $\theta_{\mathbf{S}}$ 是 Γ-等变的，因此 $\theta_{\mathbf{S}}$ 是 F-有理的。

$\hat{}\hat{}$ 证明。由于 Γ 在 S 和 T 上的作用都经由一个有限商群分解，因此我们可以讨论关于 W_F 的等变性，而不必考虑 Γ。回想一下，我们有 $\phi={}^Lj_\chi\circ\phi_\vartheta$。由于 $\phi_\vartheta\colon W_F\to{}^L\mathrm{S}=\hat{}\mathrm{S}\rtimes W_F$ 是 S 的一个 L-参数，$\hat{}$S 上的 W_F 作用由 $\sigma(t)=[\phi_\vartheta(\sigma)](t)$ 给出，其中 $\sigma\in W_F$ 和 $t\in\hat{}\mathrm{S}$ 为任意元素。注意到 ${}^Lj_\chi\colon {}^L\mathrm{S}\hookrightarrow{}^L\mathrm{G}$ 是一个 L-嵌入，且延拓了 $\hat{}\jmath\colon\hat{}\mathrm{S}\xrightarrow{\sim}\hat{}\mathrm{T}$，这意味着对于任意 $\hat{}\sigma\in W_F$ 和 $t\in\mathrm{S}$，有 $\hat{}\jmath\circ\sigma(t)=[\phi(\sigma)]\circ\hat{}\jmath(t)$。类似地，对于任意 $\sigma\in W_F\hat{}$ 和 $t\in\mathrm{S}$，我们也有 $\hat{}\jmath'\circ\sigma(t)=[\phi'(\sigma)]\circ\hat{}\jmath'(t)$。因此，注意到 $[s]\circ\phi'=\phi$ 且 $[s]|_{\hat{\mathbf{T}}}=\mathrm{id}\ \hat{}\mathrm{T}$，我们得到

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_{\mathbf{S}}\circ\sigma=\hat{\jmath}^{-1}\circ[s]\circ\hat{\jmath}'\circ\sigma&=\hat{\jmath}^{-1}\circ[s]\circ[\phi'(\sigma)]\circ\hat{\jmath}'\\&=\hat{\jmath}^{-1}\circ[\phi(\sigma)]\circ[s]\circ\hat{\jmath}'=\sigma\circ\hat{\jmath}^{-1}\circ[s]\circ\hat{\jmath}'=\sigma\circ\hat{\theta}_{\mathbf{S}}.\end{aligned}$$

这就完成了证明。□

我们定义一组 $\zeta=(\zeta_\alpha)_{\alpha\in\Phi(\mathbf{G},\mathbf{S})}$ 关于 ζ-数据，用于 $\Phi(\mathbf{G},\mathbf{S})$，定义如下：$\zeta:=\zeta_{\theta_{\mathbf{S}},*(\chi)/\chi'}$（参见定义 3.18 以及注记 3.19）。

命题 6.7。 元组 $(\theta_{\mathbf{S}},1,\zeta)$ 给出了正则超尖点 L-包数据的一个同构：

$$(\theta_{\mathbf{S}},1,\zeta)\colon(\mathbf{S},\hat{\jmath},\chi,\vartheta)\xrightarrow{\sim}(\mathbf{S},\hat{\jmath}',\chi',\vartheta).$$

为证明这一命题，我们回顾一组 ζ-数据的以下性质，这一性质实际上已在 [Kal19a，定理 316]的证明中讨论：

引理 6.8。设 χ_1 和 χ_2 是 $\Phi(\mathbf{G},\mathbf{S}^j)$的 χ-数据集合。那么，特征 $\zeta_{\chi_1/\chi_2,\ S}\colon\ S\to\mathbb{C}^\times$ 的 L-参数$\hat{}$由 $c_{\chi_1/\chi_2}\colon\ W_F\to{}^L\mathbf{S}$上的 1-余循环表示，其定义为 ${}^Lj_{\chi_1}=(\hat{}\jmath\circ c_{\chi_1/\chi_2})\cdot{}^Lj_{\chi_2}$。

命题 6.7 的证明。我们的任务是检查定义 3.18 的条件 (3) 是否成立，也就是说，等式 $(\zeta_S^{-1}\cdot\vartheta)\circ\theta_{\mathbf{S}}=\vartheta$ 成立。采用引理 6.8 中的记号，$\zeta_S^{-1}\cdot\vartheta$ 的 L-参数由 $c_{\chi'/\theta_{\mathbf{S}},*}(\chi)\cdot\phi_\vartheta$给出。因此，根据环面的局部朗兰兹对应的函子性，$(\zeta_S^{-1}\cdot\vartheta)\circ\theta_{\mathbf{S}}$ 的 L-参数由 ${}^L\theta_{\mathbf{S}}\circ(c_{\chi'/\theta_{\mathbf{S}},*}(\chi)\cdot\phi_\vartheta)$给出。我们必须证明，这与 S 的一个 L-参数 ϕ_ϑ 等价；或者等价地，$c_{\chi'/\theta_{\mathbf{S}},*}(\chi)\cdot\phi_\vartheta$ 和 ${}^L\theta_{\mathbf{S}}\circ\phi_\vartheta$在 $\hat{}\mathbf{S}$ 下共轭。令 $s':=\hat{}\jmath'^{-1}(s)$，我们来验证 $[s']\circ(c_{\chi'/\theta_{\mathbf{S}},*}(\chi)\cdot\phi_\vartheta)$ 等于 ${}^L\theta_{\mathbf{S}}\circ\phi_\vartheta$。

由于 ${}^Lj'_{\theta_{\mathbf{S}},\ *(\chi)}$ 是单射，只需证明将它们与 ${}^Lj'_{\theta_{\mathbf{S}},\ *(\chi)}$复合后所得的等式成立。利用引理 6.8，可得

$$\begin{aligned}{}^Lj'_{\theta_{\mathbf{S},*}(\chi)}\circ[s']\circ(c_{\chi'/\theta_{\mathbf{S},*}(\chi)}\cdot\phi_\vartheta)&=[s]\circ{}^Lj'_{\theta_{\mathbf{S},*}(\chi)}\circ(c_{\chi'/\theta_{\mathbf{S},*}(\chi)}\cdot\phi_\vartheta)\\&=[s]\circ{}^Lj'_{\chi'}\circ\phi_\vartheta=[s]\circ\phi'.\end{aligned}$$

另一方面，注意到 ${}^Lj_\chi={}^Lj'_{\theta_{\mathbf{S}},\ *(\chi)}\circ{}^L\theta_{\mathbf{S}}$ (这实质上与 ${}^Lj'_{\chi'}={}^L\theta\circ{}^Lj_\chi$相同；该恒等式曾用于引理 6.2的证明中)，可得

$${}^Lj'_{\theta_{\mathbf{S},*}(\chi)}\circ{}^L\theta_{\mathbf{S}}\circ\phi_\vartheta={}^Lj_\chi\circ\phi_\vartheta=\phi.$$

由 $[s]\circ\phi'=\phi$，可得所述结论。 □

由于 ${}^L\theta\circ\phi\cong\phi$，命题 6.5 推出 $\Pi_\phi^{\mathbf{G}}\circ\theta=\Pi_\phi^{\mathbf{G}}$。作用于 θ上的扭曲 $\Pi_\phi^{\mathbf{G}}$可更明确地描述如下。

命题 6.9。设 π 为 $\Pi_\phi^{\mathbf{G}}$中由 $(\mathbf{S},\hat{}\jmath,\chi,\vartheta,j)$ 标记的成员，其中 $j\in\mathcal{J}_{\mathbf{G}G}$。则其 θ-扭曲 π^θ 由 $(\mathbf{S},\hat{}\jmath,\chi,\vartheta,\theta^{-1}\circ j\circ\theta_{\mathbf{S}})$标记。

证明。当 π 由 $j\in\mathcal{J}_{\mathbf{G}G}$ 的 $(\mathbf{S},\hat{}\jmath,\chi,\vartheta,j)$ 导出时，根据引理 6.4，π^θ 由数据 $(\mathbf{S},\hat{}\theta\circ\hat{}\jmath,\theta(\chi)\ \vartheta,\theta^{-1}\circ j)$ 导出。另一方面，上文引入的正则超尖点 L-分组数据 $(\theta_{\mathbf{S}},1,\zeta)$ 的同构诱导出正则超尖点数据的同构

$$(\theta_{\mathbf{S}},1,\zeta,1)\colon(\mathbf{S},\hat{\jmath},\chi,\vartheta,j')\xrightarrow{\sim}(\mathbf{S},\hat{\theta}\circ\hat{\jmath},\theta(\chi),\vartheta,j'\circ\theta_{\mathbf{S}}^{-1})$$

对每个 $j'\in\mathcal{J}_{\mathbf{G}G}$。因此，数据 $(\mathbf{S},\hat{}\theta\circ\hat{}\jmath,\theta(\chi)\ \vartheta,\theta^{-1}\circ j)$ 与 $(\mathbf{S},\hat{}\jmath,\chi,\vartheta,\theta^{-1}\circ j\circ\theta_{\mathbf{S}})$ 同构。□

推论 6.10。设 π 是 $\Pi_\phi^{\mathbf{G}}$ 中由 $(\mathbf{S},\hat{}\jmath,\chi,\vartheta,j)$ 标记的成员，其中 $j\in\mathcal{J}_{\mathbf{G}G}$。则以下条件等价：

(1) π *is* θ*-stable, i.e.,* $\pi\cong\pi^\theta$,
(2) j *equals* $\theta^{-1}\circ j\circ\theta_{\mathbf{S}}$ *in* $\mathcal{J}_G^{\mathbf{G}}$*, i.e.,* $\theta^{-1}\circ j\circ\theta_{\mathbf{S}}$ *and* j *are* G*-conjugate.*

6.3. **扭曲环面的嵌入**。我们引入若干与$\mathbf{G}$的扭曲$\tilde{}$极大环面相关的概念。设$(\mathbf{S},\mathbf{S})$是 F 上的一个扭曲空间，其中$\mathbf{S}$ 是一个环面$\tilde{}$$\tilde{}$(此处并不预先假设$(\mathbf{S},\mathbf{S})$是$(\mathbf{G},\mathbf{G})$的子空间)。令 $\theta_{\mathbf{S}}$ 为由$\mathbf{S}$给出的$\mathbf{S}$ 的自同构，即对于任意 $s\in\mathbf{S}$和 $\eta\in\mathbf{S}$，有 $\theta_{\mathbf{S}}(s)=[\eta](s)$。

定义 6.11. 我们称嵌入 $j\colon\mathbf{S}\hookrightarrow\mathbf{G}$ 为一个环面的 F-有理嵌入，若 j 是 F-有理的，且 $\mathbf{S}^j:=j(\mathbf{S})$ 是 $\mathbf{G}$的极大环面。

定义 6.12. 设 $(j, \tilde{j})$: $(\mathsf{S}, \tilde{\mathsf{S}}) \hookrightarrow (\mathsf{G}, \tilde{\mathsf{G}})$ 是一个扭曲空间的嵌入，即 $j\colon \mathsf{S} \hookrightarrow \mathsf{G}$ 和 $\tilde{j}\colon \tilde{\mathsf{S}} \hookrightarrow \tilde{\mathsf{G}}$ 是嵌入，并且对任意 $s_1, s_2 \in \mathsf{S}$ 和 $t \in \mathsf{S}$，均有 $j(s_1 t s_2) = j(s_1)\tilde{j}(t)j(s_2)$。若满足以下条件，我们称 $(j, \tilde{j})$ 为扭曲极大环面的一个 F-有理嵌入：

- j 是极大环面的 F-有理嵌入，且 $\tilde{j}$ 是 F-有理的；
- $(\mathbf{S}^j, \tilde{\mathbf{S}}^{\tilde{j}}) := (j(\mathbf{S}), \tilde{j}(\tilde{\mathbf{S}}))$ 是 $\mathbf{G}$ 的 F-有理扭曲极大环面。

我们通常简写为“$(j, \tilde{j})\colon \mathbf{S} \hookrightarrow \mathbf{G}$ 是扭曲极大环面的 F-有理嵌入”。

注 6.13. 设 $(j, \tilde{j}) : \mathbf{S} \hookrightarrow \mathbf{G}$ 是扭曲极大环面的 F-有理嵌入。对于任意 $\eta \in \tilde{\mathbf{S}}$，如前所述，我们有 $\theta_{\mathbf{S}} = [\eta]$，因此有 $j^{-1} \circ [\tilde{j}(\eta)] \circ j = \theta_{\mathbf{S}}$。

注意，若 $(j, \tilde{j})\colon \mathbf{S} \hookrightarrow \mathbf{G}$ 是扭曲极大环面的 F-有理嵌入，则对于任意 $s \in S$，$(j, \tilde{j}_s)\colon \mathbf{S} \hookrightarrow \mathbf{G}$ 仍是扭曲极大环面的 F-有理嵌入，其中 $\tilde{j}_s$ 由 $\tilde{j}_s(\eta) := j(s)\tilde{j}(\eta)$ 定义，适用于 $\eta \in \mathbf{S}$。下面的引理表明，这一事实的逆命题也成立：

引理 *6.14.* 设 *(S, S)* 是定义在 F 上的扭曲空间。设 $j\colon S \hookrightarrow G$ 是一个极大环面的 F-有理嵌入。若 (j, j_1) 和 (j, j_2) 是扭曲极大环面 $S \hookrightarrow G$ 的 F-有理嵌入，则存在一个元素 $s \in S$，满足 $j_2(\eta) = j(s)j_1(\eta)$，对任意 $\eta \in S$ 均成立。

证明。 若固定一个元素 $\eta' \in S$，则有

$$j^{-1} \circ [\tilde{j}_1(\eta')] \circ j = \theta_{\mathbf{S}} = j^{-1} \circ [\tilde{j}_2(\eta')] \circ j$$

根据注记 6.13。这意味着 $\tilde{j}_2(\eta')^{-1} \cdot \tilde{j}_1(\eta')$ 属于 S_j，因此存在一个 $s \in S$，使得 $j_2(\eta') = j(s)j_1(\eta')$。由此可见，对于任意 $\eta \in \mathsf{S}$，均有 $j_2(\eta) = j(s)j_1(\eta)$。□

对于两个 F-有理的扭曲极大环面嵌入（j_1, j_1）和（j_2, j_2），我们在 $j_1 = j_2$ 时记作（j_1, j_1）$\sim$（j_2, j_2）（这在扭曲极大环面的 F-有理嵌入集合上给出了一个等价关系）。注意，由引理 6.14，像 S^j 只取决于（j, j）的等价类。当（j, j）是一个扭曲极大环面的 F-有理嵌入时，我们常滥用记号，让 $\tilde{j}$ 表示（j, j）的等价类。此外，如果我们简单地说“$j\colon \mathsf{S} \hookrightarrow \mathsf{G}$ 是一个扭曲极大环面的 F-有理嵌入”，那么这意味着我们有一个扭曲极大环面（j, j）的 F-有理嵌入，而 j 是它的等价类。

与非扭曲情形一样，我们如下定义扭曲极大环面的 F-有理嵌入的稳定共轭/有理共轭：

定义 6.15. 设 $(j, \tilde{j})$ 和 $(j', \tilde{j}')$ 是扭曲极大环面 $\mathsf{S} \hookrightarrow \mathsf{G}$ 的 F-有理嵌入。若存在元素 $x \in \mathsf{G}$（分别为 $x \in G$）满足 $j' = [x] \circ j$，则称 $(j, \tilde{j})$ 和 $(j', \tilde{j}')$ G-共轭（分别为 G-共轭）。此时记作 $(j, \tilde{j}) \sim_{\mathbf{G}} (j', \tilde{j}')$（分别记作 $(j, \tilde{j}) \sim_G (j', \tilde{j}')$）。当 j 和 j' 是扭曲极大环面的 F-有理嵌入的等价类时，若某些（或等价地，任意）代表元 $(j, \tilde{j})$ 和 $(j', \tilde{j}')$ G-共轭（分别为 G-共轭），则称 j 和 j' G-共轭（分别为 G-共轭）。此时记作 $j \sim_{\mathbf{G}} j'$（分别记作 $j \sim_G j'$）。

6.4. θ-稳定数据包中的 θ-稳定成员的参数化。回到第6.1节和第6.2节的设定。回顾一下，$(\mathbf{S}, \hat{\jmath}, \chi, \vartheta)$ 是一个正则超尖点 L-数据包数据，其 L-参数满足 $[s] \circ {}^{L}\theta \circ \phi = \phi$。在第 6.2 节中，我们引入了 $\mathbf{S}$ 的一个 F-有理对合自同构 $\theta_{\mathbf{S}}$。我们考虑与对 $(\mathbf{S}, \theta_{\mathbf{S}})$ 相关联的扭曲空间 $\mathbf{S} := \mathbf{S}\theta_{\mathbf{S}}$。

命题 6.16。令 π_j 为 $\Pi_\phi^{\mathbf{G}}$ 中由 $(\mathbf{S}, \hat{\jmath}, \chi, \vartheta, j)$ 标记的成员，其中 $j \in \mathcal{J}_{\mathbf{G}G}$。则以下条件等价：

（1）π_j 是 θ-稳定的，即 $\pi_j \cong \pi_j^{\theta}$。（2） j 可扩张为扭曲极大环面 $\mathbf{S} \hookrightarrow \mathbf{G}$ 的 F-有理嵌入。

证明。我们先证明（2）蕴含（1）。设 j 可扩张为一个 F-有理扭曲极大环面的嵌入 $\tilde{j}: \mathbf{S} \hookrightarrow \mathbf{G}$。令 $\eta := j(\theta_{\mathbf{S}}) \in G$，则得到 $[\eta] \circ j = j \circ \theta_{\mathbf{S}}$。换言之，若我们将 $\eta = \eta^\circ \theta$ 写成 $\eta^\circ \in G$，则有 $[\eta^\circ] \circ \theta \circ j = j \circ \theta_{\mathbf{S}}$。特别地，$\theta^{-1} \circ j \circ \theta_{\mathbf{S}}$ 和 j 是 G-共轭的。这意味着，根据推论 6.10，π_j 是 θ-稳定的。

下面我们证明 (1) 蕴含 (2)。同样地，根据推论 6.10，我们可以假设存在一个满足 $\theta^{-1} \circ j \circ \theta_{\mathbf{S}} = [x] \circ j$ 的元素 $x \in G$。于是，令 $\tilde{\theta} := \theta(x)\tilde{j}(\theta_{\mathbf{S}})$，上一段中的论证表明，$(j, \tilde{j})$ 定义了一个从扭曲空间 $(\mathbf{S}, \mathbf{S})$ 到 $(\mathbf{G}, \mathbf{G})$ 的 F-有理嵌入。因此，我们的任务是证明像 $(\mathbf{S}j, \mathbf{S}\tilde{j})$ 是 $(\mathbf{G}, \mathbf{G})$ 的一个 F-有理扭曲极大环面。换言之，我们必须找到一个包含 $\mathbf{S}j$ 且在 $[j(\theta_{\mathbf{S}})] = [\theta(x)] \circ \theta$ 下保持不变的博雷尔子群（见引理 4.2）。

回顾一下，我们令 $\jmath: \mathbf{T} \xrightarrow{\sim} \mathbf{S}$ 为 $\hat{}$ 的对偶 $\hat{\jmath}: \hat{\mathbf{S}} \xrightarrow{\sim} \hat{\mathbf{T}}$，并且 $\theta_{\mathbf{S}}$ 定义为 $\hat{}$ 的对偶 $\jmath^{-1} \circ \hat{\theta} \circ \hat{\jmath}$。因此我们有 $\theta_{\mathbf{S}} = \jmath \circ \theta \circ \jmath^{-1}$。根据 $\hat{}$ j-可容许性（见第 6.1 节开头），嵌入 $[y] \circ \jmath^{-1}$ 由某个 $y \in \mathbf{G}$ 给出。于是得到 j

$$j \circ \theta_{\mathbf{S}} = [y] \circ \jmath^{-1} \circ \jmath \circ \theta \circ \jmath^{-1} = [y\theta(y)^{-1}] \circ \theta \circ [y] \circ \jmath^{-1} = [y\theta(y)^{-1}] \circ \theta \circ j.$$

由于我们还有 $\theta^{-1} \circ j \circ \theta_{\mathbf{S}} = [x] \circ j$，或者等价地，$j \circ \theta_{\mathbf{S}} = [\theta(x)] \circ \theta \circ j$，因此得到$[y\theta(y)^{-1}] \circ \theta \circ j = [\theta(x)] \circ \theta \circ j$。这意味着 $\theta(x)^{-1} y \theta(y)^{-1} \in \theta(\mathbf{S}j)$。记 $\theta(x)^{-1} y \theta(y)^{-1} = t$，其中 $t \in \theta(\mathbf{S}j)$。

由于有 $\mathbf{S}_j = {}^{y}\mathbf{T}$，博雷尔子群 ${}^{y}\mathbf{B}$ 包含 $\mathbf{S}j$。我们来验证${}^{y}\mathbf{B}$ 满足所需条件，即 $[\theta(x)] \circ \theta({}^{y}\mathbf{B}) = {}^{y}\mathbf{B}$。注意到 $\mathbf{B}$ 在 θ 作用下保持稳定，且 $t \in \theta(\mathbf{S}j) \subset \theta({}^{y}\mathbf{B})$，于是有

$$[\theta(x)] \circ \theta({}^{y}\mathbf{B}) = {}^{\theta(x)}\theta({}^{y}\mathbf{B}) = {}^{y\theta(y)^{-1}t^{-1}}\theta({}^{y}\mathbf{B}) = {}^{y\theta(y)^{-1}}\theta({}^{y}\mathbf{B}) = {}^{y}\theta(\mathbf{B}) = {}^{y}\mathbf{B}.$$

这就完成了证明。 □

现在我们来回顾一下：

$$\mathcal{J}_G^{\mathbf{G}} = \{j: \mathbf{S} \hookrightarrow \mathbf{G} \mid j \text{ is } F\text{-rational and } j \sim_{\mathbf{G}} \jmath^{-1}\}/\sim_G$$

(参见第6.1节开头的讨论)。我们令

$$\tilde{\mathcal{J}}_G^{\mathbf{G}} := \{j: \tilde{\mathbf{S}} \hookrightarrow \tilde{\mathbf{G}} \mid j \text{ is } F\text{-rational and } j \sim_{\mathbf{G}} \jmath^{-1}\}/\sim_G,$$

也就是说，$\tilde{\mathcal{J}}_{\mathbf{G}G}$ 是与 $\jmath^{-1}$ 在 $\mathbf{G}$ 下共轭的扭曲极大环面的 F-有理嵌入的等价类在 G 下的共轭类集合。注意，典范遗忘映射 $\tilde{\mathcal{J}}_{\mathbf{G}G} \hookrightarrow \mathcal{J}_{\mathbf{G}G}: (j, \tilde{j}) \mapsto j$ 是单射。因此，在下文中，我们将 $\tilde{\mathcal{J}}_{\mathbf{G}G}$ 视为 $\mathcal{J}_G^{\mathbf{G}}$ 的子集。根据命题 6.16，集合 $\tilde{\mathcal{J}}_{\mathbf{G}G}$ 参数化了

θ-稳定表示在 $\Pi_\phi^{\mathbf{G}}$ 中。更确切地说，对于每个 $j \in \mathcal{J}_G^{\mathbf{G}}$，相应的成员 π_j 是 θ-稳定的，当且仅当 j 属于 $\tilde{\mathcal{J}}_G^{\mathbf{G}}$。

注 6.17。回想一下，Shahidi 的一般分组猜想 [Sha90, 猜想 9.4] 预测，每个温和 L-分组都包含唯一一个 $\mathfrak{w}$-一般成员。若$\Pi_\phi^{\mathbf{G}}$满足一般分组猜想，那么 $\Pi_\phi^{\mathbf{G}}$（设为 $\pi_{\mathfrak{w}}$）中唯一的 $\mathfrak{w}$-一般成员是 θ-稳定的。事实上， θ-扭曲 $\pi_{\mathfrak{w}}^\theta$ 仍然是 $\mathfrak{w}$-一般的，因为 $\mathfrak{w}$ 是 θ-稳定的。由于 $\Pi_\phi^{\mathbf{G}} \circ \theta = \Pi_\phi^{\mathbf{G}}$， $\pi_{\mathfrak{w}}$ 和 $\pi_{\mathfrak{w}}^\theta$ 都属于 $\Pi_\phi^{\mathbf{G}}$。因此，一般分组猜想的唯一性部分蕴含 $\pi_{\mathfrak{w}}$ 与 $\pi_{\mathfrak{w}}^\theta$ 同构。我们指出，一般分组猜想已在 [Kal19b, 引理 6.2.2] 中针对环面的正则超尖点 L-分组得到证明。

6.5. **下降的正则超尖点 L-分组**。我们沿用前几个小节中的记号。回想一下， ϕ: $W_F \to \mathbf{G}$ 经由 $\hat{}\,\xi$: ${}^L\mathbf{H} \hookrightarrow {}^L\mathbf{G}$分解。$\hat{}$ 令 $\phi_{\mathbf{H}}$ 为 $\mathbf{H}$ 的 L-参数，使得 $\phi = \xi \circ \phi_{\mathbf{H}}$。

命题 6.18。 *L-参数 $\phi_{\mathbf{H}}$ 是正则超尖点。此外，如果 ϕ是环面超尖点，那么 $\phi_{\mathbf{H}}$也是环面超尖点。*

证明。我们来验证 H 满足定义 3.12 的四个条件。首先验证 (0)。显然 $\phi|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}$ 是平凡的，因此 $\phi_{\mathbf{H}}|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}$ 也是平凡的。由于 $\hat{}\,\mathrm{Z}\,\hat{}\,\mathrm{H}(\phi(W_F))^\circ$ 包含于 $\mathrm{Z}\,\hat{}\,\mathrm{G}(\phi(W_F))^\circ$ 中，我们有 $\mathrm{Z}\,\hat{}\,\mathrm{H}(\phi(W_F))^\circ \subset \mathrm{Z}\,\hat{}\,\mathrm{G} \cap \mathrm{H} \subset \mathrm{Z}_{\hat{\mathbf{H}}}$。接下来验证 (1)。由于 $\phi = {}^L j_\chi \circ \phi_\vartheta$ 且 S 是温和分歧的，包含 $\phi(P_F)$ 的 $\hat{}\,\mathrm{G}$ 中的一个环面可以取为 $\hat{}\,\mathrm{T}$。因此 $\phi_{\mathbf{H}}(P_F)$ 包含于 $\hat{}\,\xi^{-1}(\hat{}\,\mathrm{T}) = \hat{}\,\mathrm{T}_{\mathbf{H}}$ 中。我们验证 (2)。由于我们有 $\mathrm{Z}\,\hat{}\,\mathrm{H}(\phi(I_F))^\circ \subset \mathrm{Z}\,\hat{}\,\mathrm{G}(\phi(I_F))^\circ \cap \mathrm{H}$，且 $\mathrm{Z}\,\hat{}\,\mathrm{G}(\phi(I_F))^\circ$ 是一个环面，所以 $\mathrm{Z}\,\hat{}\,\mathrm{H}(\phi(I_F))^\circ$ 也是一个环面。最后验证 (3)。令 $\mathcal{M}_{\mathbf{H}} := \mathrm{Z}_{\hat{\mathbf{H}}}(\phi(P_F))^\circ$，$\mathcal{C}_{\mathbf{H}} := \mathrm{Z}_{\hat{\mathbf{H}}}(\phi(I_F))^\circ$，以及 $\mathcal{T}_{\mathbf{H}} := \mathrm{Z}_{\mathcal{M}_{\mathbf{H}}}(\mathcal{C}_{\mathbf{H}})$。于是我们有 $\mathrm{N}_{\mathcal{M}_{\mathbf{H}}}(\mathcal{T}_{\mathbf{H}}) \subset \mathrm{N}_{\mathcal{M}}(\mathcal{T})\,\hat{}$，并且这一包含关系诱导出魏尔群 $\Omega_{\mathcal{M}_{\mathbf{H}}}(\mathrm{S}_{\mathbf{H}}) \hookrightarrow \Omega_{\mathcal{M}}(\hat{}\,\mathrm{S})$ 的一个 Γ-等变包含。因此，如果 $n \in N_{\mathcal{M}_{\mathbf{H}}}(\mathcal{T}_{\mathbf{H}})$ 映射到 $\Omega_{\mathcal{M}_{\mathbf{H}}}(\hat{}\,\mathrm{S}_{\mathbf{H}})^\Gamma$ 的一个非平凡元素，那么我们有 $n \notin \mathrm{Z}\,\hat{}\,\mathrm{G}(\phi(I_F))$. 这意味着 $n \notin \mathrm{Z}_{\hat{\mathbf{H}}}(\phi(I_F))$。

接下来考虑 ϕ是环面超尖点的情形。我们来检验 H 满足定义 3.13 的两个条件。由 ϕ 的条件 (1) 可明显推出 $\phi_{\mathbf{H}}$ 的条件 (1)。因此，我们来检验 (2)。由 ϕ 的环面性，$\mathrm{Z}_{\hat{\mathbf{G}}}(\phi(I_F^r))$ 是 G 中包含 $\phi(P_F)$ 的一个极大环面。由于我们有$\phi(I_F^r) \subset \hat{}\,\mathrm{T}$（根据 ϕ 的构造），因此 $\mathrm{Z}\,\hat{}\,\mathrm{G}(\phi(I_F^r)) \supset \mathrm{Z}\,\hat{}\,\mathrm{G}(\hat{}\,\mathrm{T}) = \hat{}\,\mathrm{T}$。于是我们得到 $\mathrm{Z}\,\hat{}\,\mathrm{G}(\phi(I_F^r)) = \mathrm{T}$。这意味着 $\mathcal{T}_{\mathbf{H}} := Z_{\hat{\mathbf{H}}}(\phi(I_F^r))$ 等于 $\mathrm{H} \cap \mathrm{T} = \mathrm{T}_{\mathbf{H}}$，它是 H 的一个极大环面，并且包含 $\phi(P_F)$。□

将命题 3.11 应用于下降后的 L-参数 $\phi_{\mathbf{H}}$，我们得到一个正则超尖点 L-包数据（$\mathbf{S}_{\mathbf{H}}$，$\hat{}\,\jmath_{\mathbf{H}}$，$\chi_{\mathbf{H}}$，$\vartheta_{\mathbf{H}}$），它属于 $\mathbf{H}$，因此得到一个正则超尖点 L-包 $\Pi_{\phi_{\mathbf{H}}}^{\mathbf{H}}$，它属于$\mathbf{H}$。特别地，我们可以并且确实假设 $\phi_{\mathbf{H}} = {}^L j_{\chi_{\mathbf{H}}} \circ \phi_{\vartheta_{\mathbf{H}}}$，其中 ${}^L j_{\chi_{\mathbf{H}}}$ 表示将 $\hat{}\,\jmath_{\mathbf{H}}$ 的 Langlands–Shelstad 扩张 L通过一组 χ-数据嵌入到 $\chi_{\mathbf{H}}$:

(8)
$$\begin{array}{ccccc} W_F & \xrightarrow{\phi_\vartheta} & \hat{\mathbf{S}} \rtimes W_F & \xrightarrow{{}^L j_\chi} & \hat{\mathbf{G}} \rtimes W_F \\ & \searrow^{\phi_{\vartheta_{\mathbf{H}}}} & & & \uparrow \hat{\xi} \\ & & \hat{\mathbf{S}}_{\mathbf{H}} \rtimes W_F & \xrightarrow{{}^L j_{\chi_{\mathbf{H}}}} & \hat{\mathbf{H}} \rtimes W_F \end{array}$$

我们来考察（$\mathbf{S}$，$\hat{\jmath}$，χ，ϑ）与（$\mathbf{S_H}$，$\hat{\jmath}_{\mathbf{H}}$，$\chi_{\mathbf{H}}$，$\vartheta_{\mathbf{H}}$）之间的关系。

正如命题 6.18的证明中所见，$\mathbf{H}_{\hat{\jmath}}$ 的像由 $\hat{\mathbf{T}}_{\mathbf{H}}$（回顾一下，$\hat{\jmath}\circ\theta_{\mathbf{S}} = \theta\circ\hat{\jmath}$。这意味着嵌入 $\hat{\jmath}$ 诱导出一个同构 $\hat{\mathbf{S}}_{\hat{\theta}_{\mathbf{S}},\circ} \cong \hat{\mathbf{T}}_{\hat{\theta},\circ} = \hat{\xi}(\hat{\mathbf{T}}_{\mathbf{H}})$。因此，我们得到 $\hat{\mathbf{S}}_{\mathbf{H}}$ 与 $\hat{\mathbf{S}}_{\hat{\theta}_{\mathbf{S}},\circ}$的同一化：

$$\hat{\jmath}^{-1}\circ\hat{\xi}\circ\hat{\jmath}_{\mathbf{H}}\colon \hat{\mathbf{S}}_{\mathbf{H}} \xrightarrow{\sim} \hat{\mathbf{S}}^{\hat{\theta}_{\mathbf{S}},\circ}.$$

如引理 6.6 的证明中所述，对于任意 $\hat{\sigma}\in W_F$ and $t\in \mathbf{S}$，我们有 $\hat{\jmath}\circ\sigma(t) = [\phi(\sigma)]\circ\hat{\jmath}(t)$。类似地，对于任意 $\sigma\in W_F$and $t\in\hat{\mathbf{S}}_{\mathbf{H}}$，我们也有 $\hat{\jmath}_{\mathbf{H}}\circ\sigma(t) = [\phi_{\mathbf{H}}(\sigma)]\circ\hat{\jmath}_{\mathbf{H}}(t)$。因此，既然我们有 $\phi = \hat{\xi}\circ\phi_{\mathbf{H}}$，同构 $\hat{\jmath}^{-1}\circ\xi\circ\hat{\jmath}_{\mathbf{H}}$ 是Γ-等变的。于是，通过取对偶，我们得到一个 F-有理同构

$$\mathbf{S}_{\mathbf{H}} \cong \mathbf{S}_{\theta_{\mathbf{S}}}.$$

命题 6.19。$\vartheta|_{S_{0+}}$ 从 ϑ到 S_{0+} 的限制，与经由映射 $S_{0+}\to S_{\theta_{\mathbf{S}},0+}\cong S_{\mathbf{H},0+}$拉回的 $\vartheta_{\mathbf{H}}$ 到$S_{\mathbf{H}}$的限制 $_{0+}$ $_{,0+}$ 一致。

证明。为简化记号，我们仍将 $\vartheta_{\mathbf{H}}$ 记作沿典范映射 $S\to S_{\theta_{\mathbf{S}}}\cong S_{\mathbf{H}}$ 对 $\vartheta_{\mathbf{H}}$ 的拉回。于是，我们的任务是证明 S 上的特征 $\vartheta^{-1}\cdot\vartheta_{\mathbf{H}}$ 的深度为零。由于温和环面的局部朗兰兹对应具有乘法性且保持深度（例如参见 [Yu09]），$\vartheta^{-1}\cdot\vartheta_{\mathbf{H}}$的深度等于 $\phi_{\vartheta}^{-1}\cdot\phi_{\vartheta_{\mathbf{H}}}$的深度。这里 $\phi_{\vartheta}^{-1}\cdot\phi_{\vartheta_{\mathbf{H}}}$ 表示作为 1-余循环的乘积。

注意，下图是交换的，因为每个对象都是温和分歧的（更准确地说，$\hat{\mathbf{S}}$、$\hat{\mathbf{S}}_{\mathbf{H}}$、$\hat{\mathbf{G}}$ 和 $\hat{\mathbf{H}}$ 上的素数 p Γ-作用在 I_F^{0+} 上均为平凡作用，且 χ-数据 χ 和 $\chi_{\mathbf{H}}$ 均为最小分歧）：

$$\begin{array}{ccc}
\hat{\mathbf{S}}\rtimes I_F^{0+} & \xrightarrow{L_{j_\chi}} & \hat{\mathbf{G}}\rtimes I_F^{0+} \\
\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\hat{\xi}} \\
\hat{\mathbf{S}}_{\mathbf{H}}\rtimes I_F^{0+} & \xrightarrow{L_{j_{\chi_{\mathbf{H}}}}} & \hat{\mathbf{H}}\rtimes I_F^{0+}
\end{array}$$

因此，考虑到图表（8）的交换性，我们看到以下图表是交换的：

$$\begin{array}{ccc}
I_F^{0+} & \xrightarrow{\phi_\vartheta|_{I_F^{0+}}} & \hat{\mathbf{S}}\rtimes I_F^{0+} \\
& \searrow^{\phi_{\vartheta_{\mathbf{H}}}|_{I_F^{0+}}} & \uparrow \\
& & \hat{\mathbf{S}}_{\mathbf{H}}\rtimes I_F^{0+}
\end{array}$$

这意味着 L 参数 $\phi_{\vartheta}^{-1}\cdot\phi_{\vartheta_{\mathbf{H}}}$ 的深度为零。 □

现在假设 ϕ 是深度为 $r>0$的环面对象。回顾引理 6.8的证明，我们已经证明了 $(\zeta_S^{-1}\cdot\vartheta)\circ\theta_{\mathbf{S}} = \vartheta$。由于 ζ_S 是温和分歧的，这意味着 $\vartheta|_{S_{0+}}\circ\theta_{\mathbf{S}} = \vartheta|_{S_{0+}}$。这意味着我们可以取一个 $\theta_{\mathbf{S}}$-不变元素 $X^*\in\mathfrak{s}^*_{-r}$ 实现 $\vartheta|_{S_{s+:r+}}$（参见第 4.6 节中利用引理[Oi25，引理 54]的讨论4]）。根据命题6.19，我们进一步有如下结论（注意，$\mathfrak{s}^*_{\theta_{\mathbf{S}}}$ 被视为 $\theta_{\mathbf{S}}$的不变子空间 $\mathfrak{s}^*$）：

推论 6.20。 我们可以取元素 $X^* \in \mathfrak{s}^*_{-r}$ 和 $Y^* \in \mathfrak{s}^*_{\mathbf{H},\,-r}$ 分别实现 $\vartheta|_{S_{s+:r+}}$和 $\vartheta_{\mathbf{H}}|_{S_{\mathbf{H},\,s+:r+}}$，使得 Y^* 在自然映射 $\mathfrak{s}^*_{\mathbf{H}} \cong \mathfrak{s}^*_{\theta_{\mathbf{S}}} \hookrightarrow \mathfrak{s}^*$下映射到 X^*。

注记 6.21。需要注意的是，这个图表

$$\begin{array}{ccc} \hat{\mathbf{S}} \rtimes W_F & \xrightarrow{{}^L j_\chi} & \hat{\mathbf{G}} \rtimes W_F \\ \uparrow & & \uparrow \hat{\xi} \\ \hat{\mathbf{S}}_{\mathbf{H}} \rtimes W_F & \xrightarrow{{}^L j_{\chi_{\mathbf{H}}}} & \hat{\mathbf{H}} \rtimes W_F \end{array}$$

一般而言并不交换，尽管正深度层面上它是交换的，正如命题 6.19的证明中所指出的。这个图表的不交换性与传递因子的计算密切相关（第 11.2.6节）。

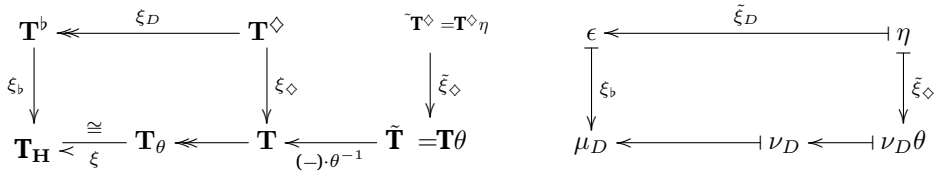
7. Twisted version of Kaletha's descent lemma

7.1. **Waldspurger 图表**。我们回顾"图表"的概念。该概念由 Waldspurger 在 [Wal08第 3 节中引入。2]首先。随后， [MW16I.1 中引入了一个修订后的定义，10], 本文采用这一修订定义。

~~**定义 7.1**。对于 $(\epsilon,\eta) \in H_{\mathrm{ss}} \times G_{\mathrm{ss}}$，与 (ϵ,η) 相关联的图表是一个四元组$D = (\mathbf{B}^\flat, \mathbf{T}^\flat, \mathbf{B}^\diamondsuit, \mathbf{T}^\diamondsuit)$，满足以下条件：

- $\mathbf{T}^\flat$ 是 $\mathbf{H}$ 的一个 F-有理极大环面，
- $(\mathbf{B}^\flat, \mathbf{T}^\flat)$ 是$\mathbf{H}$ 的 Borel 对，且在 $[\epsilon]$ 下稳定，
- $\mathbf{T}^\diamondsuit$ 是$\mathbf{G}$的 F-有理极大环面，
- $(\mathbf{B}^\diamondsuit, \mathbf{T}^\diamondsuit)$ 是$\mathbf{G}$ 的 Borel 对，且在 $[\eta]$ 下稳定，
- Borel 对 $(\mathbf{B}^\flat, \mathbf{T}^\flat)$ 和 $(\mathbf{B}_{\mathbf{H}}, \mathbf{T}_{\mathbf{H}})$ 诱导出唯一的同构 $\xi_\flat\colon \mathbf{T}^\flat \xrightarrow{\sim} \mathbf{T}_{\mathbf{T\_H}}$，该同构由$\mathbf{H}$-共轭给出。类似地，$(\mathbf{B}^\diamondsuit, \mathbf{T}^\diamondsuit)$ 和 $(\mathbf{B}, \mathbf{T})$ 诱导出唯一的同构 $\xi_\diamondsuit\colon \mathbf{T}^\diamondsuit \xrightarrow{\sim} \mathbf{T}$，该同构由$\mathbf{G}$-共轭给出。于是，复合映射 $\xi_\flat^{-1} \circ \xi \circ \xi_\diamondsuit$ 定义在 F 上。（我们将此复合映射记为 ξ_D。）

- 若令 $g \in \mathbf{G}$ 为满足 $[g] = \xi_\diamondsuit$ 的元素，则 η 属于 $[g]^{-1}(\tilde{\mathbf{T}})$。（我们设 $\tilde{\mathbf{T}}^\diamondsuit := \mathbf{T}^\diamondsuit\eta$，并将映射 $[g]\colon \tilde{\mathbf{T}}^\diamondsuit \to \tilde{\mathbf{T}}$ 记为 $\tilde{\xi}_\diamondsuit$。）
- 设 $\nu_D \in \mathbf{T}$ 为一个满足 $[g](\eta) = \nu_D\theta$ 的元素。那么我们有 $\xi(\nu_D) = \xi_\flat(\epsilon)$。（我们用 μ_D 表示这个元素。）换言之，若定义映射$\tilde{\xi}_D\colon \tilde{\mathbf{T}}^\diamondsuit \to \mathbf{T}^\flat$，使得 $\tilde{\xi}_D := \xi_\flat^{-1} \circ \xi \circ ((-) \cdot \theta^{-1}) \circ \tilde{\xi}_\diamondsuit$，则有 $\tilde{\xi}_D(\eta) = \epsilon$。



~~对于 $(\epsilon,\eta) \in H_{\mathrm{ss}} \times G_{\mathrm{ss}}$，令 $\mathbf{D}(\epsilon,\eta)$ 表示与 (ϵ,η) 相关联的图表集合。

注 7.2。 (1) 我们常将 ν_D 和 μ_D 分别简记为 ν 和 μ。

(2) $(\mathrm{B}^\flat, \mathrm{T}^\flat)$ 为 $[\epsilon]$-稳定的条件等价于 $\epsilon \in \mathrm{T}^\flat$，而这又等价于 $\mathrm{T}^\flat \subset \mathrm{H}_\epsilon$。(3) 设 $D = (\mathrm{B}^\flat, \mathrm{T}^\flat, \mathrm{B}^\diamondsuit, \mathrm{T}^\diamondsuit) \in \mathrm{D}(\epsilon,\eta)$。根据引理 4.2，$(\mathrm{T}^\diamondsuit, \tilde{\mathrm{T}}^\diamondsuit)$ 是 $(\mathrm{G}\ \tilde{\mathrm{G}})$ 的一个 F-有理扭曲极大环面。特别地，$\mathrm{T}^\natural := \mathrm{T}^\eta$,。

是 G^{η} 的一个极大环面，并且 $T^{\diamond}$ 可由 $T^{\natural}$ 通过 $T^{\diamond}=Z_{\mathbf{G}}(T^{\natural})$ 恢复（见命题 4.3）。(4) 若集合 $D(\epsilon,\eta)$ 非空，则 ϵ 与 η 的稳定共轭类在扭曲端oscopy的意义下对应（见第5.2节）。(5) 一般而言，即使 ϵ 与 η 的稳定共轭类对应，集合 $D(\epsilon,\eta)$ 也可能为空。参见 [MW16, I.1.10]。(6) 当 ϵ 是强 G-正则半单且 η 是强正则半单时，集合 $D(\epsilon,\eta)$ 非空，当且仅当 ϵ 是 η 在 $[$ 下的范数，参见 [MW16, I.1.10, 引理]。此外，与 (ϵ,η) 相关的图表本质上是唯一的。我们将在后文（引理 7.7）详细考察这些事实。

注 7.3. 回忆一下，映射 $\xi\colon T \twoheadrightarrow T_{\theta} \xrightarrow{\sim} T_{\mathbf{H}}$ 诱导了魏尔群 $\Omega_{\mathbf{H}}(T_{\mathbf{H}})$ 与 $\Omega_{\mathbf{G}}(T)^{\theta}$ 的一个子群之间的同一化。对于任意图表 $D=(B^{\flat},T^{\flat},B^{\diamond},T^{\diamond}) \in D(\epsilon,\eta)$，映射 $\xi_{\diamond}$ 和 $\xi_{\flat}$ 分别诱导同构 $\Omega_{\mathbf{H}}(T^{\flat}) \xrightarrow{\sim}\Omega_{\mathbf{H}}(T_{\mathbf{H}})$ 和 $\Omega_{\mathbf{G}}(T^{\diamond}) \xrightarrow{\sim} \Omega_{\mathbf{G}}(T)$。$\Omega_{\mathbf{H}_{\epsilon}}(T^{\flat}) \subset\Omega_{\mathbf{H}}(T^{\flat})$ 的像包含于 $\Omega^{\mathbf{G}_{\eta}}(T^{\natural}) \subset \Omega_{\mathbf{G}}(T^{\diamond})$ 的像中，因此我们得到同一化 $\Omega_{\mathbf{H}_{\epsilon}}(T^{\flat}) \hookrightarrow\Omega^{\mathbf{G}_{\eta}}(T^{\natural})$。由于 ξ_D 是 F-有理的，这一同一化是 F-有理的。

引理 7.4. 设 $D\in\mathbf{D}(\epsilon,\eta)$。则映射 ξ_D 是 F-有理的。

证明。 $\mathbf{T}^{\diamond}$ 中的任意元素都可以写成 $t\eta$，其中 $t\in\mathbf{T}^{\diamond}$。于是，$t\eta$ 在 ξ_D 下的像为 $\xi_D(t)\epsilon$。换言之，映射 ξ_D 等于复合映射 $((-)\cdot\epsilon)\circ\xi_D\circ((-)\cdot\eta^{-1})$。由于 η、ϵ 和 ξ_D 都是 F-有理的，因此 ξ_D也是如此。□

7.2. **图表上的等价关系。** 设 $(\epsilon,\eta)\in H_{\mathrm{ss}}\times G_{\mathrm{ss}}$。我们如下定义 $\mathbf{D}(\epsilon,\eta)$ 上的等价关系：

定义 7.5. 我们将 $\sim$ 定义为由以下两个等价关系生成的 $\mathbf{D}(\epsilon,\eta)$ 上的等价关系：设 $D=(\mathbf{B}^{\flat},\mathbf{T}^{\flat},\mathbf{B}^{\diamond},\mathbf{T}^{\diamond})$ $\bar{D}=(\bar{\mathbf{B}}^{\flat},\bar{\mathbf{T}}^{\flat},\bar{\mathbf{B}}^{\diamond},\bar{\mathbf{T}}^{\diamond})\in\mathbf{D}(\epsilon,\eta)$。

(i) $(\mathbf{H}_{\epsilon},\mathbf{G}^{\eta})$-共轭： 如果存在元素 $h\in\mathbf{H}_{\epsilon}$ 和 $g\in\mathbf{G}^{\eta}$ 使得，则称 D 和 $\bar{D}$ 是 $(\mathbf{H}_{\epsilon},\mathbf{G}^{\eta})$-共轭的

$$\bar{D}=({}^{h}\mathbf{B}^{\flat},{}^{h}\mathbf{T}^{\flat},{}^{g}\mathbf{B}^{\diamond},{}^{g}\mathbf{T}^{\diamond}).$$

