arXiv:2603.15165v1 [math.AT] 16 Mar 2026

树的燃烧及其同调

Yuri Muranov Anna Muranova 瓦尔米亚大学和瓦尔米亚大学及马祖里大学（波兰奥尔什丁）波兰奥尔什丁

2026年3月17日

摘要

图燃烧问题最初被提出，作为社会及网络互动中不同过程的一种模型。近期，本文作者开发了代数拓扑方法，用于研究这一问题。该方法基于对燃烧过程的一种新定义，该定义排除了在任意时刻选择此刻已燃烧的顶点集中的顶点进行燃烧的可能性。

本文继续运用代数拓扑方法研究这类燃烧过程。我们证明了图的燃烧与其生成树的燃烧之间关系的一个结果，该结果与经典情形类似。随后，我们描述树燃烧的性质。特别地，我们证明树的燃烧在树上定义了一种有向图结构，并对这一结构进行研究。我们引入并研究图的强燃烧构形空间以及一种新的强燃烧同调；它们与我们在前文定义的燃烧同调类似，但源自燃烧同态。

关键词： 图的同调、单纯同调、单纯复形、图燃烧、有向图、路径图、燃烧时间、树、生成树、燃烧同态。

2020年美国数学学会数学主题分类：55N35、18G85、18N50、94C15、68R10、05C25、05C90、05C38、05C20、05C05。

1 引言

图燃烧问题最早在 [2]中提出。该模型描述了社会和网络互动中的各种过程，另见 [1], [3]。定理 2.4 和推论 2.5] 的结果 [3, 说明了树在燃烧理论中的重要性，它们描述了连通图的燃烧与

G 其某些生成树的燃烧之间的关系。特别是，由该结果可知， G 的任何一种燃烧都会对应一棵生成树的燃烧，尽管一般而言，燃烧并不能唯一确定一棵生成树。

[2, 3] 中燃烧过程的定义允许在时刻 t 选择一个在时刻 $t+1$ 已燃烧的顶点，使其在时刻 $t+1$ 也燃烧（详情见[12] ）。在 [12] 中，我们引入了若干与燃烧过程密切相关的图的滤过，并定义了一种燃烧过程，该过程排除了在时刻 $t+1$ 从此时已燃烧的顶点集合中选择顶点进行燃烧的可能性。

本文继续研究 [12]意义下的燃烧过程。我们先在第 2 节介绍预备知识。在第 3 节中，我们证明了图的燃烧与其生成树的燃烧之间关系的结果，该结果类似于 [3, 定理 2.4、推论 2.5]。这一方向的主要结果由定理 3.2 给出。不过，正如注记 3.3 所述，我们的证明与 [3, 定理 2.4] 的证明存在本质区别。因此，定理 3.2 将图燃烧的研究归结为树的燃烧。第 4 节定义燃烧同态，并讨论其在树上的存在性。第 5 节描述树燃烧可能的结束时间，以及燃烧同态情形下燃烧序列的性质。特别地，我们得到了路径图 P_n， $n \in \mathbb{N}$的燃烧同态结束时间的精确上下界，见定理 5.4。第 6 节证明树的燃烧在树上定义了一种有向图结构，并研究这一结构的性质。最后，在第 7 节中，我们引入并研究图的强燃烧构形空间和强同调；它们类似于 [12]中定义的燃烧同调。

2 预备知识

2.1 图论的基本概念

本节回顾图论的基本概念，参见例如 [4, 6, 7, 8]。

定义 2.1. 图 $G = (V_G, E_G)$ 是一个非空有限集合 V_G，其元素为顶点，并配有一个集合 E_G，其中包含由不同顶点组成的无序对 $\{v, w\} \in E_G$，$w \in V_G$ 称为边。两个不同的顶点若由一条边连接，则称它们相邻。如果某个顶点是某条边的端点之一，则称该顶点与该边关联。所有与顶点 v 关联的顶点称为v的邻点。

有时，如果上下文中图的含义明确，我们会省略顶点集合 G和边集合 E_G 中的下标 V_G。

定义 2.2. 我们称图 H 是图 G 的子图，并记作$H \subset G$，如果 $V_H \subset V_G$ 且 $E_H \subset E_G$。子图 $H \subset G$ 是导出子图，如果对任意边 $\{v, w\} \in E_G$，只要 $v, w \in V_H$就有 $\{v, w\} \in E_H$。在这种情况下，我们记作 $H \sqsubset G$。对于子图 $H \subset G$，我们用 $H \sqsubset G$ 表示其顶点集与 H相同的导出子图。

