arXiv:2603.15145v1 [math.MG] 16 Mar 2026

oloid 的转动惯量张量

Sander G.Huisman*Physics of Fluids Department,*
Max Planck Center for Complex Fluid Dynamics,
and J. M. Burgers Centre for Fluid Dynamics, University of Twente,
P.O. Box 217, 7500AE Enschede, The Netherlands（日期：2026年3月17日）

oloid 定义为两个位于垂直平面内的单位圆的凸包，其中每个圆都经过另一个圆的圆心。本文推导了均匀密度 oloid 的转动惯量张量解析表达式，并通过数值计算验证了结果。

I. 引言

oloid 由 Paul Schatz 于 1929年 提出。它由两个位于垂直平面内的单位圆的凸包构成，其中每个圆都经过另一个圆的圆心。其基本构造及由此形成的几何形状如图 1 所示。oloid 是一种可展滚子，具体而言，它属于所谓的双圆滚子这一类，同时也与球锥体、polycons 和 platonicons 密切相关。这类颗粒甚至经过定制，以沿特定路径运动 [1]。流体力学领域也曾利用 oloid 研究此类颗粒在流体中的沉降 [2]。

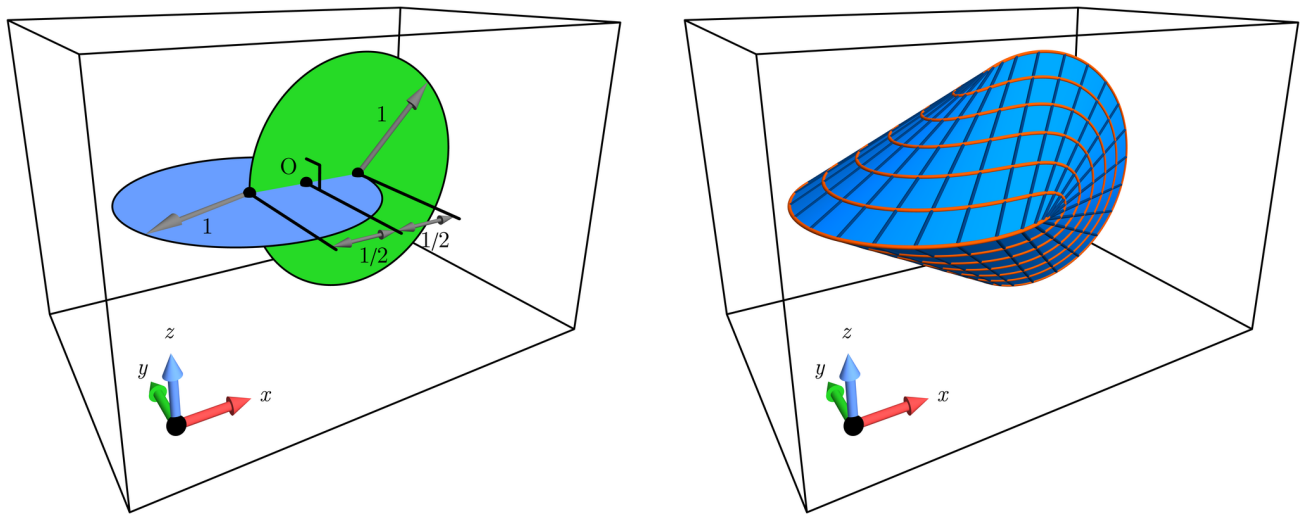

图 1：左：两个相交圆的几何形状，此处以彩色圆盘表示。两个单位圆位于垂直平面内，其圆心与原点 O 的距离为 $1/2$ 。右：左图所示构形的凸包，并添加了网格以展示三维表面。橙色网格线对应 m 为常数，蓝色网格线对应 t 为常数。两幅图均标出了坐标轴 x、 y 和 z 的方向，参见左下角的日晷指针。原点（O）位于该形状的几何中心，与质心重合。

我们将原点（O）设在两个圆心的中点处，因此圆心与原点的距离为 $1/2$ 。于是，凸包可参数化地描述为 [3]:

$$P(m,t) = \begin{pmatrix} x(m,t) \\ y(m,t) \\ z(m,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{m}{\cos(t)+1} + (m-1)\cos(t) \\ (1-m)\sin(t) \\ \pm\frac{m\sqrt{2\cos(t)+1}}{\cos(t)+1} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

其中 $0 \le m \le 1$ 和 $-2\pi/3 \le t \le 2\pi/3$。这里的 $\pm$ 描述了包络的上半部分和下半部分；将两者结合即可得到完整的包络。此前已有研究表明，该物体的面积为 $A = 4\pi$ [3]。那篇论文还报告了体积的数值。这里我们将结果表示为两个椭圆积分之和（这