(ii) $\Omega_{\mathbf{H}}$-共轭： 如果存在元素 $w\in\Omega_{\mathbf{H}}(\mathbf{T}^{\flat})$ 使得，则称 D 和 $\bar{D}$ 是 $\Omega_{\mathbf{H}}$-共轭的

$$\bar{D}=({}^{w}\mathbf{B}^{\flat},\mathbf{T}^{\flat},{}^{w}\mathbf{B}^{\diamond},\mathbf{T}^{\diamond}).$$

这里，w 也被视为 $\Omega_{\mathbf{G}}(\mathbf{T}^{\diamond})$ 的元素（参见注7.3）。

我们将 $\mathbb{D}(\epsilon,\eta)$ 记为与 (ϵ,η) 相关的图表的等价类集合 $\mathbf{D}(\epsilon,\eta)/\sim$。

注7.6：当 $\mathbf{G}$ 为非扭曲时（θ 为平凡的），且 $\mathbf{H}_{\epsilon}$ 为准分裂时，集合 $\mathbb{D}(\epsilon,\eta)$ 不过就是 $\Xi(\mathbf{H}_{\epsilon},\mathbf{G}^{\eta})$ 这一集合，该集合用于 [Kal19b定理 6.3 的证明。4]。

引理 7.7. 若 $(\epsilon,\eta)\in\mathcal{D}$，则集合 $\mathbb{D}(\epsilon,\eta)$ 为单元素集。此外，映射 ξ_D 和 ξ_D 与图表 $D\in\mathbf{D}(\epsilon,\eta)$无关。

证明。 .....的非空性 $\mathbf{D}(\epsilon,\eta)$ 可由 [KS99，引理 3.3.B] （采用 [KS99] 第 29 页最后一段中的论证）。另见 [MW16，I.1.10，引理]。

我们证明，与 (ϵ,η) 相关的任意两个图表都等价。令 $D=(\mathrm{B}^\flat,\mathrm{T}^\flat,\mathrm{B}^\diamondsuit,\mathrm{T}^\diamondsuit)$ $\bar{D}=(\bar{}\mathrm{B}^\flat,\bar{}\mathrm{T}^\flat,\bar{}\mathrm{B}^\diamondsuit,\bar{}\mathrm{T}^\diamondsuit)\in\mathrm{D}(\epsilon,\eta)$。由于 ϵ 是强正则半单的，我们有 $\mathrm{T}^\flat=\mathrm{H}_\epsilon=\bar{}\mathrm{T}^\flat$。类似地，我们有 $\mathrm{T}^\natural=\mathrm{G}_\eta=\bar{}\mathrm{T}^\natural$（回忆一下，$\mathrm{T}^\natural$ 和 $\bar{}\mathrm{T}^\natural$ 都是 G_η 的极大环面，并且由 η 的强正则性可知 G_η 是一个环面）。由于我们有 $\mathrm{T}^\diamondsuit=Z_{\mathbf{G}}(\mathrm{T}^\natural)$ 和 $\bar{}\mathrm{T}^\diamondsuit=Z_{\mathbf{G}}(\bar{}\mathrm{T}^\natural)$，因此得到 $\mathrm{T}^\diamondsuit=\bar{}\mathrm{T}^\diamondsuit$。

由于 $\mathbf{B}^\flat$ 和 $\bar{}\mathbf{B}^\flat$ 都是包含 $\mathbf{T}^\flat$ 的 $\mathbf{H}$ 的博雷尔子群，因此存在元素 $w\in\Omega_{\mathbf{H}}(\mathbf{T}^\flat)$，使得 ${}^w\mathbf{B}^\flat=\bar{}\mathbf{B}^\flat$。因此，将 D 替换为其 $\Omega_{\mathbf{H}}(\mathbf{T}^\flat)$-共轭图表 $({}^w\mathbf{B}^\flat,\mathbf{T}^\flat,{}^w\mathbf{B}^\diamondsuit,\mathbf{T}^\diamondsuit)$ 后，我们可以假设 $\mathbf{B}^\flat=\bar{}\mathbf{B}^\flat$。

令 $g\in\mathbf{G}$ 为满足 $({}^g\mathbf{B}^\diamondsuit,{}^g\mathbf{T}^\diamondsuit)=(\mathbf{B},\mathbf{T})$ 的元素。类似地，令 $\bar{g}\in\mathbf{G}$ 为满足 $({}^{\bar{g}}\bar{}\mathbf{B}^\diamondsuit,{}^{\bar{g}}\mathbf{T}^\diamondsuit)=(\mathbf{B},\mathbf{T})$ 的元素。由于 $\tilde{\xi}_D(\eta)=\epsilon=\tilde{\xi}_{\bar{D}}(\eta)$，我们得到

$$\xi_\flat^{-1}\circ\xi({}^g\eta\cdot\theta^{-1})=\xi_\flat^{-1}\circ\xi({}^{\bar{g}}\eta\cdot\theta^{-1}).$$

换言之，${}^g\eta\cdot\theta^{-1}$、${}^{\bar{g}}\eta\cdot\theta^{-1}\in\mathrm{T}$ 在自然商映射 $\mathrm{T}\twoheadrightarrow\mathrm{T}_\theta$ 下映到 T_θ 中的同一元素。因此，我们可以找到元素 $t\in\mathrm{T}$，使得 ${}^{\bar{g}}\eta\cdot\theta^{-1}=t\cdot({}^g\eta\cdot\theta^{-1})\cdot\theta(t)^{-1}$，等价地，${}^{\bar{g}}\eta=t\cdot({}^g\eta)\cdot t^{-1}$。于是，$\bar{g}^{-1}tg$ 属于 G 中 η 的（完整）中心化子 G^η。根据 [Wal08, 第 3 节.1], , η 的强正则性蕴含 $\mathrm{G}^\eta=\mathrm{Z}^\eta\,\mathrm{G}\mathrm{G}^\eta=\mathrm{Z}^\eta\,\mathrm{G}\mathrm{T}^\natural$。特别地，我们可以取元素 $z\in\mathrm{Z}^\eta\,\mathrm{G}$，使得 $z\bar{g}^{-1}tg$ 属于 G_η。若令 $g':=z\bar{g}^{-1}tg\in\mathrm{G}_\eta$，则有 $({}^{g'}\mathrm{B}^\diamondsuit,{}^{g'}\mathrm{T}^\diamondsuit)=(\bar{}\mathrm{B}^\diamondsuit,\bar{}\mathrm{T}^\diamondsuit)$。因此，$D$ 和 $\bar{D}$ 是 $(\mathrm{H}_\epsilon,\mathrm{G}_\eta)$-共轭的。

最后，注意到 $\mathbf{H}_\epsilon$ 和 $\mathbf{G}^\eta$ 都是环面，我们可知，$(\mathbf{H}_\epsilon,\mathbf{G}^\eta)$-共轭不会改变映射 ξ_D 和 $\tilde{\xi}_D$。我们也可知，$\Omega_{\mathbf{H}}(\mathbf{T}^\flat)$-共轭不会改变 ξ_D 和 ξ_D。因此，ξ_D 和 ξ_D 与 $D\in\mathbf{D}(\epsilon,\eta)$ 的选择无关。□

引理 7.8. 设 $D=(B^\flat,T^\flat,B^\diamondsuit,T^\diamondsuit)\in D(\epsilon,\eta)$。对于 H_ϵ 的任意 F-有理椭圆极大环面 $\bar{}T^\flat$，存在一个图表 $(\bar{}B^\flat,\bar{}T^\flat,\bar{}B^\diamondsuit,\bar{}T^\diamondsuit)\in D(\epsilon,\eta)$，它等价于 D。

证明。设 $g\in\mathbf{G}$ 是一个满足 $({}^g\mathbf{B}^\diamondsuit,{}^g\mathbf{T}^\diamondsuit)=(\mathbf{B},\mathbf{T})$（即 $\xi_\diamondsuit=[g]$）的元素。同理，设 $h\in\mathbf{H}$ 是一个满足 $({}^h\mathbf{B}^\flat,{}^h\mathbf{T}^\flat)=(\mathbf{B}_{\mathbf{H}},\mathbf{T}_{\mathbf{H}})$（即 $\xi_\flat=[h]$）的元素。

由于 $\mathbf{T}^\natural$ 都是 $\mathbf{H}$ 的极大环面，因此存在一个元素 $h'\in\mathbf{H}_\epsilon$，满足 ${}^{h'}\mathbf{T}^\flat=\bar{}\mathbf{T}^\flat$。令 $\bar{h}:=hh'^{-1}$（于是 ${}^{\bar{h}}\bar{}\mathbf{T}^\flat=\mathbf{T}_{\mathbf{H}}$）。我们定义一个包含 $\mathbf{T}^\flat$ 的博雷尔子群 $\bar{}\mathbf{B}^\flat$，令 $\bar{}\mathbf{B}^\flat:={}^{\bar{h}^{-1}}\mathbf{B}_{\mathbf{H}}$（于是 ${}^{\bar{h}}\bar{}\mathbf{B}^\flat=\mathbf{B}_{\mathbf{H}}$）。

我们来构造 $\bar{}\mathrm{T}^\diamondsuit$。为此，首先取 G_η 的一个准分裂内形式 G_η^*，以及一个内扭 $\psi_\eta\colon\mathrm{G}_\eta\to\mathrm{G}_\eta^*$。由于 G_η^* 是准分裂的，G_η 的极大环面 $\mathrm{T}^\natural$ 传递到 G_η^* 的一个 F-有理极大环面 $\mathrm{T}^{\natural*}$（例如参见 [Kal19b，引理 3.2.2]）。更准确地说，如有必要，通过将 G_η^*-共轭与 ψ_η 复合，我们可以假设 $\psi_\eta|_{\mathbf{T}^\natural}\colon\mathrm{T}^\natural\to\mathrm{T}^{\natural*}:=\psi_\eta(\mathrm{T}^\natural)$ 是一个 F-有理同构。于是，内扭 ψ_η 诱导出一个 Γ-等变同构 $\Omega^{\mathbf{G}_\eta}(\mathrm{T}^\natural)\cong\Omega^{\mathbf{G}_\eta^*}(\mathrm{T}^{\natural*})$。

由于我们有 ${}^{h'}\mathbf{T}^\flat=\bar{}\mathbf{T}^\flat$ 且 $h'\in\mathbf{H}_\epsilon$，映射 $\sigma\mapsto[\sigma(h')^{-1}h']$ 给出了一个取值于 $\Omega_{\mathbf{H}_\epsilon}(\mathrm{T}^\flat)$ 的 Γ 的 1-余循环。于是，根据魏尔群 $\Omega_{\mathbf{H}_\epsilon}(\mathrm{T}^\flat)\subset\Omega^{\mathbf{G}_\eta}(\mathrm{T}^\natural)$（见注 7.3）和 $\Omega^{\mathbf{G}_\eta}(\mathrm{T}^\natural)\cong\Omega^{\mathbf{G}_\eta^*}(\mathrm{T}^{\natural*})$ 的 Γ-等变同一化，我们可以将 $\sigma\mapsto[\sigma(h')^{-1}h']$ 视为一个取值于 $\Omega^{\mathbf{G}_\eta^*}(\mathrm{T}^{\natural*})$ 的 Γ 的 1-余循环。将 [Kot82, 引理 2.1] 应用于 $(\mathrm{T}^{\natural*},\mathrm{G}_\eta^*)$，我们取一个元素 $g^*\in\mathrm{G}_\eta^*$，使得 $[\sigma(g^*)^{-1}g^*]=[\sigma(h')^{-1}h']$。令 $\bar{}\mathrm{T}^{\natural*}:={}^{g^*}\mathrm{T}^{\natural*}$。那么映射

$$\bar{\mathbf{T}}^{\natural*}\xrightarrow{[g^*]^{-1}}\mathbf{T}^{\natural*}\xrightarrow{\psi_\eta^{-1}}\mathbf{T}^\natural\subset\mathbf{T}^\diamondsuit\xrightarrow{\xi_D}\mathbf{T}^\flat\xrightarrow{[h']}\bar{\mathbf{T}}^\flat$$

定义在 F 上。

注意，极大环面 $\bar{\mathbf{T}}^{\natural *}$ 在 $\mathbf{G}_\eta^*$ 中是椭圆的。事实上，由于 $\mathbf{T}^\natural$ 是 $\mathbf{T}^\diamond$ 的 $[\eta]$-不变部分的单位连通分支，且映射 $\mathbf{T}^\diamond \to \mathbf{T}^\flat$ 在 $\mathbf{T}^\diamond$ 的 $[\eta]$-余不变元与 $\mathbf{T}^\flat$ 之间诱导出一个同构，因此上述同态 $\bar{\mathbf{T}}^{\natural *} \to \bar{\mathbf{T}}^\flat$ 是局部同构（即在李代数层面上同构）。于是，由于 $\bar{\mathbf{T}}^\flat$ 在 $\mathbf{H}$ 中是椭圆的，且 $\mathbf{H}$ 的中心小于 $\mathbf{G}_\eta^*$ 的中心，$\bar{\mathbf{T}}^{\natural *}$ 在 $\mathbf{G}_\eta^*$ 中是椭圆的（稍后我们将回顾这些中心之间关系的描述；见第 8.2 节）。因此，$\bar{\mathbf{T}}^{\natural *}$ 传递到 $\mathbf{G}\eta$ （见 [Kot86，第 10] 节，或 [Kal19b，引理 3.2.1]）。换言之，存在一个元素 $g^{*\prime} \in \mathbf{G}_\eta^*$，使得 $\psi_\eta^{-1} \circ [g^{*\prime}]$: $\bar{\mathbf{T}}^{\natural *} \to \bar{\mathbf{T}}^\natural := \psi_\eta^{-1} \circ [g^{*\prime}](\bar{\mathbf{T}}^{\natural *})$ 是一个 F-有理同构。注意，此时令 $g' := \psi_\eta^{-1}(g^{*\prime} g^*) \in \mathbf{G}\eta$，便有 $\bar{\mathbf{T}}^\natural = {}^{g'}\mathbf{T}^\natural$。

我们将 $\bar{\mathbf{T}}^\diamond$ 定义为 $\bar{\mathbf{T}}^\diamond := \mathbf{Z}_{\mathbf{G}}(\bar{\mathbf{T}}^\natural) = {}^{g'}\mathbf{T}^\diamond$。令 $\bar{\mathbf{B}}^\diamond = {}^{g'}\mathbf{B}^\diamond$。设 $\bar{D} := (\bar{\mathbf{B}}^\flat, \bar{\mathbf{T}}^\flat, \bar{\mathbf{B}}^\diamond, \bar{\mathbf{T}}^\diamond)$。由构造可容易看出，由 $\bar{D}$ 确定的映射 $\xi_{\bar{D}}$（其定义见 $[h'] \circ \xi_D \circ [g']^{-1}$）是 F-有理的。

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{T}^\natural & \xleftarrow{\psi_\eta^{-1}} & \mathbf{T}^{\natural *} \\ \downarrow{\scriptstyle [g']} & & \downarrow{\scriptstyle [g^*]} \\ \bar{\mathbf{T}}^\natural & \xleftarrow{\psi_\eta^{-1} \circ [g^{*\prime}]} & \bar{\mathbf{T}}^{\natural *} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbf{T}^\flat & \xleftarrow{\xi_D} & \mathbf{T}^\diamond \\ {\scriptstyle [h']}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle [g']} \\ \bar{\mathbf{T}}^\flat & \xleftarrow[\xi_{\bar{D}}]{} & \bar{\mathbf{T}}^\diamond \end{array}$$

此外，由于 $h' \in \mathbf{H}_\epsilon$ 和 $g' \in \mathbf{G}\eta$，我们有 $\xi_{\bar{D}}(\eta) = \epsilon$。因此，$D$ 是与 (ϵ, η) 相关的图表，并且与 D 是 $(\mathbf{H}_\epsilon, \mathbf{G}\eta)$-共轭的。□

7.3. **Kaletha 下降引理**。假设我们处于第6节的情形。特别地，我们有集合 $\tilde{\mathcal{J}}_{\mathbf{G}G}$ 和 $\mathcal{J}_H^{\mathbf{H}}$，它们为我们的 L-包 $\Pi_\phi^{\mathbf{G}}$ 和 $\Pi_{\phi_{\mathbf{H}}}^{\mathbf{H}}$ 中的（θ-稳定）成员提供参数。

令 $\jmath: \mathbf{T} \to \mathbf{S}$ 和 $\jmath_{\mathbf{H}}: \mathbf{T}_{\mathbf{H}} \to \mathbf{S}_{\mathbf{H}}$ 分别为 $\hat{}\jmath: \mathbf{S} \to \mathbf{T}$ 和 $\hat{}\jmath_{\mathbf{H}}: \mathbf{S}_{\mathbf{H}} \to \mathbf{T}_{\mathbf{H}}$ 的对偶。由于 $\mathbf{T}$ 和 $\mathbf{S}$ 都是 F-有理的，对于任意 $\sigma \in \Gamma$，映射 $a_{\jmath,\sigma} := \sigma(\jmath)^{-1} \circ \jmath$ 是 $\mathbf{T}$ 的自同构。因此，我们得到一个 1- 余循环 $a_\jmath: \Gamma \to \mathrm{Aut}(\mathbf{T})$: $\sigma \mapsto a_{\jmath,\sigma}$。类似地，我们定义一个 1- 余循环 $a_{\jmath_{\mathbf{H}}}: \Gamma \to \mathrm{Aut}(\mathbf{T}_{\mathbf{H}})$。

回想一下，任意 $j \in \tilde{\mathcal{J}}_{\mathbf{G}G}$ 都可以写成 $j = [g] \circ \jmath^{-1}$，其中 $g \in \mathbf{G}$。若我们通过 $\sigma \mapsto a_{j,\ \sigma} := [\sigma(g)^{-1} g]$ 定义 1-余循环 $a_j: \Gamma \to \Omega_{\mathbf{G}}$，则其不依赖于 $g \in \mathbf{G}$ 的选取。类似地，对于任意 $j_{\mathbf{H}} \in \mathcal{J}_H^{\mathbf{H}}$，我们可以定义 1-余循环 $a_{j_{\mathbf{H}}}: \Gamma \to \Omega_{\mathbf{H}}$。

引理 7.9. 对于任意 $j_{\mathbf{H}} \in \mathcal{J}_H^{\mathbf{H}}$ 和 $j \in \tilde{\mathcal{J}}_{\mathbf{G}G}$，我们有 $a_j = a_\jmath = a_{\jmath_{\mathbf{H}}} = a_{j_{\mathbf{H}}}$。这里，我们将 $\Omega_{\mathbf{H}}$、$\Omega_{\mathbf{G}}$ 和 $\mathrm{Aut}(\mathbf{T}_{\mathbf{H}})$ 视为 $\mathrm{Aut}(\mathbf{T})$ 的子群，使得这些等式有意义。

证明。设 $g \in \mathbf{G}$ 是满足 $j = [g] \circ \jmath^{-1}$ 的一个元素。由于 j 定义在 F 上，对于任意 $\sigma \in \Gamma$，我们有 $\sigma([g] \circ \jmath^{-1}) = [g] \circ \jmath^{-1}$，这意味着 $a_{\jmath,\sigma} = a_{j,\sigma}$，从而得到 $a_\jmath = a_j$。类似地，我们也有 $a_{\jmath_{\mathbf{H}}} = a_{j_{\mathbf{H}}}$。因此，只需证明 $a_\jmath = a_{\jmath_{\mathbf{H}}}$。根据构造，映射 $\mathbf{S} \twoheadrightarrow \mathbf{S}_{\theta_{\mathbf{S}}} \cong \mathbf{S}_{\mathbf{H}}$（记作 $\xi_{\mathbf{S}}$）是 $\hat{}\jmath^{-1} \circ \hat{}\xi \circ \hat{}\jmath_{\mathbf{H}}$ 的对偶，故由 $\jmath_{\mathbf{H}} \circ \xi \circ \jmath^{-1}$ 给出。由于 $\xi_{\mathbf{S}}$ 是 F-有理的，对于任意 $\sigma \in \Gamma$，我们有 $\sigma(\jmath_{\mathbf{H}} \circ \xi \circ \jmath^{-1}) = \jmath_{\mathbf{H}} \circ \xi \circ \jmath^{-1}$，这便推出了所需的断言（回忆一下，同一化 $\Omega_{\mathbf{H}} \subset \Omega_{\mathbf{G}}^\theta$ 是通过 ξ 给出的）。□

对于半单元 $\eta \in \tilde{G}_{\mathrm{ss}}$，我们将 $\tilde{\mathcal{J}}_{\mathbf{G}_\eta}^{\mathbf{G}}$ 定义为集合

$$\tilde{\mathcal{J}}_{\mathbf{G}_\eta}^{\mathbf{G}} := \{j: \tilde{\mathbf{S}} \hookrightarrow \tilde{\mathbf{G}} \mid j \text{ is } F\text{-rational}, j \sim_{\mathbf{G}} \jmath^{-1}, \text{and } \eta \in \tilde{S}_j\}/\sim_{\mathbf{G}_\eta},$$

即，满足 $\eta \in S_j$ 的 a˜扭曲极大环面的 $\mathbf{G}\eta$-共轭类集合，其中的嵌入是 F-有理 ˆ$\jmath$-可容许嵌入 j。

类似地，对于半单元 $\epsilon \in H_{\mathrm{ss}}$，我们将 $\mathcal{J}^{\mathbf{H}}_{\mathbf{H}_\epsilon}$ 定义为集合

$$\mathcal{J}^{\mathbf{H}}_{\mathbf{H}_\epsilon} := \{j_{\mathbf{H}} \colon \mathbf{S}_{\mathbf{H}} \hookrightarrow \mathbf{H} \mid j_{\mathbf{H}} \text{ is } F\text{-rational}, j_{\mathbf{H}} \sim_{\mathbf{H}} \jmath_{\mathbf{H}}^{-1}, \text{and } \epsilon \in S_{j_{\mathbf{H}}}\}/\sim_{\mathbf{H}_\epsilon},$$

也就是说，满足 $\epsilon \in S_{j_{\mathbf{H}}}$（或等价地，$\mathbf{S}_{j_{\mathbf{H}}}$ 包含于 $\mathbf{H}_\epsilon$）的、从 $\mathbf{S}_{\mathbf{H}}$ 到 $\mathbf{H}$ 的 F-有理 ˆ$j_{\mathbf{H}}$-可容许嵌入的 $\mathbf{H}_\epsilon$-共轭类的集合。这里，为了简化记号，我们记 $\mathbf{S}_{j_{\mathbf{H}}} := \mathbf{S}_{\mathbf{H},j_{\mathbf{H}}} = j_{\mathbf{H}}(\mathbf{S}_{\mathbf{H}})$。

以下，我们固定一个半单元组代表元，代表与 η 对应的 H 的半单元素的稳定共轭类，并满足对任意 $y \in \mathfrak{H}_\eta$，$\mathbf{H}_y$ 都是准分裂的。

现在我们按如下方式定义一个映射

$$\underline{\mathrm{tran}} \colon \bigsqcup_{y \in \mathfrak{H}_\eta} \mathbb{D}(y,\eta) \times \mathcal{J}^{\mathbf{H}}_{\mathbf{H}_y} \to \tilde{\mathcal{J}}^{\mathbf{G}}_{\mathbf{G}_\eta}$$

具体如下。设 $D = (\mathrm{B}^\flat, \mathrm{T}^\flat, \mathrm{B}^\diamondsuit, \mathrm{T}^\diamondsuit) \in \mathbb{D}(y,\eta)$，其中 $y \in \mathfrak{H}_\eta$ 且 $j_{\mathbf{H}} = [h] \circ \jmath^{-1}\,\mathbf{H} \in \mathcal{J}^{\mathbf{H}}_{\mathbf{H}_y}(h \in \mathrm{H})$。由于环面 $\mathrm{S}_{j_{\mathbf{H}}}$ 在 H 中是椭圆的，我们可以通过用其等价图表替换 D，并依据引理 7.8，假设 $\mathrm{T}^\flat = \mathrm{S}_{j_{\mathbf{H}}}$。取元素 $h^\flat \in \mathrm{H}$ 和 $g^\diamondsuit \in \mathrm{G}$，使得它们分别满足 $\xi_\flat = [h^\flat]$ 和 $\xi_\diamondsuit = [g^\diamondsuit]$。于是 $n_{\mathbf{H}} := h^\flat h \in \mathrm{H}$ 属于 $\mathrm{N}_{\mathbf{H}}(\mathrm{T}_{\mathbf{H}})$。取元素 $n \in \mathrm{N}_{\mathbf{G}^\theta,\circ}(\mathrm{T})$，使得 $[n] \in \Omega^\theta_{\mathbf{G}}$ 等于 $[n_{\mathbf{H}}] \in \Omega_{\mathbf{H}} \subset \Omega^\theta_{\mathbf{G}}$（我们可以从 $\mathrm{G}^\theta{}_{,\circ}$ 中取 n；见 KS99，第 1.1 节）。我们将 $\mathrm{tran}(D, j_{\mathbf{H}})$ 定义为 $\tilde{\mathcal{J}}$ GG_η 中的一个元素，它是如下从 (S, S) 到 (G, G) 的嵌入 (j,j)：

$$j := [g^\diamondsuit]^{-1} \circ [n] \circ \jmath^{-1}, \quad \tilde{j} := [g^\diamondsuit]^{-1} \circ [n] \circ \tilde{\jmath}^{-1},$$

其中 $\tilde{\jmath}^{-1}$: ˜$\mathbf{S} \to$ ˜$\mathbf{T}$ 由 $s\theta_{\mathbf{S}} \mapsto \jmath^{-1}(s)\theta$ 给出，对任意 $s \in \mathbf{S}$均成立。

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbf{S} & \xrightarrow{\jmath^{-1}} & \mathbf{T} & \xrightarrow{[g^\diamondsuit]^{-1}\circ[n]} & \mathbf{T}^\diamondsuit & \xrightarrow{[g^\diamondsuit]} & \mathbf{T} \\
\downarrow{\scriptstyle \xi_{\mathbf{S}}} & & \downarrow{\scriptstyle \xi} & & \downarrow{\scriptstyle \xi_D} & & \downarrow{\scriptstyle \xi} \\
\mathbf{S}_{\mathbf{H}} & \xrightarrow[\jmath_{\mathbf{H}}^{-1}]{} & \mathbf{T}_{\mathbf{H}} & \xrightarrow[[h]]{} & \mathbf{T}^\flat & \xrightarrow[[h^\flat]]{} & \mathbf{T}_{\mathbf{H}}
\end{array}$$

命题 7.10。 上述过程给出了一个定义良好的映射。换言之，

˜(1) (j,j) 是一个 F-有理的扭曲极大环面嵌入，(2) j 和 $\jmath^{-1}$ 是$\mathbf{G}$-共轭的，

˜(3) $\eta \in S_j$，并且(4) j 的 $\mathbf{G}\eta$-共轭类与辅助数据的选择无关。

证明。 断言 (2) 按构造显然成立。

我们来验证 j 是 F-有理的。对于任意 $\sigma \in \Gamma$，有 $\sigma(j) = j$ 当且仅当 $[\sigma(g^\diamondsuit)]^{-1} \circ [\sigma(n)] \circ \sigma(\jmath)^{-1} = [g^\diamondsuit]^{-1} \circ [n] \circ \jmath^{-1}$，或者等价地，

$$\sigma(j)^{-1} \circ \jmath = [\sigma(n)]^{-1} \circ [\sigma(g^\diamondsuit)] \circ [g^\diamondsuit]^{-1} \circ [n]. \tag{9}$$

若令 $j'_{\mathbf{H}} := [n_{\mathbf{H}}] \circ \jmath^{-1}\,\mathbf{H} = [h^\flat] \circ j_{\mathbf{H}}$，则有

$$\sigma(j'_{\mathbf{H}}) \circ j'^{-1}_{\mathbf{H}} = [\sigma(n_{\mathbf{H}})] \circ \sigma(\jmath_{\mathbf{H}})^{-1} \circ \jmath_{\mathbf{H}} \circ [n_{\mathbf{H}}]^{-1} = [\sigma(h^\flat)]^{-1} \circ [h^\flat],$$

因此 $\sigma(\jmath_{\mathbf{H}})^{-1} \circ \jmath_{\mathbf{H}} = [\sigma(n_{\mathbf{H}})]^{-1} \circ [\sigma(h^\flat)]^{-1} \circ [h^\flat] \circ [n_{\mathbf{H}}]$。由于我们有

- $\sigma(\jmath)^{-1} \circ \jmath = a_{\jmath,\sigma} = a_{\jmath_{\mathbf{H}},\sigma} = \sigma(\jmath_{\mathbf{H}})^{-1} \circ \jmath_{\mathbf{H}}$ (Lemma 7.9),

- $[n]^{-1} = [n_{\mathbf{H}}]^{-1}$ and $[\sigma(n)]^{-1} = [\sigma(n_{\mathbf{H}})]^{-1}$, and
- $[\sigma(g^{\diamond})] \circ [g^{\diamond}]^{-1} = [\sigma(h^{\flat})] \circ [h^{\flat}]^{-1}$ (by the F-rationality of ξ_D),

（所有等式均在 $\Omega_{\mathbf{H}} \subset \Omega^{\theta}_{\mathbf{G}}$）中考虑，因此得到等式（9）。

注意到 n 是 θ-不变的，且 D 是与 $(y,\ \eta)$ 相关联的一个图表，我们看到 $\tilde{\mathbf{S}}_j = j(\mathbf{S})$ 包含 $\eta \in G$。再结合 j的 F-有理性，这表明 $\tilde{\mathbf{S}}j$是 F-有理的，且 $(\mathbf{S}j,\ \mathbf{S}j)$ 是 $(\mathbf{G},\ \mathbf{G})$ 的一个 F-有理扭曲极大环面。因此，我们得到了断言 (1) 以及 (3)。

我们考虑 (4)。只要 D 和 $j_{\mathbf{H}}$ 固定，嵌入 $(j,\ j)$ 显然与 $n_{\mathbf{H}}$、 n、 $h^{\flat}$及 $g^{\diamond}$ 的选择无关。此外，即使我们用一个与 $\Omega_{\mathbf{H}}(\mathbf{T}^{\flat})$ 等价的图表替换 D ，$(j,\ \tilde{j})$ 也不会改变。因此，我们的任务是证明，若我们取

- 另一个嵌入 $\bar{j}_{\mathbf{H}} \in \mathcal{J}_{\mathbf{H}\mathbf{H}y}$ ，它与 $j_{\mathbf{H}}$ 关于 $\mathbf{H}y$ 共轭，且
- 另一个图表 $\bar{D} = (\bar{\mathbf{B}}^{\flat},\ \bar{\mathbf{T}}^{\flat},\ \bar{\mathbf{B}}^{\diamond},\ \bar{\mathbf{T}}^{\diamond}) \in \mathbf{D}(y,\ \eta)$，它与 $(\mathbf{H}y,\ \mathbf{G}\eta)$ - 与 D 共轭，并满足 $\bar{\mathbf{T}}^{\flat} = \mathbf{S}_{\bar{j}_{\mathbf{H}}}$,

那么 j 和 $\bar{j}$ （由 $\bar{D}$ 和 $\bar{j}_{\mathbf{H}}$ 构造而成）是 $\mathbf{G}\eta$-共轭的。

我们取 $h_y \in \mathbf{H}y$，使得 $\bar{j}_{\mathbf{H}} = [h_y] \circ j_{\mathbf{H}}$（因此 $\bar{j}_{\mathbf{H}} = [\bar{h}] \circ \jmath^{-1}{}_{\mathbf{H}}$，其中 $\bar{h} = h_y h$）。令 $h' \in \mathbf{H}y$ 和 $g' \in \mathbf{G}\eta$ 为满足以下条件的元素：

$$({}^{h'}\bar{\mathbf{B}}^{\flat}, {}^{h'}\bar{\mathbf{T}}^{\flat}, {}^{g'}\bar{\mathbf{B}}^{\diamond}, {}^{g'}\bar{\mathbf{T}}^{\diamond}) = (\mathbf{B}^{\flat}, \mathbf{T}^{\flat}, \mathbf{B}^{\diamond}, \mathbf{T}^{\diamond}).$$

那么元素 $\bar{h}^{\flat} := h^{\flat}h' \in \mathbf{H}$ 满足 $\bar{\xi}_{\flat} = [\bar{h}^{\flat}]$。类似地，元素 $\bar{g}^{\diamond} := g^{\diamond}g' \in \mathbf{G}$ 满足 $\bar{\xi}_{\diamond} = [\bar{g}^{\diamond}]$。我们取一个元素 $\bar{n} \in \mathbf{G}^{\theta,\circ}$，使得 $[\bar{n}] \in \Omega^{\theta}_{\mathbf{G}}$ 等于 $[\bar{n}_{\mathbf{H}}] \in \Omega_{\mathbf{H}} \subset \Omega^{\theta}_{\mathbf{G}}$，其中 $\bar{n}_{\mathbf{H}} := \bar{h}^{\flat}\bar{h} \in \mathbf{N}_{\mathbf{H}}(\mathbf{T}_{\mathbf{H}})$。那么，根据构造， $\bar{j}$ 由 $[\bar{g}^{\diamond -1}] \circ [\bar{n}] \circ \jmath^{-1}$ 给出。

下文中，我们分别将与 D 相关联的 ν_D 和 μ_D 简记为 ν 和 μ（见定义 7.1）。由于 $\bar{g}^{\diamond} := g^{\diamond}g'$ 且 $g' \in \mathbf{G}\eta$， $\bar{j}$ 与 $[g^{\diamond}]^{-1} \circ [\bar{n}] \circ \jmath^{-1}$ 在 $\mathbf{G}\eta$-共轭。由于 $j = [g^{\diamond}]^{-1} \circ [n] \circ \jmath^{-1}$，只需证明 $[g^{\diamond}]^{-1} \circ [\bar{n}] \circ [n]^{-1} \circ [g^{\diamond}] \in \mathrm{Aut}(\mathbf{T}^{\diamond})$ 可由 $\Omega^{\mathbf{G}\eta}(\mathbf{T}^{\flat}) \subset \Omega_{\mathbf{G}}(\mathbf{T}^{\diamond})$ 中的一个元素实现。由于 $\xi_{\diamond} = [g^{\diamond}]$ 诱导了 $\Omega^{\mathbf{G}\eta}(\mathbf{T}^{\flat}) \cong \Omega^{\mathbf{G}\nu\theta}(\mathbf{T}^{\theta,\circ})$ 之间的同一化，这等价于证明 $[\bar{n}] \circ [n]^{-1} \in \mathrm{Aut}(\mathbf{T})$ 可由 $\Omega^{\mathbf{G}\nu\theta}(\mathbf{T}^{\theta,\circ}) \subset \Omega_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})$ 中的一个元素实现。注意到 $\Omega^{\mathbf{H}\mu}(\mathbf{T}_{\mathbf{H}})$ 同一化为 $\Omega^{\mathbf{G}\nu\theta}(\mathbf{T}^{\theta,\circ})$ 的一个子群（两者都视为 $\Omega_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})$ 的子群），我们来证明一个稍强的命题： $[\bar{n}] \circ [n]^{-1} \in \mathrm{Aut}(\mathbf{T})$ 可由 $\Omega^{\mathbf{H}\mu}(\mathbf{T}_{\mathbf{H}})$ 中的一个元素实现。根据构造，有 $[n] = [n_{\mathbf{H}}] = [h^{\flat}h]$ 和 $[\bar{n}] = [\bar{n}_{\mathbf{H}}] = [\bar{h}^{\flat}\bar{h}] = [h^{\flat}h'h_y h]$。因此可得 $[\bar{n}] \circ [n]^{-1} = [h^{\flat}] \circ [h'h_y] \circ [h^{\flat}]^{-1}$。由于 $\xi_{\flat} = [h^{\flat}]$ 诱导了 $\Omega^{\mathbf{H}y}(\mathbf{T}^{\flat}) \cong \Omega^{\mathbf{H}\mu}(\mathbf{T}_{\mathbf{H}})$ 之间的同一化，且 $[h'h_y]$ 属于 $\Omega^{\mathbf{H}y}(\mathbf{T}^{\flat})$，故得所述结论。□

下面是 Kaletha 的“下降引理”的扭曲版本 [Kal15，引理 6。5]:

命题 7.11。 对于每个 $y \in \mathfrak{H}_{\eta}$， tran 到 $\mathbb{D}(y,\eta) \times \mathcal{J}_{\mathbf{H}\mathbf{H}y}$ 的限制是一个$\pi_0(\mathbf{H}^y)(F)$-挠子，且映到其像上。此外， tran 诱导出一个双射映射

$$\mathrm{tran}\colon \bigsqcup_{y \in \mathfrak{H}_{\eta}} \left(\mathbb{D}(y,\eta) \times \mathcal{J}^{\mathbf{H}}_{\mathbf{H}_y}\right)/\pi_0(\mathbf{H}^y)(F) \to \tilde{\mathcal{J}}^{\mathbf{G}}_{\mathbf{G}_{\eta}}.$$

证明。 我们先证明满射性。假设给定一个 $j = [g] \circ \jmath^{-1}$ 属于 $\tilde{\mathcal{J}}^{\mathbf{G}}_{\mathbf{G}_{\eta}}$ 的元素，其中 $g \in \mathbf{G}$。取一个 $j_{\mathbf{H}} = [h] \circ \jmath^{-1}{}_{\mathbf{H}}$ 的元素 $\mathcal{J}_{\mathbf{H}H}$，其中 $h \in \mathbf{H}$。令$\mathbf{T}^{\diamond} := \mathbf{S}_j = {}^{g}\mathbf{T}$且 $\mathbf{B}^{\diamond} := {}^{g}\mathbf{B}$。于是，令 $[g]^{-1}(\eta) = \nu\theta \in \tilde{\mathbf{T}}$， $\mu := \xi(\nu)$,

并令 $\epsilon := [h](\mu)$，我们可以验证 $\epsilon \in H_{ss}$，且 $D' := ({}^{h}\mathbf{B}_{\mathbf{H}}, {}^{h}\mathbf{T}_{\mathbf{H}}, \mathbf{B}^{\diamond}, \mathbf{T}^{\diamond})$ 是与 (ϵ, η) 相关联的图表（注意 $\mathbf{S}_{j_{\mathbf{H}}} = {}^{h}\mathbf{T}_{\mathbf{H}}$，并使用引理 7.9 验证 F-有理性 $\xi_{D'}$）。根据集合 $\mathfrak{H}_{\eta}$ 的定义，存在唯一一个与 ϵ 稳定 H-共轭的元素 $y \in \mathfrak{H}_{\eta}$。由于 $\mathbf{H}^{y}$ 是 $\mathbf{H}_{\epsilon}$ 的准分裂内形式，$\mathbf{H}_{\epsilon}$ 的极大环面 ${}^{h}\mathbf{T}_{\mathbf{H}}$ 传递到 $\mathbf{H}^{y}$（例如，参见 [Kal19b，引理 3.2.2]）。更准确地说，我们可以找到一个元素 $h' \in \mathbf{H}$，使得 $[h'](\epsilon) = y$，并且 $[h']$ 给出一个 F-有理同构，将 ${}^{h}\mathbf{T}_{\mathbf{H}}$ 映到 ${}^{h'h}\mathbf{T}_{\mathbf{H}}$。因此，令 $\mathbf{T}^{\flat} := {}^{h'h}\mathbf{T}_{\mathbf{H}}$ 且 $\mathbf{B}^{\flat} := {}^{h'h}\mathbf{B}_{\mathbf{H}}$，便得到一个与 (y, η) 相关联的图表 $D := (\mathbf{B}^{\flat}, \mathbf{T}^{\flat}, \mathbf{B}^{\diamond}, \mathbf{T}^{\diamond})$。若令 $j'_{\mathbf{H}} := [h'] \circ j_{\mathbf{H}}$，则 $j'_{\mathbf{H}}$ 属于 $\mathcal{J}\mathrm{HH}_{y}$。此外，回顾映射 tran 的构造，我们很容易验证 $\mathrm{tran}(D, j'_{\mathbf{H}}) = j$。

接下来我们研究 tran 的纤维。为此，取两个图表 $D = (\mathbf{B}^{\flat}, \mathbf{T}^{\flat}, \overline{\mathbf{B}^{\diamond}}, \mathbf{T}^{\diamond}) \in \mathrm{D}(y, \eta)$、$\bar{D} = (\bar{\mathbf{B}}^{\flat}, \bar{\mathbf{T}}^{\flat}, \bar{\mathbf{B}}^{\diamond}, \bar{\mathbf{T}}^{\diamond}) \in \mathrm{D}(\bar{y}, \eta)$，其中 $y, \bar{y} \in \mathfrak{H}_{\eta}$；再取两个嵌入 $j_{\mathbf{H}} \in \mathcal{J}\mathrm{HH}_{y}$, $\bar{j}_{\mathbf{H}} \in \mathcal{J}\mathrm{HH}_{\bar{y}}$，满足 $\mathrm{tran}(D, j_{\mathbf{H}}) = \mathrm{tran}(\bar{D}, \bar{j}_{\mathbf{H}})$。根据引理 7.8，不妨设 $\mathbf{T}^{\flat} = \mathbf{S}_{j_{\mathbf{H}}}$ 且 $\bar{\mathbf{T}}^{\flat} = \mathbf{S}_{\bar{j}_{\mathbf{H}}}$。设 $h \in \mathbf{H}$ 和 $\bar{h} \in \mathbf{H}$ 分别为满足 $j_{\mathbf{H}} = [h] \circ \jmath^{-1}\,\mathbf{H}$ 和 $\bar{j}_{\mathbf{H}} = [\bar{h}] \circ \jmath^{-1}\,\mathbf{H}$ 的元素。必要时，用其 $\mathbf{G}^{\eta}$-等价图表替换 $\bar{D}$，于是可假设 $(D, j_{\mathbf{H}})$ 和 $(\bar{D}, \bar{j}_{\mathbf{H}})$ 恰好产生相同的嵌入 j。（注意，此时 $\mathbf{T}^{\diamond} = \mathbf{S}_{j} = \bar{\mathbf{T}}^{\diamond}$。）对于 D，按照 tran 的定义，取 $h^{\flat} \in \mathbf{H}$、$g^{\diamond} \in \mathbf{G}$ 和 $n \in \mathbf{G}^{\theta}$,。（对应于 $n_{\mathbf{H}} := h^{\flat}h$）。类似地，对于 $\bar{D}$，按照–tran 的定义，取 $\bar{h}^{\flat} \in \mathbf{H}$、$\bar{g}^{\diamond} \in \mathbf{G}$ 和 $\bar{n} \in \mathbf{G}^{\theta}$,。（对应于 $\bar{n}_{\mathbf{H}} := \bar{h}^{\flat}\bar{h}$）。于是得到 $[g^{\diamond}]^{-1} \circ [n] \circ \jmath^{-1} = [\bar{g}^{\diamond}]^{-1} \circ [\bar{n}] \circ \jmath^{-1}$。

因此我们有 $[n\bar{n}^{-1}] = [g^{\diamond}\bar{g}^{\diamond -1}]$，它是魏尔群 $\mathbf{\Omega}_{\mathbf{H}} \subset \mathbf{\Omega}_{\mathbf{G}}$ 中元素之间的一个等式。我们将此元素记为 w。回想一下，$[\bar{h}^{\flat}]$ 和 $[\bar{g}^{\diamond}]$ 给出了 $\mathbf{\Omega}_{\mathbf{H}}(\bar{\mathbf{T}}^{\flat}) \cong \mathbf{\Omega}_{\mathbf{H}}$ 以及 $\mathbf{\Omega}_{\mathbf{G}}(\bar{\mathbf{T}}^{\diamond}) \cong \mathbf{\Omega}_{\mathbf{G}}$之间的同一化。若将 $w^{\flat} \in \mathbf{\Omega}_{\mathbf{H}}(\bar{\mathbf{T}}^{\flat})$ 和$w^{\diamond} \in \mathbf{\Omega}_{\mathbf{G}}(\bar{\mathbf{T}}^{\diamond})$ 分别定义为 $w \in \mathbf{\Omega}_{\mathbf{H}}$ 在这些同一化下的像，则 $w^{\flat}$ 和 $w^{\diamond}$ 通过 $\xi_{\bar{D}}$ 相互对应（见注 7.3）。将图表 $\bar{D}$ 替换为其 $\mathbf{\Omega}_{\mathbf{H}}$-等价图表 $({}^{w^{\flat}}\bar{\mathbf{B}}^{\flat}, \bar{\mathbf{T}}^{\flat}, {}^{w^{\diamond}}\bar{\mathbf{B}}^{\diamond}, \bar{\mathbf{T}}^{\diamond})$ 后，我们可以假设 $(\bar{\mathbf{B}}^{\diamond}, \bar{\mathbf{T}}^{\diamond}) = (\mathbf{B}^{\diamond}, \mathbf{T}^{\diamond})$。注意，此时我们有 $g^{\diamond} = \bar{g}^{\diamond}$ 和 $[n] = [\bar{n}]$。

回想一下，$\nu_{D} \in \mathbf{T}$（分别地，$\nu_{\bar{D}} \in \mathbf{T}$）是满足 $[g^{\diamond}](\eta) = \nu_{D}\theta$（分别地，$[\bar{g}^{\diamond}](\eta) = \nu_{\bar{D}}\theta$）的元素，因此我们有 $\nu_{\bar{D}} = \nu_{D}$。这意味着 $\mu_{\bar{D}} = \mu_{D}$。由于我们有$[h^{\flat}](y) = \mu_{D}$ 以及 $[\bar{h}^{\flat}](\bar{y}) = \mu_{\bar{D}}$，可得 $[h^{\flat -1}\bar{h}^{\flat}](\bar{y}) = y$。注意，等式$[n] = [\bar{n}]$ 等价于等式 $[h^{\flat -1}\bar{h}^{\flat}] = [h\bar{h}^{-1}]$。由于 $[h\bar{h}^{-1}] = j_{\mathbf{H}} \circ \bar{j}^{-1}\,\mathbf{H}$ 给出了从 $\bar{\mathbf{T}}^{\flat}$ 到 $\mathbf{T}^{\flat}$ 的一个 F-有理同构（即 $\bar{\mathbf{T}}^{\flat}$ 与 $\mathbf{T}^{\flat}$ 之间的稳定共轭），这意味着 y 与 $\bar{y}$ 稳定共轭。因此，集合 $\mathfrak{H}_{\eta}$ 的定义意味着 $y = \bar{y}$。我们还得到 $h\bar{h}^{-1} \in \mathbf{H}^{y}$。于是，令 $h_{y} := h\bar{h}^{-1} \in \mathbf{H}^{y}$，可得 $(\mathbf{B}^{\flat}, \mathbf{T}^{\flat}, \mathbf{B}^{\diamond}, \mathbf{T}^{\diamond}) = ({}^{h_y}\bar{\mathbf{B}}^{\flat}, {}^{h_y}\bar{\mathbf{T}}^{\flat}, \bar{\mathbf{B}}^{\diamond}, \bar{\mathbf{T}}^{\diamond})$ 以及 $j_{\mathbf{H}} = [h_{y}] \circ \bar{j}_{\mathbf{H}}$。

因此，剩下的任务是证明，通过替换 h_y 为 F-有理的。这由 [Kal15，引理 6 得出。3]（参见非扭曲情形下下降引理的证明；[Kal15，引理 65]）。
□

注记 7.12。注意到 $\mathcal{J}^{\mathbf{H}}_{\mathbf{H}_{y}}$ 对于任意 $y \in \mathfrak{H}_{\eta}$都非空。因此，特别地，命题 7.11 蕴含以下结论：$\tilde{\mathcal{J}}_{\mathbf{G}\mathbf{G}^{\eta}}$为空，当且仅当对于任意 $y \in \mathfrak{H}_{\eta}$，$\mathbb{D}(y, \eta)$ 为空。

8. Waldspurger's descent theorems on twisted endoscopy

本节回顾 Waldspurger 框架中的一部分，即"端oscopic 扭曲并没有那么扭曲"。

请注意，在本文以下内容中，我们需要要求指数映射在共轭下不变。然而，按照 [AS09附录 A]中的定义，模拟指数映射可能不满足这一性质。因此，从现在起，我们进一步假设

$$p \geq (2 + e_F)n,$$

其中， e_F 是 $F/\mathbb{Q}_p$ 的分歧指数，而 n 是 $\mathbf{G}$的忠实表示的最小维数。在这一假设下，众所周知，"传统"指数映射在拓扑幂零轨迹上收敛，因此我们可以将其选作指数映射（参见 [DR09附录 B] ，另请参见 [Wal08附录 B]）。