定义 2.3. 从图 G 到图 H 的图映射 $f\colon G \to H$ 是一个顶点映射 $f|_{V_G}\colon V_G \to V_H$，满足对任意边 $\{v,w\} \in E_G$，有$\{f(v)\ f(w)\} \in E_H$或 $f(v) = f(w) \in V_H$。若对任意 $\{v,w\} \in E_G$ 都有 $\{f(v)\ f(w)\} \in E_H$，则称映射 f 为同态。对于图 G，我们用 $\mathrm{Id}_G\colon G \to G$ 表示恒等映射（同态），它在顶点集和边集上均为恒等映射。

定义 2.4. (i) 对于 $n \geq 1$，图 $G = (V,E)$ 中的一条路径是由顶点 $v_i \in V$ 和边 $a_i \in E$组成的交替序列 $v_0, a_1, v_1, a_2, \ldots, v_{n-1}, a_n, v_n$，满足 $a_i = \{v_{i-1}, v_i\}$ 对于 $i = 1, \ldots, n$ 成立，并且 $v_i \neq v_j$ 对所有互不相同的 $i,j = 0, \ldots, n$ 成立。对于 $n = 0$，一条路径由一个顶点 $v_0 \in V$ 给出。整数 n 是该路径的长度。顶点 v_0 是路径的起点，顶点 v_n 是路径的终点。

(ii) 对于 $n \geq 3$，图 $G = (V,E)$ 中的一个回路是由顶点 $v_i \in V$ 和边 $a_i \in E$组成的交替序列$v_0, a_1, v_1, a_2, \ldots, v_{n-1}, a_n, v_0 = v_n$，满足$a_i = \{v_{i-1}, v_i\}$ 对于 $i = 1, \ldots, n$ 成立，并且 $v_i \neq v_j$ 对所有互不相同的 $i,j = 1, \ldots, n$ 成立。对于$n < 3$，回路未定义。

定义 2.5. (i) 图 $G = (V,\ E)$ 是连通的，如果任意两个不同的顶点 $v,\ w \in V$ 之间都存在一条路径，使得 $v_0 = v$ 是起点，$v_n = w$ 是路径终点。

(ii) 连通图 G 如果不包含回路，就是一棵树。

(iii) 路径图 P_n（其中 n 是正整数）是一个图，其顶点集为 $\{1, \ldots, n\}$，边集为 $\{i, i+1\}$，其中 $i = 1,$ ....., $n-1$。

定义 2.6. 设 $G = (V,\ E)$ 是一个图。

(i) G 的子图 T 若为一棵树，则称其为 G 的子树。(ii) G的子树 $T = (V_T,\ E_T)$ 若满足 $V_T = V$，则称其为 G的生成树。(iii) 若 G 是 Q的子树，则称树 Q 为 G的环境树。

以下引理众所周知，几乎可以直接由上述定义推出。

引理 2.7. 图 $T = (V_T, E_T)$ 是树，当且仅当任意两个不同的顶点 $v, w \in V_T$之间恰好存在一条路径 $v = v_0, a_1, v_1, a_2, \ldots, v_n = w$。

定义 2.8. 对于图 $G = (V,E)$，两个顶点 $v,w \in V$ 之间的距离 $d_G(v,w)$是连接这两个顶点的最短路径所包含的边数。若不存在连接顶点 $v,w \in V$的路径，则令 $d_G(v,w) = \infty$。

定义 2.9. 设 $G = (V_G, E_G)$ 是一个图，且 $k \in \mathbb{N}$。

(i) 对于整数 $n \geq 0$，顶点 $v \in V_G$ 的第 n 阶闭邻域 是一个导出子图，其顶点集为 $\{w \in V_G | \, d_G(v,w) \leq n\}$。我们将该邻域记为 $N_n(v)$。

(ii) 诱导子图的第 n 个闭邻域 是满足 $d_G(v,\ w) \leq n\}$. 的顶点集 $\{w \in V_G | \, \exists\, v \in V_H$。我们将该邻域记为 $N_n(H)$。