可以通过对其公式 32 进行符号积分求得）：

$$V = \frac{2}{3}K\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{4}{3}E\left(\frac{3}{4}\right) = 3.05241846842437\ldots \tag{2}$$

w这里 K 和 E 分别表示第一类和第二类完全椭圆积分 ly:

$$K(m) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - m\sin(\theta)^2}} \mathrm{d}\theta \tag{3}$$

$$E(m) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - m\sin(\theta)^2} \mathrm{d}\theta. \tag{4}$$

对转动 oloid 的动力学建模需要转动惯量张量，该张量由 9 个分量组成 s:

$$I_{ij} = \iiint_V \rho\left(x_k x_k \delta_{ij} - x_i x_j\right) \mathrm{d}V = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \tag{5}$$

这里我们采用爱因斯坦求和约定，并假设从现在起 $\rho = 1$ （均匀单位密度）。我们知道该张量是对称的，因此最多只需确定 6 个不同的元素（3 个对角元素和 3 个非对角元素）。我们按照图 1 选择坐标轴，原点（O）与质心重合。oloid 的两个对称平面的交线所定义的坐标轴（沿着穿过原点 O 的 x 方向）是一条主轴。其余两条坐标轴可自由选择（但必须彼此垂直，且都垂直于第一条坐标轴）。为方便起见，我们使它们与圆所在的平面对齐。选择主轴后，转动惯量张量得以简化，所有非对角项均为零：

$$I_{ij} = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

或者，也可以根据转动惯量的定义（均匀单位密度）得出：

$$I_{xy} = \iiint_V xy \mathrm{d}V \tag{7}$$

由于物体关于 $y \to -y$ 对称，这一变换意味着：

$$I_{xy} = -I_{xy} \tag{8}$$

由此我们得出该值必为 0。对于 I_{yz} 项也可以这样处理， I_{xz} 项亦然（因为关于 z 平面对称）；此外，由于张量是对称的， I_{yx}、 I_{zy} 和 I_{zx} 项也同样如此。

此外，由于该粒子还具有额外的对称性，我们可以看到 $I_{yy} = I_{zz}$ ，因此只需计算两个值：

$$I_{xx} = \iiint_V \left(y^2 + z^2\right) \mathrm{d}V \tag{9}$$

$$I_{yy} = \iiint_V \left(x^2 + z^2\right) \mathrm{d}V. \tag{10}$$

为了计算这些 积分中，我们使用散度定理将体积分转换为曲面积分 l:

$$I_{xx} = \oiint_S \begin{pmatrix} x\left(y^2 + z^2\right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \tag{11}$$

$$I_{yy} = \oiint_S \begin{pmatrix} 0 \\ y\left(x^2 + z^2\right) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \tag{12}$$

其中， S 是 V 的曲面，$\mathrm{d}S$ 是微元面积与局部外向法向量的乘积。使用曲面的参数表示，可得：

$$I_{xx} = \oiint_S \begin{pmatrix} x\left(y^2+z^2\right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 2\int_0^1 \int_{-2\pi/3}^{2\pi/3} \begin{pmatrix} x\left(y^2+z^2\right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}m} \times \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}\right) \mathrm{d}t\mathrm{d}m \tag{13}$$

$$I_{yy} = \oiint_S \begin{pmatrix} 0 \\ y\left(x^2+z^2\right) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 2\int_0^1 \int_{-2\pi/3}^{2\pi/3} \begin{pmatrix} 0 \\ y\left(x^2+z^2\right) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}m} \times \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}\right) \mathrm{d}t\mathrm{d}m \tag{14}$$

其中，因子 2 是为了计入曲面的上部和下部。现在计算最后一个括号中的项；即曲面切向量的叉积（这里我们采用上壳的参数化；式 1 中 z 分量的 $+$ 版本）：

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}m} = \begin{pmatrix} \cos(t) + \frac{1}{\cos(t)+1} \\ -\sin(t) \\ \frac{\sqrt{2\cos(t)+1}}{\cos(t)+1} \end{pmatrix} \tag{15}$$

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} \sin(t)\left(m\left(\frac{1}{(\cos(t)+1)^2}-1\right)+1\right) \\ (1-m)\cos(t) \\ \frac{m\sin(t)\cos(t)}{(\cos(t)+1)^2\sqrt{2\cos(t)+1}} \end{pmatrix}. \tag{16}$$

于是有：

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}m} \times \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} \frac{\cos(t)((3m-2)\cos(t)-1)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)^2\sqrt{2\cos(t)+1}} \\ \frac{\sin(t)((2-3m)\cos(t)+1)}{(\cos(t)+1)\sqrt{2\cos(t)+1}} \\ \frac{(2-3m)\cos(t)+1}{\cos(t)+1} \end{pmatrix}. \tag{17}$$