8.1. **非标准端oscopy**。 首先回顾非标准端oscopy的形式体系，遵循 [Wal08第 1.7、1.8]节。

设 $\mathbf{G}_1$ 和 $\mathbf{G}_2$ 是定义在 F上的拟分裂半单单连通群。对于每个 $\mathbf{G}_i$，我们固定一个定义在 F上的 Borel对 $(\mathbf{B}_i, \mathbf{T}_i)$。令 Ω_i 表示 $\mathbf{T}_i$ 在 $\mathbf{G}_i$中的魏尔群。我们分别用 Φ_i 和 $\Phi_i^\vee$ 表示 $\mathbf{T}_i$ 在 $\mathbf{G}_i$中的根集和余根集。假设存在一个同构 $j_*\colon X_*(\mathbf{T}_1)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} X_*(\mathbf{T}_2)_{\mathbb{Q}}$。令$j^*\colon X^*(\mathbf{T}_2)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} X^*(\mathbf{T}_1)_{\mathbb{Q}}$ 表示 j_*的对偶。

那么，如果满足以下条件，则称三元组（$\mathbf{G}_1$,$\mathbf{G}_2$, j_*）为一个非标准端*oscopic*三元组：

（1）存在双射 $\tau^\vee\colon \Phi_1^\vee \xrightarrow{\sim} \Phi_2^\vee$和 $\tau\colon \Phi_2 \xrightarrow{\sim} \Phi_1$ 以及函数$b^\vee\colon \Phi_1^\vee \to \mathbb{Q}_{>0}$ 和 $b\colon \Phi_2 \to \mathbb{Q}_{>0}$，使得对于任意 $\alpha_2 \in \Phi_2$，有（a） $\alpha_2^\vee = \tau^\vee(\tau(\alpha_2)^\vee)$；（b）对于任意 $\alpha_1^\vee \in \Phi_1^\vee$，有 $j_*(\alpha_1^\vee) = b^\vee(\alpha_1^\vee) \cdot \tau^\vee(\alpha_1^\vee)$，并且对于任意 $\alpha_2 \in \Phi_2$，有 $j^*(\alpha_2) = b(\alpha_2) \cdot \tau(\alpha_2)$。

（2）同构 j_* 和 j^* 是 Γ-等变的。

对于非标准端oscopic三元组（$\mathbf{G}_1$,$\mathbf{G}_2$, j^*），同构 j_* 在李代数 $\mathfrak{t}_1 := \mathrm{Lie}\mathbf{T}_1$ 和 $\mathfrak{t}_2 := \mathrm{Lie}\mathbf{T}_2$之间诱导出一个同构:

$$\mathfrak{t}_1 \cong X_*(\mathbf{T}_1) \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{F} \xrightarrow{j_*} X_*(\mathbf{T}_2) \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{F} \cong \mathfrak{t}_2,$$

这诱导出一个双射

$$(\mathfrak{t}_1/\Omega_1)^\Gamma \cong (\mathfrak{t}_2/\Omega_2)^\Gamma.$$

因此，通过这一双射，我们可以在 $\mathfrak{g}_1$ 和 $\mathfrak{g}_2$ 的半单元素稳定共轭类集合之间定义一个双射对应，并且它保持正则半单性。

8.2. **扭曲端oscopy的分解**。 我们接下来简要回顾 Waldspurger 在 [Wal08 第 3] 节中确立的扭曲端oscopy分解结果。

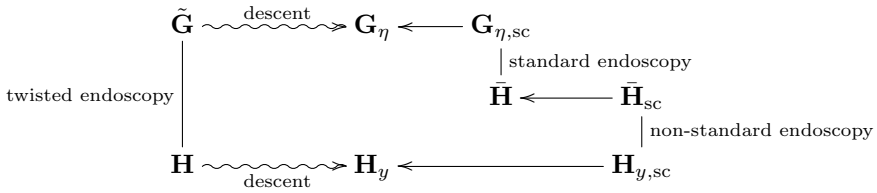
设 $(y, \eta) \in H_{\mathrm{ss}} \times G_{\mathrm{ss}}$。下文中，我们假设

- 在 $\mathbf{H}$ 中，$\mathbf{H}_y$ 对 y 的连通中心化子是准分裂的，并且
- 与 (y, η) 相关的图表集合 $\mathbf{D}(y, \eta)$ 非空。

我们固定一个图表 $D = (\mathbf{B}^\flat, \mathbf{T}^\flat, \mathbf{B}^\diamondsuit, \mathbf{T}^\diamondsuit) \in \mathbf{D}(y, \eta)$。在 [Wal08第 3.5 节和 3.6]，Waldspurger 构造了一个定义在 $\mathbf{H}$ 上的准分裂连通约化群 F，并配备了

- 群 $\mathbf{H}$, $\mathcal{H}$, $\bar{s}$, ξ 的 $\mathbf{G}_{\eta,\,\mathrm{sc}}$ 标准端oscopic数据，以及
- 一个非标准端oscopic三元组（$\mathbf{H}_{y,\,\mathrm{sc}}$，$\mathbf{H}_{\mathrm{sc}}$ j_*），

其中下标“sc”表示导出子群的单连通覆盖。这里我们强调，这些对象的构造取决于 $D \in \mathbf{D}(y,\ \eta)$ 的选择。



我们回顾在这一图景下稳定共轭类如何对应（[Wal08，第 3 节。8]）。我们首先考察李代数的分解

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}_\eta &= \mathfrak{g}_{\eta,\mathrm{sc}} \oplus \mathfrak{z}_{\mathbf{G}_\eta} = \mathrm{Lie}\,\mathbf{G}_{\eta,\mathrm{sc}} \oplus \mathrm{Lie}\,\mathbf{Z}_{\mathbf{G}_\eta},\\
\bar{\mathfrak{h}} &= \bar{\mathfrak{h}}_{\mathrm{sc}} \oplus \mathfrak{z}_{\bar{\mathbf{H}}} = \mathrm{Lie}\,\bar{\mathbf{H}}_{\mathrm{sc}} \oplus \mathrm{Lie}\,\mathbf{Z}_{\bar{\mathbf{H}}},\\
\mathfrak{h}_y &= \mathfrak{h}_{y,\mathrm{sc}} \oplus \mathfrak{z}_{\mathbf{H}_y} = \mathrm{Lie}\,\mathbf{H}_{y,\mathrm{sc}} \oplus \mathrm{Lie}\,\mathbf{Z}_{\mathbf{H}_y}.
\end{aligned}$$

对于任意 $X \in \mathfrak{g}_\eta$，$Y \in \mathfrak{h}$ 和 $Y \in \mathfrak{h}_y$，我们分别用 $X = X_{\mathrm{sc}} + X_Z$，$Y = Y_{\mathrm{sc}} + Y_Z$ 和 $Y = Y_{\mathrm{sc}} + Y_Z$ 表示它们按照上述直和分解所得的分解。注意，我们有一个 F-有理同构$\mathfrak{z}_{\mathbf{H}_y} \cong \mathfrak{z}_{\bar{\mathbf{H}}} \oplus \mathfrak{z}_{\mathbf{G}_\eta}$（参见 [Wal08，第 3 节。8]）。

为方便起见，我们引入以下术语：

定义 8.1. . 我们称 $(Y, X) \in \mathfrak{h}_{y,0+} \times \mathfrak{g}_{\eta,0+}$ 是一个 D-范数对，如果

- $\eta\exp(X) \in \tilde{G}$ 是强正则半单的，
- $y\exp(Y) \in H$ 是强 $\mathbf{G}$-正则半单的，

并且存在一个满足以下条件的元素 $Y \in \mathfrak{h}$：

- $Y \in \mathfrak{h}$ 是 $X_{\mathrm{sc}} \in \mathfrak{g}_{\eta,\mathrm{sc}}$ 在标准端oscopy意义下的范数，
- 在非标准端oscopy的意义下相对应（参见第 $Y_{\mathrm{sc}} \in \mathfrak{h}_{\mathrm{sc}}$ 及 $Y_{\mathrm{sc}} \in \mathfrak{h}_{y,\,\mathrm{sc}}$ 8.1 节）8.1），
- $Y_Z \in \mathfrak{z}_{\mathbf{H}_y}$ 在同一化$\mathfrak{z}_{\mathbf{H}_y} \cong \mathfrak{z}_{\mathbf{H}} \oplus \mathfrak{z}_{\mathbf{G}_\eta}$下对应于 $Y_Z + X_Z \in \mathfrak{z}_{\mathbf{H}} \oplus \mathfrak{z}_{\mathbf{G}_\eta}$。

以下内容摘自 [Wal08，第3.8节，引理]:

命题8.2。对于任意 D-范数对（Y、X），$(y\exp(Y)\ \eta\exp(X)) \in \mathcal{D}$。

8.3. **传递因子的下降**。我们将 Δ^D 记作该对（$\mathbf{H}$，$\mathbf{G}_{\eta,\,\mathrm{sc}}$）的（绝对或相对）李代数传递因子。注意，我们在指数上加上符号 D，以强调（$\mathbf{H}$，$\mathbf{G}_{\eta,\,\mathrm{sc}}$）的端oscopic结构取决于图表 $D \in \mathbf{D}(y,\ \eta)$ 的选择。

定理 8.3 ([Wal08，第3.9节，定理‘定理’:])。存在一个包含 $\mathfrak{V}$ 的邻域0，位于 $\mathfrak{h}_{y,\,0+}$，使得对于任意的 D-范数对 (Y, X)、$(Y, X) \in \mathfrak{V} \times \mathfrak{g}_{\eta,\,0+}$，均有

$$\Delta\big(y\exp(Y), \eta\exp(X); y\exp(\underline{Y}), \eta\exp(\underline{X})\big) = \Delta^D(\bar{Y}, X_{\mathrm{sc}}; \bar{\underline{Y}}, \underline{X}_{\mathrm{sc}}),$$

其中 Y和 Y是与 $\mathfrak{h}$相关联的元素，分别对应于 $(Y,\ X)$ 和 $(Y,\ X)$，如定义 *8.1*所述。

推论 8.4。 绝对李代数传递因子 $\Delta^D(-,-)$ 可以规范化，使得存在 $\mathfrak{V}$ 的一个邻域，其中 0 属于 $\mathfrak{h}_{y,\ 0+}$，从而对于任意 D-范数对 $(Y,X)\in\mathfrak{V}\times\mathfrak{g}_{\eta,\ 0+}$，都有

$$\Delta\big(y\exp(Y),\eta\exp(X)\big)=\Delta^D(\bar{Y},X_{\mathrm{sc}}).$$

8.4. 轨道积分的傅里叶变换的转移。 本节总结 Waldspurger 和 Ngˆo 关于李代数上轨道积分的傅里叶变换之转移的研究成果。

对于任意连通约化群 $\mathbf{J}$定义在 F 上，并配备一个不变的对称非退化双线性形式 $B_{\mathfrak{j}}$，定义在 $\mathfrak{j}=$李$\mathbf{J}(F)$ 上，我们记 $\gamma(\mathfrak{j})$ 为 $(\mathfrak{j},B_{\mathfrak{j}})$ 关于固定的非平凡加性特征 ψ_F 的韦伊常数，其中 F（参见 [Wal97，第 3 节。1]）。对于正则半单元素 $X\in\mathfrak{j}$ 和 $X^*\in\mathfrak{j}$，我们定义

$$D^{\mathbf{J}}_{X^*}(X):=\gamma(\mathfrak{j})\cdot\hat{\iota}^{\mathbf{J}}_{X^*}(X).$$

这里，$\hat{\iota}^{\mathbf{J}}_{X^*}(X)$ 是 X^* 的轨道积分的归一化傅里叶变换（参见第 4.6 节；注意，X^* 也被视为 $\mathfrak{j}^*$ 的一个元素，这是通过 $B_{\mathfrak{j}}$给出的）。我们还定义

$$D^{\mathbf{J},\mathrm{st}}_{X^*}(X):=\sum_{X^{*\prime}\sim_{\mathbf{J}}X^*/\sim_J}D^{\mathbf{J}}_{X^{*\prime}}(X),$$

其中，索引集取遍稳定共轭类 X^* 在 $\mathfrak{j}$中的 J-共轭类。

8.4.1. 标准端oscopy的情形。设 J 是 F 上的连通约化群，J′ 是 J 的标准端oscopic群。我们固定 $\mathfrak{j}$上的一个不变对称非退化双线性形式 $B_{\mathfrak{j}}$。那么 $B_{\mathfrak{j}}$ 在 $\mathfrak{j}'$ 上诱导出一个不变对称非退化双线性形式（见 [Wal95，第 VIII.6] 节）。我们用 $B_{\mathfrak{j}'}$ 表示这个双线性形式。我们指出，这些双线性形式在极大环面上满足以下相容性性质。设 $\mathbf{T_J}$ 和 $\mathbf{T_{J'}}$ 分别是 J 和 J′ 的极大环面，属于 J 和 J′ 的（隐含固定的）钉扎。J′ 在 J 中的端oscopic结构给出一个同构 $\xi_{\mathbf{J}}\colon \mathbf{T_J}\cong\mathbf{T_{J'}}$，它在李代数上诱导出一个同构 $\xi_{\mathbf{J}}\colon \mathbf{t_J}\cong\mathbf{t_{J'}}$。采用这些记号，对于任意 X、$X'\in\mathfrak{t}_{\mathbf{J}}$，有 $B_{\mathfrak{j}}(X,X')=B_{\mathfrak{j}'}(\xi_{\mathbf{J}}(X)\ \xi_{\mathbf{J}}(X'))$。

对于强$\mathbf{J}$-正则半单元素 $Y^*\in\mathfrak{j}'$ 和强正则半单元素 $X\in\mathfrak{j}$，我们定义

$$D_{\mathbf{J}',\mathbf{J}}(Y^*,X):=\sum_{X^*\leftrightarrow Y^*/\sim_J}\mathring{\Delta}_{\mathbf{J}',\mathbf{J}}(Y^*,X^*)D^{\mathbf{J}}_{X^*}(X),$$

其中，索引集取遍与 Y^* 对应的 $\mathfrak{j}$ 的强正则半单元素的 J-共轭类，而 $\Delta_{\mathbf{J}',\mathbf{J}}(Y^*,X^*)$ 表示不含第四因子的李代数传递因子。我们还定义

$$\tilde{D}_{\mathbf{J}',\mathbf{J}}(Y^*,X):=\sum_{Y'\leftrightarrow X/\sim_{\mathbf{J}'}}\mathring{\Delta}_{\mathbf{J}',\mathbf{J}}(Y',X)D^{\mathbf{J}',\mathrm{st}}_{Y^*}(Y'),$$

其中，索引集取遍与 X 对应的 $\mathfrak{j}'$ 中元素的稳定共轭类。

采用这些记号，有如下结论：

定理 8.5 （[Wal97，1.2. 猜想]；[Wal06],[Ngˆo10]）。 我们有

$$\tilde{D}_{\mathbf{J}',\mathbf{J}}(Y^*,X)=D_{\mathbf{J}',\mathbf{J}}(Y^*,X).$$

8.4.2. 非标准端*oscopic*的情形。 设 $(\mathbf{G}_1,\mathbf{G}_2,\ j^*)$ 是一个非标准端oscopic三元组。我们为每个 $\mathfrak{g}_i$ 固定一个B_i 不变对称非退化双线性形式，使得对于每个 i ，我们有 $B_1(X,\ X')\ =\ B_2\big(j_*(X)\ j_*(X')\big)\ X,\ X'\in\mathfrak{t}_{1\circ}$

定理 8.6 ([Wal08，命题 1.8])。 对于任意相对应的正则半单元素$Y_1\in\mathfrak{g}_1$ 和 $Y_2\in\mathfrak{g}_2$ （分别对应 $X_1^*\in\mathfrak{g}_1$ 和 $X_2^*\in\mathfrak{g}_2$ 的正则半单元素），有

$$D_{X_1^*}^{\mathbf{G}_1,\mathrm{st}}(Y_1)=D_{X_2^*}^{\mathbf{G}_2,\mathrm{st}}(Y_2).$$

8.4.3. 同源的情形。 设$\mathbf{J}$ 是定义在 F 上的连通约化群。我们固定一个 J-不变对称非退化双线性形式 $B_{\mathfrak{j}}$ ，定义在 $\mathfrak{j}$上。于是得到一个同一化 $\mathfrak{j}\cong\mathfrak{j}^*$ ，它也诱导出同一化 $\mathfrak{j}_{\mathrm{sc}}\cong\mathfrak{j}_{\mathrm{sc}}^*$ 和 $\mathfrak{z}_{\mathbf{J}}\cong\mathfrak{z}_{\mathbf{J}}^*$。

引理 8.7。 对于一个具有分解$X=X_{\mathrm{sc}}+X_Z\in\mathfrak{j}_{\mathrm{sc}}\oplus\mathfrak{z}_{\mathbf{J}}$ 的强正则半单元素 $X\in\mathfrak{j}$，以及一个具有分解 $X^*=X_{\mathrm{sc}}^*+X_Z^*\in\mathfrak{j}_{\mathrm{sc}}\oplus\mathfrak{z}_{\mathbf{J}}$ 的强正则半单元素 $X^*\in\mathfrak{j}$，有

$$D_{X^*}^{\mathbf{J},\mathrm{st}}(X)=\gamma(\mathfrak{z}_{\mathbf{J}})\cdot\psi_F(B_{\mathfrak{j}}(X_Z^*,X_Z))\cdot D_{X_{\mathrm{sc}}^*}^{\mathbf{J}_{\mathrm{sc}},\mathrm{st}}(X_{\mathrm{sc}}).$$

证明。 根据 [Wal97，4.4 (1)], 我们有

$$\hat{\iota}_{X^*}^{\mathbf{J}}(X)=\psi_F(B_{\mathfrak{j}}(X_Z^*,X_Z))\cdot\hat{\iota}_{X_{\mathrm{sc}}^*}^{\mathbf{J}_{\mathrm{sc}}}(X_{\mathrm{sc}}).$$

一般而言，对于任意有限维二次空间的正交和 $V_1\oplus V_2\ V_1$ 与 V_2，我们有 $\gamma(V_1\oplus V_2)\ =\gamma(V_1)\cdot\gamma(V_2)$。因此我们有 $\gamma(\mathfrak{j})\ =\gamma(\mathfrak{j}_{\mathrm{sc}})\cdot\gamma(\mathfrak{z}_{\mathbf{J}})$。这意味着

$$D_{X^*}^{\mathbf{J}}(X)=\gamma(\mathfrak{z}_{\mathbf{J}})\cdot\psi_F(B_{\mathfrak{j}}(X_Z^*,X_Z))\cdot D_{X_{\mathrm{sc}}^*}^{\mathbf{J}_{\mathrm{sc}}}(X_{\mathrm{sc}}).$$

对于任意具有分解 $X'^*_{\mathrm{sc}}+X'^*_Z\in\mathfrak{j}_{\mathrm{sc}}\oplus\mathfrak{z}_{\mathbf{J}}$的 $X'^*\in\mathfrak{j}$， X'^* 在稳定意义下与 $\mathbf{J}$-共轭（分别为 J- 共轭）于 X^*，当且仅当 X'^*_{sc} 在稳定意义下与 $\mathbf{J}$- 共轭（分别为 J- 共轭）于 X^*_{sc} 和 $X'^*_Z=X^*_Z$。因此我们得到该断言。□

8.4.4. 组合形式。现在回到我们的情形；H 是 G 的一个扭曲内窥群。假设我们有满足 $y\in\mathfrak{H}_\eta$ 的 $(y,\eta)\in G_{\mathrm{ss}}\times H_{\mathrm{ss}}$ （见第 7.3 节），并且有一个图表 $D\in\mathrm{D}(y,\eta)$。那么我们得到关联群 H，如第 8.2 节所述。我们固定不变的对称非退化双线性形式 $B_{\mathfrak{g}_\eta}$，其定义在 $\mathfrak{g}_\eta$ 上； $B_{\bar{\mathfrak{h}}}$ 定义在 $\mathfrak{h}$ 上；以及 $B_{\mathfrak{h}_y}$ 定义在 $\mathfrak{g}_\eta$ 上，使得通过同构 $\mathfrak{z}_{\mathbf{H}_y}\cong\mathfrak{z}_{\mathbf{G}_\eta}\oplus\mathfrak{z}_{\bar{\mathbf{H}}}$， $B_{\mathfrak{g}_\eta}$ 对 $\mathfrak{z}_{\mathbf{H}_y}$ 的限制与 $B_{\mathfrak{g}_\eta}$ 对 $\mathfrak{z}_{\mathbf{G}_\eta}$ 的限制和 $B_{\bar{\mathfrak{h}}}$ 对 $\mathfrak{z}_{\bar{\mathbf{H}}}$ 的限制的正交和相等。

我们取

- 一个强正则半单元素 $Y^*\in\mathfrak{h}_{y,\ 0+}$ 其分解为 $Y^*=Y^*_{\mathrm{sc}}+Y^*_Z\in\mathfrak{h}_{y,\ \mathrm{sc}}\oplus\mathfrak{z}_{\mathbf{H}_y}$,
- 一个强正则半单元素 $Y^*_{\mathrm{sc}}\in\mathfrak{h}_{\mathrm{sc}\ 0+}$，其稳定共轭类对应于 Y^*_{sc}的稳定共轭类，并且
- 一个强正则半单元素 $X\in\mathfrak{g}_{\eta,\ 0+}$ 其分解为 $X=X_{\mathrm{sc}}+X_Z\in\mathfrak{g}_{\eta,\ \mathrm{sc}}\oplus\mathfrak{z}_{\mathbf{G}_\eta}$。

令 $Y_Z^*=Y_Z^*+X_Z^*\in\mathfrak{z}_{\mathbf{H}}\oplus\mathfrak{z}_{\mathbf{G}_\eta}$为中心部分的分解 $Y_Z^*\in\mathfrak{z}_{\mathbf{H}_y}$。
我们定义 $Y^*:=Y^*_{\mathrm{sc}}+Y_Z^*$。

命题 8.8。 采用上述记号，我们有

$$\sum_{Y \overset{D}{\leftrightarrow} X/\sim_{\mathbf{H}_y}} \mathring{\Delta}^D(\bar{Y}, X_{\mathrm{sc}}) D^{\mathbf{H}_y,\mathrm{st}}_{Y^*}(Y) = \sum_{X^* \overset{D}{\leftrightarrow} Y^*/\sim_{G_\eta}} \mathring{\Delta}^D(\bar{Y}^*, X^*_{\mathrm{sc}}) D^{\mathbf{G}_\eta}_{X^*}(X),$$

其中

- 左侧求和遍历强正则半单元的稳定共轭类 Y 属于 $\mathfrak{h}_{y,0+}$ 满足 (Y,X) 是一个 D-范数对（Y 是与 (Y,X) 相关联的元素，定义见 8.1），并且
- 右侧求和遍历 G_η-共轭类，其中包含 X^* 属于 $\mathfrak{g}_{\eta,0+}$ 且满足 (Y^*,X^*) 是一个 D-范数对的强正则半单元素。

证明。令 $Y \in \mathfrak{h}_{y,0+}$ 为一个强正则半单元，其分解为 $Y_{\mathrm{sc}} + Y_Z \in \mathfrak{h}_{y,\mathrm{sc}} \oplus \mathfrak{z}_{\mathbf{H}_y}$。设 Y_{sc} 对应于强正则半单元 $Y_{\mathrm{sc}} \in \mathfrak{h}_{\mathrm{sc}}$ 的稳定共轭类。再设在同构 $\mathfrak{z}_{\mathbf{H}_y} \cong \mathfrak{z}_{\mathbf{H}} \oplus \mathfrak{z}_{\mathbf{G}_\eta}$ 下，Y_Z 等于 $Y_Z + X'_Z$。那么根据定义，(Y,X) 是一个 D-范数对，当且仅当 $Y := Y_{\mathrm{sc}} + Y_Z$ 是 X_{sc} 和 $X'_Z = X_Z$ 的一个范数。因此，注意到两个强正则半单元 $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{h}_y$ 稳定共轭，当且仅当 $Y_{1,\mathrm{sc}}, Y_{2,\mathrm{sc}} \in \mathfrak{h}_{y,\mathrm{sc}}$ 稳定共轭且 $Y_{1,Z} = Y_{2,Z}$，可知所求恒等式的左侧等于

$$\sum_{\bar{Y}_Z \in \mathfrak{z}_{\bar{\mathbf{H}}}} \gamma(\mathfrak{z}_{\mathbf{H}_y}) \cdot \psi_F(B_{\mathfrak{h}_y}(Y^*_Z, Y_Z)) \sum_{Y_{\mathrm{sc}} \leftrightarrow X_{\mathrm{sc}}/\sim_{\mathbf{H}_{y,\mathrm{sc}}}} \mathring{\Delta}^D(\bar{Y}, X_{\mathrm{sc}}) D^{\mathbf{H}_{y,\mathrm{sc}},\mathrm{st}}_{Y^*_{\mathrm{sc}}}(Y_{\mathrm{sc}}) \tag{10}$$

根据关于 $\mathbf{H}$ 的引理 8.7（等ogeny 转移）。这里，第二个求和是对 $\mathfrak{h}_{y,\mathrm{sc}}$ 的强正则半单元素的稳定共轭类进行的，这些元素满足 $Y_{\mathrm{sc}} + Y_Z$ 是 X_{sc} 的范数，其中 $Y_{\mathrm{sc}} \in \mathfrak{h}_{\mathrm{sc}}$ 是一个元素，其稳定共轭类对应于 Y_{sc}。注意，第一个求和的索引集 $\{Y_Z \in \mathfrak{z}_{\bar{\mathbf{H}}}\}$ 是无限的，但由于第二个求和，只有有限多个索引项有非零贡献。

根据定理 8.6（非标准端oscopic 转移），（10）等于

$$\sum_{\bar{Y}_Z \in \mathfrak{z}_{\bar{\mathbf{H}}}} \gamma(\mathfrak{z}_{\mathbf{H}_y}) \cdot \psi_F(B_{\mathfrak{h}_y}(Y^*_Z, Y_Z)) \sum_{\bar{Y}_{\mathrm{sc}} \leftrightarrow X_{\mathrm{sc}}/\sim_{\bar{\mathbf{H}}_{\mathrm{sc}}}} \mathring{\Delta}^D(\bar{Y}, X_{\mathrm{sc}}) D^{\bar{\mathbf{H}}_{\mathrm{sc}},\mathrm{st}}_{\bar{Y}^*_{\mathrm{sc}}}(\bar{Y}_{\mathrm{sc}}), \tag{11}$$

其中，第二个求和是对满足以下条件的强正则半单元素 $Y_{\mathrm{sc}} \in \mathfrak{h}_{\mathrm{sc}}$ 进行的稳定共轭类求和：$Y_{\mathrm{sc}} + Y_Z$ 是 $X_{\mathrm{sc}} \in \mathfrak{g}_\eta$ 的范数，sc。重新整理求和后，我们得到（11）等于

$$\sum_{\bar{Y} \leftrightarrow X_{\mathrm{sc}}/\sim_{\bar{\mathbf{H}}}} \gamma(\mathfrak{z}_{\mathbf{H}_y}) \cdot \psi_F(B_{\mathfrak{h}_y}(Y^*_Z, Y_Z)) \cdot \mathring{\Delta}^D(\bar{Y}, X_{\mathrm{sc}}) D^{\bar{\mathbf{H}}_{\mathrm{sc}},\mathrm{st}}_{\bar{Y}^*_{\mathrm{sc}}}(\bar{Y}_{\mathrm{sc}}), \tag{12}$$

其中求和遍及 $\mathfrak{h}$ 中强正则半单元素的稳定共轭类，这些元素是 $X_{\mathrm{sc}} \in \mathfrak{g}_\eta$ 的范数，sc。注意到 $\gamma(\mathfrak{z}_{\mathbf{H}_y}) = \gamma(\mathfrak{z}_{\mathbf{G}_\eta}) \cdot \gamma(\mathfrak{z}_{\mathbf{H}})$，且 $\psi_F(B_{\mathfrak{h}_y}(Y^*_Z, Y_Z)) = \psi_F(B_{\mathfrak{h}}(Y^*_Z, Y_Z)) \cdot \psi_F(B_{\mathfrak{g}_\eta}(X^*_Z, X_Z))$，由适用于 $\mathbf{H}$ 的引理 8.7（等ogeny 转移）可知，(12) 等于

$$\gamma(\mathfrak{z}_{\mathbf{G}_\eta}) \cdot \psi_F(B_{\mathfrak{g}_\eta}(X^*_Z, X_Z)) \sum_{\bar{Y} \leftrightarrow X_{\mathrm{sc}}/\sim_{\bar{\mathbf{H}}}} \mathring{\Delta}^D(\bar{Y}, X_{\mathrm{sc}}) D^{\bar{\mathbf{H}},\mathrm{st}}_{\bar{Y}^*}(\bar{Y}). \tag{13}$$

最后，根据定理8.5（标准端oscopy的转移），（13）等于

$$\gamma(\mathfrak{z}_{\mathbf{G}_\eta}) \cdot \psi_F(B_{\mathfrak{g}_\eta}(X^*_Z, X_Z)) \sum_{X^*_{\mathrm{sc}} \leftrightarrow \bar{Y}^*/\sim_{G_{\eta,\mathrm{sc}}}} \mathring{\Delta}^D(\bar{Y}^*, X^*_{\mathrm{sc}}) D^{\mathbf{G}_{\eta,\mathrm{sc}}}_{X^*_{\mathrm{sc}}}(X_{\mathrm{sc}}), \tag{14}$$

其中，索引集取遍G_η, sc-共轭类的强正则半单元素，这些元素属于$\mathfrak{g}_\eta$, sc 并且对应于 Y^*。接着，使用与引理8.7 证明中相同的论证可推出（14）等于

$$\sum_{X^*_{\mathrm{sc}} \leftrightarrow \bar{Y}^*/\sim_{G_\eta}} \mathring{\Delta}^D(\bar{Y}^*, X^*_{\mathrm{sc}}) D^{\mathbf{G}_\eta}_{X^*}(X). \tag{15}$$

我们回顾一下，(Y^*, X^*) 是一个 D-范数对，当且仅当 X^*_{sc} 对应于 Y^* 且 X^* 的中心部分由 X^*_Z给出，而它由 Y^*确定。因此我们看到，(15) 中求和的索引集，恰好就是所需恒等式右侧求和的索引集。□

9. Toral invariants for restricted roots

9.1. 根系。设 $\eta \in G_{\mathrm{ss}}$ 和 $y \in \mathfrak{H}_\eta$（见第 7.3 节），使得 $\mathrm{D}(y,\eta)$ 非空。下文中，我们固定一个图表 $D = (\mathrm{B}^\flat, \mathrm{T}^\flat, \mathrm{B}^\diamondsuit, \mathrm{T}^\diamondsuit) \in \mathrm{D}(y,\eta)$，并简记 ν 为 ν_D（分别地，μ 为 μ_D）。

回顾一下，采用第 4.2 节中的记号，我们有

$$\Phi(\mathbf{G}_{\nu\theta}, \mathbf{T}^{\theta,\circ}) = \{p^*(\alpha) \mid \alpha \in \Phi(\mathbf{G},\mathbf{T}); N(\alpha)(\nu) = 1\} \subset \Phi_{\mathrm{res}}(\mathbf{G},\mathbf{T}),$$
$$\Phi^\vee(\mathbf{G}_{\nu\theta}, \mathbf{T}^{\theta,\circ}) = \{N(\alpha^\vee) \mid \alpha^\vee \in \Phi^\vee(\mathbf{G},\mathbf{T}); N(\alpha)(\nu) = 1\} \subset \Phi^\vee_{\mathrm{res}}(\mathbf{G},\mathbf{T})$$

（注意，现在我们假设 $\Phi_{\mathrm{res}}(\mathbf{G},\mathbf{T})$ 不含任何类型 2 或 3 的限制根）。集合 $\Phi(\mathbf{H}^\mu,\mathbf{T}_\mathbf{H})$ 和 $\Phi^\vee(\mathbf{H}^\mu,\mathbf{T}_\mathbf{H})$ 如下给出：

$$\Phi(\mathrm{H}^\mu,\mathrm{T}_\mathbf{H}) = \{N(\alpha) \mid \alpha \in \Phi(\mathrm{G},\mathrm{T});\ N(\alpha^\vee)(s) = 1, N(\alpha)(\nu) = 1\} \subset X^*(\mathrm{T})^\theta \cong X^*(\mathrm{T}_\mathbf{H}),$$
$$\Phi^\vee(\mathrm{H}^\mu,\mathrm{T}_\mathbf{H}) = \{p_*(\alpha^\vee) \mid \alpha^\vee \in \Phi^\vee(\mathrm{G},\mathrm{T});\ N(\alpha^\vee)(s) = 1, N(\alpha)(\nu) = 1\} \subset Y_*(\mathrm{T}) \cong X_*(\mathrm{T}_\mathbf{H})$$

我们定义一个单射 $i^\vee$: $\Phi^\vee(\mathbf{H}^\mu,\mathbf{T}_\mathbf{H}) \to \Phi^\vee(\mathbf{G}_{\nu\theta},\mathbf{T}^{\theta,\circ})$，其定义为 $i^\vee(p_*(\alpha^\vee)) := N(\alpha^\vee)$。因此，我们可以通过 $i^\vee$ 将 $\Phi^\vee(\mathbf{H}^\mu,\mathbf{T}_\mathbf{H})$ 视为 $\Phi^\vee(\mathbf{G}_{\nu\theta},\mathbf{T}^{\theta,\circ})$ 的子集。

现在，我们利用固定图表 D 将上述讨论转移到 $\Phi(\mathrm{G},\mathrm{T}^\diamondsuit)$。通过映射 $\xi_\diamondsuit$，$\Phi^{(\vee)}_{\mathrm{res}}(\mathrm{G},\mathrm{T}^\diamondsuit)$ 与 $\Phi^{(\vee)}_{\mathrm{res}}(\mathrm{G},\mathrm{T})$ 同一化。此外，在这一同一化下，$\Phi^{(\vee)}(\mathrm{G}^\eta,\mathrm{T}^\natural)$ 映射到 $\Phi^{(\vee)}(\mathrm{G}_{\nu\theta},\mathrm{T}^{\theta,\circ})$。类似地，通过映射 $\xi_\flat$，$\Phi^{(\vee)}(\mathrm{H},\mathrm{T}^\flat)$ 与 $\Phi^{(\vee)}(\mathrm{H},\mathrm{T}_\mathbf{H})$ 同一化，而 $\Phi^{(\vee)}(\mathrm{H}^y,\mathrm{T}^\flat)$ 映射到 $\Phi^{(\vee)}(\mathrm{H}^\mu,\mathrm{T}_\mathbf{H})$。将这些双射与之前的单射 $i^\vee$ 结合起来，我们可以将 $\Phi^\vee(\mathrm{H}^y,\mathrm{T}^\flat)$ 同一化为 $\Phi^\vee(\mathrm{G}^\eta,\mathrm{T}^\natural)$ 的子集。相应地，我们也可以将 $\Phi(\mathrm{H}^y,\mathrm{T}^\flat)$ 同一化为 $\Phi(\mathrm{G}^\eta,\mathrm{T}^\natural)$ 的子集。

令 $(Y, X) \in \mathfrak{h}_{y,\,0+} \times \mathfrak{g}_{\eta,\,0+}$ 为一个 D-范数对。固定双线性形式 $B_{\mathfrak{g}_\eta}$ 于 $\mathfrak{g}_\eta$，$B_{\mathfrak{h}}$ 于 $\mathfrak{h}$，以及 $B_{\mathfrak{h}_y}$ 于 $\mathfrak{h}_y$，如第 8.4节所述。则 $X \in \mathfrak{g}_\eta$（分别为 $Y \in \mathfrak{h}_y$）可以与元素 $X^* \in \mathfrak{g}^*_\eta$（分别为 $Y^* \in \mathfrak{h}^*_y$）对应。

引理9.1. 设 $\alpha^\vee_y$ 是 $\Phi^\vee(H^y, T^\flat)$ 中的一个元素，该元素与 $\Phi^\vee(G^\eta,T^\natural)$ 中的元素 $\alpha^\vee_\eta$ 对应。令 $\alpha^\vee \in \Phi^\vee(G, T^\diamondsuit)$ 为满足 $\alpha^\vee_y = p_*(\alpha^\vee) \in X_*(T^\flat)$ 且 $\alpha^\vee_\eta = N(\alpha^\vee) \in X_*(T^\natural)$ 的余根。则有

$$l_\alpha \cdot \langle d\alpha^\vee_y(1), Y^* \rangle = \langle d\alpha^\vee_\eta(1), X^* \rangle.$$

证明。由于 (Y,X) 是相对于 $D = (\mathrm{B}^\flat, \mathrm{T}^\flat, \mathrm{B}^\diamondsuit, \mathrm{T}^\diamondsuit)$ 的范数对，我们可以假设 $X \in \mathfrak{t}^\natural$ and $Y \in \mathfrak{t}^\flat$ and ξ_D: $\mathfrak{t}^\diamondsuit \twoheadrightarrow \mathfrak{t}^\flat$ 将 X 映射到 Y（参见引理 7.8 证明中的论证）。因此，根据我们对双线性形式的选择，在对偶同构 $\mathfrak{t}^{\natural *} \cong \mathfrak{t}^{\flat *}$ 到 ξ_D: $\mathfrak{t}^\natural \cong \mathfrak{t}^\flat$下，$X^*$ 与 Y^* 同一化。由此可见，

在同一化 ξ_D下，我们有 $\langle d\alpha_\eta^\vee(1)\ X^*\rangle = \sum_{i=0}^{l_\alpha}\langle d[\eta]^i(\alpha)^\vee(1)\ X^*\rangle = l_\alpha\langle d\alpha^\vee(1)\ X^*\rangle = l_\alpha\langle d\alpha_y^\vee(1)\ Y^*\rangle$。□

9.2. 分析分歧限制根。接下来假设我们有一个F有理扭曲极大环面 $\tilde{\mathbf{T}}^\diamond$，它属于 $\tilde{\mathbf{G}}$，并且有拓扑半单元素$\eta, \eta' \in \tilde{T}^\diamond$。我们考察 $\Phi(\mathbf{G}^\eta, \mathbf{T}^\natural)$的分歧根与 $\Phi(\mathbf{G}^{\eta'}, \mathbf{T}^\natural)$的分歧根之间的关系。请注意，如第 4.2 节所述，这两个集合都被视为限制根系 $\Phi_{\mathrm{res}}(\mathbf{G}, \mathbf{T}^\diamond)$的子集。为方便起见，我们引入以下记号：

$$\Phi_{\mathrm{res}}(\mathbf{G}, \mathbf{T}^\diamond)_\bullet^{(\star)} := \{\alpha_{\mathrm{res}} \in \Phi_{\mathrm{res}}(\mathbf{G}, \mathbf{T}^\diamond)_\bullet \mid \alpha \in \Phi(\mathbf{G}, \mathbf{T}^\diamond)_\star\},$$

其中 $\bullet$，$\star \in$ {渐近，ur，分歧}。取一个包含$\mathbf{B}^\diamond$且在$\mathbf{T}^\diamond$作用下稳定的博雷尔子群，并选取元素 $\tilde{\mathbf{T}}^\diamond$。我们取一个元素 $g^\diamond \in \mathbf{G}$ s，使其满足 $[g^\diamond](\mathbf{B}^\diamond, \mathbf{T}^\diamond) = (\mathbf{B}, \mathbf{T})$。令 $\nu\theta := [g^\diamond](\eta)$且 $\nu'\theta := [g^\diamond](\eta')$。我们将由其扭曲结构确定的$\mathbf{T}^\diamond$ 的对合 $\theta_\diamond\ \theta_{\mathbf{T}^\diamond}$ 简记为。

引理 9.2。对于任意 $\alpha_{\mathrm{res}} \in \Phi_{\mathrm{res}}(\mathbf{G},\mathbf{T}^\diamond)_{\mathrm{ram}}^{(\mathrm{asym})}$，我们有 $\alpha_{\mathrm{res}} \in \Phi(\mathbf{G}^\eta,\mathbf{T}^\natural)$。

证明。对于任意 $\alpha_{\mathrm{res}} \in \Phi_{\mathrm{res}}(\mathbf{G},\mathbf{T}^\diamond)_{\mathrm{ram}}^{(\mathrm{asym})}$，以下结论成立：

- $F_\alpha = F_{\pm\alpha}$ 和 $F_\alpha = F_\alpha$res</style},
- $F_{\alpha_{\mathrm{res}}}/F_{\pm\alpha_{\mathrm{res}}}$ 和$F_{\pm\alpha}/F_{\pm\alpha_{\mathrm{res}}}$ 是二次分歧的，并且
- $\theta_\diamond(\alpha) \in -\dot{\alpha}$；令 $\tau_\alpha \in \Gamma$ 为满足 $\tau_\alpha(\alpha) = -\theta_\diamond(\alpha)$ 的元素。

$$\begin{array}{ccc} F_{\alpha_{\mathrm{res}}} & = & F_\alpha \\ {\scriptstyle\mathrm{quad}}\big| & {\scriptstyle\mathrm{ram}} & \big\| \\ F_{\pm\alpha_{\mathrm{res}}} & \overset{\mathrm{quad}}{\underset{\mathrm{ram}}{}} & F_{\pm\alpha} \end{array}$$

根据第 9.1 节中给出的描述，只需证明 $N(\alpha)(\nu) = N(\alpha)(\nu')$，这等价于 $\alpha(\eta^2) = \alpha(\eta'^2)$。（这里，在第一个等式中，我们将 α 视为 T 的一个根，并再次将其记为 α。）由于 $\alpha(\eta^2)$ 和 $\alpha(\eta'^2)$ 都是有限的、阶与 p 互素的，因此只需证明 $\alpha(\eta^2) \equiv \alpha(\eta'^2)$（模 $\mathfrak{p}_F$）。

设 $t \in T^\diamond$ 为满足 $\eta' = t\eta$的元素。于是我们有 $\eta'^2 = (t\eta)^2 = t \cdot \theta_\diamond(t) \cdot \eta^2$。由于 t 是 F-有理的，且 $\tau_\alpha(\alpha) = -\theta_\diamond(\alpha)$，我们有

$$\alpha(t \cdot \theta_\diamond(t)) = \alpha(t) \cdot \theta_\diamond(\alpha)(t) = \alpha(t) \cdot \tau_\alpha(\alpha(t))^{-1}.$$

注意到 $F_{\alpha_{\mathrm{res}}}/F_{\pm\alpha_{\mathrm{res}}}$ 是分歧的，我们有 $\alpha(t)\cdot\tau_\alpha(\alpha(t))^{-1} \equiv 1$ (模 $\mathfrak{p}_F$)。□

引理 9.3。对于任意 $\alpha_{\mathrm{res}} \in \Phi_{\mathrm{res}}(\mathbf{G}, \mathbf{T}^\diamond)_{\mathrm{ram}}^{(\mathrm{ur})}$，我们有 $\alpha_{\mathrm{res}} \in \Phi(\mathbf{G}^\eta, \mathbf{T}^\natural)$ 当且仅当 $\alpha_{\mathrm{res}} \in \Phi(\mathbf{G}^{\eta'}, \mathbf{T}^\natural)$。

证明。对于任意 $\alpha_{\mathrm{res}} \in \Phi_{\mathrm{res}}(\mathbf{G}, \mathbf{T}^\diamond)_{\mathrm{ram}}^{(\mathrm{ur})}$，以下结论成立：

- $F_\alpha/F_{\pm\alpha}$ 和$F_\alpha/F_{\alpha_{\mathrm{res}}}$ 均为二次非分歧，且
- $F_{\alpha_{\mathrm{res}}}/F_{\pm\alpha_{\mathrm{res}}}$ 和$F_{\pm\alpha}/F_{\pm\alpha_{\mathrm{res}}}$ 均为二次分歧。

$$\begin{array}{ccc} F_{\alpha_{\mathrm{res}}} & \overset{\mathrm{quad}}{\underset{\mathrm{ur}}{}} & F_\alpha \\ {\scriptstyle\mathrm{quad}}\big| & {\scriptstyle\mathrm{ram}} \quad {\scriptstyle\mathrm{quad}} & \big|{\scriptstyle\mathrm{ur}} \\ F_{\pm\alpha_{\mathrm{res}}} & \overset{\mathrm{quad}}{\underset{\mathrm{ram}}{}} & F_{\pm\alpha} \end{array}$$

我们令 σ_α，$\tau_\alpha \in \Gamma$ 为满足 $\sigma_\alpha(\alpha) = \theta_\diamond(\alpha)$ 以及 $\tau_\alpha(\alpha) = -\alpha$的元素，分别如此。沿用引理 9.2证明中的记号和论证，

只需证明，对于任意 $t \in T^{\diamond}$， $\alpha(t) \cdot \theta_{\diamond}(\alpha)(t) \equiv 1$ (模 $\mathfrak{p}_F$)。由于 t 是 F-有理的，且 $\tau_\alpha(\alpha) = -\alpha$，因此我们有

$$\mathrm{Nr}_{F_\alpha/F_{\pm\alpha}}(\alpha(t)) = \alpha(t) \cdot \tau_\alpha(\alpha(t)) = \alpha(t) \cdot \alpha(t)^{-1} = 1.$$

同样，我们有

$$\mathrm{Nr}_{F_\alpha/F_{\alpha_{\mathrm{res}}}}(\alpha(t)) = \alpha(t) \cdot \sigma_\alpha(\alpha(t)) = \alpha(t) \cdot \theta_{\diamond}(\alpha)(t).$$

由于 $F_\alpha/F_{\alpha_{\mathrm{res}}}$ 和 $F_\alpha/F_{\pm\alpha}$ 都是非分歧二次扩张，因此我们得到

$$\alpha(t) \cdot \theta_{\diamond}(\alpha)(t) = \mathrm{Nr}_{F_\alpha/F_{\alpha_{\mathrm{res}}}}(\alpha(t)) \equiv \mathrm{Nr}_{F_\alpha/F_{\pm\alpha}}(\alpha(t)) = 1 \pmod{\mathfrak{p}_{\overline{F}}}.$$

证明完毕。 □

引理 9.4。 对于任意 $\alpha_{\mathrm{res}} \in \Phi_{\mathrm{res}}(\mathbf{G}、\mathbf{T}^{\diamond})^{(\mathrm{ram})}_{\mathrm{ram}}$且满足 $l_\alpha = 2$，当且仅当 $\alpha_{\mathrm{res}} \in \Phi(\mathbf{G}^{\eta'}、\mathbf{T}^{\natural})$时，有 $\alpha_{\mathrm{res}} \in \Phi(\mathbf{G}^{\eta}、\mathbf{T}^{\natural})$。

证明。 设 $\alpha \in \Phi(\mathbf{G},\mathbf{T}^{\diamond})$ 是一个对称分歧根，且满足 $l_\alpha = 2$。在此情况下，以下结论成立：

- $F_\alpha/F_{\pm\alpha}$ 和$F_{\alpha_{\mathrm{res}}}/F_{\pm\alpha_{\mathrm{res}}}$ 是二次分歧的，并且
- $F_\alpha/F_{\alpha_{\mathrm{res}}}$ 和$F_{\alpha_{\mathrm{res}}}/F_{\pm\alpha_{\mathrm{res}}}$ 都是二次非分歧的。

$$\begin{array}{ccc} F_{\alpha_{\mathrm{res}}} & \overset{\text{quad}}{\underset{\text{ur}}{\text{———}}} & F_\alpha \\ {\scriptstyle\text{quad}}\,\big|\,{\scriptstyle\text{ram}} & & {\scriptstyle\text{ram}}\,\big|\,{\scriptstyle\text{quad}} \\ F_{\pm\alpha_{\mathrm{res}}} & \overset{\text{ur}}{\underset{\text{quad}}{\text{———}}} & F_{\pm\alpha} \end{array}$$

（事实上，由于 $\theta_{\diamond}(\alpha) \neq -\alpha$，我们不可能有 $F_{\alpha_{\mathrm{res}}} = F_{\pm\alpha}$。如果 $F_{\pm\alpha}/F_{\pm\alpha_{\mathrm{res}}}$ 是一个不同于 $F_{\alpha_{\mathrm{res}}}$的二次分歧扩张，那么 F_α 必定包含 $F_{\pm\alpha_{\mathrm{res}}}$的一个二次非分歧扩张，因此会导出矛盾。所以 $F_{\pm\alpha}/F_{\pm\alpha_{\mathrm{res}}}$必定是二次非分歧的。）令 $\tau_\alpha \in \Gamma$ 为满足 $\tau_\alpha(\alpha) = -\alpha$ 的元素。那么 τ_α 在伽罗瓦群 $\mathrm{Gal}(F_{\alpha_{\mathrm{res}}}/F_{\pm\alpha_{\mathrm{res}}})$ 中限制为非平凡元素。令 $\sigma_\alpha \in \Gamma$ 为满足 $\sigma_\alpha(\alpha) = \theta_{\diamond}(\alpha)$ 的元素。