定义 2.10。设 $H_i=(V_i,\ E_i)(i=1,\ 2)$ 是图 G 的两个子图。诱导并 $H_1 \Cup H_2$ 是由顶点集 $\widehat{\ \ \ \ }$ $V_1 \cup V_2$ 在 G 中生成的导出子图。它等于导出子图 $H_1 \cup H_2$。

定义 2.11. </style}设 (, E_G) 和 $H=(V_H, E_H)$ 为两个图。不交并 $G+H=(V, E)$ 是一个图，其顶点集为集合$V=V_G \sqcup V_H$，边集为集合 $E=E_G \sqcup E_H$。

2.2 图燃烧及相应的图滤过

本节回顾 [12] 中给出的图燃烧 定义及相关概念。

设 $G=(V_G, E_G)$ 为一个图， $S_G=(v_1, \ldots, v_n)$ 为一个非空顶点有序集。对于 $1 \leq j \leq n$，考虑由下式定义的诱导子图集 $\mathcal{N}_j \sqsubset G$

$$\mathcal{N}_j = N_{j-1}(v_1) \Cup N_{j-2}(v_2) \Cup \cdots \Cup N_1(v_{j-1}) \Cup N_0(v_j). \tag{2.1}$$

注意到

$$\mathcal{N}_1=\{v_1\},\ \mathcal{N}_2=N_1(v_1) \Cup \{v_2\},\ \text{and}\ \ \mathcal{N}_3=N_2(v_1) \Cup N_1(v_2) \Cup \{v_3\}.$$

对于 $2 \leq j \leq n+1$，令 U_j 为 G 的导出子图，由下式给出

$$U_j = N_{j-1}(v_1) \Cup N_{j-2}(v_2) \Cup \cdots \Cup N_1(v_{j-1}). \tag{2.2}$$

我们注意到，对于 $2 \leq j \leq n$，图 U_j 的顶点集 V_{U_j} 由图 $\mathcal{N}_j$ 的顶点集 $V_{\mathcal{N}_j}$ 删除顶点 v_j得到。

由 (2.1) 和 (2.2) 可立即得到如下由导出子图的包含映射构成的交换图

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\mathcal{N}_1 & \sqsubset & \mathcal{N}_2 & \sqsubset & \mathcal{N}_3 & \sqsubset \cdots \sqsubset & \mathcal{N}_n & \sqsubset & G & & \\
 & & \sqcup & & \sqcup & \ldots & \sqcup & & \sqcup & & \\
 & & U_2 & \sqsubset & U_3 & \sqsubset \cdots \sqsubset & U_n & \sqsubset & U_{n+1} & \sqsubset G & \\
 & & \sqcup & & \sqcup & \ldots & \sqcup & & \sqcup & \| & \\
 & & \mathcal{N}_1 & \sqsubset & \mathcal{N}_2 & \sqsubset \cdots \sqsubset & \mathcal{N}_{n-1} & \sqsubset & \mathcal{N}_n & \sqsubset G &
\end{array} \tag{2.3}$$

其中，各行给出了图 G的两个由导出子图构成的滤过。

定义 2.12。设 $G=(V, E)$ 是一个图， $S_G=(v_1, \ldots, v_n)$ 是一个非空的顶点有序集。若在图表 (2.3) 中 $v_j \notin U_j$ for $2 \leq j \leq n$ and $U_{n+1}=G$，则称序列 S_G 为一个燃烧序列。 S_G 的元素称为燃烧源。顶点 v_i 称为时刻 i的源。$\widehat{\ }$对于每个燃烧序列 S_G，记其对应的燃烧源集合为 $S_G=\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$。

令 $\mathbb{N}$ 为正整数集合。燃烧序列 S_G 定义交换图 (2.3)。令 $\mathcal{N}_{n+1}$:
$=U_{n+1}=G$，我们得到 G 的一个滤过

$$\mathcal{N}_1 \sqsubset \mathcal{N}_2 \sqsubset \cdots \sqsubset \mathcal{N}_n \sqsubset \mathcal{N}_{n+1}=G \tag{2.4}$$

它对应于燃烧序列 S_G。我们定义函数 λ_G: $V_G \to \mathbb{N}$，其中

$$\lambda_G(v) = \min\{i \mid v \in \mathcal{N}_i\} \tag{2.5}$$

由滤过 (2.4) 立即可知，函数 λ_G 定义良好。

我们称一对 $\mathbf{B}(G) = (\lambda_G, S_G)$ 为图 G 的燃烧（过程）。此外，对于顶点 $v \in V_G$，我们将值 $\lambda_G(v)$ 称为该顶点 v 的燃烧时间。