现在，我们已具备计算式 13 和 14 中积分所需的全部要素。注意， x、 y 和 z 均以 m 和 t 表示，见式 1。代入所有项后，得到：

$$I_{xx} = \int_0^1 \int_{-2\pi/3}^{2\pi/3} \frac{\cos(t)((3m-2)\cos(t)-1)\left(\frac{m}{\cos(t)+1}+(m-1)\cos(t)-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{m^2(2\cos(t)+1)}{(\cos(t)+1)^2}+(m-1)^2\sin(t)^2\right)}{\cos\left(\frac{t}{2}\right)^2\sqrt{2\cos(t)+1}}\mathrm{d}t\mathrm{d}m \tag{18}$$

$$I_{yy} = \int_0^1 \int_{-2\pi/3}^{2\pi/3} \frac{2(1-m)\sin(t)^2((2-3m)\cos(t)+1)\left((m-1)^2\cos(t)^2-(m-1)\cos(t)+m\left(2m+\frac{1}{\cos(t)+1}-2\right)+\frac{1}{4}\right)}{(\cos(t)+1)\sqrt{2\cos(t)+1}}\mathrm{d}t\mathrm{d}m. \tag{19}$$

对 m 积分得到的是一个四次多项式，结果为：

$$I_{xx} = \int_{-2\pi/3}^{2\pi/3} -\frac{\cos(t)^2(-2510\cos(t)+547\cos(2t)+1129\cos(3t)+648\cos(4t)+181\cos(5t)+21\cos(6t)-1744)}{15360\cos\left(\frac{t}{2}\right)^8\sqrt{2\cos(t)+1}}\mathrm{d}t \tag{20}$$

$$I_{yy} = \int_{-2\pi/3}^{2\pi/3} \frac{(542\cos(t)+322\cos(2t)+122\cos(3t)+21\cos(4t)+361)\tan\left(\frac{t}{2}\right)^2}{240\sqrt{2\cos(t)+1}}\mathrm{d}t. \tag{21}$$

这些表示 可以相对于 t 手动积分，或使用计算机代数系统（CAS）：

$$I_{xx} = \frac{32}{45}E\left(\frac{3}{4}\right) - \frac{2}{45}K\left(\frac{3}{4}\right) = 0.76535025749314262939\ldots \tag{22}$$

$$I_{yy} = I_{zz} = \frac{71}{45}E\left(\frac{3}{4}\right) - \frac{19}{90}K\left(\frac{3}{4}\right) = 1.45551287346920034498\ldots \tag{23}$$

要精确计算这些常数，可以利用椭圆积分与高斯算术-几何平均（AGM）之间的联系，构造一个二次收敛的算法。我们通过对公式 18 和 19 进行数值积分，验证了这些数值。此外，对包络内部生成 10^6 随机点并计算转动惯量的蒙特卡洛模拟，也将这些数值验证到了小数点后两位。对于由半径为 r 的圆构成、密度为单位密度的 oloid，其转动惯量为：

$$I(r) = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix} r^5. \tag{24}$$

致谢

我们感谢 Mees Flapper、Detlef Lohse、Bernhard Mehlig、John Sader、Federico Toschi、Leen van Wijngaarden、Xanderde Wit 和 Greg Voth 就 oloid 展开的启发性讨论。

---

[1] Y. I. Sobolev、R. Dong、T. Tlusty、J.-P. Eckmann、S. Granick 和 B. A. Grzybowski，《自然》**620**, 310 (2023). [2] M. M. Flapper、G. Piumini、R. Verzicco、S. G. Huisman 和 D. Lohse，arXiv 预印本 arXiv:2511.05137 (2025). [3] H. Dirnb¨ock 和 H. Stachel，J. Geom. Graph **1**, 105 (1997)。

附录：面积计算

求 oloid 的面　积可通过对公式 17 中法向量的模进行积分求得：

$$A = 2\int_0^1 \int_{-2\pi/3}^{2\pi/3} \left|\left| \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}m} \times \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} \right|\right| \mathrm{d}t\mathrm{d}m \tag{25}$$

$$A = \int_0^1 \int_{-2\pi/3}^{2\pi/3} \frac{(4-6m)\cos(t)+1}{\cos\left(\frac{t}{2}\right)\sqrt{2\cos(t)+1}} \mathrm{d}t\mathrm{d}m \tag{26}$$

$$A = \int_{-2\pi/3}^{2\pi/3} \frac{\cos(t)+2}{\cos\left(\frac{t}{2}\right)\sqrt{2\cos(t)+1}} \mathrm{d}t \tag{27}$$

$$A = 4\pi \tag{28}$$

验证了参考文献 [3] 中的结果。