采用与引理9.2证明中相同的记号和论证，只需证明 $\alpha(t) \cdot \theta_{\diamond}(\alpha)(t) \equiv 1$ (模 $\mathfrak{p}_F$)。由于 t 是 F-有理的，且 $\tau_\alpha(\alpha) = -\alpha$，

$$\mathrm{Nr}_{F_\alpha/F_{\pm\alpha}}(\alpha(t)) = \alpha(t) \cdot \tau_\alpha(\alpha(t)) = \alpha(t) \cdot \alpha(t)^{-1} = 1.$$

由于 $F_\alpha/F_{\pm\alpha}$ 是分歧的，这意味着 $\alpha(t) \equiv \pm 1$ (模 $\mathfrak{p}_F$)。因此我们得到$\alpha(t)\cdot\theta_{\diamond}(\alpha)(t) = \alpha(t)\cdot\sigma_\alpha(\alpha(t)) = \mathrm{Nr}^{F_\alpha/F_{\alpha_{\mathrm{res}}}}(\alpha(t)) \equiv \mathrm{Nr}^{F_\alpha/F_{\alpha_{\mathrm{res}}}}(\pm 1) = 1$ (模 $\mathfrak{p}_F$)。证明至此完成。

□

9.3. **环面不变量的下降**。 我们沿用第9.2节中的记号。接下来，我们考察 $(\mathbf{G}^{\eta},\mathbf{T}^{\natural})$ 的环面不变量与 $(\mathbf{G}^{\eta'},\mathbf{T}^{\natural})$ 的环面不变量之间的关系。在开始讨论之前，我们注意到， Θ-轨道$\Theta\alpha$ 中的 $\alpha \in \Phi(\mathbf{G},\mathbf{T})$ 的根两两正交；并且对于任意根向量$X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$，都有 $\theta^{l_\alpha}(X_\alpha) = X_\alpha$ （这些结论成立，是因为我们假设不存在类型 2 或 3 的限制根；参见 [KS99, (1.3.5-1.3.7)]）。

令 $t \in T^{\diamond}$ 为满足 $\eta' = t\eta$ 的元素。

命题 9.5. 设 $\alpha_{\mathrm{res}} \in \Phi_{\mathrm{res}}(\mathbf{G},\mathbf{T}^{\diamond})^{(\mathrm{asym})}_{\mathrm{ram}}$。假设 $\alpha_{\mathrm{res}} \in \Phi(\mathbf{G}^{\eta},\mathbf{T}^{\natural})$，它由引理 $\alpha_{\mathrm{res}} \in \Phi(\mathbf{G}^{\eta'},\mathbf{T}^{\natural})$ *9.2* 说明与之等价。于是有

$$f_{(\mathbf{G}_\eta,\mathbf{T}^{\natural})}(\alpha_{\mathrm{res}}) = f_{(\mathbf{G}_{\eta'},\mathbf{T}^{\natural})}(\alpha_{\mathrm{res}}) \cdot \epsilon_\alpha(t).$$

证明。 我们沿用引理 9.2证明中的记号。取一个元素 X_α属于 $\mathfrak{g}_\alpha(F_\alpha)$。那么 $X_{\alpha_{\mathrm{res}},\eta} := X_\alpha + [\eta](X_\alpha)$ 属于 $\mathfrak{g}_{\eta,\alpha_{\mathrm{res}}}(F_\alpha)$。由于 $F_{\alpha_{\mathrm{res}}} = F_\alpha$，可得 $X_{\alpha_{\mathrm{res}},\eta} \in \mathfrak{g}_{\eta,\alpha_{\mathrm{res}}}(F_{\alpha_{\mathrm{res}}})$。因此，根据环面不变量的定义（见第 3.2 节），

$$\begin{aligned} f_{(\mathbf{G}_\eta,\mathbf{T}^\natural)}(\alpha_{\mathrm{res}}) &= \kappa_{\alpha_{\mathrm{res}}}\left(\frac{[X_{\alpha_{\mathrm{res}},\eta}, \tau_\alpha(X_{\alpha_{\mathrm{res}},\eta})]}{H_{\alpha_{\mathrm{res}}}}\right) \\ &= \kappa_{\alpha_{\mathrm{res}}}\left(\frac{[X_\alpha, [\eta](\tau_\alpha(X_\alpha))] + [[\eta](X_\alpha), \tau_\alpha(X_\alpha)]}{H_{\alpha_{\mathrm{res}}}}\right) \end{aligned}$$

（注意 $\tau_\alpha(\alpha) = -\theta_\diamond(\alpha)$）。注意 $H_{\alpha_{\mathrm{res}}} = H_\alpha + [\eta](H_\alpha)$；这里，$[\eta](H_\alpha)$ 不依赖于 η 的选择，且与 H_α 线性无关。由于 $[X_\alpha, [\eta](\tau_\alpha(X_\alpha))]$ 和 $[[\eta](X_\alpha)\ \tau_\alpha(X_\alpha)]$ 分别与 H_α 和 $[\eta](H_\alpha)$ 成比例，我们有

$$f_{(\mathbf{G}_\eta,\mathbf{T}^\natural)}(\alpha_{\mathrm{res}}) = \kappa_{\alpha_{\mathrm{res}}}\left(\frac{[X_\alpha, [\eta](\tau_\alpha(X_\alpha))]}{H_\alpha}\right).$$

同理可得

$$f_{(\mathbf{G}_{\eta'},\mathbf{T}^\natural)}(\alpha_{\mathrm{res}}) = \kappa_{\alpha_{\mathrm{res}}}\left(\frac{[X_\alpha, [\eta'](\tau_\alpha(X_\alpha))]}{H_\alpha}\right).$$

因此，我们得到

$$f_{(\mathbf{G}_{\eta'},\mathbf{T}^\natural)}(\alpha_{\mathrm{res}}) = f_{(\mathbf{G}_\eta,\mathbf{T}^\natural)}(\alpha_{\mathrm{res}}) \cdot \kappa_{\alpha_{\mathrm{res}}}(\tau_\alpha(\alpha(t))).$$

由于 $\kappa_{\alpha_{\mathrm{res}}}$ 是对应于扩张 $F_{\alpha_{\mathrm{res}}}/F_{\pm\alpha_{\mathrm{res}}}$ 的 $F_{\pm\alpha_{\mathrm{res}}}$ 的二次特征，注意到 $\alpha(t)$ 属于 $\mathcal{O}^\times_{F_{\pm\alpha_{\mathrm{res}}}}$，我们得出

$$\kappa_{\alpha_{\mathrm{res}}}(\tau_\alpha(\alpha(t))) = \mathrm{sgn}_{k_\alpha^\times}(\overline{\alpha(t)}) = \epsilon_\alpha(t).$$

证明至此完成。 □

命题 9.6。 设 $\alpha_{\mathrm{res}} \in \Phi_{\mathrm{res}}(\mathbf{G},\mathbf{T}^\diamond)^{(\mathrm{ur})}_{\mathrm{ram}}$. 假设 $\alpha_{\mathrm{res}} \in \Phi(\mathbf{G}^\eta,\mathbf{T}^\natural)$，根据引理 *9.3*，它等价于 $\alpha_{\mathrm{res}} \in \Phi(\mathbf{G}^{\eta'},\mathbf{T}^\natural)$。那么我们有

$$f_{(\mathbf{G}_\eta,\mathbf{T}^\natural)}(\alpha_{\mathrm{res}}) = f_{(\mathbf{G}_{\eta'},\mathbf{T}^\natural)}(\alpha_{\mathrm{res}}) \cdot \epsilon_\alpha(t).$$

证明。 我们采用引理 9.3 证明中的记号。取一个元素X_α 属于 $\mathfrak{g}_\alpha(F_\alpha)$。于是 $X_{\alpha_{\mathrm{res}},\ \eta} := X_\alpha + [\eta](X_\alpha)$ 属于 $\mathfrak{g}_{\eta,\ \alpha_{\mathrm{res}}}(F_\alpha)$。为计算环面不变量 $f_{(\mathbf{G}_\eta,\mathbf{T}^\natural)}(\alpha_{\mathrm{res}})$，我们对 $X_{\alpha_{\mathrm{res}},\ \eta}$ 进行缩放，使其成为 $F_{\alpha_{\mathrm{res}}}$-有理的。令$C_\eta \in F_\alpha^\times$为由 $\sigma_\alpha(X_\alpha) = C_\eta \cdot [\eta](X_\alpha)$ 所确定的常数。注意到此时$\sigma_\alpha([\eta](X_\alpha)) = C_\eta \cdot X_\alpha$。事实上，由于 η 是 F-有理的，我们有

$$\sigma_\alpha([\eta](X_\alpha)) = [\eta](\sigma_\alpha(X_\alpha)) = [\eta](C_\eta \cdot [\eta](X_\alpha)) = C_\eta \cdot \alpha(\eta^2) \cdot X_\alpha = C_\eta \cdot X_\alpha,$$

其中 $\alpha(\eta^2) = 1$，因为 $\alpha_{\mathrm{res}} \in \Phi(\mathbf{G}^\eta,\ \mathbf{T}^\natural)$。因此我们有

$$\sigma_\alpha^2(X_\alpha) = \sigma_\alpha(C_\eta \cdot [\eta](X_\alpha)) = \sigma_\alpha(C_\eta) \cdot C_\eta \cdot X_\alpha = \mathrm{Nr}_{F_\alpha/F_{\alpha_{\mathrm{res}}}}(C_\eta) \cdot X_\alpha.$$

另一方面，由于 σ_α^2 属于 Γ_α，σ_α^2 固定了 X_α。这意味着 $\mathbf{Nr}^{F_\alpha/F_{\alpha_{\mathrm{res}}}}(C_\eta) = 1$。因此，根据希尔伯特第 90 定理，我们可以找到一个元素 $x_\eta \in F_\alpha^\times$，使其满足 $C_\eta = x_\eta/\sigma_\alpha(x_\eta)$。令 $X_{\alpha_{\mathrm{res}},\ \eta} := x_\eta \cdot X_{\alpha_{\mathrm{res}},\ \eta}$，我们得到一个 $F_{\alpha_{\mathrm{res}}}$-有理根向量 $X_{\alpha_{\mathrm{res}},\ \eta} \in \mathfrak{g}_{\eta,\ \alpha_{\mathrm{res}}}(F_{\alpha_{\mathrm{res}}})$。

˜现在我们用 $X_{\alpha_{\mathrm{res}},\ \eta}$计算环面不变量：

$$f_{(\mathbf{G}_\eta,\mathbf{T}^\natural)}(\alpha_{\mathrm{res}}) = \kappa_{\alpha_{\mathrm{res}}}\left(\frac{[\tilde{X}_{\alpha_{\mathrm{res}},\eta}, \tau_\alpha(\tilde{X}_{\alpha_{\mathrm{res}},\eta})]}{H_{\alpha_{\mathrm{res}}}}\right)$$
$$= \kappa_{\alpha_{\mathrm{res}}}\left(\frac{[x_\eta X_\alpha, \tau_\alpha(x_\eta X_\alpha)] + [x_\eta[\eta](X_\alpha), \tau_\alpha(x_\eta[\eta](X_\alpha))]}{H_{\alpha_{\mathrm{res}}}}\right).$$

与命题 9.5 的证明中相同的论证可得，这等于

$$\kappa_{\alpha_{\mathrm{res}}}\left(\frac{[x_\eta X_\alpha, \tau_\alpha(x_\eta X_\alpha)]}{H_\alpha}\right).$$

同理，以相同的方式取 $C_{\eta'} \in F_\alpha^\times$ 和 $x_{\eta'} \in F_\alpha^\times$，

$$f_{(\mathbf{G}_{\eta'},\mathbf{T}^\natural)}(\alpha_{\mathrm{res}}) = \kappa_{\alpha_{\mathrm{res}}}\left(\frac{[x_{\eta'} X_\alpha, \tau_\alpha(x_{\eta'} X_\alpha)]}{H_\alpha}\right).$$

因此我们得到

$$f_{(\mathbf{G}_{\eta'},\mathbf{T}^\natural)}(\alpha_{\mathrm{res}}) = f_{(\mathbf{G}_\eta,\mathbf{T}^\natural)}(\alpha_{\mathrm{res}}) \cdot \kappa_{\alpha_{\mathrm{res}}}\big((x_{\eta'}x_\eta^{-1}) \cdot \tau_\alpha(x_{\eta'}x_\eta^{-1})\big).$$

令 $y := x_{\eta'}x_\eta^{-1} \in F_\alpha^\times$，于是 $\kappa_{\alpha_{\mathrm{res}}}((x_{\eta'}x_\eta^{-1}) \cdot \tau_\alpha(x_{\eta'}x_\eta^{-1})) = \kappa_{\alpha_{\mathrm{res}}}(y \cdot \tau_\alpha(y))$。由于 $C_\eta \cdot [\eta](X_\alpha) = \sigma_\alpha(X_\alpha) = C_{\eta'} \cdot [\eta'](X_\alpha)$，我们有 $C_{\eta'} = \alpha(t)^{-1}C_\eta$。因此我们有 $y/\sigma_\alpha(y) = \alpha(t)^{-1}$。由于 $F_\alpha/F_{\alpha_{\mathrm{res}}}$ 是非分歧的，我们可以选取 x_η 和 $x_{\eta'}$ 为 $\mathcal{O}_{F_\alpha}^\times$ 的元素，因此 $y \in \mathcal{O}_{F_\alpha}^\times$。注意，复合映射

$$k_\alpha^1 \xleftarrow{\cong} k_\alpha^\times/k_{\pm\alpha}^\times \xrightarrow{\mathrm{Nr}_{k_\alpha/k_{\pm\alpha}}} k_{\pm\alpha}^\times/k_{\pm\alpha}^{\times 2} \cong \mu_2 \colon \quad y/\sigma_\alpha(y) \mapsto y \mapsto y \cdot \tau_\alpha(y)$$

定义了 k_α^1 的唯一的非平凡二次特征。因此我们得到

$$\kappa_{\alpha_{\mathrm{res}}}(y \cdot \tau_\alpha(y)) = \mathrm{sgn}_{k_\alpha^1}(\overline{\alpha(t)})^{-1} = \epsilon_\alpha(t).$$

证明完毕。 □

命题 9.7。设 $\alpha_{\mathrm{res}} \in \Phi_{\mathrm{res}}(\mathbf{G}、\mathbf{T}^\diamondsuit)^{(\mathrm{ram})}_{\mathrm{ram}}$。假设 $\alpha_{\mathrm{res}} \in \Phi(\mathbf{G}\eta、\mathbf{T}^\natural)$以及 $\alpha_{\mathrm{res}} \in \Phi(\mathbf{G}\eta'、\mathbf{T}^\natural)$。则有

$$f_{(\mathbf{G}_\eta,\mathbf{T}^\natural)}(\alpha_{\mathrm{res}}) = \begin{cases} f_{(\mathbf{G}_{\eta'},\mathbf{T}^\natural)}(\alpha_{\mathrm{res}}) & \text{if } F_\alpha = F_{\alpha_{\mathrm{res}}}, \\ f_{(\mathbf{G}_{\eta'},\mathbf{T}^\natural)}(\alpha_{\mathrm{res}}) \cdot \alpha(t) & \text{if } F_\alpha \neq F_{\alpha_{\mathrm{res}}}. \end{cases}$$

这里，在后一种情况下，我们有 $\alpha(t) = \pm 1$，因此将 $\alpha(t) \in \{\pm 1\} \subset \mathbb{C}^\times$视为。

证明。我们首先考虑 $F_\alpha = F_{\alpha_{\mathrm{res}}}$ 的情形。在这种情况下，

- $F_\alpha/F_{\pm\alpha}$和$F_{\alpha_{\mathrm{res}}}/F_{\pm\alpha_{\mathrm{res}}}$ 是二次分歧的，并且
- $F_{\pm\alpha} = F_{\pm\alpha_{\mathrm{res}}}$。

$$\begin{array}{ccc} F_{\alpha_{\mathrm{res}}} & = & F_\alpha \\ \mathrm{quad}\,\big|\,\mathrm{ram} & & \mathrm{ram}\,\big|\,\mathrm{quad} \\ F_{\pm\alpha_{\mathrm{res}}} & = & F_{\pm\alpha} \end{array}$$

设 $\tau_\alpha \in \Gamma$ 是满足 $\tau_\alpha(\alpha) = -\alpha$ 的一个元素。则 τ_α 在伽罗瓦群 $F_{\alpha_{\mathrm{res}}}/F_{\pm\alpha_{\mathrm{res}}}$ 上限制为非平凡元素。

当 $\theta_\diamondsuit(\alpha) = \alpha$ 时，我们得到$f_{(\mathbf{G}_\eta,\mathbf{T}^\natural)}(\alpha_{\mathrm{res}}) = f_{(\mathbf{G},\mathbf{T}^\diamondsuit)}(\alpha)$，这显然是因为我们可以使用同一个根向量 X_α 来计算 $f_{(\mathbf{G}_\eta,\mathbf{T}^\natural)}(\alpha_{\mathrm{res}})$ 和 $f_{(\mathbf{G},\mathbf{T}^\diamondsuit)}(\alpha)$。

当 $\theta_\diamondsuit(\alpha) \neq \alpha$ 时，以相同方式取 X_α 和 $X_{\alpha_{\mathrm{res}}}$，$\eta$，并应用与 $\alpha_{\mathrm{res}} \in \Phi_{\mathrm{res}}(\mathbf{G},\mathbf{S})^{(\mathrm{ur})}_{\mathrm{ram}}$ 时相同的论证，我们得到

$$\begin{aligned} f_{(\mathbf{G}_\eta,\mathbf{T}^\natural)}(\alpha_{\mathrm{res}}) &= \kappa_{\alpha_{\mathrm{res}}}\left(\frac{[X_{\alpha_{\mathrm{res}}},\eta,\tau_\alpha(X_{\alpha_{\mathrm{res}}},\eta)]}{H_{\alpha_{\mathrm{res}}}}\right) \\ &= \kappa_{\alpha_{\mathrm{res}}}\left(\frac{[X_\alpha,\tau_\alpha(X_\alpha)]+[[\eta](X_\alpha),\tau_\alpha([\eta](X_\alpha))]}{H_{\alpha_{\mathrm{res}}}}\right) \\ &= \kappa_\alpha\left(\frac{[X_\alpha,\tau_\alpha(X_\alpha)]}{H_\alpha}\right) = f_{(\mathbf{G},\mathbf{T}^\diamond)}(\alpha). \end{aligned}$$

因此，最终我们得到 $f_{(\mathbf{G}_\eta,\mathbf{T}^\natural)}(\alpha_{\mathrm{res}}) = f_{(\mathbf{G},\mathbf{T}^\diamond)}(\alpha)$，无论 $\theta_\diamondsuit(\alpha) = \alpha$ 是否成立。由于同理有 $f_{(\mathbf{G}_{\eta'},\mathbf{T}^\natural)}(\alpha_{\mathrm{res}}) = f_{(\mathbf{G},\mathbf{T}^\diamond)}(\alpha)$，故我们得到 $f_{(\mathbf{G}_\eta,\mathbf{T}^\natural)}(\alpha_{\mathrm{res}}) = f_{(\mathbf{G}_{\eta'},\mathbf{T}^\natural)}(\alpha_{\mathrm{res}})$。

接下来我们考虑 $F_\alpha/F_{\alpha_{\mathrm{res}}}$ 为二次的情形。我们采用引理 9.4 的证明中的相同记号。按照 $\alpha \in \Phi_{\mathrm{res}}(\mathbf{G},\mathbf{S})^{(\mathrm{ur})}_{\mathrm{ram}}$ 的情形中的相同记号和论证方法，我们得到

$$f_{(\mathbf{G}_{\eta'},\mathbf{T}^\natural)}(\alpha_{\mathrm{res}}) = f_{(\mathbf{G}_\eta,\mathbf{T}^\natural)}(\alpha_{\mathrm{res}}) \cdot \kappa_{\alpha_{\mathrm{res}}}(y \cdot \tau_\alpha(y)).$$

回忆一下，$y \in \mathcal{O}_{F_\alpha^\times}$ 是一个满足 $y/\sigma_\alpha(y) = \alpha(t)^{-1}$ 的元素。在当前情形（$F_\alpha/F_{\pm\alpha}$ 是分歧的）下，由于 $\alpha(t) \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Nr}^{F_\alpha/F_{\pm\alpha}})$，我们有 $\alpha(t) \equiv \pm 1$(模 $\mathfrak{p}_F$)。此外，由于 $\alpha(t)^2 = \alpha(\eta'^2) \cdot \alpha(\eta^{-2})$，$\alpha(t)$ 是一个阶与 p 互素的单位根。因此必有 $\alpha(t) = \pm 1$。接着可以验证，$\kappa_{\alpha_{\mathrm{res}}}(y \cdot \tau_\alpha(y))$ 等于 $+1$ 或 -1，这取决于 $\alpha(t) = +1$ 还是 $\alpha(t) = -1$。因此我们得到 $f_{(\mathbf{G}_{\eta'},\mathbf{T}^\natural)}(\alpha_{\mathrm{res}}) = f_{(\mathbf{G}_\eta,\mathbf{T}^\natural)}(\alpha_{\mathrm{res}}) \cdot \alpha(t)$. □

10. Some computation of transfer factors

本节将建立一些关于传递因子的公式，这些公式将在我们证明扭曲端oscopic特征关系时用到。

设 $(\gamma,\delta) \in \mathcal{D}$，并固定 $D = (\mathbf{B}^\flat, \mathbf{T}^\flat, \mathbf{B}^\diamond, \mathbf{T}^\diamond) \in \mathrm{D}(\gamma,\delta)$；由引理 7.7 可知，它在等价意义下唯一。特别地，注意我们有 $\gamma \in T^\flat$ 和 $\delta \in \tilde{T}^\diamond$。我们还为 $\Phi_{\mathrm{res}}(\mathbf{G},\mathbf{T}^\diamond)$ 固定一组 $a = \{a_{\alpha_{\mathrm{res}}}\}_{\alpha_{\mathrm{res}}}$ a-数据，以及一组最小分歧的 $\chi = \{\chi_{\alpha_{\mathrm{res}}}\}_{\alpha_{\mathrm{res}}}$ χ-数据（见定义 3.4）。

假设 $\delta \in \tilde{T}^\diamond$ 是椭圆强正则半单的，且具有一个正规r-逼近 $\delta = \delta_0\delta^+_{<r}\delta_{\geq r}$（回忆定义 4.9）。然后，利用映射 $\tilde{\xi}_D$和 ξ_D，我们可以通过传递分解 $\delta = \delta_0\delta^+_{<r}\delta_{\geq r}$，将分解 $\gamma = \gamma_0\gamma^+_{<r}\gamma_{\geq r}$ 关联到 γ。

引理 10.1. 分解 $\gamma = \gamma_0\gamma^+_{<r}\gamma_{\geq r}$ 给出了一个正规 r-近似。

证明。这是因为 $\Phi(\mathbf{H},\mathbf{T}^\flat)$ 被视为 $\Phi_{\mathrm{res}}(\mathbf{G},\mathbf{T}^\diamond)$ 的一个子集（第 节），并且 $p \neq 2$。□

我们令 $\nu_0 := \tilde{\xi}_\diamond(\delta_0) \cdot \theta^{-1}$ 和 $\nu_+ := \xi_\diamond(\delta_+)$。我们还令 $\nu^+_{<r} := \xi_\diamond(\delta^+_{<r})$ 和$\nu_{\geq r} := \xi_\diamond(\delta_{\geq r})$。因此我们有 $\nu\theta = (\nu_0\theta) \cdot \nu^+_{<r} \cdot \nu_{\geq r}$。

10.1. 第一因子 Δ_{I}。

引理 10.2. 对于任意满足 $\bar{\gamma} \in T^\flat$ 和 $\bar{\delta} \in \tilde{T}^\diamond$ 的 $(\bar{\gamma},\bar{\delta}) \in \mathcal{D}$，我们有

$$\Delta_{\mathrm{I}}[a,\chi](\gamma,\delta) = \Delta_{\mathrm{I}}[a,\chi](\bar{\gamma},\bar{\delta}).$$

证明。根据定义（见 [KS99，第 4 节。2]），第一因子 $\Delta_{\mathrm{I}}(\bar{\gamma},\ \delta)$ 仅取决于 $\tilde{}$ $\bar{}$包含 F 的 $\mathbf{H}$ 和 $\mathbf{G}$ 的 $\mathbf{H}$ 和 $\mathbf{G}$ -有理（扭曲）极大环面 $\bar{\gamma}$ 和 δ。因此得到所述结论。□

10.2. 第二因子 Δ_{II}。对于任意元素 $\delta' \in \tilde{T}^{\diamondsuit}$，定义

$$\Delta_{\mathrm{II}}^{\tilde{\mathbf{G}}}[a,\chi](\delta') := \prod_{\substack{\alpha_{\mathrm{res}}\in\dot{\Phi}_{\mathrm{res}}(\mathbf{G},\mathbf{T}^{\diamondsuit})\\ N(\alpha)(\nu')\neq 1}} \chi_{\alpha_{\mathrm{res}}}\Big(\frac{N(\alpha)(\nu')-1}{a_{\alpha_{\mathrm{res}}}}\Big),$$

$\tilde{}$其中 $\nu' \in \mathbf{T}$ 是满足 $\xi_{\diamondsuit}(\delta') = \nu'\theta$ 的元素。

定义

$$\chi(\delta_0) := \prod_{\alpha_{\mathrm{res}}\in\dot{\Phi}(\mathbf{G}_{\delta_0},\mathbf{T}^{\natural})} \chi_{\alpha_{\mathrm{res}}}(l_\alpha).$$

以下是 [Kal19b，引理 4.6 的扭曲版本。7]。

引理 10.3. 有

$$\Delta_{\mathrm{II}}^{\tilde{\mathbf{G}}}[a,\chi](\delta) = \Delta_{\mathrm{II}}^{\tilde{\mathbf{G}}}[a,\chi](\delta_0)\cdot\Delta_{\mathrm{II}}^{\mathbf{G}_{\delta_0}}[a,\chi](\delta_+)\cdot\chi(\delta_0).$$

证明。根据定义，有

$$\Delta_{\mathrm{II}}^{\tilde{\mathbf{G}}}[a,\chi](\delta_0) := \prod_{\substack{\alpha_{\mathrm{res}}\in\dot{\Phi}_{\mathrm{res}}(\mathbf{G},\mathbf{T}^{\diamondsuit})\\ N(\alpha)(\nu_0)\neq 1}} \chi_{\alpha_{\mathrm{res}}}\Big(\frac{N(\alpha)(\nu_0)-1}{a_{\alpha_{\mathrm{res}}}}\Big),$$

and

$$\Delta_{\mathrm{II}}^{\mathbf{G}_{\delta_0}}[a,\chi](\delta_+) = \prod_{\substack{\alpha_{\mathrm{res}}\in\dot{\Phi}(\mathbf{G}_{\delta_0},\mathbf{T}^{\natural})\\ \alpha_{\mathrm{res}}(\nu_+)\neq 1}} \chi_{\alpha_{\mathrm{res}}}\Big(\frac{\alpha_{\mathrm{res}}(\nu_+)-1}{a_{\alpha_{\mathrm{res}}}}\Big).$$

设 $\alpha_{\mathrm{res}} \in \Phi_{\mathrm{res}}(\mathbf{G},\mathbf{T}^{\diamondsuit})$。注意到我们有

$$N(\alpha)(\nu_0)^{\frac{2}{l_\alpha}} = \Big(\prod_{i=0}^{l_\alpha-1}\theta^i(\alpha)(\nu_0)\Big)^{\frac{2}{l_\alpha}} = \prod_{i=0}^{1}\theta^i(\alpha)(\nu_0) = \alpha\big((\nu_0\theta)^2\big).$$

由于 $\nu_0\theta$ 是拓扑半单的且 $p \neq 2$，我们可知 $N(\alpha)(\nu_0)$ 是 F 中阶与 p 互素的单位根。因为我们有

$$N(\alpha)(\nu) = N(\alpha)(\nu_0)\cdot N(\alpha)(\nu_+) = N(\alpha)(\nu_0)\cdot\alpha(\nu_+)^{l_\alpha},$$

又因为 ν_+ 是原幺幂的，$N(\alpha)(\nu) \neq 1$ 成立，当且仅当以下条件恰有一个成立：

- $N(\alpha)(\nu_0) \neq 1$，或者
- $N(\alpha)(\nu_0) = 1$ 且 $\alpha(\nu_+)^{l_\alpha} \neq 1$（后一个条件还等价于 $\alpha(\nu_+) \neq 1$，因为 l_α 与 p 互素）。

当 $N(\alpha)(\nu_0) \neq 1$ 时，注意到 $\chi_{\alpha_{\mathrm{res}}}$ 是温和分歧的，可得

$$\chi_{\alpha_{\mathrm{res}}}\Big(\frac{N(\alpha)(\nu)-1}{a_{\alpha_{\mathrm{res}}}}\Big) = \chi_{\alpha_{\mathrm{res}}}\Big(\frac{N(\alpha)(\nu_0)-1}{a_{\alpha_{\mathrm{res}}}}\Big).$$

当 $N(\alpha)(\nu_0) = 1$ 且 $\alpha(\nu_+) \neq 1$ 时，我们有

$$\chi_{\alpha_{\mathrm{res}}}\Big(\frac{N(\alpha)(\nu)-1}{a_{\alpha_{\mathrm{res}}}}\Big) = \chi_{\alpha_{\mathrm{res}}}\Big(\frac{N(\alpha)(\nu_+)-1}{a_{\alpha_{\mathrm{res}}}}\Big).$$

由于 $N(\alpha)(\nu_+) = \alpha(\nu_+)^{l_\alpha}$，且 l_α 与 p 互素，因此我们有

$$N(\alpha)(\nu_+) - 1 = \big(\alpha(\nu_+) - 1\big)\big(\alpha(\nu_+)^{l_\alpha - 1} + \cdots + 1\big) \in \big(\alpha(\nu_+) - 1\big) \cdot l_\alpha \cdot (1 + \mathfrak{p}_{F_\alpha}).$$

因此，再次由 $\chi_{\alpha_{\mathrm{res}}}$ 的温和分歧性可知

$$\chi_{\alpha_{\mathrm{res}}}\left(\frac{N(\alpha)(\nu_+) - 1}{a_{\alpha_{\mathrm{res}}}}\right) = \chi_{\alpha_{\mathrm{res}}}\left(\frac{\alpha(\nu_+) - 1}{a_{\alpha_{\mathrm{res}}}}\right) \cdot \chi_{\alpha_{\mathrm{res}}}(l_\alpha).$$

回忆一下，$\Phi(\mathbf{G}^{\delta_0}, \mathbf{T}^\natural)$ 与 $\Phi_{\mathrm{res}}(\mathbf{G}, \mathbf{T}^\diamondsuit)$ 的子集相对应，该子集由满足 $N(\alpha)(\nu_0) = 1$ 的限制根 α_{res} 组成（见第 4.2 节）。因此，注意到 δ 是强正则半单的，故没有根 $\alpha_{\mathrm{res}} \in \Phi(\mathbf{G}^{\delta_0}, \mathbf{T}^\natural)$ 满足 $\alpha_{\mathrm{res}}(\nu_+) = 1$，便可得到所述结论。□

以下内容将是我们证明扭曲端oscopic特征关系的一个至关重要的要素。

引理 10.4. 常数 $\chi(\delta_0)$ 不依赖于 $\delta_0 \in \tilde{T}^\diamondsuit$。

证明。 回忆一下，$\chi(\delta_0)$ 定义为在集合 $\alpha_{\mathrm{res}} \in \dot{\Phi}(\mathbf{G}^{\delta_0}, \mathbf{T}^\natural)$ 上对 $\chi_{\alpha_{\mathrm{res}}}(l_\alpha)$ 求乘积。由于 χ 是最小分歧的，$\chi_{\alpha_{\mathrm{res}}}(l_\alpha)$ 只有在α_{res} 分歧且 $l_\alpha \neq 1$时才可能非平凡。然而，这些限制根的集合不依赖于 δ_0，由引理9.2、9.3和9.4可知。□

引理 10.5。 对于任意充分大的正整数 $m \in \mathbb{Z}_{>0}$，我们有

$$\Delta_{\mathrm{II}}[a, \chi](\gamma_{<r} \cdot \gamma_{\geq r}^{p^{2m}}, \delta_{<r} \cdot \delta_{\geq r}^{p^{2m}}) = \Delta_{\mathrm{II}}[a, \chi](\gamma_{<r} \cdot \gamma_{\geq r}, \delta_{<r} \cdot \delta_{\geq r}).$$

证明。 由引理 10.3，我们有

$$\Delta_{\mathrm{II}}^{\tilde{\mathbf{G}}}[a, \chi](\delta_{<r} \cdot \delta_{\geq r}) = \Delta_{\mathrm{II}}^{\tilde{\mathbf{G}}}[a, \chi](\delta_0) \cdot \Delta_{\mathrm{II}}^{\mathbf{G}^{\delta_0}}[a, \chi](\delta_{<r}^+ \cdot \delta_{\geq r}) \cdot \chi(\delta_0),$$

$$\Delta_{\mathrm{II}}^{\tilde{\mathbf{G}}}[a, \chi](\delta_{<r} \cdot \delta_{\geq r}^{p^{2m}}) = \Delta_{\mathrm{II}}^{\tilde{\mathbf{G}}}[a, \chi](\delta_0) \cdot \Delta_{\mathrm{II}}^{\mathbf{G}^{\delta_0}}[a, \chi](\delta_{<r}^+ \cdot \delta_{\geq r}^{p^{2m}}) \cdot \chi(\delta_0).$$

根据 [Kal19b，引理 6.3 的证明。3], 我们有

$$\Delta_{\mathrm{II}}^{\mathbf{G}^{\delta_0}}[a, \chi](\delta_{<r}^+ \cdot \delta_{\geq r}) = \Delta_{\mathrm{II}}^{\mathbf{G}^{\delta_0}}[a, \chi](\delta_{<r}^+ \cdot \delta_{\geq r}^{p^{2m}})$$

对于任意充分大的正整数 $m \in \mathbb{Z}_{>0}$，因此得到 $\Delta_{\mathrm{II}}^{\mathbf{G}}[a, \chi](\delta_{<r} \cdot \delta_{\geq r}) = \Delta_{\mathrm{II}}[a, \chi](\delta_{<r} \cdot \delta_{\geq r}^{p^{2m}})$。类似地，我们有 $\Delta_{\mathrm{II}}^{\mathbf{H}}[a, \chi](\gamma_{<r} \cdot \gamma_{\geq r}) = \Delta_{\mathrm{II}}^{\mathbf{H}}[a, \chi](\gamma_{<r} \cdot \gamma_{\geq r}^{p^{2m}})$。由于第二因子 $\Delta_{\mathrm{II}}[a, \chi](\gamma, \delta)$ 定义为 $\Delta_{\mathrm{II}}^{\mathbf{G}}[a, \chi](\delta)$ 与 $\Delta_{\mathrm{II}}^{\mathbf{H}}[a, \chi](\gamma)$ 的比值（见 [KS99，第 4.3] 节），故得证。□

10.3. **第三因子** Δ_{III}。 由于我们假设$\mathbf{G}$ 是准分裂的，并且固定了一个 θ-稳定的 F-分裂 $\mathbf{G}$，我们有绝对第三因子 $\Delta_{\mathrm{III}}[a, \chi](\gamma, \delta)$（[KS99，第 5 节3]），其满足

$$\Delta_{\mathrm{III}}[a, \chi](\gamma, \delta; \bar{\gamma}, \bar{\delta}) = \Delta_{\mathrm{III}}[a, \chi](\gamma, \delta) / \Delta_{\mathrm{III}}[a, \chi](\bar{\gamma}, \bar{\delta})$$

对于任意 $(\bar{\gamma}, \delta) \in \mathcal{D}$。我们按照[KS99，第 4 节4], 回顾 $\Delta_{\mathrm{III}}[a, \chi](\gamma, \delta; \bar{\gamma}, \delta)$ 的构造。我们固定一个图表 $\bar{D} = (\bar{\mathbf{B}}^\flat, \bar{\mathbf{T}}^\flat, \bar{\mathbf{B}}^\diamondsuit, \bar{\mathbf{T}}^\diamondsuit) \in \mathrm{D}(\bar{\gamma}, \bar{\delta})$。

相对第三因子由以下针对 F-有理环面 $\mathbf{U}_0$ 和 $\mathbf{S}_0$ 的超上同调的 Take–Nakayama 配对给出（见 [KS99，附录 A]）：

$$\langle -, - \rangle_{\mathrm{TN}} \colon H^1(F, \mathbf{U}_0 \xrightarrow{1-\theta} \mathbf{S}_0) \times H^1(W_F, \hat{\mathbf{S}}_0 \xrightarrow{1-\hat{\theta}} \hat{\mathbf{U}}_0) \to \mathbb{C}^\times. \tag{16}$$

我们回顾环面$\mathbf{U}_0$ 和$\mathbf{S}_0$的定义。

我们先给出以下引理，它是对 [KS99，引理 3.3.B]的重新表述：

引理 10.6. 存在一个 θ-稳定的 F-有理极大环面 $\mathbf{T}_0$，以及一个包含 $\mathbf{T}_0$ 的 θ-稳定博雷尔子群 $\mathbf{B}_0$，使得由 *Borel* 对 $(\mathbf{B}^\diamondsuit, \mathbf{T}^\diamondsuit)$ 和 $(\mathbf{B}_0, \mathbf{T}_0)$ 确定的同构 $\mathbf{T}^\diamondsuit \to \mathbf{T}_0$ 是 F-有理的。

下文中，对于 $(\mathrm{B}_0, \mathrm{T}_0)$ 和 $(\bar{\mathrm{B}}0, \bar{\mathrm{T}}_0)$，我们按照该引理中的设定，分别取其对应于 $(\mathrm{B}^\diamondsuit, \mathrm{T}^\diamondsuit)$ 和 $(\bar{\mathrm{B}}^\diamondsuit, \bar{\mathrm{T}}^\diamondsuit)$ 的对象。由此得到典范同构 $\mathrm{T}_0 \cong \mathrm{T}$ 和 $\bar{\mathrm{T}}_0 \cong \mathrm{T}$（由 Borel 对所诱导），它们进而诱导出 $\hat{\mathrm{T}}_0 \cong \hat{\mathrm{T}}$ 和 $\hat{\bar{\mathrm{T}}}_0 \cong \hat{\mathrm{T}}$（不一定是 Γ-等变的）。我们通过这些同构将 T_0 和 T_0 与 T 等同，但仍使用符号 $\hat{\ }$、$\hat{\bar{\mathrm{T}}}_0$ 和 T_0，以强调它们的伽罗瓦作用并非来自 $\hat{\mathrm{T}} \subset \hat{\mathrm{G}}$ 上的 Γ-作用。我们取 $g_1 \in \mathrm{G}_{\mathrm{sc}}$，使得 $[g_1](\mathrm{B}^\diamondsuit, \mathrm{T}^\diamondsuit) = (\mathrm{B}_0, \mathrm{T}_0)$，即 $[g_1]\colon \mathrm{T}^\diamondsuit \to \mathrm{T}_0$ 是引理 10.6 中的 F-有理同构。对于 $(\bar{\mathrm{B}}^\diamondsuit, \bar{\mathrm{T}}^\diamondsuit)$，同样取 $\bar{g}_1 \in \mathrm{G}_{\mathrm{sc}}$，使之实现 F-有理同构 $[\bar{g}_1]\colon \bar{\mathrm{T}}^\diamondsuit \to \bar{\mathrm{T}}_0$。

下文中，下标“sc”表示导出群$\mathbf{G}$ 的单连通覆盖$\mathbf{G}_{\mathrm{sc}}$ 中的原像，下标“ad”表示$\mathbf{G}$在$\mathbf{G}_{\mathrm{ad}}$ 的伴随群中的像。对$\mathbf{G}$我们也采用类似记法。我们定义F-有理环面$\mathbf{S}_0$ 和 $\mathbf{U}_0$ 如下：

$$\mathbf{S}_0 := (\mathbf{T}_0 \times \bar{\mathbf{T}}_0)/\Delta_- \mathbf{Z}_{\mathbf{G}},$$
$$\mathbf{U}_0 := (\mathbf{T}_{0,\mathrm{sc}} \times \bar{\mathbf{T}}_{0,\mathrm{sc}})/\Delta_- \mathbf{Z}_{\mathbf{G}_{\mathrm{sc}}}.$$

这里，$\Delta_- \mathbf{Z}^{\mathbf{G}_{(\mathrm{sc})}} := \{(z, z^{-1}) \mid z \in \mathbf{Z}_{\mathbf{G}_{(\mathrm{sc})}}\}$。因此，对偶环面为

$$\hat{\mathbf{S}}_0 \cong \hat{\mathbf{T}}_0 \times \hat{\bar{\mathbf{T}}}_{0,\mathrm{sc}} \quad \text{and} \quad \hat{\mathbf{U}}_0 \cong \hat{\mathbf{T}}_{0,\mathrm{ad}} \times \hat{\bar{\mathbf{T}}}_{0,\mathrm{sc}}.$$

我们考虑同态 $1-\theta\colon \mathrm{T}_0 \to \mathrm{T}_0\colon\ t \mapsto t/\theta(t)$，以及它到 $\mathrm{T}0_{,\mathrm{sc}}$ 的提升。我们定义 S_0 和 U_0，上的同态，并仍记作 $1-\theta$，即由 $(t, \bar{t}) \mapsto ((1-\theta)(t), (1-\theta)(\bar{t}))$ 所诱导的同态。于是得到 S_0 和 U_0 上的同态 $\hat{\ }$、$\hat{\ }$、$\hat{1-\theta}$。相应地，式 (16) 中的超上同调和 Tate–Nakayama 配对均有定义。相对第三因子定义如下：

$$\Delta_{\mathrm{III}}[a, \chi](\gamma, \delta; \bar{\gamma}, \bar{\delta}) := \langle \mathrm{inv}(\gamma, \delta; \bar{\gamma}, \bar{\delta}), \mathbf{A} \rangle_{\mathrm{TN}}^{-1}.$$

(注意，右侧按照 [KS12].) 取逆。因此接下来我们说明 $\mathrm{inv}(\gamma, \delta; \bar{\gamma}, \delta)$ 和 $\mathbf{A}$ 的构造。

我们首先考虑 $\mathrm{inv}(\gamma, \delta; \bar{\gamma}, \bar{\delta})$。令 $v_\sigma := g_1 \cdot \sigma(g_1)^{-1}$ 和 $\bar{v}_\sigma := \bar{g}_1\, \sigma(\bar{g}_1)^{-1}$，得到一个 1-余循环 $V\colon \Gamma \to \mathrm{S}_0$，它将 σ 映射到 $(v_\sigma^{-1}, \bar{v}_\sigma) \in \bar{\ } \bar{\ } \bar{\mathrm{T}}_0 \times \mathrm{T}_0$ 在 S_0 中的像。另一方面，令 $\delta_0 \rtimes \theta := [g_1](\delta)$ 和 $\bar{\delta}_0 \rtimes \theta := [\bar{g}_1](\delta)$（因此 $\delta_0, \bar{\delta}_0 \in \mathrm{T}_0$）。我们定义元素 $D \in \mathrm{S}_0$ 为 $(\delta_0, \bar{\delta}_0^{-1}) \in \mathrm{T}_0 \times \bar{\mathrm{T}}_0^-$ 在 S_0 中的像。于是 (V, D) 构成一个 1-超上同调。我们令 $\mathrm{inv}(\gamma, \delta; \bar{\gamma}, \delta)$ 为 (V, D) 的超上同调类。

接下来我们考虑 $\mathbf{A}$。我们引入两类 L-嵌入：${}^L j_\chi^1$ 和 ${}^L j_\chi^{\mathbf{H}}$。

(1) 设 ${}^L\mathrm{G}^1 := \hat{\mathrm{G}}^1 \rtimes W_F$，其中 $\hat{\mathrm{G}}^1 := \hat{\mathrm{G}}_{\hat{\theta},\circ}$。若令 $\hat{\mathrm{T}}^1 := \hat{\mathrm{T}}_{\hat{\theta},\circ}$，则 $\hat{\mathrm{G}}^1$ 是一个连通约化群，其根系 $\Phi(\hat{\mathrm{G}}^1, \hat{\mathrm{T}}^1)$ 可视为 $\Phi_{\mathrm{res}}(\hat{\mathrm{G}}, \hat{\mathrm{T}})$ 的子集（见第 4.2 节）。由于我们为 $\Phi_{\mathrm{res}}(\mathrm{G}, \mathrm{T}^\diamondsuit)$ 固定了 a-数据和 χ-数据的集合，因此对于 $\Phi_{\mathrm{res}}(\hat{\mathrm{G}}, \hat{\mathrm{T}})$，也有相应的 a-数据和 χ-数据集合；该对象带有由 $\Phi_{\mathrm{res}}(\mathrm{G}, \mathrm{T}^\diamondsuit)$ 上的作用导出的 Γ-作用。因此，通过 Langlands–Shelstad 构造 [LS87, 第 2.6], 节，我们得到一个L-嵌入 ${}^L j_\chi^1\colon \hat{\mathrm{T}}^1 \rtimes W_F \hookrightarrow {}^L\mathrm{G}^1$。这里我们强调，$\hat{\mathrm{T}}^1$ 上的 Γ-作用是通过同构 $\hat{\mathrm{T}}_0 \cong \hat{\mathrm{T}}$ 从 $\hat{\mathrm{T}}_0$ 上的作用引入的。因此，$\hat{\mathrm{T}}^1 \rtimes W_F$ 无非是 T_0 的 θ- 余不变元 $\mathrm{T}0_{,\theta}$ 的 L- 群。

(2) 另一方面，由于 $\Phi(\mathbf{H},\mathbf{T}^\flat)$ 可视为 $\Phi_{\mathrm{res}}(\mathbf{G},\mathbf{T}^\diamondsuit)$ 的子集（见第 9.1 节），固定的 a-数据和 χ-数据集合也会导出适用于$\Phi(\mathbf{H},\mathbf{T}^\flat)$ 的相应集合。因此，通过 Langlands–Shelby 构造 [LS87, 第 2.6], 节，我们得到一个 L-嵌入 ${}^L j_\chi^{\mathbf{H}}\colon {}^L\mathbf{T}^\flat \hookrightarrow {}^L\mathbf{H}$。

现在注意到，同态 $\xi_D \circ [g_1]^{-1}\colon \mathbf{T}_0 \to \mathbf{T}^\flat$ 是 F-有理的，并诱导出一个同构 $\mathbf{T}_{0,\theta} \cong \mathbf{T}^\flat$。因此，我们可以通过这一同一化 $\mathbf{T}_{0,\theta} \cong \mathbf{T}^\flat$ 来比较两个 L-嵌入 ${}^L j_\chi^1$ 和 ${}^L j_\chi^{\mathbf{H}}$ 以及 $\hat{}\,\xi\colon {}^L\mathbf{H} \hookrightarrow {}^L\mathbf{G}$。我们定义映射 $a_{\mathbf{T}_0}\colon \Gamma \to \hat{\mathbf{T}}^1\colon \sigma \mapsto a_{\mathbf{T}_0,\sigma}$，其定义为

$$\hat{\xi} \circ {}^L j_\chi^{\mathbf{H}}(1 \rtimes \sigma) = a_{\mathbf{T}_0,\sigma} \cdot {}^L j_\chi^1(1 \rtimes \sigma),$$

此时，将 $a_{\mathbf{T}_0}$ 视为 1-余循环 $\Gamma \to \mathbf{T}_0$，所依据的是同一化 $\mathbf{T}_0 \cong \hat{\mathbf{T}}_0$。以同样方式定义 1-余循环 $a_{\bar{\mathbf{T}}_0}\colon \Gamma \to \mathbf{T}_0$，并置 $A := (a_{\mathbf{T}_0}, a_{\bar{\mathbf{T}}_0}/a_{\mathbf{T}_0})\colon \Gamma \to \mathbf{S}_0$。另一方面，取 $s_{\mathrm{sc}} \in \mathbf{T}_{\mathrm{sc}}$ 中的一个元素，使其在 $\mathbf{T}_{\mathrm{ad}}$ 中的像与 $s \in \mathbf{T}$ 的像相同，并分别将其在 $\mathbf{T}_{0,\mathrm{sc}}$ 和 $\bar{\mathbf{T}}_{0,\mathrm{sc}}$ 中的像记为 $s_{\mathbf{T}_0}$ 和 $s_{\bar{\mathbf{T}}_0}$。置 $s_{\mathbf{S}_0} := (s_{\mathbf{T}_0}, \mathrm{ad}\ s_{\bar{\mathbf{T}}_0}/s_{\mathbf{T}_0}) \in \hat{\mathbf{U}}_0$。于是，$(A^{-1}, s_{\mathbf{S}_0})$ 构成一个 1- 超上同调。记 $\mathbf{A}$ 为 $(A^{-1}, s_{\mathbf{S}_0})$ 的超上同调类。