定理 *2.13*（[12] 中的引理 *3.2* 和定理 *3.5*）。设 $G = (V, E)$ 是一个图，且 $B(G) = (\lambda_G, S_G)$ 是其燃烧。那么，函数 $\lambda_G = \lambda(B(G))$ 是一个从顶点集 V 到集合 $\{1, 2, \ldots, T\}$ 的满射，其中 $T = n$ 或 $T = n + 1$。此外，λ_G 定义了一个唯一的图映射 $G \to P_{\mathbf{T}}$，它在图 G 的顶点集 V 上与 λ_G 一致。我们仍将此图映射记为 $\lambda_G = \lambda(B(G))$。

我们将整数$\mathbf{T}$称为燃烧的结束时间。如果该过程在时间$\mathbf{T}$结束，我们记作 $\mathbf{B^T}(G)$。我们用 $\lambda(\mathbf{B^T}(G))$ 表示与过程 $\mathbf{B^T}(G)$ 对应的函数 λ_G。

引理 2.14 ([12]中的引理 3.4)。设 $G = (V, E)$ 是一个带有燃烧$\mathbf{B}(G) = (\lambda, S_G)$的图。设 $v, w \in V$ 是邻点，即 $\{v, w\} \in E$。那么，对于任意两个相邻顶点 $v, w \in V$，都有 $|\lambda(v) - \lambda(w)| \in \{0, 1\}$。

定义 2.15。设 G 是一个图，且$\mathbf{B^T}(G)$ 是一个燃烧过程。图映射（同态）$\lambda = \lambda(\mathbf{B^T}(G))$ 称为燃烧映射（同态）。

我们还需要以下由引理 2.14 和定义 2.3 直接得到的推论。

推论 2.16。设 $G = (V, E)$ 是一个图，且 $\mathbf{B^T}(G)$ 是它的燃烧。那么，映射 $\lambda = \lambda(\mathbf{B^T}(G))$ 是燃烧同态，当且仅当对于任意两个相邻顶点 $v, w \in V$，都有 $|\lambda(v) - \lambda(w)| = 1$。

最后，我们提醒一下，不同图的燃烧之间存在函子关系。设 (λ_G, S_G) 和 (λ_H, S_H) 分别是图 G 和 H 的两种燃烧，其源序列分别为 $S_G = (v_1, \ldots, v_k)$ 和 $S_H = (w_1, \ldots, w_m)$，其中 $m \geq k \geq 1$。对于 $2 \leq j \leq k + 1$，令 U_j 为在 (2.2) 中定义的 G 的导出子图。对于 $2 \leq j \leq k + 1$，令 $W_j \sqsubset H$ 为由下式定义的 H 的导出子图

$$W_j = N_{j-1}(w_1) \Cup N_{j-2}(w_2) \Cup \cdots \Cup N_1(w_{j-1}). \tag{2.6}$$

定义 2.17. 设 G、H 是图，$\mathbf{B}(G)$、$\mathbf{B}(H)$是如上所述的两个燃烧。图映射 f: $G \to H$ 称为燃烧态射，并记作 $f: \mathbf{B}(G) \to \mathbf{B}(H)$，若 $k \leq m$, $f(v_i) = w_i$ 对 $1 \leq i \leq k$成立，且存在一个由图映射构成的交换图

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & H \\ \lambda_G \downarrow & & \downarrow \lambda_H \\ P_{T^G} & \xrightarrow{\tau} & P_{T^H}, \end{array} \tag{2.7}$$

其中， T^G 和 T^H 分别是图 G 和 H 的燃烧的燃烧时间。因此，特别地， $f(U_j) \subset W_j$ 对 $2 \leq j \leq k+1$ 成立。

3 生成树的燃烧

在本节中，我们将描述图的燃烧与其生成树的燃烧之间的关系，这里所说的燃烧是前一节定义的燃烧。本节的主要结果是定理 3.2，它指出，图的任意燃烧 G 都定义了其生成树的一种燃烧，但这种燃烧通常并不唯一。回顾一下，连通图 G 的一个生成树是包含 G 所有顶点的子图树。

定义 2.12 中的燃烧过程不同于 [3, 引言]中描述的燃烧过程。特别地，根据我们的定义，源点 v_i 与 v_j 之间的距离满足条件 $d(v_i, v_j) \geq |i-j|+1$，这与 [3] 中的情形相反，在那里 $d(v_i, v_j) \geq |i-j|$。下面定理 3.2 的证明与 [3] 中给出的证明类似，但存在一个本质区别，正如我们在注记 3.3 中所指出的。首先，我们陈述并证明一个技术引理。

引理 3.1. 设 $G=(V,E)$ 是一个连通图， S_G 是一个燃烧序列 $(v_1, \ldots, v_n)$，对应于 G 的一次燃烧 (λ, S_G)。那么，对任意顶点 $w \in V$，有

$$d(v_k, w) \geq |\lambda(v_k) - \lambda(w)|. \tag{3.1}$$

证明。设 p 是从顶点 v_k 到顶点 w 的一条路径，其长度为 $d = d(v_k, w)$。由于图是连通的，该长度有限。根据定理 2.13，函数 λ 是一个图映射 $\lambda: G \to P_{\mathbf{T}}$，其中 $P_{\mathbf{T}}$ 是路径图。将 λ 限制在路径 p 上，得到子图 $P \subset G$ 的路径映射 $\lambda_P: P \to P_{\mathbf{T}}$，该子图由 p 生成。图 P 是长度为 d 的路径图，其像是 $P_{\mathbf{T}}$ 的路径子图。因此，顶点 $v_k, w \in V_P$ 的像 $\lambda(v_k)$ 和 $\lambda(w)$ 之间的距离小于或等于距离 $d(v_k, w)$。也就是说， $d(v_k, w) \geq |\lambda(v_k) - \lambda(w)|$. ■

定理 3.2. 设 $G=(V,E)$ 是一个连通图，且 S_G 是 G 的一种燃烧 λ) 的燃烧序列 $(v_1, \ldots, v_n)$。那么存在一棵生成树 $T \subset G$，使得 S_G 是 T 的某种燃烧的燃烧序列。

证明。设 S_G 是 S_G 的元素集合。对于任意顶点 $w \in G$，我们定义集合 $V_w \subset S_G$ 为

$$V_w = \{v_k \in S_G \mid \lambda(w) = \lambda(v_k) + d(v_k, w)\}. \tag{3.2}$$

由 (3.2) 可知， $v_j \in V_{v_j}$ 因为 $\lambda(v_j) = j$ 且 $d(v_j, v_j) = 0$。令 $2 \leq j \leq n$。根据定义 2.12，顶点 v_j 不属于 (2.2) 中定义的 U_j。因此，对于 $1 \leq k \leq j-1$，由 (2.2) 得 $v_j \notin N_{j-k}(v_k)$。也就是说，对于这样的 k， $d(v_j, v_k) > j-k$ 且

$$\lambda(v_k) + d(v_j, v_k) = k + d(v_j, v_k) > k + j - k = j = \lambda(v_j).$$

因此， $v_k \notin V_{v_j}$ 对于 $1 \le k \le j-1$。对于 $j < k \le n$， $d(v_j,\ v_k) > 1$ 且

$$\lambda(v_k) + d(v_j, v_k) = k + d(v_j, v_k) > j = \lambda(v_j).$$

因此，对于 $v_k \notin V_{v_j}$ $k > j$。由此我们得到

$$V_{v_k} = \{v_k\} \text{ for every burning source } v_k \in \widehat{S}_G. \tag{3.3}$$

现在我们来验证，对于任意顶点 $w \in V$，集合 V_w 非空。固定一个 $\widehat{\ }$ 顶点 $w \in V$。我们已经证明了关于 $w \in S_G$ 的这一结论。固定一个顶点 $\sim w \in V$，使得 $w \notin S_G$，并令 $\lambda(w) = j$。根据定义 2.12 和关系 (2.2)，我们有 $U_{n+1} = G$。令 $U_1 = \{v_1\} = N_0(v_1)$。根据 (2.2) 和 2.1)，存在一个最小值 $j\,(2 \le j \le n+1)$，使得

$$w \in U_j = N_{j-1}(v_1) \Cup N_{j-2}(v_2) \Cup \cdots \Cup N_2(v_{j-2}) \Cup N_1(v_{j-1}) \tag{3.4}$$

and

$$w \notin U_{j-1} = \begin{cases} N_0(v_1) & \text{for } \ j = 2, \\ N_{j-2}(v_1) \Cup N_{j-3}(v_2) \Cup \cdots \Cup N_1(v_{j-2}) & \text{for } j > 2. \end{cases} \tag{3.5}$$