下面的命题及其证明受 [Mez13，引理 17] 的启发。

命题 10.7. 设 $(\bar{\gamma}, \bar{\delta}) \in \mathcal{D}$ 是另一对，使得 $D = (\mathbf{B}^\flat, \mathbf{T}^\flat, \mathbf{B}^\diamondsuit, \mathbf{T}^\diamondsuit) \in \bar{\mathbf{D}}(\bar{\gamma}, \delta)$。于是有

$$\Delta_{\mathrm{III}}[a,\chi](\gamma,\delta;\bar{\gamma},\bar{\delta}) = \langle \delta/\bar{\delta}, a_{\mathbf{T}_\diamondsuit} \rangle_{\mathrm{TN}}.$$

这里，右边的配对是 $\mathbf{T}^\diamondsuit$ 上的 *Tate–Nakayama* 配对，而 $a_{\mathbf{T}_\diamondsuit}$ 是经由同一化 $[g_1]\colon \mathbf{T}_\diamondsuit \to \mathbf{T}_0$ 从 $a_{\mathbf{T}_0}$ 传递得到的1-上同调。

证明。我们考察上文所述的 $\Delta_{\mathrm{III}}[a,\chi](\gamma,\delta;\bar{\gamma},\delta)$ 的构造，假设 $\bar{D} = D$。注意，当 $\bar{\mathbf{T}}^\diamondsuit = \mathbf{T}^\diamondsuit$ 时，我们有如下同一化

$$\mathbf{S}_0 = (\mathbf{T}_0 \times \bar{\mathbf{T}}_0)/\Delta_- \mathbf{Z}_{\mathbf{G}} \cong \mathbf{T}_0 \times \bar{\mathbf{T}}_{0,\mathrm{ad}}\colon (t,\bar{t}) \mapsto (t\bar{t}, \bar{t}_{\mathrm{ad}})$$

$$\mathbf{U}_0 = (\mathbf{T}_{0,\mathrm{sc}} \times \bar{\mathbf{T}}_{0,\mathrm{sc}})/\Delta_- \mathbf{Z}_{\mathbf{G}_{\mathrm{sc}}} \cong \mathbf{T}_{0,\mathrm{sc}} \times \bar{\mathbf{T}}_{0,\mathrm{ad}}\colon (t,\bar{t}) \mapsto (t\bar{t}, \bar{t}_{\mathrm{ad}}).$$

在这些同一化下，我们看到

$$V\colon \sigma \mapsto (\bar{v}_\sigma/v_\sigma, \bar{v}_{\sigma,\mathrm{ad}}) = (1, v_{\sigma,\mathrm{ad}}) \quad \text{and} \quad D = (\delta_0/\bar{\delta}_0, \bar{\delta}_{0,\mathrm{ad}}^{-1}).$$

另一方面，A 和 $s_{\mathbf{S}_0}$ 由下式给出

$$A\colon \sigma \mapsto (a_{\mathbf{T}_0}, 1) \quad \text{and} \quad s_{\mathbf{S}_0} = (s_{\mathbf{T}_0,\mathrm{ad}}, 1).$$

我们有以下彼此对偶的交换图表：

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{T}_{0,\mathrm{sc}} & \xrightarrow{1-\theta} & \mathbf{T}_0 \\
{\scriptstyle \mathrm{pr}_1}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_1} \\
\mathbf{U}_0 \cong \mathbf{T}_{0,\mathrm{sc}} \times \mathbf{T}_{0,\mathrm{ad}} & \xrightarrow{1-\theta} & \mathbf{S}_0 \cong \mathbf{T}_0 \times \mathbf{T}_{0,\mathrm{ad}}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
\hat{\mathbf{T}}_{0,\mathrm{ad}} & \xleftarrow{1-\hat{\theta}} & \hat{\mathbf{T}}_0 \\
{\scriptstyle i_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i_1} \\
\hat{\mathbf{U}}_0 \cong \hat{\mathbf{T}}_{0,\mathrm{ad}} \times \hat{\mathbf{T}}_{0,\mathrm{sc}} & \xleftarrow{1-\hat{\theta}} & \hat{\mathbf{S}}_0 \cong \hat{\mathbf{T}}_0 \times \hat{\mathbf{T}}_{0,\mathrm{sc}}
\end{array}$$

这里，pr_1 和 i_1 分别表示第一投影和到第一项的单射。注意，$(A^{-1}, s_{\mathbf{S}_0})$ 是 1-超上同调类 $(a^{-1}{}_{\mathbf{T}_0}, s_{\mathbf{T}_0,\mathrm{ad}})$ 沿映射 i_1推出所得。因此，由于 $(\mathrm{pr}_1(V), \mathrm{pr}_1(D)) = (1, \delta_0/\bar{\delta}_0)$，Tate–Nakayama 配对的函子性（见 [Wal08，第 6 节。3]）意味着

$$\langle \mathrm{inv}(\gamma,\delta;\bar{\gamma},\bar{\delta}), \mathbf{A}\rangle_{\mathrm{TN}} = \langle (V,D), (A^{-1}, s_{\mathbf{S}_0})\rangle_{\mathrm{TN}} = \langle (1, \delta_0/\bar{\delta}_0), (a^{-1}_{\mathbf{T}_0}, s_{\mathbf{T}_0,\mathrm{ad}})\rangle_{\mathrm{TN}},$$

其中，最后一个配对是针对（$\mathbf{T}_{0,\mathrm{sc}} \xrightarrow{1-\theta}, \mathbf{T}_0, \hat{}\mathbf{T}_0 \xrightarrow{1-\theta} \hat{}\mathbf{T}_{0,\mathrm{ad}}$）的配对。

接下来我们注意到以下彼此对偶的交换图：

$$\begin{array}{ccc} \{1\} & \longrightarrow & \mathbf{T}_0 \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} \\ \mathbf{T}_{0,\mathrm{sc}} & \xrightarrow{1-\theta} & \mathbf{T}_0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \{1\} & \longleftarrow & \hat{\mathbf{T}}_0 \\ \uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{id}} \\ \hat{\mathbf{T}}_{0,\mathrm{ad}} & \xleftarrow{1-\hat{\theta}} & \hat{\mathbf{T}}_0 \end{array}$$

由于（$\mathbf{1}, \delta_0/\bar{\delta}_0$）是由 $1 \to \mathbf{T}_0$ 和（$a^{-1}{}_{\mathbf{T}_0}, s_{\mathbf{T}_0,\mathrm{ad}}$）在$\hat{}\mathbf{T}_0 \to \{1\}$ 中的像通过推出得到的，即（$a^{-1}{}_{\mathbf{T}_0}, 1$），再次由 Tate–Nakayama 配对的函子性可得

$$\langle (1, \delta_0/\bar{\delta}_0), (a^{-1}_{\mathbf{T}_0}, s_{\mathbf{T}_0,\mathrm{ad}})\rangle_{\mathrm{TN}} = \langle \delta_0/\bar{\delta}_0, a^{-1}_{\mathbf{T}_0}\rangle_{\mathrm{TN}},$$

其中右侧的配对是针对（$\{1\} \to \mathbf{T}_0, \hat{}\mathbf{T}_0 \to \{1\}$）的配对，它正是关于 $\mathbf{T}_0$ 的通常 Tate–Nakayama 配对（参见 [KS99，A.3.13]，另见 [KS12，第 4 节。3]）。最后，注意到 $\delta_0/\delta_0 = [g_1](\delta/\delta)$，即可得到所述结论。□

引理 10.8. 对于任意正整数 $m \in \mathbb{Z}_{>0}$，我们有

$$\Delta_{\mathrm{III}}[a,\chi](\gamma_{<r}\cdot\gamma_{\geq r}^m, \delta_{<r}\cdot\delta_{\geq r}^m) = \Delta_{\mathrm{III}}[a,\chi](\gamma,\delta).$$

证明。只需证明相对因子 $\Delta_{\mathrm{III}}[a,\chi](\gamma_{<r}\cdot\gamma_{\geq r}^m,\ \delta_{<r}\cdot\delta_{\geq r}^m;\ \gamma,\ \delta)$ 是平凡的。由命题 10.7，该相对因子等于 $\langle \delta_{\geq r}^{m-1},\ a_{\mathbf{T}^\diamond}\rangle_{\mathrm{TN}}$。由于我们假设 χ 是最小分歧的，特征 $\langle -, a_{\mathbf{T}^\diamond}\rangle_{\mathrm{TN}}$ 在 $T^\diamond$ 上的分歧是温和的。因此我们得到 $\langle \delta_{\geq r}^{m-1},\ a_{\mathbf{T}^\diamond}\rangle_{\mathrm{TN}} = 1$。□

10.4. **第四因子** Δ_{IV}。回顾 [KS99第 4 节5] 中的定义，第四因子$\Delta_{\mathrm{IV}}(\gamma,\ \delta)$ 定义为

$$\Delta_{\mathrm{IV}}(\gamma,\delta) := \Delta_{\mathrm{IV}}^{\tilde{\mathbf{G}}}(\delta)/\Delta_{\mathrm{IV}}^{\mathbf{H}}(\gamma),$$

其中

$$\Delta_{\mathrm{IV}}^{\tilde{\mathbf{G}}}(\delta) := |\det([\delta]-1 \mid \mathfrak{g}/\mathfrak{t}^\diamond)|_F^{\frac{1}{2}} \quad \text{and} \quad \Delta_{\mathrm{IV}}^{\mathbf{H}}(\gamma) := |\det([\gamma]-1 \mid \mathfrak{h}/\mathfrak{t}^\flat)|_F^{\frac{1}{2}}.$$

回顾一下，由于我们假设 $\Phi_{\mathrm{res}}(\mathbf{G},\ \mathbf{T}^\diamond)$ 不包含类型 2 或 3 的限制根，因此我们有

$$\Delta_{\mathrm{IV}}^{\tilde{\mathbf{G}}}(\delta) = \prod_{\alpha\in\Phi_{\mathrm{res}}(\mathbf{G},\mathbf{T}^\diamond)} |N(\alpha)(\nu)-1|_F^{\frac{1}{2}}$$

（参见 [KS99，第 4 节。5]）。注意到这一点后，我们将$\Delta_{\mathrm{IV}}^{\mathbf{G}}$ 的定义也扩展到任意半单元 $\delta' \in \tilde{T}^\diamond$，定义为

$$\Delta_{\mathrm{IV}}^{\tilde{\mathbf{G}}}(\delta') = \prod_{\substack{\alpha\in\Phi_{\mathrm{res}}(\mathbf{G},\mathbf{T}^\diamond)\\ N(\alpha)(\nu')\neq 1}} |N(\alpha)(\nu')-1|_F^{\frac{1}{2}},$$

其中 $\nu' \in \mathbf{T}$ 是满足 $\tilde{\xi}_{\diamondsuit}(\delta') = \nu'\theta$ 的元素。我们以类似方式为任意半单 $\gamma' \in T^{\flat}$ 定义 $\Delta_{\mathrm{IV}}^{\mathbf{H}}(\gamma')$。

引理 10.9. 我们有

$$\Delta_{\mathrm{IV}}^{\tilde{\mathbf{G}}}(\delta) = \Delta_{\mathrm{IV}}^{\tilde{\mathbf{G}}}(\delta_{<r}) \cdot \Delta_{\mathrm{IV}}^{\mathbf{G}_{\delta_{<r}}}(\delta_{\geq r}) = |D_{G_{\eta_0}}^{\mathrm{red}}(\eta_+)|^{\frac{1}{2}} \cdot |D_{G_\eta}^{\mathrm{red}}(\log(\delta_{\geq r}))|^{\frac{1}{2}},$$

$$\Delta_{\mathrm{IV}}^{\mathbf{H}}(\gamma) = \Delta_{\mathrm{IV}}^{\mathbf{H}}(\gamma_{<r}) \cdot \Delta_{\mathrm{IV}}^{\mathbf{H}_{\gamma_{<r}}}(\gamma_{\geq r}).$$

证明。我们只考虑 $\Delta_{\mathrm{IV}}^{\mathbf{G}}(\delta)$，因为 $\Delta_{\mathrm{IV}}^{\mathbf{H}}(\gamma)$ 的公式可由更简单的论证推出。注意到当 $N(\alpha)(\nu_{<r}) \neq 1$ 时，$N(\alpha)(\nu_{<r}) - 1$ 的赋值小于 r，我们得到

$$|N(\alpha)(\nu) - 1|_F^{\frac{1}{2}} = \begin{cases} |N(\alpha)(\nu_{<r}) - 1|_F^{\frac{1}{2}} & \text{if } N(\alpha)(\nu_{<r}) \neq 1, \\ |N(\alpha)(\nu_{\geq r}) - 1|_F^{\frac{1}{2}} & \text{if } N(\alpha)(\nu_{<r}) = 1. \end{cases}$$

由于 $\{\alpha \in \Phi_{\mathrm{res}}(\mathbf{G}, \mathbf{T}^{\diamondsuit}) \mid N(\alpha)(\nu_{<r}) = 1\}$ 与集合 $\Phi(\mathbf{G}^{\delta_{<r}}, \mathbf{T}^{\flat})$（第4.2节）相对应，并且

$$|N(\alpha)(\nu_{\geq r}) - 1|_F^{\frac{1}{2}} = |\alpha(\nu_{\geq r})^{l_\alpha} - 1|_F^{\frac{1}{2}} = |\alpha(\nu_{\geq r}) - 1|_F^{\frac{1}{2}}$$

（利用 $l_\alpha = 1$，2 和 $p \neq 2$，）我们得到 $\Delta_{\mathrm{IV}}^{\tilde{\mathbf{G}}}(\delta) = \Delta\tilde{}_{\mathrm{GIV}}(\delta_{<r}) \cdot \Delta^{\mathbf{G}_{\delta_{<r}}}\tilde{}_{\mathrm{IV}}(\delta_{\geq r})$。

对 Δ 应用相同的论证 $\tilde{}$ GIV$(\delta_{<r})$，我们也得到一个分解 $\Delta\tilde{}$GIV$(\delta_{<r}) = \Delta\tilde{}GIV(\delta_0) \cdot \Delta^{\mathbf{G}_{\delta_0}}IV(\delta_{<r}^+)$。然而，当 $\tilde{}$ever $N(\alpha)(\nu_0) \neq 1$ 时，有 $|N(\alpha)(\nu_0) - 1|_F = 1$，因为 $N(\alpha)(\nu_0)$ 的阶与 p 互素。因此我们得到 $\Delta_{\mathrm{IV}}^{\mathbf{G}}(\delta) = \Delta^{\mathbf{G}_{\delta_0}}IV(\delta_{<r}^+) \cdot \Delta^{\mathbf{G}_{\delta<r}}IV(\delta_{\geq r})$。根据 DS18，注 2.12]，这可以改写为 $\Delta\tilde{}$GIV$(\delta) = |D_{G_{\eta_0}}^{\mathrm{red}}(\eta_+)|^{\frac{1}{2}} \cdot |D_{G_\eta}^{\mathrm{red}}(\delta_{\geq r})|^{\frac{1}{2}}$。再注意到 $|D_{G_\eta}^{\mathrm{red}}(\delta_{\geq r})| = |D_{G_\eta}^{\mathrm{red}}(\log(\delta_{\geq r}))|$，即可得到所述结论。□

引理 10.10. 存在一个由 $\delta_{<r}$ 确定的常数 $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，使得对于任意正整数 $m \in \mathbb{Z}_{>0}$，我们有

$$\Delta_{\mathrm{IV}}(\gamma_{<r} \cdot \gamma_{\geq r}^{p^m}, \delta_{<r} \cdot \delta_{\geq r}^{p^m}) = |p|_F^{md} \cdot \Delta_{\mathrm{IV}}(\gamma_{<r} \cdot \gamma_{\geq r}, \delta_{<r} \cdot \delta_{\geq r}).$$

证明。由引理 10.9，我们有 $\Delta_{\mathrm{IV}}^{\tilde{\mathbf{G}}}(\delta) = \Delta\tilde{}GIV(\delta_{<r}) \cdot \Delta^{\mathbf{G}_{\delta<r}}IV(\delta_{\geq r})$，以及 $\Delta\tilde{}$GIV$(\delta_{<r} \cdot \delta_{\geq r}^{p^m}) = \Delta_{\mathrm{IV}}^{\tilde{\mathbf{G}}}(\delta_{<r}) \cdot \Delta^{\mathbf{G}_{\delta<r}}IV(\delta_{\geq r}^{p^m})$。另一方面，由 [Hal93，引理 3.1]，我们有 $\Delta^{\mathbf{G}_{\delta<r}}IV(\delta_{\geq r}^{p^m}) = |p|^{m|\Phi(\mathbf{G}_{\delta<r}\mathbf{T}^{\flat})_F|} \cdot \Delta^{\mathbf{G}_{\delta<r}}IV(\delta_{\geq r})$，当 $p > e_F + 1$ 时成立，而我们假设该条件成立（见第 8 节开头）。类似地，当 $p > e_F + 1$ 时，我们有 $\Delta_{\mathrm{IV}}^{\mathbf{H}}(\gamma_{<r} \cdot \gamma_{\geq r}) = \Delta_{\mathrm{IV}}^{\mathbf{H}}(\gamma_{<r}) \cdot \Delta_{\mathrm{IV}}^{\mathbf{H}}(\gamma_{\geq r})$、$\Delta_{\mathrm{IV}}^{\mathbf{H}}(\gamma_{<r} \cdot \gamma_{\geq r}^{p^m}) = \Delta_{\mathrm{IV}}^{\mathbf{H}}(\gamma_{<r}) \cdot \Delta_{\mathrm{IV}}^{\mathbf{H}}(\gamma_{\geq r}^{p^m})$，以及 $\Delta^{\mathbf{H}_{\gamma<r}}IV(\gamma_{\geq r}^{p^m}) = |p|_F^{m|\Phi(\mathbf{H}_{\gamma<r}, \mathbf{T}^{\flat})|} \cdot \Delta^{\mathbf{H}_{\gamma<r}}IV(\gamma_{\geq r})$。将这些结果综合起来，便得到所述结论。□

10.5. **完整转移因子的尾部缩放引理。** 结合引理10.2、10.5、10.8和10.10，我们得到以下命题，它是 [Kal19b中引理 6.3 的扭曲版本。3]。

引理 10.11。 对于任意充分大的正整数 $m \in \mathbb{Z}_{>0}$，我们有

$$\mathring{\Delta}(\gamma_{<r} \cdot \gamma_{\geq r}^{p^{2m}}, \delta_{<r} \cdot \delta_{\geq r}^{p^{2m}}) = \mathring{\Delta}(\gamma_{<r} \cdot \gamma_{\geq r}, \delta_{<r} \cdot \delta_{\geq r}) \quad and$$

$$\Delta(\gamma_{<r} \cdot \gamma_{\geq r}^{p^{2m}}, \delta_{<r} \cdot \delta_{\geq r}^{p^{2m}}) = |p|_F^{2md} \cdot \Delta(\gamma_{<r} \cdot \gamma_{\geq r}, \delta_{<r} \cdot \delta_{\geq r})$$

其中常数如引理*10.10*所示。

该引理的一个重要推论如下。

命题 10.12。沿用定理8.3和推论8.4中的记号，对于任意 D-范数对$(Y, X) \in \mathfrak{h}_{y,0+} \times \mathfrak{g}_{\eta,0+}$，有

$$\Delta\big(y\exp(Y), \eta\exp(X)\big) = \Delta^D(\bar{Y}, X_{\mathrm{sc}}) \quad and$$

$$\mathring{\Delta}\big(y\exp(Y), \eta\exp(X)\big) \cdot \Delta_{\mathrm{IV}}(y, \eta) = \mathring{\Delta}^D(\bar{Y}, X_{\mathrm{sc}})$$

证明。由引理 10.11，有

$$\Delta\big(y\exp(Y), \eta\exp(X)\big) = |p|_F^{-2md} \cdot \Delta(y\exp(p^{2m}Y), \eta\exp(p^{2m}X))$$

对于任意充分大的 $m \in \mathbb{Z}_{>0}$，取 m 为充分大的整数，使得 $p^{2m}Y$ 属于集合 $\mathfrak{V}$，该集合如推论 8.4中所述，于是得到

$$\Delta(y\exp(p^{2m}Y), \eta\exp(p^{2m}X)) = \Delta^D(p^{2m}\bar{Y}, p^{2m}X_{\mathrm{sc}})$$

由推论 8.4。由李代数传递因子的齐次性，有$\Delta^D(p^{2m}\bar{Y}, p^{2m}X_{\mathrm{sc}}) = |p|_F^{2md} \cdot \Delta^D(\bar{Y}, X_{\mathrm{sc}})$（见 [Wal97，第 2 节。3] 以及 [Hal93，第 10]节）。因此得到第一个等式。

由引理 10.9，有 $\Delta_{\mathrm{IV}}(\gamma, \delta) = \Delta_{\mathrm{IV}}(y, \eta) \cdot \Delta^{\mathbf{G}_\eta}{}_{\mathrm{IV}}(\delta_{\geq r}) \cdot \Delta^{\mathbf{H}_y}{}_{\mathrm{IV}}(\gamma_{\geq r})^{-1}$。因此，注意到 $\Delta^{\mathbf{G}_\eta}{}_{\mathrm{IV}}(\delta_{\geq r}) \cdot \Delta^{\mathbf{H}_y}{}_{\mathrm{IV}}(\gamma_{\geq r})^{-1} = \Delta^D_{\mathrm{IV}}(\bar{Y}, X_{\mathrm{sc}})$，便得到第二个等式。□

11. Twisted endoscopic character relation

11.1. 扭曲端oscopic特征关系。我们假设，$(\mathbf{S}, \hat{\jmath}, \chi, \vartheta)$ 是 $\mathbf{G}$ 的一个环面超尖点 L-packet 数据，其中其 L-参数 ϕ 经由端oscopic数据 $(\mathbf{H}\ {}^L\mathbf{H}\ s, \hat{\xi})$ 的L-嵌入 $\hat{\ }\xi$ 分解（即，我们处于第 6.2 节所述的情形）。这里，如有必要，通过将 $(\mathbf{S}, \hat{\jmath}, \chi, \vartheta)$ 替换为其同构数据，我们可以假设 $\chi = \chi_{\vartheta_{\hat{\jmath}}}$（见第 3.4 节）。按照第 6.5 节的方式，我们得到一个环面超尖点 L-packet 数据 $(\mathbf{S_H}, \hat{\jmath}_{\mathbf{H}}, \chi_{\mathbf{H}}, \vartheta_{\mathbf{H}})$。类似地，我们可以假设 $\chi_{\mathbf{H}} = \chi_{\vartheta_{\hat{\jmath}_{\mathbf{H}}}}$。令 $\Pi^{\mathbf{G}}_\phi$（分别地，$\Pi^{\mathbf{H}}_{\phi_{\mathbf{H}}}$）表示 $\mathbf{G}$（分别地，$\mathbf{H}$）的相关环面超尖点 L-packet。

本节旨在于一些特殊情形下证明以下结论：

预期 11.1. 对于每个 $\pi \in \Pi^{\mathbf{G}}_\phi$，都存在一个常数 $\Delta^{\mathrm{spec}}_{\phi,\pi} \in \mathbb{C}$ 使得~对任意椭圆强正则半单 $\delta \in G$，以下恒等式成立：

$$\sum_{\pi \in \Pi^{\mathbf{G}}_\phi} \Delta^{\mathrm{spec}}_{\phi,\pi} \Theta_{\tilde{\pi}}(\delta) = \sum_{\gamma \in H/\mathrm{st}} \frac{\Delta^{\mathbf{H}}_{\mathrm{IV}}(\gamma)^2}{\Delta^{\tilde{\mathbf{G}}}_{\mathrm{IV}}(\delta)^2} \Delta(\gamma, \delta) \sum_{\pi_{\mathbf{H}} \in \Pi^{\mathbf{H}}_{\phi_{\mathbf{H}}}} \Theta_{\pi_{\mathbf{H}}}(\gamma),$$

或者等价地，

$$\sum_{\pi \in \Pi^{\mathbf{G}}_\phi} \Delta^{\mathrm{spec}}_{\phi,\pi} \Phi_{\tilde{\pi}}(\delta) = \sum_{\gamma \in H/\mathrm{st}} \mathring{\Delta}(\gamma, \delta) \sum_{\pi_{\mathbf{H}} \in \Pi^{\mathbf{H}}_{\phi_{\mathbf{H}}}} \Phi_{\pi_{\mathbf{H}}}(\gamma), \tag{17}$$

其中，右端的第一个求和遍历 H 中~强 $\mathbf{G}$-正则半单元素的稳定共轭类，并且我们令 $\Phi_{\tilde{\pi}}(\delta) := \Delta^{\mathbf{G}}_{\mathrm{IV}}(\delta) \cdot \Theta_{\tilde{\pi}}(\delta)$以及 $\Phi_{\pi_{\mathbf{H}}}(\gamma) := \Delta^{\mathbf{H}}_{\mathrm{IV}}(\gamma) \cdot \Theta_{\pi_{\mathbf{H}}}(\gamma)$。

11.2. **若干初步考虑**。

11.2.1. 关于指标集的初步观察。 在下文中，我们固定一个椭圆的˜强正则半单元素 $\delta \in G$，并且也固定一个正规 r-逼近$\delta = \delta_0 \delta_{<r}^{+} \delta_{\geq r}$，其意义见定义4.9 (回顾一下，根据命题.r，我们总能找到一个正规4.10-逼近）。令 η 表示 $\delta_{<r} \in G_{\mathrm{ss}}$。取集合 $\mathfrak{H}_\eta \subset H_{\mathrm{ss}}$ 如第7.3节所述，即 $\mathfrak{H}_\eta$ 是 H 中半单元素的稳定共轭类的一组代表元，使得 y 对应于 η，并且$\mathbf{H}_y$对任意 $y \in \mathfrak{H}_\eta$都是准分裂的。

回顾一下， θ-稳定的 $\Pi_\phi^{\mathbf{G}}$由以下对象参数化：

$$\tilde{\mathcal{J}}_G^{\mathbf{G}} := \{j \colon \tilde{\mathbf{S}} \hookrightarrow \tilde{\mathbf{G}} \mid j \text{ is } F\text{-rational and } j \sim_{\mathbf{G}} \jmath^{-1}\}/\sim_G$$

（见第 6.4节）对于每个 $j \in \tilde{\mathcal{J}}_G^{\mathbf{G}}$，相应的对象是环面超尖点表示（记作 π_j），它由 $\mathbf{G}$ 的温和椭圆正则对 (j, ϑ_j') 导出（见第 3.4节）。根据扭曲特征标公式（定理 4.12），扭曲特征标 $\Phi_{\tilde{\pi}_j}(\delta)$ 表示为对集合 $\{g \in S_j\backslash G/G_\eta \mid {}^g\eta \in \tilde{S}_j\}$的求和。对于每个 $j \in \tilde{\mathcal{J}}_G^{\mathbf{G}}$，令

$$\tilde{\mathcal{J}}_{G_\eta}^{G}(j) := \{k \colon \tilde{\mathbf{S}} \hookrightarrow \tilde{\mathbf{G}} \mid k \text{ is } F\text{-rational}, k \sim_G j, \text{ and } \eta \in \tilde{S}_k\}/\sim_{G_\eta}.$$

引理 11.2。 存在一个双射

$$\{g \in S_j\backslash G/G_\eta \mid {}^g\eta \in \tilde{S}_j\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \tilde{\mathcal{J}}_{G_\eta}^{G}(j) \colon g \mapsto [g^{-1}] \circ j.$$

˜证明。 只需验证从 $\{g \in S_j\backslash G \mid {}^g\eta \in S_j\}$到 $\{k$的满射 $\tilde{\mathbf{S}} \hookrightarrow \tilde{\mathbf{G}} \mid k$是 F-有理的、 $k \sim_G j$的，并且由 $g \mapsto [g]^{-1} \circ j$给出的 $\eta \in \tilde{S}_k\}$实际上是单射。（然后对 G_η取商即可得到所述断言。）设 g 和 g' 是 G 中的两个元素，它们映射到同一个元素，即有$[g]^{-1} \circ j = [g']^{-1} \circ j$。那么 $g'g^{-1}$ 属于 S_j，因此 g 和 g' 属于同一个双陪集。所以，断言中的映射是单射。□

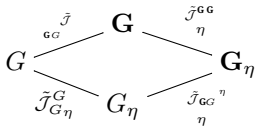
由此引理，扭曲端oscopic特征关系（17）中的$\mathbf{G}$侧 $\sum_{\pi \in \Pi_\phi^{\mathbf{G}}} \Delta_\phi^{\mathrm{spec}}(\cdot, \pi)\Theta_{\tilde{\pi}}(\delta)$ 可写成关于集合 $\tilde{\mathcal{J}}_{\mathbf{G}G}$和 $\tilde{\mathcal{J}}_{G_\eta}^{G}(j)$（对$j \in \tilde{\mathcal{J}}_{\mathbf{G}G}$而言）的双重求和。我们将此双重求和重新整理如下。首先，将 $\tilde{\mathcal{J}}_{\mathbf{G}G}$和 $\tilde{\mathcal{J}}_{G_\eta}^{G}(j)$（对 $j \in \tilde{\mathcal{J}}_G^{\mathbf{G}}$而言）合并为以下单个集合：

$$\tilde{\mathcal{J}}_{G_\eta}^{\mathbf{G}} := \{k \colon \tilde{\mathbf{S}} \hookrightarrow \tilde{\mathbf{G}} \mid k \text{ is } F\text{-rational}, k \sim_{\mathbf{G}} \jmath^{-1}, \text{ and } \eta \in \tilde{S}_k\}/\sim_{G_\eta}.$$

然后我们再次将 $\mathcal{J}_{\mathbf{G}^{G_\eta}}$划分为集合 $\tilde{\mathcal{J}}_{\mathbf{G}\mathbf{G}_\eta}$和 $\tilde{\mathcal{J}}_{\mathbf{G}_{G_\eta}{}^{\eta}}(j)$（对 $j \in \tilde{\mathcal{J}}_{\mathbf{G}\mathbf{G}_\eta}$而言），其中

- $\tilde{\mathcal{J}}_{\mathbf{G}_\eta}^{\mathbf{G}} := \{j \colon \tilde{\mathbf{S}} \hookrightarrow \tilde{\mathbf{G}} \mid j \text{ is } F\text{-rational}, j \sim_{\mathbf{G}} \jmath^{-1}, \text{ and } \eta \in \tilde{S}_j\}/\sim_{\mathbf{G}_\eta}$,
- $\tilde{\mathcal{J}}_{G_\eta}^{\mathbf{G}_\eta}(j) := \{k \colon \tilde{\mathbf{S}} \hookrightarrow \tilde{\mathbf{G}} \mid k \text{ is } F\text{-rational}, k \sim_{\mathbf{G}_\eta} j, \text{ and } \eta \in \tilde{S}_k\}/\sim_{G_\eta}$.

在以下论证中，我们为这些集合选定代表元，并宽泛地将这些集合与其固定代表元集合视为相同。



牢记这一观察，我们先考虑以下情形：

$$\mathbf{D}(y, \eta) = \varnothing \text{ for any } y \in \mathfrak{H}_\eta.$$

在这种情况下，根据命题 7.11 （以及注记 7.12），$\tilde{\mathcal{J}}^{\mathbf{G}}_{\mathbf{G}_\eta}$ 必为空。这意味着，扭曲端oscopic特征关系的 **G**-侧包含一个对空集求和的求和项，因此等于 0。另一方面，由以下引理可知，**H**-侧也等于 0：

引理11.3。若对于任意 $y \in \mathfrak{H}_\eta$，都有 $\mathbf{D}(y,\eta) = \varnothing$，则 δ 在 H 中不存在范数。

证明。为反证，假设存在 δ 的一个范数 $\gamma \in H$。那么，根据引理 7.7，我们有一个与 (γ,δ) 相关联的图表 $D \in \mathrm{D}(\gamma,\delta)$。~若令 $\epsilon := \xi_D(\eta)$，则 D 也是与 (ϵ,η) 相关联的图表。于是，仿照命题 7.11 满射性部分的证明，通过对 D 作 **H**-共轭，我们可以构造出唯一的 $y \in \mathfrak{H}_\eta$ 以及一个与 (y,η) 相关联的图表 D'。由此得到矛盾。□

因此，在下文中，我们关注满足以下条件的椭圆强正则半单元素 $\delta \in \mathbf{G}$：

$$\mathbf{D}(y,\eta) \neq \varnothing \text{ for some } y \in \mathfrak{H}_\eta.$$

备注 11.4。这个论证表明，若不存在某个 $y \in \mathfrak{H}_\eta$，使得存在一个椭圆强正则半单元素 $\delta \in \mathbf{G}$ 满足 $\mathbf{D}(y,\eta) \neq \varnothing$，那么便无事可证。在这种情况下，对于任意 $\pi \in \Pi^{\mathbf{G}}_\phi$，我们只需令 $\Delta^{\mathrm{spec}}_{\phi\,\pi}$,:= 0 。

11.2.2. 内窥指标集的头尾分层。当 $\gamma \in H$ 是 $\delta \in G$的范数~时，~我们取一个图表 $D \in \mathrm{D}(\gamma,\delta)$，并考虑其关联映射 ξ_D。根据引理 7.7，这样的图表总是存在，且在等价意义下唯一~，而映射 ξ_D 与 D的选取无关。注意到这一点后，我们令 $\gamma_i :=\xi_D(\delta_i)$，其中 $i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$。于是得到一个正规 r-逼近 $\gamma = \gamma_{<r} \cdot \gamma_{\geq r}$（见引理 10.1）。注意，以此方式由 δ 的逼近诱导出的 γ 的 r-逼近，在稳定**H**-共轭意义下是一致的。更确切地说，对于 δ 的任意范数 $\gamma \in \mathrm{H}$ 和 $\bar{\gamma} \in \mathrm{H}$，若它们通过 $h \in$H 稳定共轭（设 $\bar{\gamma} = {}^h\gamma$），则有 $\bar{\gamma}_i = {}^h\gamma_i$。

对于每个 $y \in \mathfrak{H}_\eta$，我们定义

$$H_y[\delta]_r := \left\{ z \in H_{y,\mathrm{srs}} \;\middle|\; \begin{array}{l} yz \in H \text{ is a norm of } \delta, \\ y \cdot z \text{ is the fixed normal } r\text{-approximation to } yz \end{array} \right\}.$$

以下是 [Kal15，引理 64]的扭曲版本。

引理 11.5。映射

$$\bigsqcup_{y \in \mathfrak{H}_\eta} H_y[\delta]_r/\sim_{\mathbf{H}_y} \to \{\gamma \in H_{\mathrm{srs}} \mid \gamma \textit{ is a norm of } \delta\}/\sim_{\mathbf{H}} : z \mapsto yz$$

在每个不交直和项上都是一个 $\pi_0(\mathbf{H}^y)(F)$-挠子（映到其像上）。换言之，诱导映射

$$\bigsqcup_{y \in \mathfrak{H}_\eta} (H_y[\delta]_r/\sim_{\mathbf{H}_y})/\pi_0(\mathbf{H}^y)(F) \to \{\gamma \in H_{\mathrm{srs}} \mid \gamma \textit{ is a norm of } \delta\}/\sim_{\mathbf{H}} : z \mapsto yz$$

是双射。这里，左侧的$\sim_{\mathbf{H}_y}$（右侧的 $\sim_{\mathbf{H}}$）表示$\mathbf{H}^y$（$\mathbf{H}$）中的稳定共轭。

证明。 该映射定义良好显然成立。

我们首先证明该映射的满射性。设 $\gamma \in H_{\mathrm{srs}}$ 是 δ 的范数。那么，根据引理 7.7，存在图表 $D \in \mathbf{D}(\gamma, \delta)$，其在等价意义下唯一。令 $\epsilon := \xi_D(\eta)$。于是，根据 $\mathfrak{H}_\eta$ 的定义，存在唯一的一个 $y \in \mathfrak{H}_\eta$，它与 ϵ 稳定 $\mathbf{H}$-共轭。取一个给出这一稳定共轭的元素 $h \in \mathbf{H}$，即，对于任意 $\sigma \in \Gamma$，有 $[h](\epsilon) = y$，且 $\sigma(h)^{-1}h \in \mathbf{H}_\epsilon$。那么映射 $[h]$ 给出 $\mathbf{H}_\epsilon$ 与准分裂连通约化群 $\mathbf{H}^y$ 之间的内扭。由于任意 F-有理极大环面都会传递到准分裂内形式，我们不妨设映射 $[h]\colon \mathbf{H}_\epsilon \to \mathbf{H}^y$ 诱导出从 $\mathbf{H}^\gamma$（这是 $\mathbf{H}_\epsilon$ 的一个极大环面）到 $\mathbf{H}^y$ 的一个 F-有理同构。于是，$z := [h](\xi_D(\delta_{\geq r}))$ 是 $\mathbf{H}^y$ 的一个元素，使得 $yz = [h](\gamma)$。这意味着断言中的映射是满射的。

接下来，我们考察该映射的纤维。设对于 y，我们有 $z \in H_y[\delta]_r$ 和 $\bar{z} \in H_{\bar{y}}[\delta]_r$，且 yz 和 $\bar{y}\bar{z}$ 稳定 $\mathbf{H}$-共轭。令 $h \in \mathbf{H}$ 为给出该稳定共轭的元素，即 $[h](yz) = \bar{y}\bar{z}$。由于我们选取的正规 r-逼近与该稳定共轭相一致，因此这意味着 $[h](y) = \bar{y}$。于是，根据 $\mathfrak{H}_\eta$ 的定义，我们得到 $y = \bar{y}$，从而 $h \in \mathbf{H}^y$。又由于我们还有 $[h](z) = \bar{z}$，因此根据 [Kal15，引理 6.3]，我们知道 z 和 $\bar{z}$ 在 $\pi_0(\mathbf{H}^y)(F)$ 的作用下共轭。□

引理 11.6. 我们令 $X := \log(\delta_{\geq r}) \in \mathfrak{g}_\eta$。令 $z \in H_y[\delta]_r$，并令 $Y := \log(z) \in \mathfrak{h}_y$。存在一个图表 $D \in \mathbf{D}(y, \eta)$，在等价意义下唯一，使得 (Y, X) 是一个 D-范数对。

证明. 根据集合 $H_y[\delta]_r$的定义， yz 是 δ 的一个范数，而 $y \cdot z$ 是 yz的固定r-近似。因此，根据我们对正规 r-近似的选择，存在一个图表 $D = (\mathbf{B}^\flat, \mathbf{T}^\flat, \mathbf{B}^\diamondsuit, \mathbf{T}^\diamondsuit) \in \mathbf{D}(y, \eta)$，满足 $\tilde{\xi}_D(\eta) = y$ 且$\xi_D(\delta_{\geq r}) = z$。这意味着 (Y, X) 是一个 D-范数对。

$\bar{}$为检验 D的唯一性，设 (Y, X) 是另一个图表 $\bar{D} = (\bar{\mathbf{B}}^\flat, \bar{\mathbf{T}}^\flat, \bar{\mathbf{B}}^\diamondsuit, \bar{\mathbf{T}}^\diamondsuit) \in \mathbf{D}(y, \eta)$ 的一个 D-范数对。于是，通过适当用与 $\bar{D}$ 等价的图表替换它，我们可以假设 $\bar{\mathbf{T}}^\flat = \mathbf{T}^\flat$ 且 $\bar{\mathbf{T}}^\diamondsuit = \mathbf{T}^\diamondsuit$，并且 $\xi_D(\exp(X)) = \exp(Y) = \xi_{\bar{D}}(\exp(X))$（参见$\bar{}$引理 7.8 的证明中的论证）。这意味着 D 和 $\bar{D}$ 都属于 $\mathbf{D}(y \exp(Y)\ \eta \exp(X))$。$\bar{}$因此，由引理 7.7， D 和 $\bar{D}$ 在 $\mathbf{D}(y \exp(Y)\ \eta \exp(X))$ 中等价，故在 $\mathbf{D}(y, \eta)$ 中也等价。□

根据对数映射的不变性，引理 11.6 推出如下结论。

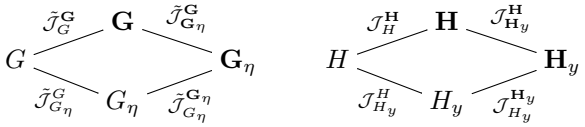
引理 11.7。 对应关系 $z \mapsto \log(z)$ 诱导出一个双射

$$H_y[\delta]_r/\sim_{\mathbf{H}_y} \xrightarrow{1:1} \bigsqcup_{D \in \mathbb{D}(y,\eta)} \{Y \overset{D}{\leftrightarrow} X\}/\sim_{\mathbf{H}_y},$$

其中，左侧表示元素的$\mathbf{H}^y$-共轭类集合，而右侧表示元素的$\mathbf{H}^y$-共轭类集合，其中的元素$Y \in \mathfrak{h}_y$ 与 X 构成一个 D-范数对：$= \log(\delta_{\geq r})$ （在 $D \in \mathbb{D}(y, \eta)$ 上）。

11.2.3. 李代数转移：再探。 我们引入集合 $\mathcal{J}_{\mathbf{H}H}$， $\mathcal{J}^H_{H_y}$， $\mathcal{J}_{\mathbf{H}\mathbf{H}^y}$和$\mathcal{J}^{\mathbf{H}_y}_{H_y}$，以类似于第$\mathbf{H}$侧公式（17）的方式重新排列指标集

11.2.1.



回想一下，根据命题7.11，我们有一个双射

$$\mathfrak{tran}\colon \bigsqcup_{y\in\mathfrak{H}_\eta} \big(\mathbb{D}(y,\eta)\times \mathcal{J}^{\mathbf{H}}_{\mathbf{H}_y}\big)/\pi_0(\mathbf{H}^y)(F)\to \tilde{\mathcal{J}}^{\mathbf{G}}_{\mathbf{G}_\eta}.$$

设 $D\in\mathbf{D}(y,\eta)$, $j_{\mathbf{H}}\in\mathcal{J}_{\mathbf{H}\mathbf{H}^y}$ 和 $j\in\tilde{\mathcal{J}}_{\mathbf{G}\mathbf{G}^\eta}$ 满足 $\mathfrak{tran}(D,j_{\mathbf{H}})=j$。

我们还回顾一下，在第 6 节中，我们固定了 $X^*\in\mathfrak{s}^*$ 和 $Y^*\in\mathfrak{s}^*_{\mathbf{H}}$，它们分别是实现环面特征 ϑ 和 $\vartheta_{\mathbf{H}}$ 的元素（见推论 6.20）。以下，对于 $k\in\mathcal{J}^{\mathbf{G}}$，我们令

$$X^*_k:=(dk^*)^{-1}(X^*)\in\mathfrak{s}^*_k\hookrightarrow\mathfrak{g}^*$$

（注意 $dk\colon\ \mathfrak{s}\cong\mathfrak{s}_k$，因此 $dk^*\colon\ \mathfrak{s}^*_k\cong\mathfrak{s}^*$）。这个元素 $X^*_k\in\mathfrak{s}^*_k$ 表示特征 $\vartheta_k|_{S_{k,\ r}}=\vartheta'_k|_{S_{k,\ r}}$。注意，当 k 属于 $\tilde{\mathcal{J}}_{\mathbf{G}^{G_\eta}}$ 时，我们也有一个元素 $X^*_k\in\mathfrak{s}^{\natural *}_k\hookrightarrow\mathfrak{g}^*_\eta$，可以将其视为上述 X^*_k 在自然映射 $\mathfrak{s}^*_k\twoheadrightarrow\mathfrak{s}^{\natural *}_k$ 下的像。类似地，对于 $k_{\mathbf{H}}\in\mathcal{J}^{\mathbf{H}}$，我们令

$$Y^*_{k_{\mathbf{H}}}:=(dk^*_{\mathbf{H}})^{-1}(Y^*)\in\mathfrak{s}^*_{k_{\mathbf{H}}}\hookrightarrow\mathfrak{h}^*.$$

根据映射 $\mathfrak{tran}$ 的构造，映射 $\xi_{\mathbf{S}}$ 和 ξ_D 在嵌入 j 和 $j_{\mathbf{H}}$ 下重合，即 $\xi_D\circ j=j_{\mathbf{H}}\circ\xi_{\mathbf{S}}$。这意味着 $d\xi^*_D(Y^*_{j_{\mathbf{H}}})=X^*_j\in(\mathfrak{t}^{\diamondsuit *})^{\theta\diamondsuit}$。

引理 11.8. (1) 集合 $\{Y^*_{k_{\mathbf{H}}}\mid k_{\mathbf{H}}\in\mathcal{J}^{\mathbf{H}_y}_{H_y}(j_{\mathbf{H}})\}$ 表示一个稳定 $\mathbf{H}y$-共轭类中的 H_y-共轭类。(2) 集合 $\{X^*_k\mid k\in\tilde{\mathcal{J}}^{\mathbf{G}_\eta}_{G_\eta}(j)\}$ 表示 G_η-共轭类中的元素类，这些元素属于 $\mathfrak{g}_{\eta,0+}$ 且与 $Y^*_{k_{\mathbf{H}}}$ 对任意一个 $k_{\mathbf{H}}\in\mathcal{J}^{\mathbf{H}_y}_{H_y}(j_{\mathbf{H}})$ 构成范数对 D。

证明。由定义，断言 (1) 显然。由于我们有 $d\xi^*_D(Y^*_{j_{\mathbf{H}}})=X^*_j$，$(Y^*_{j_{\mathbf{H}}},X^*_j)$ 是一个范数对 D。注意到所有与 $Y^*_{k_{\mathbf{H}}}$ 构成范数对的 $\mathfrak{g}_{\eta,0+}$ 中的元素都是 $\mathbf{G}\eta$-共轭的，因此断言 (2) 得证。□

引理11.8 使我们能够将命题 8.8 改写如下：

命题 11.9. 我们有

$$\sum_{Y\overset{D}{\leftrightarrow}X/\sim_{\mathbf{H}_y}}\mathring{\Delta}^D(\bar{Y},X_{\mathrm{sc}})\sum_{k_{\mathbf{H}}\in\mathcal{J}^{\mathbf{H}_y}_{H_y}(j_{\mathbf{H}})}D^{\mathbf{H}_y}_{Y^*_{k_{\mathbf{H}}}}(Y)=\sum_{k\in\tilde{\mathcal{J}}^{\mathbf{G}_\eta}_{G_\eta}(j)}\mathring{\Delta}^D(\bar{Y}^*_{j_{\mathbf{H}}},X^*_{k,\mathrm{sc}})D^{\mathbf{G}_\eta}_{X^*_k}(X).$$

11.2.4. *a-数据与 χ-数据（针对限制根）。*在稍后进行的传递因子计算中，我们需要为限制根固定 a-数据和 χ-数据。下面说明我们的选择。

我们首先讨论$\mathbf{G}$侧。设 $j\in\tilde{\mathcal{J}}_{\mathbf{G}\mathbf{G}^\eta}$。对于任意 $k\in\tilde{\mathcal{J}}_{\mathbf{G}_{G_\eta}{}^\eta}(j)$，我们得到一个 η-稳定（因而也为 η_0-稳定）的温和椭圆环面对 $(\mathbf{S}_k,\vartheta'_k)$，它属于$\mathbf{G}$。

于是我们得到限制根集合 $\Phi_{\mathrm{res}}(\mathbf{G},\mathbf{S}_k)$。我们通过以下方式，为 $\Phi_{\mathrm{res}}(\mathbf{G},\mathbf{S}_k)$ 定义一个 a-数据集合 $a_k^{\mathrm{res}} = \{a_{k,\alpha_{\mathrm{res}}}^{\mathrm{res}}\}_{\alpha_{\mathrm{res}}\in\Phi_{\mathrm{res}}(\mathbf{G},\mathbf{S}_k)}$：

$$a_{k,\alpha_{\mathrm{res}}}^{\mathrm{res}} = \langle H_{\alpha_{\mathrm{res}}}, X_k^*\rangle,$$

其中

- $H_{\alpha_{\text{余数}}} := d\alpha_{\text{余数}}^\vee(1) \in \mathfrak{s}_k^\natural(F_{\alpha_{\text{余数}}})$，且
- $X_k^* \in \mathfrak{s}_k^{\natural *}$，$-r$ 是与 ϑ'_k 相关的元素，如第11.2.3节所述。

我们按如下方式定义一组 $\chi_k^{\mathrm{res}} = \{\chi_{k,\alpha_{\mathrm{res}}}^{\mathrm{res}}\}_{\alpha_{\mathrm{res}}\in\Phi_{\mathrm{res}}(\mathbf{G},\,\mathbf{S}_k)}$ χ-数据，对应于 $\Phi_{\mathrm{res}}(\mathbf{G},\,\mathbf{S}_k)$：

- 对于 $\alpha_{\text{余数}} \in \Phi_{\text{余数}}(\mathbf{G},\,\mathbf{S}_k)$渐近，令 $\chi_{\text{余数}k,\,\alpha_{\text{余数}}}$ 为 $F^\times_{\alpha_{\text{余数}}}$的平凡特征。
- 对于 $\alpha_{\text{余数}} \in \Phi_{\text{余数}}(\mathbf{G},\,\mathbf{S}_k)$非分歧，令 $\chi_{\text{余数}k,\,\alpha_{\text{余数}}}$ 为 $F^\times_{\alpha_{\text{余数}}}$的唯一非平凡非分歧二次特征。
- 对于 $\alpha_{\mathrm{res}} \in \Phi_{\mathrm{res}}(\mathbf{G},\mathbf{S}_k)_{\mathrm{ram}}$，令 $\chi_{\mathrm{res}k,\alpha_{\mathrm{res}}}$ 为 $F^\times_{\alpha_{\mathrm{res}}}$ 的唯一温和分歧特征，其满足以下性质：

$$\chi_{k,\alpha_{\mathrm{res}}}^{\mathrm{res}}|_{F^\times_{\pm\alpha_{\mathrm{res}}}} = \kappa_{\alpha_{\mathrm{res}}} \quad \text{and} \quad \chi_{j,\alpha_{\mathrm{res}}}^{\mathrm{res}}(2a_{k,\alpha_{\mathrm{res}}}^{\mathrm{res}}) = \lambda_{\alpha_{\mathrm{res}}}.$$

注 11.10. 我们可以按照 [Kal19b，第 4 节7] 中的相同方法验证，上述条件唯一确定了 $\chi_{k,\alpha_{\mathrm{res}}}^{\mathrm{res}}$ 对于 $\alpha_{\mathrm{res}} \in \Phi_{\mathrm{res}}(\mathrm{G},\mathrm{S}_k)_{\mathrm{ram}}$ 的温和分歧二次特征。事实上，若令 $\sigma_{\alpha_{\mathrm{res}}} \in \mathrm{Gal}(F_{\alpha_{\mathrm{res}}}/F_{\pm\alpha_{\mathrm{res}}})$ 为唯一的非平凡元素，则有 $\sigma_{\alpha_{\mathrm{res}}}(H_{\alpha_{\mathrm{res}}}) = \sigma_{\alpha_{\mathrm{res}}}(d\alpha_{\mathrm{res}}^\vee(1)) = d\sigma_{\alpha_{\mathrm{res}}}(\alpha_{\mathrm{res}}^\vee)(1) = -d\alpha_{\mathrm{res}}^\vee(1) = -H_{\alpha_{\mathrm{res}}}$ 且 $\sigma_{\alpha_{\mathrm{res}}}(X_k^*) = X_k^*$。因此 $\sigma_{\alpha_{\mathrm{res}}}(a_{k,\alpha_{\mathrm{res}}}^{\mathrm{res}}) = -a_{k,\alpha_{\mathrm{res}}}^{\mathrm{res}}$。这意味着 $a_{k,\alpha_{\mathrm{res}}}^{\mathrm{res}}$ 的赋值（相对于 $F_{\alpha_{\mathrm{res}}}$ 归一化）为奇数。

我们注意到，根据限制，$(\mathrm{S}_k,\vartheta'_k)$ 诱导出 G^{η_0} 的一个温和椭圆环面对 $(\mathrm{S}_k^\natural,\vartheta_k'^\natural)$，其中 $\vartheta_k'^\natural = \vartheta'_k|_{S_k^\natural}$（[Oi25，引理 5.5]）。于是，根据 Kaletha 的构造（见第 3.2 节），我们得到 a-数据集 $a_{\vartheta_k'^\natural} = \{a_{\vartheta_k'^\natural,\alpha}\}_{\alpha\in\Phi(\mathbf{G}_{\eta_0},\mathrm{S}_k^\natural)}$，以及 χ-数据集 $\chi_{\vartheta_k'^\natural} = \{\chi_{\vartheta_k'^\natural,\alpha}\}_{\alpha\in\Phi(\mathbf{G}_{\eta_0},\mathrm{S}_k^\natural)}$，对应于 $\Phi(\mathrm{G}^{\eta_0},\mathrm{S}_k^\natural)$。简记 $(a_k^\natural,\chi_k^\natural)$ 为 $(a_{\vartheta_k'^\natural},\chi_{\vartheta_k'^\natural})$。如第 9.1 节所述，集合 $\Phi(\mathrm{G}^{\eta_0},\mathrm{S}_k^\natural)$ 可视为 $\Phi_{\mathrm{res}}(\mathrm{G},\mathrm{S}_k)$ 的一个子集（根子系统）。根据构造，我们有如下结论：

引理 11.11。 a-数据与 χ-数据的集合$(a_k^\natural,\chi_k^\natural)$ 是$(a_k^{\mathrm{res}},\chi_k^{\mathrm{res}})$的限制。

接下来讨论 H 侧。假设 $D \in \mathrm{D}(y,\eta)$、$j_{\mathbf{H}} \in \mathcal{J}\mathrm{HH}_y$ 和 $j \in \tilde{\mathcal{J}}\mathrm{GG}_\eta$满足 $\mathrm{tran}(D,j_{\mathbf{H}}) = j$。对任意 $k_{\mathbf{H}} \in \mathcal{J}\mathrm{H}_{H_y}{}^y$，我们得到 H 的一个温和椭圆环面对 $(\mathrm{S}_{k_{\mathbf{H}}},\vartheta'_{k_{\mathbf{H}}}) := (\mathrm{S}_{\mathbf{H},k_{\mathbf{H}}},\vartheta'_{\mathbf{H},k_{\mathbf{H}}})$。将 Kaletha 的构造（第 3.2 节）应用于 $(\mathrm{S}_{k_{\mathbf{H}}},\vartheta'_{k_{\mathbf{H}}})$，我们得到相对于 $\Phi(\mathrm{H},\mathrm{S}_{k_{\mathbf{H}}})$ 的 a-数据集合 $a_{k_{\mathbf{H}}} := a_{\vartheta'_{k_{\mathbf{H}}}}$ 以及χ-数据集合 $\chi_{k_{\mathbf{H}}} := \chi_{\vartheta'_{k_{\mathbf{H}}}}$。如第 9.1 节所述，集合 $\Phi(\mathrm{H}_y,\mathrm{S}_{k_{\mathbf{H}}})$ 可视为 $\Phi(\mathrm{G}^\eta,\mathrm{S}_k^\natural)$ 的子集（根子系统），而后者又是$\Phi(\mathrm{G}^{\eta_0},\mathrm{S}_k^\natural)$的子集。

引理 11.12。 假设将 $\alpha_y \in \Phi(\mathbf{H}_y,\mathbf{S}_{k_{\mathbf{H}}})$ 与 $\alpha_\eta \in \Phi(\mathbf{G}^\eta,\mathbf{S}_k^\natural)$对应。令 $\alpha^\vee \in \Phi^\vee(\mathbf{G},\mathbf{S}_k)$ 为满足 $\alpha_y^\vee = p_*(\alpha^\vee)$ 和 $\alpha_\eta^\vee = N(\alpha^\vee)$的余根。则有 $l_\alpha \cdot a_{k_{\mathbf{H}},\,\alpha_y} = a_{k,\,\alpha_\eta}^{\mathrm{res}}$。

证明。 根据定义，我们有 $a_{k_{\mathbf{H}},\,\alpha_y} = \langle H_{\alpha_y},\ Y_{k_{\mathbf{H}}}^*\rangle$ 以及 $a_{k,\,\alpha_\eta}^{\mathrm{res}} = \langle H_{\alpha_\eta},\ X_k^*\rangle$。由于 $(Y_{k_{\mathbf{H}}}^*,\ X_k^*)$ 是一个 D-范数对（引理 11.8），且我们有 $H_{\alpha_y} = d\alpha_y^\vee(1)$，$H_{\alpha_\eta} = d\alpha_\eta^\vee(1)$，根据引理 $l_\alpha \cdot a_{k_{\mathbf{H}},\,\alpha_y} = a_{k,\,\alpha_\eta}^{\mathrm{res}}$ 9.1，可得等式。□

11.2.5. 规范化形式的扭曲特征标公式。下文中，对于每个 $j \in \tilde{\mathcal{J}}^{\mathbf{G}}_{G}$，我们固定一组元素 $\{g_k \in G \mid k \in \tilde{\mathcal{J}}^{G}_{G_\eta}(j)\}$，使得 $\{[g_k]^{-1} \circ j\}$ 是 $\tilde{\mathcal{J}}^{G}_{G_\eta}(j)$ 的一组（固定）代表元。（注意，根据引理 11.2，这组元素也代表 $\{g \in S_j\backslash G/G_\eta \mid {}^g\eta \in S_j\}$。）此外，我们固定扭曲空间 $\tilde{S}_j$ 中的一个拓扑半单元素 η_j。对于每个 $k \in \tilde{\mathcal{J}}^{G}_{G_\eta}(j)$，我们通过 $\eta_k := [g_k]^{-1}(\eta_j)$ 固定扭曲空间 $\tilde{S}_k$ 的一个基点 η_k。

对于任意的 $k \in \tilde{\mathcal{J}}_{\mathbf{G}^{G_\eta}}$，我们定义一个 $\epsilon^\star_{\vartheta_k}$ 的特征标 S_k，如下

$$\epsilon^\star_{\vartheta_k}(s) := \prod_{\substack{\ddot{\alpha}\in\ddot{\Xi}(\mathbf{G},\mathbf{S}_k)\\ \alpha_{\mathrm{res}}:\,\mathrm{ram}}} \epsilon_\alpha(s).$$

¨（回想一下，$\Xi(\mathbf{G}, \mathbf{S}_k)$ 是由 Σ-轨道构成的集合，这些轨道对应于由特征标 ϑ_k 所确定的海森堡商中出现的根。另请回想，任何此类根都必须是非对称的或非分歧的，因此特征标 ϵ_α 有定义；见第4.3节。）

命题 11.13。 设 $j \in \tilde{\mathcal{J}}_{\mathbf{G}G}$。对于每个 $k \in \tilde{\mathcal{J}}^{G}_{G_\eta}(j)$，记 $\eta = s_k \cdot \eta_k \in \tilde{S}_k$。那么

$$\Phi_{\tilde{\pi}_j}(\delta) = C_{\eta_j} \cdot (-1)^{|\ddot{\Xi}_{\eta_0,\mathrm{ur}}|} \cdot e(\mathbf{G}_{\eta_0}) \cdot e(\mathbf{G}_\eta) \cdot \varepsilon(\mathbf{T}_{\mathbf{G}^*_{\eta_0}}) \cdot \varepsilon(\mathbf{T}_{\mathbf{G}^*_\eta})^{-1}$$
$$\cdot \sum_{k\in\tilde{\mathcal{J}}^{G}_{G_\eta}(j)} \vartheta_k(s_k) \cdot \epsilon_{\mathbf{S}_k,\mathrm{ram}}(s_k) \cdot \epsilon^\star_{\vartheta_k}(s_k) \cdot \Delta_{\mathrm{II}}^{\mathbf{G}_{\eta_0}}[a^{\mathrm{res}}_k, \chi^{\mathrm{res}}_k](\eta_+) \cdot \hat{\iota}^{\mathbf{G}_\eta}_{X^*_k}\big(\log(\delta_{\geq r})\big),$$

其中 a^{res}_k 和 χ^{res}_k 分别是 a-数据和 χ-数据的集合，属于 $\Phi(\mathbf{G}^{\eta_0}, \mathbf{S}^\natural_k)$，见第 *11.2.4*节。

证明。由命题 4.13，我们有

$$\Phi_{\tilde{\pi}_j}(\delta) = C_{\eta_j} \cdot (-1)^{|\ddot{\Xi}_{\eta_0,\mathrm{ur}}|} \cdot e(\mathbf{G}_{\eta_0}) \cdot e(\mathbf{G}_\eta) \cdot \varepsilon(\mathbf{T}_{\mathbf{G}^*_{\eta_0}}) \cdot \varepsilon(\mathbf{T}_{\mathbf{G}^*_\eta})^{-1}$$
$$\sum_{\substack{g\in S_j\backslash G/G_\eta\\ {}^g\eta\in\tilde{S}_j}} \tilde{\epsilon}_\Xi(s_{j,g}) \cdot \vartheta'_j(s_{j,g}) \cdot \Delta_{\mathrm{II}}^{\mathbf{G}_{g\eta_0}}[a^\natural_{\vartheta'_j}, \chi^\natural_{\vartheta'_j}]({}^g\eta_+) \cdot \hat{\iota}^{\mathbf{G}_{g\eta}}_{X^*_j}(\log({}^g\delta_{\geq r})),$$

其中 $s_{j,g} \in S_j$ 是满足 ${}^g\eta = s_{j,g}\eta_j$ 的元素。回想一下，$\vartheta'_j = \epsilon_{\vartheta_j} \cdot \vartheta_j$（第 3.4 节）。这里需要注意，我们选取初始的正则超尖点表示包数据，使其 χ-数据等于 χ_{ϑ_j}，因此 ϑ'_j 中包含的 ζ 特征标是平凡的。由于 $\epsilon_{\vartheta_j} = \epsilon_{\vartheta_j}$，asym $\cdot\epsilon_{\vartheta_j}$，ur $\cdot\epsilon_{\mathbf{S}_j}$，ram，且 $\tilde{\epsilon}_\Xi$ 是所有满足 α_{res} 为非对称或非分歧的 $\alpha \in \Xi$ 对应的 ϵ_α's¨ 的乘积（见第 4.6 节），我们得到

$$\tilde{\epsilon}_\Xi(s_{j,g}) \cdot \vartheta'_j(s_{j,g}) = \epsilon_{\mathbf{S}_j,\mathrm{ram}}(s_{j,g}) \cdot \epsilon^\star_{\vartheta_j}(s_{j,g}) \cdot \vartheta_j(s_{j,g}).$$

根据我们对基点的选择，当 $g = g_k$ 时，我们有 $\eta_j = {}^g\eta_k$，因此 $s_{j,g} = {}^g s_k$。于是得到 $\vartheta_j(s_{j,g}) = \vartheta(j^{-1}(s_{j,g})) = \vartheta(j^{-1} \circ [g](s_k)) = \vartheta(k^{-1}(s_k)) = \vartheta_k(s_k)$。同理，我们有 $\epsilon_{\mathbf{S}_j,\mathrm{ram}}(s_{j,g}) = \epsilon_{\mathbf{S}_j,\mathrm{ram}}({}^g s_k) = \epsilon_{\mathbf{S}_k,\mathrm{ram}}(s_k)$，$\epsilon^\star_{\vartheta_j}(s_{j,g}) = \epsilon^\star_{\vartheta_j}({}^g s_k) = \epsilon^\star_{\vartheta_k}(s_k)$，且 $\hat{\iota}^{\mathbf{G}_{g\eta}}_{X^*_j}(\log({}^g\delta_{\geq r})) = \hat{\iota}^{\mathbf{G}_\eta}_{g^{-1}X^*_j}(\log(\delta_{\geq r})) = \hat{\iota}^{\mathbf{G}_\eta}_{X^*_k}(\log(\delta_{\geq r}))$。此外，注意到 $\vartheta'^\natural_j$ 和 $\vartheta^\natural_j$ 产生相同的 a-数据和 χ-数据（第 3.2 节），并利用引理 11.11，可得 $\Delta^{\mathbf{G}_{g\eta_0}}{}_{\mathrm{II}}[a^\natural_{\vartheta'_j}, \chi^\natural_{\vartheta'_j}]({}^g\eta_+) = \Delta^{\mathbf{G}_{\eta_0}}{}_{\mathrm{II}}[a^{\mathrm{res}}_k, \chi^{\mathrm{res}}_k](\eta_+)$。由此便得到所声称的公式。□

11.2.6. 第三因子 Δ_{III}：再探。接下来，我们将命题 10.7 改写成适用于本文目的的形式。设 $D = (\mathrm{B}^\flat,\mathrm{T}^\flat,\mathrm{B}^\diamondsuit,\mathrm{T}^\diamondsuit) \in \mathrm{D}(y,\eta)$，$j_{\mathbf{H}} \in {}^{\mathcal{J}}\mathrm{HH}_y$，且 $j \in \tilde{\mathcal{J}}\mathrm{GG}_\eta$ 满足 $\mathfrak{tran}(D, j_{\mathbf{H}}) = j$。因此，我们可以且将假设 $\mathrm{T}^\flat = \mathrm{S}_{j_{\mathbf{H}}}$ 和 $\mathrm{T}^\diamondsuit = \mathrm{S}_j$。令 $k \in \tilde{\mathcal{J}}^{\mathbf{G}_\eta}_{G_\eta}(j)$。注意，此时我们也有 $\mathrm{S}_k \cong \mathrm{S}_j$。结合 F-有理同态 $\xi_D\colon \mathrm{T}^\diamondsuit \to \mathrm{T}^\flat$，可得一个 F-有理同构 $\mathrm{S}_k \cong \mathrm{S}_j \to \mathrm{S}_{j_{\mathbf{H}}}$。

根据 [Kal19a，命题 525]，我们引入如下特征：

定义 11.14。设 $\zeta_{\mathrm{desc}}\colon S_k \to \mathbb{C}^\times$ 是由下式给出的特征：

$$\zeta_{\mathrm{desc}}(s) := \prod_{\substack{\ddot{\alpha}\in\ddot{\Phi}(\mathbf{G},\mathbf{S}_k)_{\mathrm{asym}} \\ \alpha_{\mathrm{res}}\colon \text{ramified}}} \epsilon_\alpha(s) \prod_{\substack{\ddot{\alpha}\in\dot{\Phi}(\mathbf{G},\mathbf{S}_k)_{\mathrm{ur}} \\ \alpha_{\mathrm{res}}\colon \text{ramified}}} \epsilon_\alpha(s).$$

我们的目的是证明以下结论：

命题 11.15。设 $(\bar\gamma,\bar\delta)$ 和 $(\bar\gamma',\bar\delta') \in \mathcal{D}$ 满足 $D \in \mathbf{D}(\bar\gamma,\bar\delta)$ 和 $D \in \mathbf{D}(\bar\gamma',\bar\delta')$。那么有

$$\Delta_{\mathrm{III}}[a_k^{\mathrm{res}},\chi_k^{\mathrm{res}}](\bar\gamma,\bar\delta;\bar\gamma',\bar\delta') = \frac{\vartheta_k(\bar\delta/\bar\delta')}{\vartheta_{j_{\mathbf{H}}}(\bar\gamma/\bar\gamma')} \cdot \zeta_{\mathrm{desc}}(\bar\delta/\bar\delta') \cdot \zeta_{\chi_j^{\mathrm{res}}/\chi_{j_{\mathbf{H}}},S_{j_{\mathbf{H}}}}(\bar\gamma/\bar\gamma').$$

回忆一下，我们在第 $a_{\mathbf{S}_k}$ 10.3节引入了一个 1-余循环，用来衡量${}^L j^1_{\chi_k^{\mathrm{res}}}$与 $\hat{}\xi \circ {}^L j^{\mathbf{H}}_{\chi_k^{\mathrm{res}}}$之间的差异。记 $a[{}^L j^{\mathbf{H}}_{\chi_k^{\mathrm{res}}}/{}^L j^1_{\chi_k^{\mathrm{res}}}]$ 为 $a_{\mathbf{S}_k}$。

另一方面，我们还有 L-嵌入 ${}^L j_{\chi_k}$：${}^L\mathbf{S}_k \hookrightarrow {}^L\mathbf{G}$ 以及 ${}^L j_{\chi_{\mathbf{H}}}$：${}^L\mathbf{S}_{j_{\mathbf{H}}} \hookrightarrow {}^L\mathbf{H}$，它们是按照第 11.2.4 节所述，对 χ-数据 χ_k 和$\chi_{j_{\mathbf{H}}}$ 应用 Langlands–Shelstad 构造得到的。我们定义一个 1-余循环

$$a[{}^L j_{\chi_{j_{\mathbf{H}}}}/{}^L j_{\chi_k}]\colon W_F \to \hat{\mathbf{T}}$$

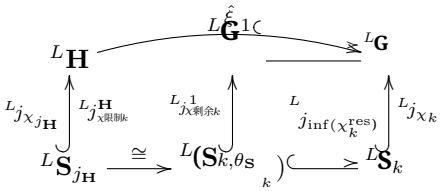
通过 $a[{}^L j_{\chi_{j_{\mathbf{H}}}}/{}^L j_{\chi_k}]\cdot {}^L j_{\chi_k} = \hat{}\xi \circ {}^L j_{\chi_{j_{\mathbf{H}}}}$。这里，目标上的 $\hat{}\mathbf{T}$ 的 Γ-作用是通过嵌入 $\mathbf{S}_k$，经由同构 $\mathbf{S}_k \cong \mathbf{T}$得到的作用 $\hat{}\hat{}\hat{}$。

此外，我们还引入另一个 L-嵌入 ${}^L j_{\inf(\chi_k^{\mathrm{res}})}$：${}^L\mathrm{S}_k \hookrightarrow {}^L\mathrm{G}$。为此，我们首先通过自然限制映射 $\Phi(\mathrm{G},\mathrm{S}_k) \twoheadrightarrow \Phi_{\mathrm{res}}(\mathrm{G},\mathrm{S}_k)$，将 $\Phi_{\mathrm{res}}(\mathrm{G},\mathrm{S}_k)$ 的 χ-数据集 χ_k^{res} 膨胀，定义 $\Phi(\mathrm{G},\mathrm{S}_k)$ 的 χ-数据集 $\inf(\chi_k^{\mathrm{res}})$（参见 [Kal19a，定义 5.14]），然后应用 Langlands–Shelstad 构造。

我们定义 1-余循环

- $a[{}^L j_{\text{无穷下确界}(\chi_{\text{限制}k})}/{}^L j_{\chi_k}]\colon W_F \to \hat{}\mathbf{T}$,
- $a[{}^L j^1_{\chi^{\text{限制}_k}_k}/{}^L j_{\text{限制}\,(\chi_{\text{限制}k})}]\colon W_F \to \hat{}\mathbf{T}$，以及
- $a[{}^L j_{\chi_{j_{\mathbf{H}}}}/{}^L j^{\mathbf{H}}{}_{\chi_{\text{余数}_k}}]\colon W_F \to \hat{}\mathbf{T}_{\mathbf{H}}$

以类似于 $a[{}^L j_{\chi_{j_{\mathbf{H}}}}/{}^L j_{\chi_k}]\colon W_F \to \hat{}\mathbf{T}$ 的方式。



引理 11.16。对于任意 $t \in S_k$，我们有

(1) $\langle t,\ a[{}^L j_{\chi_{j_{\mathbf{H}}}}/{}^L j_{\chi_k}]\rangle_{\mathrm{TN}} = \vartheta_k/\vartheta_{j_{\mathbf{H}}}(s)$, (2) $\langle t,\ a[{}^L j_{\mathrm{inf}(\chi_k^{\mathrm{res}})}/{}^L j_{\chi_k}]\rangle_{\mathrm{TN}} = \zeta_{\mathrm{desc}}(s)^{-1}$, (3) $\langle t,\ a[{}^L j^1_{\chi_k^{\mathrm{res}}}/{}^L j_{\mathrm{inf}(\chi_k^{\mathrm{res}})}]\rangle_{\mathrm{TN}} = 1$, (4) $\langle t,\ a[{}^L j_{\chi_{j_{\mathbf{H}}}}/{}^L j^{\mathbf{H}}_{\chi_k^{\mathrm{res}}}]\rangle_{\mathrm{TN}} = \zeta_{\chi_{j_{\mathbf{H}}}/\chi_k^{\mathrm{res}},\ S_{j_{\mathbf{H}}}}(s)$。

这里，在 *(1)* 和 *(4)* 中，t 也通过 $S_k \to S_{j_{\mathbf{H}}}$被视为 $S_{j_{\mathbf{H}}}$ 的一个元素。

证明。我们先考虑 (1)。回忆一下，我们有 ${}^L j_\chi \circ \phi_\vartheta = \hat{}\xi \circ {}^L j_{\chi_{\mathbf{H}}} \circ \phi_{\vartheta_{\mathbf{H}}}$ (参见第 6.5 节，尤其是 (8))。由于我们假设 $\chi = \chi_{\vartheta_j}$ 且 $\chi_{\mathbf{H}} = \chi_{\vartheta_{j_{\mathbf{H}}}}$ (参见第 11.2.1 节开头)，该恒等式可改写为 ${}^L j_{\chi_k} \circ \phi_{\vartheta_k} = \hat{}\xi \circ {}^L j_{\chi_{j_{\mathbf{H}}}} \circ \phi_{\vartheta_{j_{\mathbf{H}}}}$。这意味着 $\phi_{\vartheta_k} = a[{}^L j_{\chi_{j_{\mathbf{H}}}}/{}^L j_{\chi_k}] \cdot \phi_{\vartheta_{j_{\mathbf{H}}}}$。因此我们得到恒等式 (1)。

接下来考虑 (2)。注意，χ_k 的 χ-数据是最小分歧的，它由 $\mathrm{inf}(\chi_k^{\mathrm{res}})$ 的“最小化”得到（[Kal19a，定义 5.24]）。因此，所述恒等式直接由 [Kal19a，命题 5.25] 推出。（只需注意，$e(\alpha/\alpha_{\mathrm{res}})$”中的整数“ [Kal19a，命题 5.25] 全都等于 1，这可通过查看引理 9.2 和 9.3的证明来验证。）

回到朗兰兹–Shelstad 的构造，验证断言 (3) 是一项常规工作。

最后一个断言 (4) 也是特征定义的直接推论$\zeta_{\chi_{j_{\mathbf{H}}}/\chi_k^{\mathrm{res}},\ S_{j_{\mathbf{H}}}}$（参见 [Kal19b，命题 5.2 的证明中的第二段。7]）。□

命题 *11.15* 的证明。由命题10.7，可得

$$\Delta_{\mathrm{III}}[a_k^{\mathrm{res}}, \chi_k^{\mathrm{res}}](\bar\gamma, \bar\delta; \bar\gamma', \bar\delta') = \langle \bar\delta/\bar\delta', a[{}^L j^{\mathbf{H}}_{\chi_k^{\mathrm{res}}}/{}^L j^1_{\chi_k^{\mathrm{res}}}]\rangle_{\mathrm{TN}}.$$

注意到 $a[{}^L j_{\chi_{j_{\mathbf{H}}}}/{}^L j_{\chi_k}]$ 等于

$$a[{}^L j_{\chi_{j_{\mathbf{H}}}}/{}^L j^{\mathbf{H}}_{\chi_k^{\mathrm{res}}}] \cdot a[{}^L j^{\mathbf{H}}_{\chi_k^{\mathrm{res}}}/{}^L j^1_{\chi_k^{\mathrm{res}}}] \cdot a[{}^L j^1_{\chi_k^{\mathrm{res}}}/{}^L j_{\mathrm{inf}(\chi_k^{\mathrm{res}})}] \cdot a[{}^L j_{\mathrm{inf}(\chi_k^{\mathrm{res}})}/{}^L j_{\chi_k}].$$

因此，引理11.16 推出

$$\vartheta_k/\vartheta_{j_{\mathbf{H}}}(\bar\delta/\bar\delta') = \zeta_{\chi_{j_{\mathbf{H}}}/\chi_k^{\mathrm{res}}, S_{j_{\mathbf{H}}}}(\bar\delta/\bar\delta') \cdot \Delta_{\mathrm{III}}[a_k^{\mathrm{res}}, \chi_k^{\mathrm{res}}](\bar\gamma, \bar\delta; \bar\gamma', \bar\delta') \cdot \zeta_{\mathrm{desc}}(\bar\delta/\bar\delta')^{-1}.$$

由于 $\bar\delta/\bar\delta'$ 在映射 $S_k \to S_{j_{\mathbf{H}}}$ 下的像是 $\bar\gamma/\bar\gamma'$，因此得到该断言。（另请注意 $\zeta_{\chi_j^{\mathrm{res}}/\chi_{j_{\mathbf{H}}},\ S_{j_{\mathbf{H}}}} = \zeta^{-1}_{\chi_{j_{\mathbf{H}}}/\chi_k^{\mathrm{res}},\ S_{j_{\mathbf{H}}}}$。）□

11.3. **谱转移因子的出现**。我们首先改写（17）的端oscopic侧。令 $\Phi^{\mathbf{H},\ \mathrm{st}}_{\phi} := \sum_{\pi_{\mathbf{H}} \in \Pi^{\mathbf{H}}_{\phi_{\mathbf{H}}}} \Phi_{\pi_{\mathbf{H}}}$。根据引理 11.5，我们有

$$(18)\quad \sum_{\gamma \in H_{\mathrm{srs}}/\sim_{\mathbf{H}}} \mathring{\Delta}(\gamma, \delta)\Phi^{\mathbf{H},\mathrm{st}}_{\phi}(\gamma) = \sum_{y \in \mathfrak{H}_\eta} \frac{1}{|\pi_0(\mathbf{H}^y)(F)|} \sum_{z \in H_y[\delta]_r/\sim_{\mathbf{H}_y}} \mathring{\Delta}(yz, \delta)\Phi^{\mathbf{H},\mathrm{st}}_{\phi}(yz).$$

以下记 $X := \log(\delta_{\geq r}) \in \mathfrak{g}_\eta$。令 $z \in H_y[\delta]_r$ 并记 $Y := \log(z) \in \mathfrak{h}_y$。根据引理 11.6，存在唯一的 $D \in \mathbb{D}(y, \eta)$，使得（$Y$，$X$）是一个 D-范数对。因此，根据命题 10.12，我们有

$$\mathring{\Delta}^D(\bar Y, X_{\mathrm{sc}}) = \begin{cases} \mathring{\Delta}(yz, \delta) \cdot \Delta_{\mathrm{IV}}(y, \eta) & \text{for a unique } D \in \mathbb{D}(y, \eta), \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

因此，结合引理 11.7，我们得到（18）的右端等于

$$(19)\quad \sum_{y \in \mathfrak{H}_\eta} \frac{1}{|\pi_0(\mathbf{H}^y)(F)|} \sum_{D \in \mathbb{D}(y,\eta)} \sum_{Y \overset{D}{\leftrightarrow} X/\sim_{\mathbf{H}_y}} \mathring{\Delta}^D(\bar Y, X_{\mathrm{sc}})\Delta_{\mathrm{IV}}(y, \eta)^{-1}\Phi^{\mathbf{H},\mathrm{st}}_{\phi}(yz).$$

现在我们使用 Kaletha 关于环面超尖点表示的特征公式的规范化稳定版本（[Kal19b，引理 6.3。1]）：

$$\Phi_{\phi}^{\mathbf{H},\mathrm{st}}(yz)=\varepsilon(\mathbf{T}_{\mathbf{H}})\varepsilon(\mathbf{T}_{\mathbf{H}_y})^{-1}\sum_{j_{\mathbf{H}}\in\mathcal{J}_{\mathbf{H}_y}^{\mathbf{H}}}\Delta_{\mathrm{II}}^{\mathbf{H}}[a_{j_{\mathbf{H}}},\chi_{j_{\mathbf{H}}}](y)\vartheta_{j_{\mathbf{H}}}(y)\sum_{k_{\mathbf{H}}\in\mathcal{J}_{H_y}^{\mathbf{H}_y}(j_{\mathbf{H}})}\hat{\iota}_{Y_{k_{\mathbf{H}}}^*}^{\mathbf{H}_y}(Y),$$

其中 $a_{j_{\mathbf{H}}}:=a_{\vartheta_{j_{\mathbf{H}}}}$，$\chi_{j_{\mathbf{H}}}:=\chi_{\vartheta_{j_{\mathbf{H}}}}$（参见第11.2.4节）。注意，与 [Kal19b，引理 6.3 相比，上述公式有所简化。1] 这是因为现在$\mathbf{H}^y$是准分裂的，并且$\langle\mathrm{inv}(j_{\mathbf{H}},\mathfrak{w}_{\mathbf{H}},k_{\mathbf{H}})1\rangle=1$，因为群$S_{\phi_{\mathbf{H}}}^{+}$是阿贝尔的。因此，19式等于

$$\begin{aligned}(20)\quad&\sum_{y\in\mathfrak{H}_\eta}\frac{\varepsilon(\mathbf{T}_{\mathbf{H}})\varepsilon(\mathbf{T}_{\mathbf{H}_y})^{-1}}{|\pi_0(\mathbf{H}^y)(F)|}\sum_{D\in\mathbb{D}(y,\eta)}\sum_{j_{\mathbf{H}}\in\mathcal{J}_{\mathbf{H}_y}^{\mathbf{H}}}\Delta_{\mathrm{IV}}(y,\eta)^{-1}\\&\cdot\Delta_{\mathrm{II}}^{\mathbf{H}}[a_{j_{\mathbf{H}}},\chi_{j_{\mathbf{H}}}](y)\vartheta_{j_{\mathbf{H}}}(y)\sum_{Y\overset{D}{\leftrightarrow}X/\sim_{\mathbf{H}_y}}\mathring{\Delta}^{D}(\bar{Y},X_{\mathrm{sc}})\sum_{k_{\mathbf{H}}\in\mathcal{J}_{H_y}^{\mathbf{H}_y}(j_{\mathbf{H}})}\hat{\iota}_{Y_{k_{\mathbf{H}}}^*}^{\mathbf{H}_y}(Y).\end{aligned}$$

根据命题 7.11，前三个带有 $1/|\pi_0(\mathbf{H}^y)(F)|$ 的指标集被合并为一个指标集 $\tilde{\mathcal{J}}_{\mathbf{G}\mathbf{G}^{\eta}}$。因此，我们可以将上述和重写为

$$\begin{aligned}(21)\quad&\sum_{j\in\tilde{\mathcal{J}}_{\mathbf{G}_\eta}^{\mathbf{G}}}\varepsilon(\mathbf{T}_{\mathbf{H}})\varepsilon(\mathbf{T}_{\mathbf{H}_y})^{-1}\Delta_{\mathrm{IV}}(y,\eta)^{-1}\Delta_{\mathrm{II}}^{\mathbf{H}}[a_{j_{\mathbf{H}}},\chi_{j_{\mathbf{H}}}](y)\vartheta_{j_{\mathbf{H}}}(y)\\&\cdot\sum_{Y\overset{D}{\leftrightarrow}X/\sim_{\mathbf{H}_y}}\mathring{\Delta}^{D}(\bar{Y},X_{\mathrm{sc}})\sum_{k_{\mathbf{H}}\in\mathcal{J}_{H_y}^{\mathbf{H}_y}(j_{\mathbf{H}})}\hat{\iota}_{Y_{k_{\mathbf{H}}}^*}^{\mathbf{H}_y}(Y).\end{aligned}$$

这里，对于每个 $j\in\tilde{\mathcal{J}}_{\mathbf{G}\mathbf{G}^{\eta}}$，我们令 $y\in\mathfrak{H}_\eta$和$j_{\mathbf{H}}\in\mathcal{J}_{\mathbf{H}\mathbf{H}^y}$表示由命题7.11所确定的唯一（相差$\pi_0(\mathbf{H}^y)(F)$-作用）元素。通过应用扭曲端oscopy的李代数转移（命题11.9）

$$\sum_{Y\overset{D}{\leftrightarrow}X/\sim_{\mathbf{H}_y}}\mathring{\Delta}^{D}(\bar{Y},X_{\mathrm{sc}})\sum_{k_{\mathbf{H}}\in\mathcal{J}_{H_y}^{\mathbf{H}_y}(j_{\mathbf{H}})}D_{Y_{k_{\mathbf{H}}}^*}^{\mathbf{H}_y}(Y)=\sum_{k\in\tilde{\mathcal{J}}_{G_\eta}^{\mathbf{G}_\eta}(j)}\mathring{\Delta}^{D}(\bar{Y}_{j_{\mathbf{H}}}^*,X_{k,\mathrm{sc}}^*)D_{X_k^*}^{\mathbf{G}_\eta}(X)$$

对于（21）中的最后一个双重求和，我们看到（21）等于

$$\begin{aligned}(22)\quad&\sum_{j\in\tilde{\mathcal{J}}_{\mathbf{G}_\eta}^{\mathbf{G}}}\varepsilon(\mathbf{T}_{\mathbf{H}})\varepsilon(\mathbf{T}_{\mathbf{H}_y})^{-1}\Delta_{\mathrm{IV}}(y,\eta)^{-1}\Delta_{\mathrm{II}}^{\mathbf{H}}[a_{j_{\mathbf{H}}},\chi_{j_{\mathbf{H}}}](y)\vartheta_{j_{\mathbf{H}}}(y)\\&\cdot\gamma(\mathfrak{g}_\eta)\gamma(\mathfrak{h}_y)^{-1}\sum_{k\in\mathcal{J}_{G_\eta}^{\mathbf{G}_\eta}(j)}\mathring{\Delta}^{D}(\bar{Y}_{j_{\mathbf{H}}}^*,X_{k,\mathrm{sc}}^*)\hat{\iota}_{X_k^*}^{\mathbf{G}_\eta}(X)\end{aligned}$$

（回想一下，$D_{Y_k^*\mathbf{H}}^{\mathbf{H}_y\mathbf{H}}(Y)=\gamma(\mathfrak{h}_y)\hat{\iota}_{Y_k^*\mathbf{H}}^{\mathbf{H}_y\mathbf{H}}(Y)$ 和 $D_{X_k^*}^{\mathbf{G}_\eta}(X)=\gamma(\mathfrak{g}_\eta)\hat{\iota}_{X_k^*}^{\mathbf{G}_\eta}(X)$）。再次利用命题10.12，这等于

$$\begin{aligned}(23)\quad&\sum_{j\in\tilde{\mathcal{J}}_{\mathbf{G}_\eta}^{\mathbf{G}}}\varepsilon(\mathbf{T}_{\mathbf{H}})\varepsilon(\mathbf{T}_{\mathbf{H}_y})^{-1}\Delta_{\mathrm{II}}^{\mathbf{H}}[a_{j_{\mathbf{H}}},\chi_{j_{\mathbf{H}}}](y)\vartheta_{j_{\mathbf{H}}}(y)\\&\cdot\gamma(\mathfrak{g}_\eta)\gamma(\mathfrak{h}_y)^{-1}\sum_{k\in\mathcal{J}_{G_\eta}^{\mathbf{G}_\eta}(j)}\mathring{\Delta}\big(y\exp(Y_{j_{\mathbf{H}}}^*),\eta\exp(X_k^*)\big)\hat{\iota}_{X_k^*}^{\mathbf{G}_\eta}(X).\end{aligned}$$

根据定义， $\mathring{\Delta}$ 由以下各项的乘积给出： $\varepsilon(\mathbf{T}_{\mathbf{G}_\theta})\varepsilon(\mathbf{T}_{\mathbf{H}})^{-1}$， Δ_{I}， Δ_{II}和 Δ_{III}。下文中，我们选取 a-数据 a_k^{res}和 χ-数据 χ_k^{res}，如第 11.2.4 节所述，以计算这些因子。总之，**H**-侧（23）等于

$$(24)\quad \sum_{j\in\tilde{\mathcal{J}}^{\mathbf{G}}_{\mathbf{G}_\eta}} \varepsilon(\mathbf{T}_{\mathbf{G}_\theta})\varepsilon(\mathbf{T}_{\mathbf{H}_y})^{-1}\cdot\Delta_{\mathrm{II}}^{\mathbf{H}}[a_{j_{\mathbf{H}}},\chi_{j_{\mathbf{H}}}](y)\vartheta_{j_{\mathbf{H}}}(y)\gamma(\mathfrak{g}_\eta)\gamma(\mathfrak{h}_y)^{-1}$$
$$\cdot\sum_{k\in\mathcal{J}^{\mathbf{G}_\eta}_{G_\eta}(j)}\Delta_{\mathrm{I,II,III}}[a_k^{\mathrm{res}},\chi_k^{\mathrm{res}}]\big(y\exp(Y^*_{j_{\mathbf{H}}}),\eta\exp(X_k^*)\big)\hat{\imath}^{\mathbf{G}_\eta}_{X_k^*}(X).$$

现在只需将上述结果与式（17）的 **G** 侧进行比较。令 $\{\Delta^{\mathrm{spec}}_{\phi,j}\}_{j\in\mathcal{J}^{\mathbf{G}}_G}$ 为任意一族常数，使得 $\Delta^{\mathrm{spec}}_{\phi,\,j}=0$ 对任意 $j\in\mathcal{J}_{\mathbf{G}_G}\smallsetminus\tilde{\mathcal{J}}^{\mathbf{G}}_G$ 均成立。根据命题 11.13，$\sum_{j\in\tilde{\mathcal{J}}^{\mathbf{G}}_G}\Delta^{\mathrm{spec}}_{\phi,\,j}\Phi_{\tilde{\pi}_j}(\delta)$ 等于

$$(25)\quad \sum_{j\in\tilde{\mathcal{J}}^{\mathbf{G}}_G}\Delta^{\mathrm{spec}}_{\phi,j}C_{\underline{\eta}_j}(-1)^{|\ddot{\Xi}_{\eta_0,\mathrm{ur}}|}e(\mathbf{G}_{\eta_0})e(\mathbf{G}_\eta)\varepsilon(\mathbf{T}_{\mathbf{G}^*_{\eta_0}})\varepsilon(\mathbf{T}_{\mathbf{G}^*_\eta})^{-1}$$
$$\cdot\sum_{k\in\tilde{\mathcal{J}}^{G}_{G_\eta}(j)}\vartheta_k(s_k)\cdot\epsilon_{\mathbf{S}_k,\mathrm{ram}}(s_k)\cdot\epsilon^\star_{\vartheta_k}(s_k)\cdot\Delta_{\mathrm{II}}^{\mathbf{G}_{\eta_0}}[a_k^{\mathrm{res}},\chi_k^{\mathrm{res}}](\eta_+)\cdot\hat{\imath}^{\mathbf{G}_\eta}_{X_k^*}(X).$$

令 $\bar{\Delta}^{\mathrm{spec}}_{\phi\,k}:=\Delta^{\mathrm{spec}}_{\phi,\,j}C_{\underline{\eta}_j}$ 对任意 $k\in\tilde{\mathcal{J}}^{G}_{G_\eta}(j)$，（25）等于

$$(26)\quad \sum_{j\in\tilde{\mathcal{J}}^{\mathbf{G}}_G}\sum_{k\in\tilde{\mathcal{J}}^{G}_{G_\eta}(j)}\bar{\Delta}^{\mathrm{spec}}_{\phi,k}\cdot(-1)^{|\ddot{\Xi}_{\eta_0,\mathrm{ur}}|}\cdot e(\mathbf{G}_{\eta_0})e(\mathbf{G}_\eta)\cdot\varepsilon(\mathbf{T}_{\mathbf{G}^*_{\eta_0}})\varepsilon(\mathbf{T}_{\mathbf{G}^*_\eta})^{-1}$$
$$\cdot\vartheta_k(s_k)\cdot\epsilon_{\mathbf{S}_k,\mathrm{ram}}(s_k)\cdot\epsilon^\star_{\vartheta_k}(s_k)\cdot\Delta_{\mathrm{II}}^{\mathbf{G}_{\eta_0}}[a_k^{\mathrm{res}},\chi_k^{\mathrm{res}}](\eta_+)\cdot\hat{\imath}^{\mathbf{G}_\eta}_{X_k^*}(X).$$

因此，只需证明对于每个 $j\in\tilde{\mathcal{J}}_{\mathbf{G}\mathbf{G}_\eta}$，每个$k\in\tilde{\mathcal{J}}^{\mathbf{G}_\eta}_{G_\eta}(j)$对**H**侧（24）的贡献

$$(27)\quad \varepsilon(\mathbf{T}_{\mathbf{G}_\theta})\varepsilon(\mathbf{T}_{\mathbf{H}_y})^{-1}\cdot\Delta_{\mathrm{II}}^{\mathbf{H}}[a_{j_{\mathbf{H}}},\chi_{j_{\mathbf{H}}}](y)\vartheta_{j_{\mathbf{H}}}(y)\cdot\gamma(\mathfrak{g}_\eta)\gamma(\mathfrak{h}_y)^{-1}$$
$$\cdot\Delta_{\mathrm{I,II,III}}[a_k^{\mathrm{res}},\chi_k^{\mathrm{res}}]\big(y\exp(Y^*_{j_{\mathbf{H}}}),\eta\exp(X_k^*)\big)$$

（除轨道积分$_{X_k^*}^{\mathbf{G}_\eta}$（$X$）的傅里叶变换 $\hat{}$ 外）等于其对**G**侧（26）的贡献

$$(28)\quad \bar{\Delta}^{\mathrm{spec}}_{\phi,k}\cdot(-1)^{|\dot{\Xi}_{\eta_0,\mathrm{ur}}|}\cdot e(\mathbf{G}_{\eta_0})e(\mathbf{G}_\eta)\cdot\varepsilon(\mathbf{T}_{\mathbf{G}^*_{\eta_0}})\varepsilon(\mathbf{T}_{\mathbf{G}^*_\eta})^{-1}$$
$$\cdot\vartheta_k(s_k)\cdot\epsilon_{\mathbf{S}_k,\mathrm{ram}}(s_k)\cdot\epsilon^\star_{\vartheta_k}(s_k)\cdot\Delta_{\mathrm{II}}^{\mathbf{G}_{\eta_0}}[a_k^{\mathrm{res}},\chi_k^{\mathrm{res}}](\eta_+).$$

因此，我们只需定义 $\Delta^{\mathrm{spec}}_{\phi\,k}$，，或者等价地 $\bar{\Delta}^{\mathrm{spec}}_{\phi\,k}$，，使得（27）等于（28）：

$$(29)\quad \bar{\Delta}^{\mathrm{spec}}_{\phi,k}:=\frac{\varepsilon(\mathbf{T}_{\mathbf{G}^*_\eta})\cdot\varepsilon(\mathbf{T}_{\mathbf{H}_y})^{-1}\cdot\gamma(\mathfrak{g}_\eta)\gamma(\mathfrak{h}_y)^{-1}}{e(\mathbf{G}_\eta)}\cdot\frac{\Delta_{\mathrm{II}}^{\mathbf{H}}[a_{j_{\mathbf{H}}},\chi_{j_{\mathbf{H}}}](y)}{\Delta_{\mathrm{II}}^{\mathbf{G}_{\eta_0}}[a_k^{\mathrm{res}},\chi_k^{\mathrm{res}}](\eta_+)}$$
$$\cdot\frac{\varepsilon(\mathbf{T}_{\mathbf{G}_\theta})\cdot\varepsilon(\mathbf{T}_{\mathbf{G}^*_{\eta_0}})^{-1}}{e(\mathbf{G}_{\eta_0})\cdot(-1)^{|\dot{\Xi}_{\eta_0,\mathrm{ur}}|}\cdot\epsilon_{\mathbf{S}_k,\mathrm{ram}}(s_k)\cdot\epsilon^\star_{\vartheta_k}(s_k)}$$
$$\cdot\frac{\vartheta_{j_{\mathbf{H}}}(y)}{\vartheta_k(s_k)}\cdot\Delta_{\mathrm{I,II,III}}[a_k^{\mathrm{res}},\chi_k^{\mathrm{res}}]\big(y\exp(Y^*_{j_{\mathbf{H}}}),\eta\exp(X_k^*)\big).$$

那么，问题在于这个量先验地严重依赖于 $k \in \tilde{\mathcal{J}}_{G_\eta}^{\mathbf{G}_\eta}(j)$、$\eta$ 和 y。现在我们要做的是检验 $\Delta_{\phi\, k}^{\mathrm{spec}}$，的定义良好性；换言之，

(1) $\bar{\Delta}_{\phi\, k}^{\mathrm{spec}}$，对 $k \in \tilde{\mathcal{J}}_{G_\eta}^{G}(j)$ 为常数；(2) $\bar{\Delta}_{\phi\, k}^{\mathrm{spec}}$，与 η 和 y 无关。我们先回顾 Kaletha–Kottwitz 的下述公式：

命题 11.17 ([Kal15，引理 4.8，定理 4.10])**.** 设 $\mathbf{J}$ 是定义在 F 上的连通约化群，且 $\mathbf{S}_\mathbf{J}$ 是一个 F-有理极大环面，包含于 $\mathbf{J}$中。我们固定一个 J-不变对称非退化双线性形式 $B_{\mathfrak{j}}$，定义在 $\mathfrak{j}$上。则有

$$\varepsilon(\mathbf{S}_\mathbf{J})\varepsilon(\mathbf{T}_{\mathbf{J}^*})^{-1} = e(\mathbf{J})\gamma(\mathfrak{j}) \prod_{\alpha \in \dot{\Phi}(\mathbf{J},\mathbf{S}_\mathbf{J})_{\mathrm{sym}}} \kappa_\alpha(B_{\mathfrak{j},\alpha})^{-1},$$

其中 $\mathbf{T}_{\mathbf{J}^*}$ 表示$\mathbf{J}$ 的准分裂内形式中的一个最小 *Levi* 子群，且$B_{\mathfrak{j},\,\alpha} := B_{\mathfrak{j}}(X_\alpha, Y_\alpha) \in F_{\pm\alpha}^{\times}$对满足 $[X_\alpha, Y_\alpha] = H_\alpha(:= d\alpha^\vee(1))$的任意元素 $X_\alpha \in \mathfrak{j}_\alpha(F_\alpha)$和 $Y_\alpha \in \mathfrak{j}_{-\alpha}(F_\alpha)$均成立。

引理 11.18. 我们有

$$\frac{\varepsilon(\mathbf{T}_{\mathbf{G}_\eta^*}) \cdot \varepsilon(\mathbf{T}_{\mathbf{H}_y})^{-1} \cdot \gamma(\mathfrak{g}_\eta)\gamma(\mathfrak{h}_y)^{-1}}{e(\mathbf{G}_\eta)} = \frac{\Delta_{\mathrm{II}}^{\mathbf{H}_y}[a_{j_\mathbf{H}}, \chi_{j_\mathbf{H}}](\exp(Y_{j_\mathbf{H}}^*))}{\Delta_{\mathrm{II}}^{\mathbf{G}_\eta}[a_k^{\mathrm{res}}, \chi_k^{\mathrm{res}}](\exp(X_k^*))}.$$

证明。 由命题 11.17，可得

$$\varepsilon(\mathbf{S}_k^\natural) \cdot \varepsilon(\mathbf{T}_{\mathbf{G}_\eta^*})^{-1} = e(\mathbf{G}_\eta)\gamma(\mathfrak{g}_\eta) \prod_{\alpha_\eta \in \dot{\Phi}(\mathbf{G}_\eta,\mathbf{S}_k^\natural)_{\mathrm{sym}}} \kappa_{\alpha_\eta}(B_{\mathfrak{g}_\eta,\alpha_\eta})^{-1},$$

$$\varepsilon(\mathbf{S}_{j_\mathbf{H}}) \cdot \varepsilon(\mathbf{T}_{\mathbf{H}_y})^{-1} = \gamma(\mathfrak{h}_y) \prod_{\alpha_y \in \dot{\Phi}(\mathbf{H}_y,\mathbf{S}_{j_\mathbf{H}})_{\mathrm{sym}}} \kappa_{\alpha_y}(B_{\mathfrak{h}_y,\alpha_y})^{-1}.$$

（注意，由于$\mathbf{H}_y$ 是准分裂的，故 $e(\mathbf{H}_y) = 1$。）因此，注意到 $X^*(\mathbf{S}_{j_\mathbf{H}})_{\mathbb{C}} \cong X^*(\mathbf{S}_k^\natural)_{\mathbb{C}}$，断言的左边等于

$$\prod_{\alpha_\eta \in \dot{\Phi}(\mathbf{G}_\eta,\mathbf{S}_k^\natural)_{\mathrm{sym}}} \kappa_{\alpha_\eta}(B_{\mathfrak{g}_\eta,\alpha_\eta}) \prod_{\alpha_y \in \dot{\Phi}(\mathbf{H}_y,\mathbf{S}_{j_\mathbf{H}})_{\mathrm{sym}}} \kappa_{\alpha_y}(B_{\mathfrak{h}_y,\alpha_y})^{-1}. \tag{30}$$

这可以用与 [Kal19b，定理 6.3 的证明4] 最后一段相同的论证计算如下。对于任意 $\alpha_\eta \in \Phi(\mathbf{G}_\eta,\mathbf{S}_k^\natural)_{\mathrm{sym}}$，有

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\alpha_\eta(\exp(p^{2m}X_k^*)) - 1}{p^{2m}} = d\alpha_\eta(X_k^*),$$

其中，$X_k^* \in \mathfrak{g}_\eta^*$ 通过 $\mathfrak{g}_\eta$上的非退化双线性形式$B_{\mathfrak{g}_\eta}$ 被视为 $\mathfrak{g}_\eta$ 的一个元素。注意到 $B_{\mathfrak{g}_\eta}$ 是不变双线性形式，我们有

$$\langle H_{\alpha_\eta}, X_k^* \rangle = B_{\mathfrak{g}_\eta}(X_k^*, H_{\alpha_\eta}) = B_{\mathfrak{g}_\eta}(X_k^*, [X_{\alpha_\eta}, Y_{\alpha_\eta}]) = B_{\mathfrak{g}_\eta}([X_k^*, X_{\alpha_\eta}], Y_{\alpha_\eta}).$$

由于有 $[X_k^*, X_{\alpha_\eta}] = d\alpha_\eta(X_k^*)X_{\alpha_\eta}$，可得 $\langle H_{\alpha_\eta},\ X_k^* \rangle = d\alpha_\eta(X_k^*) \cdot B_{\mathfrak{g}_\eta,\,\alpha_\eta}$。因此，由于有 $a_{k,\,\alpha_\eta}^{\mathrm{res}} = \langle H_{\alpha_\eta},\ X_k^* \rangle$，可得

$$\chi_{k,\alpha_\eta}^{\mathrm{res}}\left(\frac{\alpha_\eta(\exp(X_k^*)) - 1}{a_{k,\alpha_\eta}^{\mathrm{res}}}\right) = \chi_{k,\alpha_\eta}^{\mathrm{res}}\left(\frac{\alpha_\eta(\exp(p^{2m}X_k^*)) - 1}{a_{k,\alpha_\eta}^{\mathrm{res}}}\right) = \kappa_{\alpha_\eta}(B_{\mathfrak{g}_\eta,\alpha_\eta})^{-1},$$

其中在第一个等式中，我们用到了 χ_k^{res} 是最小分歧的。

类似地，对于任意 $\alpha_y \in \Phi(\mathbf{S}_{\mathbf{H}}, \mathbf{H}y)_{\mathrm{sym}}$，我们有

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\alpha_y(\exp(p^{2m}Y^*_{j_{\mathbf{H}}}))-1}{p^{2m}} = d\alpha_y(Y^*_{j_{\mathbf{H}}}) = \langle H_{\alpha_y}, Y^*_{j_{\mathbf{H}}}\rangle \cdot B^{-1}_{\mathfrak{h}_y,\alpha_y}.$$

由于有$a_{j_{\mathbf{H}},\ \alpha_y} = \langle H_{\alpha_y},\ Y^*_{j_{\mathbf{H}}}\rangle$，我们得到

$$\chi_{j_{\mathbf{H}},\alpha_y}\left(\frac{\alpha_y(\exp(Y^*_{j_{\mathbf{H}}}))-1}{a_{j_{\mathbf{H}},\alpha_y}}\right) = \chi_{j_{\mathbf{H}},\alpha_y}\left(\frac{\alpha_y(\exp(p^{2m}Y^*_{j_{\mathbf{H}}}))-1}{a_{j_{\mathbf{H}},\alpha_y}}\right) = \kappa_{\alpha_y}(B_{\mathfrak{h}_y,\alpha_y})^{-1}.$$

因此我们看到，30由断言右侧所示的 $\Delta^{\mathbf{H}_y}{}_{\mathrm{II}}\ \ [a_{j_{\mathbf{H}}}, \chi_{j_{\mathbf{H}}}](\exp(Y^*_{j_{\mathbf{H}}}))$与$\Delta^{\mathbf{G}_\eta}{}_{\mathrm{II}}\ \ [a^{\mathrm{res}}_k, \chi^{\mathrm{res}}_k](\exp(X^*_k))$之比给出。□

由引理11.18 以及第二类转移因子的下降性质（在扭曲情形和非扭曲情形下分别见引理10.3 和 [Kal19b，引理 4.6。7]），我们看到，29式的定义公式$\bar{\Delta}^{\mathrm{spec}}_{\phi\ k}$，等于

$$\begin{aligned}(31)\quad \Delta^{\tilde{\mathbf{G}}}_{\mathrm{II}}[a^{\mathrm{res}}_k, \chi^{\mathrm{res}}_k](\eta_0)\cdot\chi^{\mathrm{res}}_k(\eta_0)\cdot\frac{\Delta^{\mathbf{H}}_{\mathrm{II}}[a_{j_{\mathbf{H}}}, \chi_{j_{\mathbf{H}}}](y\exp(Y^*_{j_{\mathbf{H}}}))}{\Delta^{\mathbf{H}}_{\mathrm{II}}[a^{\mathrm{res}}_k, \chi^{\mathrm{res}}_k](y\exp(Y^*_{j_{\mathbf{H}}}))}\\ \cdot\frac{\varepsilon(\mathbf{T}_{\mathbf{G}_\theta})\cdot\varepsilon(\mathbf{T}_{\mathbf{G}^*_{\eta_0}})^{-1}}{e(\mathbf{G}_{\eta_0})\cdot(-1)^{|\dot{\Xi}_{\eta_0,\mathrm{ur}}|}\cdot\epsilon_{\mathbf{S}_k,\mathrm{ram}}(s_k)\cdot\epsilon^\star_{\vartheta_k}(s_k)}\\ \cdot\frac{\vartheta_{j_{\mathbf{H}}}(y)}{\vartheta_k(s_k)}\cdot\Delta_{\mathrm{I,III}}[a^{\mathrm{res}}_k, \chi^{\mathrm{res}}_k]\big(y\exp(Y^*_{j_{\mathbf{H}}}), \eta\exp(X^*_k)\big),\end{aligned}$$

其中 $\chi^{\mathrm{res}}_k(\eta_0)$如引理10.3中所述:

$$\chi^{\mathrm{res}}_k(\eta_0) := \prod_{\alpha_{\mathrm{res}}\in\dot{\Phi}(\mathbf{G}_{\eta_0},\mathbf{S}^\natural_k)} \chi^{\mathrm{res}}_{k,\alpha_{\mathrm{res}}}(l_\alpha).$$

由引理 $\chi^{\mathrm{res}}_k(\eta_0)$与 η_0 无关，见引理10.4，以下记 $\chi^{\mathrm{res}}_k(\mathbf{S}^\natural_k)$ $\chi^{\mathrm{res}}_k(\eta_0$。

˜引理 11.19. </style}量(η_0) </style}由下式给出

$$\lambda^{\mathrm{res}}_{k,\mathrm{ur}}\cdot(-1)^{r^{\mathrm{res}}_{k,\mathrm{ur}}+|\dot{\Xi}_{\eta_0,\mathrm{ur}}|}\cdot\prod_{\alpha_{\mathrm{res}}\in\dot{\Phi}(\mathbf{G}_{\eta_0},\mathbf{S}^\natural_k)_{\mathrm{ur}}} f_{(\mathbf{G}_{\eta_0},\mathbf{S}^\natural_k)}(\alpha_{\mathrm{res}})\cdot\prod_{\substack{\alpha_{\mathrm{res}}\in\dot{\Phi}_{\mathrm{res}}(\mathbf{G},\mathbf{S}_k)_{\mathrm{sym}}\\ N(\alpha)(\nu_0)\neq 1}}\lambda_{\alpha_{\mathrm{res}}},$$

其中我们令 $r^{\mathrm{res}}_{k\ ,\mathrm{ur}} := \sum_{\alpha_{\mathrm{res}}\in\dot{\Phi}_{\mathrm{res}}(\mathbf{G},\mathbf{S}_k)_{\mathrm{ur}}} e_{\alpha_{\mathrm{res}}} r$，以及 $\lambda^{\mathrm{res}}_{k\ ,\mathrm{ur}} = \prod_{\substack{\alpha_{\mathrm{res}}\in\dot{\Phi}_{\mathrm{res}}(\mathbf{G},\mathbf{S}_k)\\ N(\alpha)(\nu_0)\neq 1}}$ $_{\mathrm{ur}}\lambda_{\alpha_{\mathrm{res}}}$。证明。根据定义，我们有

$$\Delta^{\tilde{\mathbf{G}}}_{\mathrm{II}}[a^{\mathrm{res}}_k, \chi^{\mathrm{res}}_k](\eta_0) = \prod_{\substack{\dot{\alpha}_{\mathrm{res}}\in\dot{\Phi}_{\mathrm{res}}(\mathbf{G},\mathbf{S}_k)\\ N(\alpha)(\nu_0)\neq 1}} \chi^{\mathrm{res}}_{k,\alpha_{\mathrm{res}}}\left(\frac{N(\alpha)(\nu_0)-1}{a^{\mathrm{res}}_{k,\alpha_{\mathrm{res}}}}\right).$$

由于 $\nu_0\theta$ 是拓扑半单的，$N(\alpha)(\nu_0)-1$ 的赋值在$N(\alpha)(\nu_0)\neq 1$时为零。因此，对于任意满足 $\alpha_{\mathrm{res}}\in\Phi_{\mathrm{res}}(\mathbf{G}, \mathbf{S}_k)$ 的 $N(\alpha)(\nu_0)\neq 1$，我们可以如下计算各因子（参见 [Kal19b，引理 4.7。1]）：

当 α_{res} 为非对称时： 由于 $\chi^{\mathrm{res}}_{k\ ,\alpha_{\mathrm{res}}}$ 是平凡特征
在这种情况下，$F^\times_{\alpha_{\mathrm{res}}}$ 我们有

$$\chi^{\mathrm{res}}_{k,\alpha_{\mathrm{res}}}\left(\frac{N(\alpha)(\nu_0)-1}{a^{\mathrm{res}}_{k,\alpha_{\mathrm{res}}}}\right) = 1.$$

当 α_{res} 是对称非分歧时： 由于$\chi_{k,\alpha_{\mathrm{res}}}^{\mathrm{res}}$，$\alpha_{\mathrm{res}}$ 是唯一的 $F_{\alpha_{\mathrm{res}}}^{\times}$ and 的非平凡二次非分歧特征

$$\mathrm{val}_F(a_{k,\alpha_{\mathrm{res}}}^{\mathrm{res}}) = \mathrm{val}_F(\langle H_{\alpha_{\mathrm{res}}}, X_k^* \rangle) = -r \in \mathrm{val}_F(F_{\alpha_{\mathrm{res}}}^{\times}),$$

我们有

$$\chi_{k,\alpha_{\mathrm{res}}}^{\mathrm{res}}\left(\frac{N(\alpha)(\nu_0)-1}{a_{k,\alpha_{\mathrm{res}}}^{\mathrm{res}}}\right) = (-1)^{e_{\alpha_{\mathrm{res}}} r}.$$

（回忆一下，$e_{\alpha_{\mathrm{res}}}$ 表示 $F_{\alpha_{\mathrm{res}}}/F$的分歧指数。）

α_{res} 为对称分歧的情形： 由于 $\nu_0\theta$ 在拓扑意义下是半单的重数为 m，且 $N(\alpha)(\nu_0)$ 属于范数映射 $\mathbf{Nr}: F_{\alpha_{\mathrm{res}}}^{\times} \to F_{\pm\alpha_{\mathrm{res}}}^{\times}$ 的核，因此只要 $N(\alpha)(\nu_0) \neq 1$，就有 $N(\alpha)(\nu_0) \equiv -1$(模 $\mathfrak{p}_{F_{\alpha_{\mathrm{res}}}}$)。注意到 $\chi_{k,\alpha_{\mathrm{res}}}^{\mathrm{res}}$ 是温和分歧的，可得

$$\chi_{k,\alpha_{\mathrm{res}}}^{\mathrm{res}}\left(\frac{N(\alpha)(\nu_0)-1}{a_{k,\alpha_{\mathrm{res}}}^{\mathrm{res}}}\right) = \chi_{k,\alpha_{\mathrm{res}}}^{\mathrm{res}}(-2a_{k,\alpha_{\mathrm{res}}}^{\mathrm{res},-1}).$$

由于 $\mathbf{Tr}_{F_{\alpha_{\mathrm{res}}}/F_{\pm\alpha_{\mathrm{res}}}}(a_{k,\alpha_{\mathrm{res}}}^{\mathrm{res}}) = 0$，我们有 $\mathbf{Nr}_{F_{\alpha_{\mathrm{res}}}/F_{\pm\alpha_{\mathrm{res}}}}(a_{k,\alpha_{\mathrm{res}}}^{\mathrm{res}}) = -a_{k,\alpha_{\mathrm{res}}}^{\mathrm{res}}$。因此 $\chi_{k,\alpha_{\mathrm{res}}}^{\mathrm{res}}(-2a_{k,\alpha_{\mathrm{res}}}^{\mathrm{res},-1}) = \chi_{k,\alpha_{\mathrm{res}}}^{\mathrm{res}}(2a_{k,\alpha_{\mathrm{res}}}^{\mathrm{res}}) = \lambda_{\alpha_{\mathrm{res}}}$。

因此，我们得到

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathrm{II}}^{\tilde{\mathbf{G}}}[a_k^{\mathrm{res}}, \chi_k^{\mathrm{res}}](\eta_0) &= \prod_{\substack{\dot{\alpha}_{\mathrm{res}} \in \dot{\Phi}_{\mathrm{res}}(\mathbf{G},\mathbf{S}_k)_{\mathrm{ur}} \\ N(\alpha)(\nu_0)\neq 1}} (-1)^{e_{\alpha_{\mathrm{res}}} r} \prod_{\substack{\dot{\alpha}_{\mathrm{res}} \in \dot{\Phi}_{\mathrm{res}}(\mathbf{G},\mathbf{S}_k)_{\mathrm{ram}} \\ N(\alpha)(\nu_0)\neq 1}} \lambda_{\alpha_{\mathrm{res}}} \\ &= (-1)^{r_{k,\mathrm{ur}}^{\mathrm{res}}} \prod_{\substack{\dot{\alpha}_{\mathrm{res}} \in \dot{\Phi}_{\mathrm{res}}(\mathbf{G},\mathbf{S}_k)_{\mathrm{ur}} \\ N(\alpha)(\nu_0)=1}} (-1)^{e_{\alpha_{\mathrm{res}}} r} \prod_{\substack{\dot{\alpha}_{\mathrm{res}} \in \dot{\Phi}_{\mathrm{res}}(\mathbf{G},\mathbf{S}_k)_{\mathrm{ram}} \\ N(\alpha)(\nu_0)\neq 1}} \lambda_{\alpha_{\mathrm{res}}}.\end{aligned}$$

我们通过判断 $\alpha_{\mathrm{res}} \in \Xi_{\eta_0}$（即，$\alpha_{\mathrm{res}}$ 是否出现在相对于（$\mathbf{x}^{\frac{r}{2}}$）的 $\mathbf{G}^{\eta_0}$ 的海森堡商中）来计算 $(-1)^{e_{\alpha_{\mathrm{res}}} r}$ 对于满足 $N(\alpha)(\nu_0) = 1$ 的 $\alpha_{\mathrm{res}} \in \Phi_{\mathrm{res}}(\mathbf{G}, \mathbf{S}_k)_{\mathrm{ur}}$。当 $\alpha_{\mathrm{res}} \in \Xi_{\eta_0}$ 时，我们有

$$\begin{cases} \frac{r}{2} \in e_{\alpha_{\mathrm{res}}}^{-1}\mathbb{Z} & \text{if } f_{(\mathbf{G}_{\eta_0},\mathbf{S}_k^\natural)}(\alpha_{\mathrm{res}}) = +1, \\ \frac{r}{2} \in e_{\alpha_{\mathrm{res}}}^{-1}(\mathbb{Z}+\frac{1}{2}) & \text{if } f_{(\mathbf{G}_{\eta_0},\mathbf{S}_k^\natural)}(\alpha_{\mathrm{res}}) = -1, \end{cases}$$

根据 [Kal19b，命题 4.5。1]。这等价于

$$\begin{cases} e_{\alpha_{\mathrm{res}}} r \equiv 0 \pmod 2 & \text{if } f_{(\mathbf{G}_{\eta_0},\mathbf{S}_k^\natural)}(\alpha_{\mathrm{res}}) = +1, \\ e_{\alpha_{\mathrm{res}}} r \equiv 1 \pmod 2 & \text{if } f_{(\mathbf{G}_{\eta_0},\mathbf{S}_k^\natural)}(\alpha_{\mathrm{res}}) = -1. \end{cases}$$

注意到当 $\alpha_{\mathrm{res}} \notin \Xi_{\eta_0}$ 时这些条件只是互换了，我们看到

$$(-1)^{e_{\alpha_{\mathrm{res}}} r} = \begin{cases} f_{(\mathbf{G}_{\eta_0},\mathbf{S}_k^\natural)}(\alpha_{\mathrm{res}}) \\ -f_{(\mathbf{G}_{\eta_0},\mathbf{S}_k^\natural)}(\alpha_{\mathrm{res}}) \end{cases} = \begin{cases} -f_{(\mathbf{G}_{\eta_0},\mathbf{S}_k^\natural)}(\alpha_{\mathrm{res}}) \cdot \lambda_{\alpha_{\mathrm{res}}} & \text{if } \alpha_{\mathrm{res}} \in \Xi_{\eta_0}, \\ f_{(\mathbf{G}_{\eta_0},\mathbf{S}_k^\natural)}(\alpha_{\mathrm{res}}) \cdot \lambda_{\alpha_{\mathrm{res}}} & \text{if } \alpha_{\mathrm{res}} \notin \Xi_{\eta_0} \end{cases}$$

（回想一下，$\lambda_{\alpha_{\mathrm{res}}} = -1$，因为 $F_{\alpha_{\mathrm{res}}}/F_{\pm\alpha_{\mathrm{res}}}$ 是非分歧的。）因此我们得到

$$\prod_{\substack{\dot{\alpha}_{\mathrm{res}} \in \dot{\Phi}_{\mathrm{res}}(\mathbf{G},\mathbf{S}_k)_{\mathrm{ur}} \\ N(\alpha)(\nu_0)=1}} (-1)^{e_{\alpha_{\mathrm{res}}} r} = (-1)^{|\dot{\Xi}_{\eta_0,\mathrm{ur}}|} \prod_{\substack{\dot{\alpha}_{\mathrm{res}} \in \dot{\Phi}_{\mathrm{res}}(\mathbf{G},\mathbf{S}_k)_{\mathrm{ur}} \\ N(\alpha)(\nu_0)=1}} f_{(\mathbf{G}_{\eta_0},\mathbf{S}_k^\natural)}(\alpha_{\mathrm{res}}) \cdot \lambda_{\alpha_{\mathrm{res}}}.$$

再次注意到 $\lambda_{\alpha_{\mathrm{res}}}=-1$，我们有

$$\prod_{\substack{\dot\alpha_{\mathrm{res}}\in\dot\Phi_{\mathrm{res}}(\mathbf{G},\mathbf{S}_k)_{\mathrm{ur}}\\ N(\alpha)(\nu_0)=1}}\lambda_{\alpha_{\mathrm{res}}}=\lambda_{k,\mathrm{ur}}^{\mathrm{res}}\cdot\prod_{\substack{\dot\alpha_{\mathrm{res}}\in\dot\Phi_{\mathrm{res}}(\mathbf{G},\mathbf{S}_k)_{\mathrm{ur}}\\ N(\alpha)(\nu_0)\neq1}}\lambda_{\alpha_{\mathrm{res}}}.$$

回想起 $\Phi(\mathbf{G}^{\eta_0},\mathbf{S}_k^\natural)=\{\alpha_{\mathrm{res}}\in\Phi_{\mathrm{res}}(\mathbf{G},\mathbf{S}_k)\mid N(\alpha)(\nu_0)=1\}$，即可得到所述结论。□

引理 11.20。我们有

$$\varepsilon(\mathbf{S}_k^\natural)\cdot\varepsilon(\mathbf{T}_{\mathbf{G}_{\eta_0}^*})^{-1}=e(\mathbf{G}_{\eta_0})\prod_{\dot\alpha_{\mathrm{res}}\in\dot\Phi(\mathbf{G}_{\eta_0},\mathbf{S}_k^\natural)_{\mathrm{sym}}}f_{(\mathbf{G}_{\eta_0},\mathbf{S}_k^\natural)}(\alpha_{\mathrm{res}})\cdot\lambda_{\alpha_{\mathrm{res}}}$$

证明。这是 Kaletha–Kottwitz 公式的一个变体（命题 11.17），该公式见于 [Kal15, 推论 4。11]。□

注意到 $\{\alpha_{\mathrm{res}}\in\dot\Phi_{\mathrm{res}}(\mathbf{G},\mathbf{S}_k)\mid N(\alpha)(\nu_0)\neq1\}=\dot\Phi_{\mathrm{res}}(\mathbf{G},\mathbf{S}_k)\smallsetminus\dot\Phi(\mathbf{G}^{\eta_0},\mathbf{S}_k^\natural)$，引理11.19 和11.20 可推出（31）等于

$$\begin{aligned}(32)\quad &\chi_k^{\mathrm{res}}(\mathbf{S}_k^\natural)\cdot(-1)^{r_{k,\mathrm{ur}}^{\mathrm{res}}}\cdot\lambda_{k,\mathrm{ur}}^{\mathrm{res}}\cdot\prod_{\dot\alpha_{\mathrm{res}}\in\dot\Phi_{\mathrm{res}}(\mathbf{G},\mathbf{S}_k)_{\mathrm{sym}}}\lambda_{\alpha_{\mathrm{res}}}\cdot\prod_{\dot\alpha_{\mathrm{res}}\in\dot\Phi(\mathbf{G}_{\eta_0},\mathbf{S}_k^\natural)_{\mathrm{ram}}}f_{(\mathbf{G}_{\eta_0},\mathbf{S}_k^\natural)}(\alpha_{\mathrm{res}})\\ &\cdot\frac{\Delta_{\mathrm{II}}^{\mathbf{H}}[a_{j_{\mathbf{H}}},\chi_{j_{\mathbf{H}}}](y\exp(Y_{j_{\mathbf{H}}}^*))}{\Delta_{\mathrm{II}}^{\mathbf{H}}[a_k^{\mathrm{res}},\chi_k^{\mathrm{res}}](y\exp(Y_{j_{\mathbf{H}}}^*))}\cdot\frac{\varepsilon(\mathbf{T}_{\mathbf{G}_\theta})\cdot\varepsilon(\mathbf{S}_k^\natural)^{-1}}{\epsilon_{\mathbf{S}_k,\mathrm{ram}}(s_k)\cdot\epsilon_{\vartheta_k}^\star(s_k)}\\ &\cdot\frac{\vartheta_{j_{\mathbf{H}}}(y)}{\vartheta_k(s_k)}\cdot\Delta_{\mathrm{I,III}}[a_k^{\mathrm{res}},\chi_k^{\mathrm{res}}]\big(y\exp(Y_{j_{\mathbf{H}}}^*),\eta\exp(X_k^*)\big).\end{aligned}$$

我们设

$$\chi_j^{\mathrm{res}}(\mathbf{S}_{j_{\mathbf{H}}}):=\prod_{\dot\alpha_{\mathrm{res}}\in\dot\Phi(\mathbf{H},\mathbf{S}_{j_{\mathbf{H}}})}\chi_j^{\mathrm{res}}(l_\alpha).$$

引理 11.21。我们有

$$\frac{\Delta_{\mathrm{II}}^{\mathbf{H}}[a_{j_{\mathbf{H}}},\chi_{j_{\mathbf{H}}}](y\exp(Y_{j_{\mathbf{H}}}^*))}{\Delta_{\mathrm{II}}^{\mathbf{H}}[a_k^{\mathrm{res}},\chi_k^{\mathrm{res}}](y\exp(Y_{j_{\mathbf{H}}}^*))}=\zeta_{\chi_{j_{\mathbf{H}}}/\chi_j^{\mathrm{res}},S_{j_{\mathbf{H}}}}(y\exp(Y_{j_{\mathbf{H}}}^*))\cdot\chi_j^{\mathrm{res}}(\mathbf{S}_{j_{\mathbf{H}}}).$$

证明。由于 $y\exp(Y_{j_{\mathbf{H}}}^*)$ 在 $\mathbf{H}$ 中是正则半单的，我们有

$$\Delta_{\mathrm{II}}^{\mathbf{H}}[a_{j_{\mathbf{H}}},\chi_{j_{\mathbf{H}}}](y\exp(Y_{j_{\mathbf{H}}}^*))=\prod_{\dot\alpha_{\mathrm{res}}\in\dot\Phi(\mathbf{H},\mathbf{S}_{j_{\mathbf{H}}})}\chi_{j_{\mathbf{H}}}\Big(\frac{\alpha_{\mathrm{res}}(y\exp(Y_{j_{\mathbf{H}}}^*))-1}{a_{j_{\mathbf{H}},\alpha_{\mathrm{res}}}}\Big),$$

$$\Delta_{\mathrm{II}}^{\mathbf{H}}[a_k^{\mathrm{res}},\chi_k^{\mathrm{res}}](y\exp(Y_{j_{\mathbf{H}}}^*))=\prod_{\dot\alpha_{\mathrm{res}}\in\dot\Phi(\mathbf{H},\mathbf{S}_{j_{\mathbf{H}}})}\chi_k^{\mathrm{res}}\Big(\frac{\alpha_{\mathrm{res}}(y\exp(Y_{j_{\mathbf{H}}}^*))-1}{a_{k,\alpha_{\mathrm{res}}}^{\mathrm{res}}}\Big).$$

由引理 11.12，我们有 $a_{k,\alpha_{\mathrm{res}}}^{\mathrm{res}}=l_\alpha\cdot a_{j_{\mathbf{H}},\alpha_{\mathrm{res}}}$。因此得到

$$\frac{\Delta_{\mathrm{II}}^{\mathbf{H}}[a_{j_{\mathbf{H}}},\chi_{j_{\mathbf{H}}}](y\exp(Y_{j_{\mathbf{H}}}^*))}{\Delta_{\mathrm{II}}^{\mathbf{H}}[a_k^{\mathrm{res}},\chi_k^{\mathrm{res}}](y\exp(Y_{j_{\mathbf{H}}}^*))}=\frac{\Delta_{\mathrm{II}}^{\mathbf{H}}[a_{j_{\mathbf{H}}},\chi_{j_{\mathbf{H}}}](y\exp(Y_{j_{\mathbf{H}}}^*))}{\Delta_{\mathrm{II}}^{\mathbf{H}}[a_{j_{\mathbf{H}}},\chi_k^{\mathrm{res}}](y\exp(Y_{j_{\mathbf{H}}}^*))}\cdot\prod_{\dot\alpha_{\mathrm{res}}\in\dot\Phi(\mathbf{H},\mathbf{S}_{j_{\mathbf{H}}})}\chi_k^{\mathrm{res}}(l_\alpha).$$

此处，右侧两个第二类转移因子的比值由$\zeta_{\chi_{j_{\mathbf{H}}}/\chi_k^{\mathrm{res}},\,S_{j_{\mathbf{H}}}}(y\exp(Y_{j_{\mathbf{H}}}^*))$ 给出，依据[Kal19b，引理 4.6。6]因此，注意到 χ_k^{res}和 χ_j^{res}在 χ 上诱导相同的一组 $\Phi(\mathbf{H},\mathbf{S}_{j_{\mathbf{H}}})$-数据，便得到了所述断言。□

现在回顾一下，命题 7.11 将唯一元素 $j \in \tilde{\mathcal{J}}^{\mathbf{G}}_{\mathbf{G}_\eta}$ 与 $y \in \mathfrak{H}_\eta$和 $(D,\ j_{\mathbf{H}}) \in \mathbb{D}(y,\ \eta) \times \mathcal{J}_{\mathbf{HH}}$对应。还要回顾一下，我们固定了一个元素 $\eta_j \in \tilde{S}_j$。~我们令 $\underline{y}_j := \xi_D(\underline{\eta}_j) \in S_{j_{\mathbf{H}}}$。那么，根据引理 10.2 和命题 11.15，我们有

$$\begin{aligned}(33)\quad &\frac{\Delta_{\mathrm{I,III}}[a_k^{\mathrm{res}}, \chi_k^{\mathrm{res}}](y\exp(Y^*_{j_{\mathbf{H}}}), \eta\exp(X_k^*))}{\Delta_{\mathrm{I,III}}[a_k^{\mathrm{res}}, \chi_k^{\mathrm{res}}](\underline{y}_j\exp(Y^*_{j_{\mathbf{H}}}), \underline{\eta}_k\exp(X_k^*))} \\ &\qquad = \frac{\vartheta_k(s_k)}{\vartheta_{j_{\mathbf{H}}}(y/\underline{y}_j)} \cdot \zeta_{\mathrm{desc}}(s_k) \cdot \zeta_{\chi_j^{\mathrm{res}}/\chi_{j_{\mathbf{H}}}, S_{j_{\mathbf{H}}}}(y/\underline{y}_j).\end{aligned}$$

(回忆一下 $\eta = s_k\eta_{\underline{k}}$.) 因此，利用引理 11.21，可知 (32) 等于

$$\begin{aligned}(34)\quad &\chi_k^{\mathrm{res}}(\mathbf{S}_k^\natural) \cdot \chi_j^{\mathrm{res}}(\mathbf{S}_{j_{\mathbf{H}}}) \cdot (-1)^{r^{\mathrm{res}}_{k,\mathrm{ur}}} \cdot \lambda^{\mathrm{res}}_{k,\mathrm{ram}} \cdot \varepsilon(\mathbf{T}_{\mathbf{G}_\theta}) \cdot \varepsilon(\mathbf{S}_k^\natural)^{-1} \\ &\cdot \vartheta_{j_{\mathbf{H}}}(\underline{y}_j) \cdot \zeta_{\chi_{j_{\mathbf{H}}}/\chi_j^{\mathrm{res}}, S_{j_{\mathbf{H}}}}(\underline{y}_j\exp(Y^*_{j_{\mathbf{H}}})) \cdot \Delta_{\mathrm{I,III}}[a_k^{\mathrm{res}}, \chi_k^{\mathrm{res}}](\underline{y}_j\exp(Y^*_{j_{\mathbf{H}}}), \underline{\eta}_k\exp(X_k^*)) \\ &\cdot \epsilon_{\mathbf{S}_k,\mathrm{ram}}(s_k) \cdot \epsilon^\star_{\vartheta_k}(s_k) \cdot \zeta_{\mathrm{desc}}(s_k) \cdot \prod_{\dot\alpha_{\mathrm{res}} \in \dot\Phi(\mathbf{G}_{\eta_0}, \mathbf{S}_k^\natural)_{\mathrm{ram}}} f_{(\mathbf{G}_{\eta_0}, \mathbf{S}_k^\natural)}(\alpha_{\mathrm{res}}),\end{aligned}$$

其中我们置 $\lambda^{\mathrm{res}}_{k,\mathrm{ram}} = \prod_{\dot\alpha_{\mathrm{res}} \in \dot\Phi_{\mathrm{res}}(\mathbf{G},\mathbf{S}_k)_{\mathrm{ram}}} \lambda_{\alpha_{\mathrm{res}}}$。

现在考察 (34) 中包含的各因子。因子 $\varepsilon(\mathbf{T}_{\mathbf{G}_\theta})$ 显然与 j 无关。令 $j' \in \tilde{\mathcal{J}}^{\mathbf{G}}_{\mathbf{G}_\eta}$ 和 $k' \in \tilde{\mathcal{J}}^{\mathbf{G}_\eta}_{G_\eta}(j')$ 满足 k 与 k' 是 G-共轭的。设 $g \in G$ 为一个满足 $k' = [g]\circ k$ 和 $\eta_{k'} = {}^g\eta_k$ 的元素。由于 F- 有理同构 $[g]\colon \mathbf{S}_k \to \mathbf{S}_{k'}$ 给出一个与扭曲相容的 Γ-等变同构$\Phi(\mathbf{G}, \mathbf{S}_k) \to \Phi(\mathbf{G}, \mathbf{S}_{k'})$，我们得到 $r^{\mathrm{res}}_{k,\mathrm{ur}} = r^{\mathrm{res}}_{k',\mathrm{ur}}, \lambda^{\mathrm{res}}_{k,\mathrm{ram}} = \lambda^{\mathrm{res}}_{k',\mathrm{ram}}$，以及 $\varepsilon(\mathbf{S}_k^\natural) = \varepsilon(\mathbf{S}_{k'}^\natural)$。引理 10.4 表明 $\chi^{\mathrm{res}}_{k'}(\mathbf{S}_{k'}^\natural) = \chi^{\mathrm{res}}_{k'}({}^g\eta_0) = \chi^{\mathrm{res}}_k(\eta_0) = \chi^{\mathrm{res}}_k(\mathbf{S}_k)$。例行计算可验证，即使将 (j,k) 替换为 (j',k')，因子 $\chi^{\mathrm{res}}_j(\mathbf{S}_{j_{\mathbf{H}}}), \vartheta_{j_{\mathbf{H}}}({}^{y_j}), \zeta_{\chi_{j_{\mathbf{H}}}/\chi_j^{\mathrm{res}}, S_{j_{\mathbf{H}}}}({}^{y_j}\exp(Y^*_{j_{\mathbf{H}}}))$, 和 $\Delta_{\mathrm{I,III}}[a_k^{\mathrm{res}}, \chi_k^{\mathrm{res}}]({}^{y_j}\exp(Y^*_{j_{\mathbf{H}}})\,{}^{\eta_k}\underline{\exp}(X_k^*))$ 也不会改变。

我们总结一下目前为止的讨论。我们得到了

$$\begin{aligned}(35)\quad &\bar\Delta^{\mathrm{spec}}_{\phi,k} = \chi_k^{\mathrm{res}}(\mathbf{S}_k^\natural) \cdot \chi_j^{\mathrm{res}}(\mathbf{S}_{j_{\mathbf{H}}}) \cdot (-1)^{r^{\mathrm{res}}_{k,\mathrm{ur}}} \cdot \lambda^{\mathrm{res}}_{k,\mathrm{ram}} \cdot \varepsilon(\mathbf{T}_{\mathbf{G}_\theta}) \cdot \varepsilon(\mathbf{S}_k^\natural)^{-1} \cdot \vartheta_{j_{\mathbf{H}}}(\underline{y}_j) \\ &\cdot \zeta_{\chi_{j_{\mathbf{H}}}/\chi_j^{\mathrm{res}}, S_{j_{\mathbf{H}}}}(\underline{y}_j\exp(Y^*_{j_{\mathbf{H}}})) \cdot \Delta_{\mathrm{I,III}}[a_k^{\mathrm{res}}, \chi_k^{\mathrm{res}}](\underline{y}_j\exp(Y^*_{j_{\mathbf{H}}}), \underline{\eta}_k\exp(X_k^*)) \\ &\cdot \epsilon_{\mathbf{S}_k,\mathrm{ram}}(s_k) \cdot \epsilon^\star_{\vartheta_k}(s_k) \cdot \zeta_{\mathrm{desc}}(s_k) \cdot \prod_{\alpha_{\mathrm{res}} \in \dot\Phi(\mathbf{G}_{\eta_0}, \mathbf{S}_k^\natural)_{\mathrm{ram}}} f_{(\mathbf{G}_{\eta_0}, \mathbf{S}_k^\natural)}(\alpha_{\mathrm{res}}).\end{aligned}$$

此外，我们验证了，右端（35）第一行和第二行中包含的所有因子都只取决于 G-共轭类 k，而与 η 无关。换言之，我们剩下的任务是验证

$$(36)\qquad \epsilon_{\mathbf{S}_k,\mathrm{ram}}(s_k) \cdot \epsilon^\star_{\vartheta_k}(s_k) \cdot \zeta_{\mathrm{desc}}(s_k) \cdot \prod_{\alpha_{\mathrm{res}} \in \dot\Phi(\mathbf{G}_{\eta_0}, \mathbf{S}_k^\natural)_{\mathrm{ram}}} f_{(\mathbf{G}_{\eta_0}, \mathbf{S}_k^\natural)}(\alpha_{\mathrm{res}}).$$

只取决于 G-共轭类 k，而与 η 无关。

我们注意到，(36) 中的所有因子都是对分歧（受限）根的集合求积。因此，若 $\Phi(\mathbf{G},\mathbf{S}_k)$ 和 $\Phi_{\mathrm{res}}(\mathbf{G},\mathbf{S}_k)$ 不含分歧对称元素，则无需证明任何内容。例如，一个充分条件是$\mathbf{S}$ 在 E 的某个有限扩张 F 上分裂，且其分歧指数 $e(E/F)$ 为奇数。

事实上，我们有如下图表：

$$\begin{array}{ccccc} & & F_{\alpha_{\mathrm{res}}} & \subset & F_{\alpha} & \subset & E \\ & & \cup & & \cup & & \\ F & \subset & F_{\pm\alpha_{\mathrm{res}}} & \subset & F_{\pm\alpha} & & \end{array}$$

因此，若 $e(E/F)$ 为奇数，则扩张 $F_{\alpha}/F_{\pm\alpha}$ 和 $F_{\alpha_{\mathrm{res}}}/F_{\pm\alpha_{\mathrm{res}}}$ 不可能是二次分歧的。我们在此记录这一观察。

定理 11.22。 谱转移因子 $\Delta^{\mathrm{spec}}_{\phi\,k}$，在以下条件下定义良好：**S**在有限扩张 E 上分裂，F 其分歧指数 $e(E/F)$ 为奇数。特别地，*Kaletha* 的扭曲端*oscopic*特征关系（预期 *11.1*）对环面超尖点 L-包成立。

本文余下部分将证明，量 36）确实仅取决于 G-共轭类 k，并且在 η 的情形下与之无关，$\mathbf{G}=\mathrm{GL}_n$。

注记 11.23。 回忆一下，$\Pi^{\mathbf{G}}_{\phi}$的成员由集合 $\mathcal{J}^{\mathbf{G}}_{G}$参数化。在标准端oscopy的情形下，在 [Kal19b第 5 节中，3], Kaletha 引入了配对

$$\langle -,-\rangle_{\mathfrak{w}}\colon \mathcal{J}^{\mathbf{G}}_{G}\times\pi_0(S^{+}_{\phi})\to\mathbb{C}^{\times};\quad \langle j,s\rangle_{\mathfrak{w}}\mapsto\langle \mathrm{inv}(j_{\mathfrak{w}},j),s\rangle$$

（参见 [Kal19b，第 1155 页] 了解详情）。这不过是本文非扭曲情形下意义上的谱转移因子。换言之，我们有

$$\Delta^{\mathrm{spec}}_{\phi,j}=\langle \mathrm{inv}(j,j_{\mathfrak{w}}),s\rangle$$

当 θ 平凡时。我们可以理解为，Kaletha 对标准端oscopic特征关系的证明（[Kal19b，定理 6.3.4]）表明，我们对 的定义包含 $\Delta^{\mathrm{spec}}_{\phi\,j}$，与 $\langle \mathrm{inv}(j,\ j_{\mathfrak{w}})\ s\rangle$ 相同。

12. GL_n CONSIDERATION

以下令 $\mathbf{G}:=\mathrm{GL}_n$，其中 n 为偶数，并令 $\theta:=J_n{}^t(-)^{-1}J_n^{-1}$，其中$J_n$是反对角矩阵，其 $(i,\ n+1-i)$ 项由 $(-1)^{i-1}$给出。（请注意，对 n 奇偶性的假设对我们的目的无关紧要；参见注4.1。）

˜12.1. **GL** 的扭曲椭圆极大环面$_n$。 假设 **(S，S)** 是一个˙F-有理扭曲极大环面，属于 **G**，且其 **S** 是椭圆的（那么 **(S，S)** 必然也是椭圆的）。众所周知，存在 F 的一个有限扩张 E，其次数为 n，使得 **S** 同构于 $\mathrm{Res}_{E/F}\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$。

引理 12.1. 存在一个阶为2 的元素 $\tau_\theta\in\mathrm{Aut}_F(E)$，使得对任意 $s\in S\cong E^{\times}$，$\theta_{\mathbf{S}}(s)=\tau_\theta(s)^{-1}$。

证明。 注意到 $\theta_{\mathbf{S}}$ 具有形式 $x^t(-)^{-1}x^{-1}$，其中 $x\in\mathrm{GL}_n(F)$。由于 $\theta_{\mathbf{S}}$保持 $S\subset\mathrm{GL}_n(F)$，映射 $X\mapsto x^tXx^{-1}$ 保持 $\mathfrak{s}\subset\mathfrak{gl}_n(F)$。由于映射$X\mapsto x^tXx^{-1}$ 是 $\mathfrak{s}\cong E$ 上的一个对合的 F-代数同态，它由 $\mathrm{Aut}_F(E)$ 中的一个元素 τ_θ 给出，该元素的阶为 1 或 2。换言之，对任意 $s\in S\cong E^{\times}$，有$\theta_{\mathbf{S}}(s)=\tau_\theta(s)^{-1}$。

下面证明 τ_θ 并非平凡。为导出矛盾，假设τ_θ 是平凡的。那么，**S**的自同构 $\theta_{\mathbf{S}}$ 由 $s\mapsto s^{-1}$ 在 $S\cong E^{\times}$上的作用给出。因此，我们有 $\mathbf{S}^{\natural}(F)\subset\mathbf{S}^{\theta_{\mathbf{S}}}(F)=S^{\theta_{\mathbf{S}}}=\{\pm1\}$。另一方面，由于 **(˜S，S)** 是

一个扭曲极大环面，存在元素 $g \in \mathbf{G}$ 使得 ${}^{g}\mathbf{S} = \mathbf{T}$，且 $\theta_{\mathbf{S}}$映射到 $\theta|_{\mathbf{T}}$。这意味着环面 $\mathbf{S}^{\natural}$ 与$\mathbf{T}^{\theta,\circ}$ 在 F上同构。特别地，$\mathbf{S}^{\natural}$ 的秩为 $n/2$。然而，不存在秩非零且其 F值点集合的阶至多为 2 的 F-有理环面。因此得到矛盾。□

在下文中，我们令 $\tau_\theta \in \mathrm{Aut}_F(E)$ 为引理 12.1中所述的元素。令 $E_\pm$为 τ_θ 在 E中的不动域。

12.2. GL_n 的椭圆极大环面的根。接下来我们回顾 S 在 GL_n 中的根集的描述，参见 [Tam16 第 3.1 节和第 3.2] 节（另见 [OT21 第 3.2 节和第 5.1] 节）。首先，我们固定商 Γ/Γ_E 的一组代表元 $\{g_1, \dots, g_n\}$，使得 $g_1 = \mathrm{id}$。由此得到一个同构 $\mathbf{S}(F) \cong \prod_{i=1}^n F^\times$，它将 $x \in E^\times \cong \mathbf{S}(F)$ 映射到 $(g_1(x) \dots, g_n(x))$。然后这些投影

$$\delta_i \colon \mathbf{S}(\overline{F}) \xrightarrow{\cong} \prod_{i=1}^n \overline{F}^\times \to \overline{F}^\times; \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$$

构成 $X^*(\mathbf{S})$ 的一个 $\mathbb{Z}$-基。$\mathbf{S}$ 在 $\mathbf{G}$ 中的根集 $\Phi(\mathbf{G},\mathbf{S})$ 为

$$\left\{ \begin{bmatrix} g_i \\ g_j \end{bmatrix} := \delta_i - \delta_j \,\middle|\, 1 \le i \ne j \le n \right\}$$

以及集合 $\Phi(\mathbf{G}, \mathbf{S})$ 描述如下：

$$(\Gamma_E \backslash \Gamma / \Gamma_E)' \xrightarrow{1:1} \dot{\Phi}(\mathbf{G}, \mathbf{S}); \quad \Gamma_E g_i \Gamma_E \mapsto \Gamma \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ g_i \end{bmatrix},$$

其中 $(\Gamma_E\backslash\Gamma/\Gamma_E)'$ 是 Γ 中非平凡的双-Γ_E-陪集的集合。

以下设 E/F 是温和分歧的。我们简单记 e（分别为 f）为分歧指数 $e(E/F)$（分别为剩余次数 $f(E/F)$）。首先按照 [Tam16 第 3 节2]，回顾 Γ/Γ_E 的一组代表元的显式选取。令 μ_E 表示 E 中的单位根集。分别取 E 和 F 的赋值参数 ϖ_E 和 ϖ_F，使得对于某个 $\zeta_{E/F} \in \mu_E$ 有 $\varpi_E^e = \zeta_{E/F}\varpi_F$。固定一个 e 次本原单位根 ζ_e，以及 $\zeta_{E/F}$ 的一个 e 次根 $\zeta_{E/F,\,e}$，并置 $\zeta_\phi := \zeta_{E/F,\,e}^{q-1}$。于是 $L := E[\zeta_e, \zeta_{E/F,e}]$ 是 F 的一个温和分歧扩张，其中包含 E/F 的伽罗瓦闭包，并且在 E 上是非分歧的。扩张 L/F 的伽罗瓦群 $\mathrm{Gal}(L/F)$ 由半直积 $\langle\sigma\rangle \rtimes \langle\phi\rangle$ 给出，其中

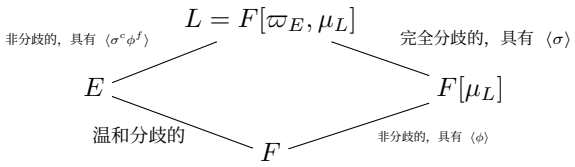
$$\sigma \colon \zeta \mapsto \zeta \quad (\zeta \in \mu_L), \quad \varpi_E \mapsto \zeta_e \varpi_E$$
$$\phi \colon \zeta \mapsto \zeta^q \quad (\zeta \in \mu_L), \quad \varpi_E \mapsto \zeta_\phi \varpi_E$$

并且 $\phi\sigma\phi^{-1} = \sigma^q$。此外，正如 [Tam16，命题 3.3 (i)]，我们可以取 Γ/Γ_E 的一组代表元为

$$\{\Gamma_F/\Gamma_E\} := \{\sigma^k\phi^i \mid 0 \le k \le e-1,\, 0 \le i \le f-1\}.$$

这里我们默认将每个 $\sigma^k\phi^i \in \Gamma_{L/F}$ 视为 Γ_F 的元素，即将其从 L扩张到 F。注意，由于 L/E 是非分歧的，存在一个整数

c 使得伽罗瓦群$(L/E) = \langle \sigma^c \phi^f \rangle$。



我们回顾一个关于$\mathbf{S}$ in$\mathbf{G}$中的对称分歧根的事实。

命题 12.2 ([OT21，命题 5。3])。 设 $\alpha \in \Phi(\mathbf{G}, \mathbf{S})$ 是形如 $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ g \end{smallmatrix}\right]$ 的根，其中 $g = \sigma^k \phi^i$。根 α 是对称分歧根，当且仅当$g = \sigma^{\frac{e}{2}}$ (e 在此情形下必须为偶数）。

引理 12.3。 假设 e 为偶数。若存在一个 $\theta_{\mathbf{S}}$-稳定的S环面特征，则 $E/E_{\pm}$ 必须是分歧的。

证明。设 ϑ 是 $\theta_{\mathbf{S}}$-稳定的 S 环面特征。若令 $r \in \mathbb{R}_{>0}$ 为ϑ的深度，则可取一个 $\theta_{\mathbf{S}}$-稳定元素 $X^* \in \mathfrak{s}^*_{-r}$ 来表示 $\vartheta|_{S_r}$ （[Oi25，引理 5.4]；参见第 4.6 节中的讨论）。由 ϑ的环面性， X^* 必须满足 Yu 的 GE2 条件（参见 [Yu01，第 8] 节），这意味着对任意 $\alpha \in \Phi$(G, S)，均有 $\mathrm{val}_F(\langle X^*, H_\alpha \rangle) = -r$。

我们通过 F-线性同构 $[Y \mapsto \mathrm{Tr}^{E/F}(XY)] \leftrightarrow X$，将 $\mathfrak{s}^* \cong E^* = \mathrm{Hom}_F(E, F)$ 同一化为 E。记 X 为在此同一化下与 $X^* \in E^*$ 对应的 E 中的元素。若将 $\alpha = \left[\begin{smallmatrix} g_i \\ g_j \end{smallmatrix}\right]$ 按照上述记号表示，则有$\langle X^*, H_\alpha \rangle = g_i(X) - g_j(X)$。因此，对于属于 $\alpha = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ g \end{smallmatrix}\right]$的 Γ-轨道且满足 $g = \sigma^k \phi^i$ 的任意 α，均有 $\mathrm{val}_F(\langle X^*, H_\alpha \rangle) = \mathrm{val}_F(X - g(X))$。

现在，为了导出矛盾，假设 $E/E_{\pm}$ 是非分歧的。由于 X^* 是 $\theta_{\mathbf{S}}$-不变的，且上述 E^* 与 E 之间的同一化与伽罗瓦群作用相容， X 必定满足 $-\tau_\theta(X) = X$。我们记 $X = \varpi_E^t u$ 为 $t \in \mathbb{Z}$ 和$u \in \mathcal{O}_E^\times$。于是有 $\sigma^{\frac{e}{2}}(X) \equiv (-1)^t X$ (模 $\mathfrak{p}_E^{t+1}$)。另一方面，我们有$\tau_\theta \sigma^{\frac{e}{2}}(X) \equiv (-1)^{t+1} X$ (模 $\mathfrak{p}_E^{t+1}$)。由于 $E/E_{\pm}$ 是非分歧的，$\tau_\theta \sigma^{\frac{e}{2}} \neq$ 恒等映射。因此，考虑 $g = \sigma^{\frac{e}{2}}$和 $g = \tau_\theta \sigma^{\frac{e}{2}}$的**GE2**条件，我们得到

$$\mathrm{val}_F(X - \sigma^{\frac{e}{2}}(X)) = r = \mathrm{val}_F(X - \tau_\theta \sigma^{\frac{e}{2}}(X)).$$

然而，这是不可能的，因为我们有

$$X - \sigma^{\frac{e}{2}}(X) \equiv X - (-1)^t X \pmod{\mathfrak{p}_E^{t+1}} \quad \text{and}$$

$$X - \tau_\theta \sigma^{\frac{e}{2}}(X) \equiv X - (-1)^{t+1} X \pmod{\mathfrak{p}_E^{t+1}}$$

而且其中恰有一个非零。 □

12.3. **谱转移因子的计算**。 现在我们回到第11节中的情形。因此，前面几个小节给出的说明˜ ˜适用于 F-有理椭圆扭曲极大环面（$\mathbf{S}_k$，$\mathbf{S}_k$）属于（$\mathbf{G}$，$\mathbf{G}$）。回忆一下，我们要证明量（36）由下式给出

$$\epsilon_{\mathbf{S}_k, \mathrm{ram}}(s_k) \cdot \epsilon^\star_{\vartheta_k}(s_k) \cdot \zeta_{\mathrm{desc}}(s_k)^{-1} \cdot \prod_{\alpha_{\mathrm{res}} \in \dot{\Phi}(\mathbf{G}_{\eta_0}, \mathbf{S}_k^\natural)_{\mathrm{ram}}} f_{(\mathbf{G}_{\eta_0}, \mathbf{S}_k^\natural)}(\alpha_{\mathrm{res}}),$$

仅取决于 k 的 G-共轭类，且与 η 无关。

假设$\mathbf{S}_k$ 同构于 $\mathrm{Res}_{E/F} \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$，其中 E/F 是一个次数为 n的温和分歧扩张。如果 e 在 E/F 中的分歧指数为奇数，那么其分歧指数也为奇数

伽罗瓦闭包 E/F，这意味着$\mathbf{S}_k$ 在 F的一个有限扩张上分裂，且分歧指数为奇数。由于这种情形已在定理11.22中处理过，以下我们假设 e 为偶数。特别地，由引理12.3可知， $E/E_{\pm}$ 是一个分歧二次扩张，其伽罗瓦群由 $\tau_\theta = \sigma^{\frac{e}{2}}$生成。

注意，当$\mathbf{G} = \mathrm{GL}_n$ 时，环面不变量总是平凡的（见 [OT21，命题 4.4]），因此特征 $\epsilon_{\mathbf{S}_k,\mathrm{ram}}$ 是平凡的。此外，我们有

引理 12.4. 若 e 为偶数，则特征 $\epsilon^{\star}_{\vartheta_k}$ 是平凡的。

证明。回顾一下，对于任意的 $s \in S_k$， $\epsilon^{\star}_{\vartheta_k}(s)$ 定义为 $\epsilon_\alpha(s)$ 在 $\ddot{\alpha} \in \Xi(\mathsf{G}, \mathsf{S}_k)$ 上的乘积，其中限制根 α_{res} 是分歧的。若 E/F 的分歧指数 e 为偶数，则由命题 12.2 可知，G 中存在 S 的分歧对称根。接着，如 [Kal19b，第 4 节所述（另见 [OT21，第 6.4] 节）， S_k 的环面特征 ϑ_k 的深度 r 由 $\frac{2s+1}{e}$ 给出，其中某个整数为 s。然而，这意味着海森堡空间中出现的根集合 $\Xi(\mathsf{G}, \mathsf{S}_k)$ 为空（见 [OT21，注 5.10]）。因此得证。□

因此，我们归结为考察以下乘积：

$$\prod_{\substack{\ddot{\alpha}\in\ddot{\Phi}(\mathbf{G},\mathbf{S}_k)_{\mathrm{asym}}\\ \alpha_{\mathrm{res}}:\mathrm{ram}}} \epsilon_\alpha(s_k) \prod_{\substack{\dot{\alpha}\in\dot{\Phi}(\mathbf{G},\mathbf{S}_k)_{\mathrm{ur}}\\ \alpha_{\mathrm{res}}:\mathrm{ram}}} \epsilon_\alpha(s_k) \prod_{\dot{\alpha}_{\mathrm{res}}\in\dot{\Phi}(\mathbf{G}_{\eta_0},\mathbf{S}_k^\natural)_{\mathrm{ram}}} f_{(\mathbf{G}_{\eta_0},\mathbf{S}_k^\natural)}(\alpha_{\mathrm{res}}). \tag{37}$$

引理 12.5. （*37*）中的第三个乘积(37) 等于

$$\prod_{\ddot{\alpha}_{\mathrm{res}}\in\dot{\Phi}(\mathbf{G}_{\eta_0},\mathbf{S}_k^\natural)^{(\mathrm{asym})}_{\mathrm{ram}}} f_{(\mathbf{G}_{\eta_0},\mathbf{S}_k^\natural)}(\alpha_{\mathrm{res}}) \cdot \prod_{\dot{\alpha}_{\mathrm{res}}\in\dot{\Phi}(\mathbf{G}_{\eta_0},\mathbf{S}_k^\natural)^{(\mathrm{ur})}_{\mathrm{ram}}} f_{(\mathbf{G}_{\eta_0},\mathbf{S}_k^\natural)}(\alpha_{\mathrm{res}}).$$

证明. 设 $\dot{\alpha} \in \dot{\Phi}(\mathbf{G},\mathbf{S}_k)_{\mathrm{ram}}$ 是满足 $\dot{\alpha}_{\mathrm{res}} \in \dot{\Phi}(\mathbf{G}^{\eta_0},\mathbf{S}_k^\natural)^{(\mathrm{ram})}_{\mathrm{ram}}$ 的一个元素。那么α 由 $\theta_{\mathbf{S}}$ 固定。事实上，我们可以假设 α 具有 $\begin{bmatrix} 1 & \\ & \sigma^{\frac{e}{2}} \end{bmatrix}$ 的形式。由于 $\tau_\theta = \sigma^{\frac{e}{2}}$，

$$\theta_{\mathbf{S}}(\alpha) = \tau_\theta \cdot \begin{bmatrix} 1 & \\ & \sigma^{\frac{e}{2}} \end{bmatrix}^{-1} = \sigma^{\frac{e}{2}} \begin{bmatrix} \sigma^{\frac{e}{2}} & \\ & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & \sigma^{\frac{e}{2}} \end{bmatrix} = \alpha.$$

因此，我们有 $f_{(\mathbf{G}_{\eta_0},\mathbf{S}_k^\natural)}(\alpha_{\mathrm{res}}) = f_{(\mathbf{G},\mathbf{S}_k)}(\alpha)$，如命题 9.7 的证明中所述。再次利用 $f_{(\mathbf{G},\mathbf{S}_k)}(\alpha) = 1$ ([OT21，命题 4.4])，可得$f_{(\mathbf{G}_{\eta_0},\mathbf{S}_k^\natural)}(\alpha_{\mathrm{res}}) = 1$。□

引理 12.6. 存在一个 S_k 中的元素，其阶为2。

证明。我们采用一种实现方式，将 G 视为双线性形式的空间，如 [Wal10第 1 节2]（另见 [Li13第 3 节6]）。

令 V为一个 n 维的 F-向量空间，并配备基 $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$。我们令 θ 为 V上的一个辛形式，使得 θ 相对于基 $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$的表示矩阵为 J_{2n}，即 $\tilde{\theta}(e_k, e_l) = (-1)^{k-1}\delta_{k,2n+1-l}$。令 $\mathrm{Hom}_F^{\mathrm{nondeg}}(V \otimes_F V, F)$ 表示 V上的非退化 F-双线性形式空间。注意，$\mathrm{Hom}_F^{\mathrm{nondeg}}(V\otimes_F V, F)$ 具有双 $\mathrm{GL}_F(V)$-主齐性空间结构，其作用为

$$(g \cdot q \cdot g')(v, v') := q(g^{-1}v, g'v')$$

对于任意 $q \in \mathrm{Hom}_F^{\mathrm{nondeg}}(V \otimes_F V,\ F)$ 和 $g,\ g' \in \mathrm{GL}_F(V)$。（因此，我们可以将 $\tilde{\theta}$视为 $\mathrm{Hom}_F^{\mathrm{nondeg}}(V \otimes_F V,\ F)$ 的一个“基点”。）于是，$\mathrm{Hom}_F^{\mathrm{nondeg}}(V \otimes_F V, F)$ 可通过以下对应，与 $G = \mathrm{GL}_n(F) \rtimes \theta$ 双 $\mathrm{GL}_n(F)$ 等变地等同：

$$\mathrm{Hom}_F^{\mathrm{nondeg}}(V \otimes_F V, F) \leftrightarrow \mathrm{GL}_n(F) \rtimes \theta: \quad g \cdot \tilde{\theta} \mapsto g \rtimes \theta.$$

我们来考察如何在空间 $\mathrm{Hom}_F^{\mathrm{nondeg}}(V\otimes_F V,\ F)$ 上重新表述 $g\rtimes\theta$ 的阶为 2 这一条件。$g\rtimes\theta\in\tilde{G}$ 的阶为 2，当且仅当我们有$g\cdot\tilde{\theta}=\tilde{\theta}\cdot g^{-1}$。令 ι 为空间 $\mathrm{Hom}_F^{\mathrm{nondeg}}(V\otimes_F V,\ F)$ 上的对合，它由交换 $V\otimes_F V$ 的两个分量给出，即，

$$\iota(q)(v,v')=q(v',v)$$

对于 $q\in\mathrm{Hom}_F^{\mathrm{nondeg}}(V\otimes_F V,F)$ 和 $v,v'\in V$。于是我们有 $\iota(g\cdot\tilde{\theta})=-\tilde{\theta}\cdot g^{-1}$。事实上，我们有

$$\iota(g\cdot\tilde{\theta})(v,v')=(g\cdot\tilde{\theta})(v',v)=\tilde{\theta}(g^{-1}v',v)=-\tilde{\theta}(v,g^{-1}v')=-(\tilde{\theta}\cdot g^{-1})(v,v')$$

~对于 $v,v'\in V$（在第三个等式中，我们用到了 θ 是辛的）。因此，$g\rtimes\theta$ 的阶为 2 当且仅当 $\iota(g\cdot\theta)=-g\cdot\theta$，换言之，$g\cdot\theta$ 是辛的。

现在我们注意到，$\tilde{S}_k$ 中的元素可以如下实现为 $\mathrm{Hom}_F^{\mathrm{nondeg}}(V\otimes_F V,F)$ 中的元素（[Wal10，第 1 节。3]）。回忆一下，$S_k\cong E^\times$ 并且我们有一个二次子扩张 $E/E_\pm$，其伽罗瓦群为 $\langle\tau_\theta\rangle$。对于任意 $x\in E^\times$，我们定义一个 F-双线性型 $\tilde{x}$ 于 E 上，定义如下：

$$\tilde{x}(v,v'):=\mathrm{Tr}_{E/F}(v\tau_\theta(v')x).$$

那么，通过选取 E 的一个 F-基，我们可以将 $\{\tilde{x}\mid x\in E^\times\}$ 嵌入 $\mathrm{Hom}_F^{\mathrm{nondeg}}(V\otimes_F V,\ F)$ 中。这个子集实现了 S_k。

因此，为了证明该断言，只需找到一个元素 $x\in E^\times$，使得 $\tilde{x}$ 是辛的。若令 $x\in E^\times$ 为任意满足 $\mathrm{Tr}^{E/E_\pm}(x)=0$ 的元素，则 $\tilde{x}$ 是辛的。□

命题 12.7。若 e 为偶数，则我们有自然的同一化

$$\{\ddot{\alpha}\in\ddot{\Phi}(\mathbf{G},\mathbf{S}_k)_{\mathrm{asym}}\mid\dot{\alpha}_{\mathrm{res}}:\mathrm{ram}\}\xrightarrow{1:1}\dot{\Phi}(\mathbf{G}_{\eta_0},\mathbf{S}_k^\natural)_{\mathrm{ram}}^{(\mathrm{asym})}:\ddot{\alpha}\mapsto\dot{\alpha}_{\mathrm{res}},$$

$$\{\ddot{\alpha}\in\dot{\Phi}(\mathbf{G},\mathbf{S}_k)_{\mathrm{ur}}\mid\dot{\alpha}_{\mathrm{res}}:\mathrm{ram}\}\xrightarrow{1:1}\dot{\Phi}(\mathbf{G}_{\eta_0},\mathbf{S}_k^\natural)_{\mathrm{ram}}^{(\mathrm{ur})}:\ddot{\alpha}\mapsto\dot{\alpha}_{\mathrm{res}}.$$

证明。我们只考虑限制为分歧限制的非对称根情形，因为限制为分歧限制的对称非分歧根情形可以用同样的方法处理。为了说明关联 $\ddot{\alpha}\mapsto\dot{\alpha}_{\mathrm{res}}$ 给出了所断言的同一化，我们必须检查以下各项：

(1) α 和 $\theta(\alpha)$ 在 $\Phi(\mathbf{G},\ \mathbf{S}_k)^{\mathrm{asym}}$ 中属于同一类；(2) 任何其 α_{res} 为分歧的 $\alpha\in\Phi(\mathbf{G},\ \mathbf{S}_k)^{\mathrm{asym}}$ 都下降到 $\mathbf{G}^{\eta_0}$。

正如引理 9.2 的证明中所考察的，我们必有 $\theta(\alpha)\neq\alpha$。此外，若令 τ_α 为 $\mathrm{Gal}(F_{\alpha_{\mathrm{res}}}/F_{\pm\alpha_{\mathrm{res}}})$ 的非平凡元素，则有 $\tau_\alpha(\alpha)=-\theta(\alpha)$。这意味着条件 (1) 成立。对于条件 (2)，我们注意到，对于任意拓扑半单的 $\eta_0'\in S_k$，α 下降到~$\mathbf{G}^{\eta_0}$ 当且仅当 α 下降到 $\mathbf{G}^{\eta_0'}$，这等价于 $\alpha(\eta_0'^2)=1$（见引理 9.2 及其证明）。由引理 12.6 可知，S 中存在一个二阶元素 $\eta_0'^{\sim}$，它满足后一条件。□

结合引理 12.5 与命题12.7，可知（37）等于以下乘积：

$$\prod_{\dot{\alpha}_{\mathrm{res}}\in\dot{\Phi}(\mathbf{G}_{\eta_0},\mathbf{S}_k^\natural)_{\mathrm{ram}}^{(\mathrm{asym})}\sqcup\dot{\Phi}(\mathbf{G}_{\eta_0},\mathbf{S}_k^\natural)_{\mathrm{ram}}^{(\mathrm{ur})}}\epsilon_\alpha(s_k)\cdot f_{(\mathbf{G}_{\eta_0},\mathbf{S}_k^\natural)}(\alpha_{\mathrm{res}}).\tag{38}$$

回想一下 $\eta = {}^{s_k}\eta_k$，可知（38）等于

$$\prod_{\dot{\alpha}_{\mathrm{res}} \in \dot{\Phi}(\mathbf{G}_{\underline{\eta}_k}, \mathbf{S}_k^\natural)_{\mathrm{ram}}^{(\mathrm{asym})} \sqcup \dot{\Phi}(\mathbf{G}_{\underline{\eta}_k}, \mathbf{S}_k^\natural)_{\mathrm{ram}}^{(\mathrm{ur})}} f_{(\mathbf{G}_{\underline{\eta}_k}, \mathbf{S}_k^\natural)}(\alpha_{\mathrm{res}}) \tag{39}$$

根据命题 9.5和9.6。

命题 12.8。 如果 e 为偶数，则 (39) 仅取决于 G-共轭类 k，且与 η无关。

证明。显然，（39）与 η 无关。设 $j' \in \tilde{\mathcal{J}}_{\mathbf{G}_\eta}^{\mathbf{G}}$ 和 $k' \in \tilde{\mathcal{J}}_{G_\eta}^{\mathbf{G}_\eta}(j)$，使得 k 和 k' 为 G-共轭。设 $g \in G$ 是一个满足 $k' = [g] \circ k$ 和 $\eta_{k'} = {}^g\eta_k$ 的元素。于是，g-共轭诱导出 F-有理同构 $[g]$: $\mathbf{G}^{\eta_k} \xrightarrow{\sim} \mathbf{G}^{\eta_{k'}}$ 和 $\mathbf{S}_k^\natural \to \mathbf{S}_{k'}^\natural$。因此得到所述结论。□

我们总结所得结果。

定理 12.9。 谱转移因子 $\Delta_{\phi\, k}^{\mathrm{spec}}$，对于 GL_n 且 n为偶数时是良定义的。特别地，扭曲端*oscopic*特征关系（预期 *11.1*）成立。

12.4. **一个推论**。

引理 12.10. 设 F 上的 $\mathbf{H}$ 是拟分裂特殊正交群或辛群，且它是$(\mathbf{G}\ \theta)$ 的一个端*oscopic*群。设 $\phi_{\mathbf{H}}$ 是深度为 $r \in \mathbb{R}_{>0}$ 的环面超尖点 L-参数，其定义见 *Kaletha*（定义 *3.13*）。假设$\hat{}\mathcal{S}_{\phi_{\mathbf{H}}} := \pi_0(\mathbf{Z}_{\hat{\mathbf{G}}}(\mathrm{Im}(\phi_{\mathbf{H}}))/\mathbf{Z}_{\hat{}\mathbf{G}})$ 是平凡的。那么 $\xi \circ \phi_{\mathbf{H}}$ 作为 $\mathbf{G}$ 的深度为 $r \in \mathbb{R}_{>0}$ 的 L-参数，是环面超尖点参数。

$\hat{}$证明。令 $\phi := \xi \circ \phi_{\mathbf{H}}$。显然，$\phi$ 在 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 上平凡。由 $\mathcal{S}_{\phi_{\mathbf{H}}}$ 平凡这一假设可知，ϕ 是 W_F 的不可约 n 维表示，这意味着 ϕ 是离散的。由此，要验证 ϕ 是深度为 $r > 0$ 的环面参数，只需验证 ϕ 满足定义 3.13 中的条件 (1) 和 (2)。条件 (1) 显然成立，因此考虑条件 (2)。由于 $\phi_{\mathbf{H}}$ 是深度为 $r \in \mathbb{R}_{>0}$ 的环面超尖点参数，$\mathrm{Z}_{\hat{\mathbf{H}}}(\phi_{\mathbf{H}}(I_F^r))$ 是 H 中包含 $\phi_{\mathbf{H}}(P_F)$ 的一个极大环面。注意，根据 Kal19b 引理 5.2.2 (1) 的（证明），$\mathrm{Z}_{\hat{\mathbf{G}}}(\phi(I_F^r))$ 是 G 的一个 Levi 子群。换言之，$\mathrm{Z}_{\hat{\mathbf{G}}}(\phi(I_F^r))$ 是 $\hat{}$G 的一个 θ- 稳定 Levi 子群，其 $\mathrm{Z}_{\hat{\mathbf{H}}}(\phi_{\mathbf{H}}(I_F^r)) = \mathrm{Z}_{\hat{}\mathrm{G}}(\phi(I_F^r))_{\hat{\theta}}$。是 $\hat{}$H 的一个极大环面。这意味着 Levi 子群 $\mathrm{Z}_{\hat{\mathbf{G}}}(\phi(I_F^r))$ 必然是 G 的一个 (θ-稳定) 极大环面。□

现在我们得到如下推论。

定理 12.11. 设 $\mathbf{H}$ 是 F 上的拟分裂特殊正交群或辛群。设 $\Pi_{\phi_{\mathbf{H}}}^{\mathbf{H}}$ 是一个环面超尖点 L-包，其 L-参数为 $\phi_{\mathbf{H}}$，此处采用 *Kaletha* 的定义（见第 *3*节）。设 $\Pi_{\phi_{\mathbf{H}},\mathrm{Art}}^{\mathbf{H}}$ 是 L-包，$\mathbf{H}$ 对应于$\phi_{\mathbf{H}}$，此处采用 *Arthur* 的定义（[Art13，定理 2.2。1]）。那么我们有 $\Pi_{\phi_{\mathbf{H}}}^{\mathbf{H}} = \Pi_{\phi_{\mathbf{H}},\mathrm{Art}}^{\mathbf{H}}$。

证明。回顾一下，$\Pi_{\phi_{\mathbf{H}}}^{\mathbf{H}}$ 和$\Pi_{\phi_{\mathbf{H}},\ \mathrm{Art}}^{\mathbf{H}}$ 都与“S-群” $\mathcal{S}_{\phi_{\mathbf{H}}}$ 的不可约特征集合存在双射（[Kal19b，第 5 节3] 以及 [Art13，定理 2.2.1]）。特别地，这些集合具有相同的基数。我们首先指出，基于.....理论的标准论证，我们可以假设$|\Pi_{\phi_{\mathbf{H}}}^{\mathbf{H}}| = |\Pi_{\phi_{\mathbf{H}},\ \mathrm{Art}}^{\mathbf{H}}| = 1$

标准端oscopy。事实上，假设$|\Pi^{\mathbf{H}}_{\phi_{\mathbf{H}}}| = |\Pi^{\mathbf{H}}_{\phi_{\mathbf{H}},\mathrm{Art}}| > 1$。那么 S-群包含一个非平凡元素，这意味着 L-参数 $\phi_{\mathbf{H}}$ 通过某个非平凡标准端oscopic群 H′ 的 L-群分解。设 $\phi_{\mathbf{H}'}$是 H′ 的一个 L-参数，其到 H 的提升为 $\phi_{\mathbf{H}}$。根据 [Kal19b，定理 6.3.4]以及 [Art13，定理 2.2.1]，， $\Pi^{\mathbf{H}}_{\phi_{\mathbf{H}}}$ 和$\Pi^{\mathbf{H}}_{\phi_{\mathbf{H}},\mathrm{Art}}$ 都分别在 H的任意椭圆强正则半单元素处满足与 $\Pi^{\mathbf{H}'}_{\phi_{\mathbf{H}'}}$ 和$\Pi^{\mathbf{H}'}_{\phi_{\mathbf{H}'},\mathrm{Art}}$的标准端oscopic特征关系。因此，若我们能证明 $\Pi^{\mathbf{H}'}_{\phi_{\mathbf{H}'}} = \Pi^{\mathbf{H}'}_{\phi_{\mathbf{H}'},\mathrm{Art}}$，那么便可看出，对于 H的任意椭圆强正则半单元素， $\Pi^{\mathbf{H}}_{\phi_{\mathbf{H}}}$ 中各成员的特征之带符号和与$\Pi^{\mathbf{H}}_{\phi_{\mathbf{H}},\mathrm{Art}}$的带符号和相同。由于 H 的强正则半单轨迹在 H 的正则半单轨迹中扎里斯基稠密，我们可知， $\Pi^{\mathbf{H}}_{\phi_{\mathbf{H}}}$ 的带符号和与 $\Pi^{\mathbf{H}}_{\phi_{\mathbf{H}},\mathrm{Art}}$ 的带符号和在 H的椭圆正则半单轨迹上相同。因此，根据椭圆内积的正交关系（[Clo91，定理 3]），可得$\Pi^{\mathbf{H}}_{\phi_{\mathbf{H}}} = \Pi^{\mathbf{H}}_{\phi_{\mathbf{H}},\mathrm{Art}}$。由于 $\Pi^{\mathbf{H}'}_{\phi_{\mathbf{H}'}}$（或$\Pi^{\mathbf{H}'}_{\phi_{\mathbf{H}'},\mathrm{Art}}$）的阶小于 $\Pi^{\mathbf{H}}_{\phi_{\mathbf{H}}}$ 的阶，重复这一论证并作归纳后，我们归结为$|\Pi^{\mathbf{H}}_{\phi_{\mathbf{H}}}| = |\Pi^{\mathbf{H}}_{\phi_{\mathbf{H}},\mathrm{Art}}| = 1$的情形。（注意，若 H 是拟分裂特殊正交群或辛群，则 H′也如此。）

令 $\phi := \hat{\xi} \circ \phi_{\mathbf{H}}$。当 $|\Pi^{\mathbf{H}}_{\phi_{\mathbf{H}}}| = |\Pi^{\mathbf{H}}_{\phi_{\mathbf{H}},\ \mathrm{Art}}| = 1$，或者等价地， $\mathcal{S}_{\phi_{\mathbf{H}}}$ 是平凡的， ϕ 是 GL L的环面超尖点参数$_n$ ，由引理 12.10可知，其中 n 满足 $\mathbf{H}$ 是 (GL$_n$， θ) 的一个扭曲端oscopic群。因此我们可以应用定理12.9； $\Pi^{\mathbf{G}}_{\phi}$和 $\Pi^{\mathbf{H}}_{\phi_{\mathbf{H}}}$ 满足扭曲端oscopic特征关系，即有

$$\Delta^{\mathrm{spec}}_{\phi,\pi}\Phi_{\tilde{\pi}}(\delta) = \sum_{\gamma \in H/\mathrm{st}} \mathring{\Delta}(\gamma,\delta)\Phi_{\pi_{\mathbf{H}}}(\gamma)$$

˜对于任意椭圆强正则半单元素 $\delta \in G$，其中 π 和 $\pi_{\mathbf{H}}$ 分别是 $\Pi^{\mathbf{G}}_{\phi}$和 $\Pi^{\mathbf{H}}_{\phi_{\mathbf{H}}}$中唯一的成员。类似地，我们还有

$$\Phi_{\tilde{\pi}_{\mathrm{Art}}}(\delta) = \sum_{\gamma \in H/\mathrm{st}} \mathring{\Delta}(\gamma,\delta)\Phi_{\pi_{\mathbf{H},\mathrm{Art}}}(\gamma)$$

˜对于任意椭圆强正则半单元素 $\delta \in G$，其中 π_{Art} 和 $\pi_{\mathbf{H}}$分别是 $\Pi^{\mathbf{G}}_{\phi}$、Art 和 $\Pi^{\mathbf{H}}_{\phi_{\mathbf{H}}}$、Art 中的唯一成员。我们注意到，对于任意˜椭圆强正则半单元素 $\delta \in G$，存在一个椭圆强 G-正则半单元素 $\gamma \in H$，使得 $(\gamma,\delta) \in \mathcal{D}$，且在稳定共轭意义下至多唯一。换言之，上述求和的索引集至多可视为单元素集。此外，对于任意椭圆强 G- 正则半单 ˜ 元素 $\gamma \in H$，都存在一个椭圆强正则半单元素 $\delta \in G$。（这些事实可由这些群的半单共轭类的显式参数化推出；参见 [Wal10，第 1.3 节和第 1.9] 节。）由 [OT21]，可知 $\pi = \pi_{\mathrm{Art}}$，因此对于任意椭圆强 G-正则˚半单元素 $\gamma \in H$，有 $\Phi_{\pi_{\mathbf{H}}}(\gamma) = \Delta^{\mathrm{spec}}_{\phi,\pi}\Phi_{\pi_{\mathbf{H},\mathrm{Art}}}(\gamma)$（回顾一下，只要 $(\gamma,\delta) \in \mathcal{D}$，就有 $\Delta(\gamma,\delta) \neq 0$）。由于 H 的强 G-正则半单轨迹在 H 的正则半单轨迹中扎里斯基稠密，我们可知恒等式 $\Phi_{\pi_{\mathbf{H}}}(\gamma) = \Delta^{\mathrm{spec}}_{\phi,\pi}\Phi_{\pi_{\mathbf{H},\mathrm{Art}}}(\gamma)$ 对任意椭圆正则半单元素 $\gamma \in H$都成立。因此，再由椭圆内积的正交关系可得 $\pi_{\mathbf{H}} = \pi_{\mathbf{H},\mathrm{Art}}$ （以及 $\Delta^{\mathrm{spec}}_{\phi,\pi} = 1$）。□

注 12.12. 我们注意到，对于准分裂偶特殊正交群，Arthur 的局部朗兰兹对应仅在外自同构的作用意义下建立。因此，当$\mathbf{H}$ 是准分裂偶特殊正交群时，

上述定理中的恒等映射 $\Pi^{\mathbf{H}}_{\phi_{\mathbf{H}}} = \Pi^{\mathbf{H}}_{\phi_{\mathbf{H}},\mathrm{Art}}$ 仅在外自同构的作用意义下成立。

Index

$\mathbf{A}_{\tilde{\mathbf{G}}}$, 23$a_j$ (a_j, $_\sigma$) , 45$a_{j_\mathbf{H}}$ ($a_{j_\mathbf{H}}$, $_\sigma$) , 45$a_\jmath$ ($a_\jmath$, $_\sigma$) , 45$a_{\jmath_\mathbf{H}}$ ($a_{\jmath_\mathbf{H}}$, $_\sigma$) , 45$a_k^\natural$, 71a_k^{res}, 71$a_{\mathbf{T}_0}$ ($a_{\mathbf{T}_0}$, $_\sigma$) , 63a_ϑ, 15$\dot{\alpha}$, 12$\ddot{\alpha}$, 12χ (δ_0) , 60$\chi_k^\natural$, 71χ_j^{res} ($\mathbf{S}_{j_\mathbf{H}}$) , 80$\chi_k^{\mathrm{res}}$, 71$\chi_k^{\mathrm{res}}$ ($\mathbf{S}_k^\natural$) , 78χ_ϑ, 15d, 65 $\mathbf{D}$ (ϵ, η) , 42$\mathbb{D}$ (ϵ, η) , 43$D_{\mathbf{J}'}$, $\mathbf{J}$ (Y^*, X) , 51$_{D^{\mathbf{J}}}$, $^{\mathrm{st}}_{X^*}$, 51$D^{\mathbf{J}}_{X^*}$, 51$\tilde{}D_{\mathbf{J}'}$, $\mathbf{J}$ (Y^*, X) , 51$\delta_{\geq r}$, 30$\delta_{<r}$, 30$\delta^+_{<r}$, 30$\Delta^{\mathrm{spec}}_{\phi\, j}$, , 76$\bar{\Delta}^{\mathrm{spec}}_{\phi\, j}$, , 76, 77ϵ_α, 16$\epsilon\mathbf{s}$, $_{\mathrm{ram}}$, 16$\epsilon^\star_{\vartheta_k}$, 72$\tilde{\epsilon}_\Xi$, 31$\epsilon_\vartheta$, $_{\mathrm{asym}}$, 16$^{\epsilon_{\vartheta_j}}$, 20$\epsilon_\vartheta$, $_{\mathrm{ur}}$, 16 $\gamma_{\geq r}$, 29γ (j) , 51$\gamma_{<r}$, 29H_α, 14$\mathfrak{H}_\eta$, 46$H_y[\delta]_r$, 68

$i^\vee$, 54$I^\eta_{\omega_{(\mathbf{S},\vartheta)}}$, 27 I^η_π, 22$I^\eta_{\rho_{(\mathbf{S},\vartheta)}}$, 27 $\hat{}$ $\iota^{\mathbf{G}_\eta}_{X^*}$, 31$J$, 14$J_+$, 14$\mathcal{J}^{\mathbf{G}}$, 17$\mathcal{J}^{\mathbf{G}}_F$, 17$\mathcal{J}^{\mathbf{G}}_G$, 20$\mathcal{J}^{\mathbf{H}}_{\mathbf{H}_e}$, 46$\tilde{\mathcal{J}}^{\mathbf{G}_\eta}_{G_\eta}$ (j), 67 $\tilde{\mathcal{J}}^{\mathbf{G}}_G$, 39 $\tilde{\mathcal{J}}\mathrm{G}\mathrm{G}_\eta$, 46, 67$\tilde{\mathcal{J}}^G_{G_\eta}$($j$), 67$\overline{\tilde{\mathcal{J}}}\mathrm{G}^{G_\eta}$, 67$K$, 14$l_\alpha$, 23$^L j^1_\chi$, 62 $^L j_\chi$, 18$^L j^{\mathbf{H}}_\chi$, 62 m_α, 28$\mathcal{D}$, 33μ_D, 42 $\hat{}\mu^{\mathbf{G}_\eta}$ Wal $_{X^*}$, 31$N(\alpha)$, 23ν_D, 42p^*, 23p_*, 23 $\Phi_{\tilde{\pi}}$, 31Φ_{res}(G, T)$^{(\star)}_\bullet$, 55Φ_{res}(G, T), 23.Φ, 12..Φ, 12$\Pi^{\mathbf{G}}_\phi$, 21$^{\pi_{(\mathbf{S},\vartheta)}}$, 13 S$j$, 17 $\mathbf{S}^\natural$, 23

Θ$_{\varepsilon}$<style 恒等映射='2'>, <style 恒等映射='4'>22tran<style 恒等映射='7'>, <style 恒等映射='9'>47

V, 16, 24
V_{α}, 25
$V_{\ddot{\alpha}}$, 25
$V_{\dot{\alpha}}$, 25
$\hat{\vartheta}$, 14
ϑ_j, 18
ϑ'_j, 21
X^*, 14
X^*_k, 70
Ξ, 25
ξ_D, 42$\xi_{\diamondsuit}$, 42$\xi_{\flat}$, 42Ξ（**G**，**S**）, 25ξ_D, 42
$Y^*_{k_{\mathbf{H}}}$, 70Y^*（**T**）, 23Y_*（**T**）, 23
$\zeta_{\chi'/\chi}$, 19
ζ_{desc}, 73
ζ_S, 19

References

[Art13] J. Arthur, *The endoscopic classification of representations: Orthogonal and symplectic groups*, 美国数学会 Colloquium Publications，卷。美国数学会，普罗维登斯，RI，2013年。[AS08] J. D. Adler 和 L. Spice，*Good product expansions for tame elements of p-adic groups*，Int. Math. Res. Pap. IMRP (2008年)，第 1 期，文章 ID rp. 003，95。[AS09] ，*Supercuspidal characters of reductive p-adic groups*，Amer. J. Math. 131 (2009年)，第 4 期，1137–1210。[BH06] C. J. Bushnell 和 G. Henniart，*The local Langlands conjecture for* GL(2)，Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [数学科学基础原理]，第 335 卷，施普林格出版社，柏林，2006年。[Clo91] L. Clozel，*Invariant harmonic analysis on the Schwartz space of a reductive p-adic group*，约化群上的调和分析（缅因州不伦瑞克，1989年），Progr. Math.，第 101 卷，Birkhäuser Boston，波士顿，MA，1991年，第 101–121 页。[DL76] P. Deligne 和 G. Lusztig，*Representations of reductive groups over finite fields*，Ann. of Math. (2) 103 (1976年)，第 1 期，103–161。[DR09] S. DeBacker 和 M. Reeder，*Depth-zero supercuspidal L-packets and their stability*，Ann. of Math. (2) 169 (2009年)，第 3 期，795–901。[DS18] S. DeBacker 和 L. Spice，*Stability of character sums for positive-depth supercuspidal representations*，，J. Reine Angew. Math. (**742** 2018 47 78)，–。[Fin21a] J. Fintzen，*Tame tori in p-adic groups and good semisimple elements*，Int. Math. Res. Not. IMRN (2021年)，第 19 期，14882–14904。[Fin21b] ，*Types for tame p-adic groups*，Ann. of Math. (2) 193 (2021年)，第 1 期，303–346。[FKS23] J. Fintzen、T. Kaletha 和 L. Spice，*A twisted Yu construction Harish-Chandra characters and endoscopy*，，，Duke Math. J. (**172** 2023 12, 2241 2301)，第 – 期。[FS21] J. Fintzen 和 S. W. Shin，*Congruences of algebraic automorphic forms and supercuspidal representations*，，Camb. J. Math. (**9** 2021 2, 351 429)，第 – 期。[Hak18] J. Hakim，*Constructing tame supercuspidal representations*，Represent. Theory 22 (2018年)，45–86。[Hal93] T. C. Hales，*A simple definition of transfer factors for unramified groups*，群与代数的表示论，Contemp. Math.，第 145 卷，美国数学会，普罗维登斯，RI，1993年，第 109–134 页。[Hen00] G. Henniart，*Une preuve simple des conjectures de Langlands pour* GL(n) *sur un corps p-adique*，，Invent. Math. (**139** 2000 2, 439 455)，第 – 期。[HM08] J. Hakim 和 F. Murnaghan，*Distinguished tame supercuspidal representations*，Int. Math. Res. Pap. IMRP (2008年)，第 2 期，文章 ID rpn005，166。[HT01] M. Harris 和 R. Taylor，*The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*，，Annals of Mathematics Studies，第 151 卷，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，NJ，2001年，附有 Vladimir G. Berkovich 的附录。[Kal13] T. Kaletha，*Simple wild L-packets*，J. Inst. Math. Jussieu 12 (2013年)，第 1 期，43–75。[Kal15] ，*Epipelagic L-packets and rectifying characters*，，Invent. Math. (**202** 2015 1, 1 89)，第 – 期。[Kal16] ，*Rigid inner forms of real and p-adic groups*，Ann. of Math. (2) 184 (2016年)，第 2 期，559–632。[Kal19a] ，*On L-embeddings and double covers of tori over local fields*，arXiv:，预印本，，。[1907.05173v2 2019] ，[Kal19b] ，*Regular supercuspidal representations*，，美国数学会会刊 (**32** 2019 4, 1071 1170)，第 – 期。[Kal19c] ，*Supercuspidal L-packets*，预印本，arXiv:1912.03274，2019年。[Kal21] ，*Lectures on the stable trace formula, with emphasis on* SL_2，未发表，可见于 http://www-personal.umich.edu/~kaletha/errata.pdf，2021年。[Kim07] J.-L. Kim，*Supercuspidal representations: an exhaustion theorem*，美国数学会会刊 20 (2007年)，第 2 期，273–320。[Kot82] R. E. Kottwitz，*Rational conjugacy classes in reductive groups*，Duke Math. J. 49 (1982年)，第 4 期，785–806。[Kot86] ，*Stable trace formula: elliptic singular terms*，，Math. Ann. (**275** 1986 3, 365 399)，第 – 期。

[KS99] R. E. Kottwitz 和 D. Shelstad, *Foundations of twisted endoscopy*, Ast´erisque（1999），第 255 期，vi+190。[KS12]， *On splitting invariants and sign conventions in endoscopic transfer*，预印本，arXiv:1201.5658，2012年。[Lab04] J.-P. Labesse, *Stable twisted trace formula: elliptic terms*, J. Inst. Math. Jussieu 3（2004），第 4 期，473–530。[Lan89] R. P. Langlands, *On the classification of irreducible representations of real algebraic groups*，《半单李群上的表示论与调和分析》，Math. Surveys Monogr.，第 31 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛，1989年，第 101–170 页。[LH17] B. Lemaire 和 G. Henniart, *Représentations des espaces tordus sur un groupe réductif connexe* p*-adique* ´ 2017 386, +366，Asterisque（），第 ix 期。[Li13] W.-W. Li, *On a pairing of Goldberg-Shahidi for even orthogonal groups*, Represent. Theory 17（2013年），337–381。[LS87] R. P. Langlands 和 D. Shelstad, *On the definition of transfer factors*, Math. Ann. 278（1987），第 1-4 期，219–271。[LS90] R. Langlands 和 D. Shelstad, *Descent for transfer factors*, The Grothendieck Festschrift，第 II 卷，Progr. Math.，第 87 卷，Birkh¨auser Boston，波士顿，马萨诸塞州，1990年，第 485–563 页。[Mez13] P. Mezo, *Character identities in the twisted endoscopy of real reductive groups*, Mem. Amer. Math. Soc. 222（2013年），第 1042 期，vi+94。[Mok15] C. P. Mok, *Endoscopic classification of representations of quasi-split unitary groups*, Mem. Amer. Math. Soc. 235（2015年），第 1108 期，vi+248。[MW16] C. Mœglin 和 J.-L. Waldspurger, *Stabilisation de la formule des traces tordue. Vol. 1*, Progress in Mathematics，第 316 卷，Birkh¨auser/Springer，查姆，2016年。[Ngˆo10] B. C. Ngˆo, *Le lemme fondamental pour les algèbres de Lie*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.（2010年），第 111 期，1–169。[Oi23] M. Oi, *Twisted endoscopic character relation for toral supercuspidal L-packets of classical groups* https://masaooi.github.io/TECR.pdf 2023，预印本，见，。[Oi25]， *Twisted character formula for toral supercuspidal representations*，预印本，arXiv:2512.20525，2025年。[OT21] M. Oi 和 K. Tokimoto, *Local Langlands correspondence for regular supercuspidal representations of GL n* 2021 3, 2007 2073（），Int. Math. Res. Not. IMRN（），第 – 期。[Pra99] D. Prasad, *Some remarks on representations of a division algebra and of the Galois group of a local field* **74** 1999 1, 73 97，J. Number Theory（）第 – 期。[Sha90] F. Shahidi, *A proof of Langlands' conjecture on Plancherel measures; complementary series for p-adic groups* 2 **132** 1990 2, 273 330，Ann. of Math.（）（），第 – 期。[Spi08] L. Spice, *Topological Jordan decompositions*, J. Algebra 319（2008年），第 8 期，3141–3163。[Spi18]， *Explicit asymptotic expansions for tame supercuspidal characters*, Compos. Math. 154（2018年），第 11 期，2305–2378。[Spi21]， *Explicit asymptotic expansions in p-adic harmonic analysis II* arXiv:2108.12935 2021，预印本，，。[Tam16] K.-F. Tam, *Admissible embeddings of L-tori and the essentially tame local Langlands correspondence* 2016 6, 1695 1775，Int. Math. Res. Not. IMRN（），第 – 期。[Tat79] J. Tate, *Number theoretic background*，《自守形式、表示与 L-函数》（研讨会纯数学论文集，俄勒冈州立大学，科瓦利斯，俄勒冈州，1977），第 2 部分，Proc. Sympos. Pure Math.，XXXIII，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛，1979年，第 3–26 页。[Tok23] K. Tokimoto, *Local Jacquet–Langlands correspondence for regular supercuspidal representations* arXiv:2303.02354 2023，，预印本，。[Wal95] J.-L. Waldspurger, *Une formule des traces locale pour les algèbres de Lie p-adiques*, J. Reine Angew. Math. 465（1995），41–99。[Wal97]， *Le lemme fondamental implique le transfert*, Compositio Math. 105（1997），第 2 期，153–236。[Wal06]， *Endoscopie et changement de caractéristique*, J. Inst. Math. Jussieu 5（2006年），第 3 期，423–525。[Wal08]， *L'endoscopie tordue n'est pas si tordue*, Mem. Amer. Math. Soc. 194（2008年），第 908 期，x+261。[Wal09]， *Errata* https://webusers.imj-prg.fr/~jean-loup.waldspurger/errata03112009.pdf 2009，未发表，见，。

[Wal10] , *Les facteurs de transfert pour les groupes classiques: un formulaire*, Manuscripta Math.**133** (2010), 第1-2期，41–82。[Yu01] J.-K. Yu, *Construction of tame supercuspidal representations*，《美国数学会会刊》**14** (2001年)，第3期，579–622。[Yu09] , *On the local Langlands correspondence for tori*《关于约化素数 p 进群的可容许表示的渥太华讲座》，《菲尔兹研究所专著》，第26卷，美国数学会，普罗维登斯（罗得岛州），2009年，第177–183页。[Zha20] C. Zhang, *Distinguished regular supercuspidal representations*，《数学年刊》**376**(2020), 第3-4期，1561–1598。

Department of Mathematics, National Taiwan University, Astronomy MathematicsBuilding 5F, No. 1, Sec. 4, Roosevelt Rd., Taipei 10617, Taiwan.*Email address*: masaooi@ntu.edu.tw