现在，根据 (3.4) 和 (3.5)，至少存在一个数 $k(1 \le k \le j-1)$，使得 $w \in N_{j-k}(v_k)$ 且 $w \notin N_{j-k-1}(v_k)$。因此，根据定义 2.8 和定义 2.9，我们得到 $d(w, v_k) = j-k$。因此 $j = \lambda(w) = \lambda(v_k) + d(w, v_k)$ 且 $v_k \in V_w$。

对于任意顶点 $w \in V$，令 $\mu(w)$ 为满足 $v_k \in V_w$ 的 k 的最小值。我们得到一个函数

$$\mu \colon V \to \widehat{S}_G \tag{3.6}$$

由于映射 λ 定义良好，且根据 (3.3)，它是一个满同态 $\widehat{\ }$，因此该函数定义良好。对每个顶点 $v_k \in S_G$，通过令$M_k = \mu^{-1}(v_k)$来定义一个顶点子集 $M_k \subset V$。我们注意到， $v_k \in M_k$。根据定义，对于$i \ne j$，有 $M_i \cap M_j = \emptyset$。现在，对于任意 $1 \le k \le n$，我们构造一个顶点集为 $V_{T_k} = M_k$ 的子图树 $T_k \subset G$。

断言。令 $w \in M_k\,(1 \le k \le n)$，因此 $\lambda(w) = k + d(v_k,\ w)$。令 p 为一条长度为 $d = d(v_k,\ w)$ 的路径，其边两两不同，从 v_k 到 w，由下式给出

$$p = (v_k = w_0, a_1, w_1, \ldots, a_d, w_d = w) \text{ where } a_i \in E, w_i \in V. \tag{3.7}$$

然后 $w_i \in M_k$ 对于 $0 \le i \le d$。

证明。回想一下，我们已经知道 $w_0, w_d \in M_k$。根据定理 2.13，函数 λ 是一个图映射 $\lambda \colon G \to P_{\mathbf{T}}$，其中 $P_{\mathbf{T}}$ 为路径图。将 λ 限制到路径 p 上，得到子图 $P \subset G$ 的路径映射 $\lambda_P \colon P \to P_{\mathbf{T}}$，该子图由路径 p生成。图 P 是长度为 d 的路径图，其像是 $P_{\mathbf{T}}$的路径子图。由于 $w \in M_k$，我们有 $\lambda(w_0) = \lambda(v_k) = k$以及 $\lambda(w_d) = \lambda(w) = k + d$。因此，映射 λ_P 将长度为 d 的路径映射为长度为 d 的路径，所以 λ_P 是图单态。因此，对于满足 (3.7) 的顶点 w_i，我们有

$$\lambda(w_i) = k + i \text{ for } \ 0 \le i \le d \ \text{ and } v_k \in V_{w_i}. \tag{3.8}$$

假设路径 p 上存在一个顶点 $w_j (0 < j < d)$，使得对于 $q < k$，有 $w_j \in M_q$。那么

$$\lambda(w_j) = k + j = \lambda(v_q) + d(v_q, w_j) = q + d(v_q, w_j). \tag{3.9}$$

考虑一条路径

$$p' = (v_q = s_0, b_1, s_1, \ldots, b_{d'}, s_{d'} = w_j) \text{ where } s_i \in V, b_i \in E, d' = d(v_q, w_j)$$

从顶点 v_q 到顶点 w_j，长度为 $d(v_q, w_j)$。与路径 p 的情形类似，我们得出，限制 $\lambda_{p'}\colon P' \to P_{\mathbf{T}}$ 是一个单态，其中 P' 是由路径 p' 生成的图。比较映射 λ 在 P 和 P' 上的限制，并利用不等式 $\lambda(v_q) < \lambda(w_j) < \lambda(w)$，我们得到 λ 在路径上的限制

$$(v_q = s_0, b_1, s_1, \ldots, b_{d'}, s_{d'} = w_j, a_{j+1}, \ldots, a_d, w_d = w)$$

是一个单态。因此

$$d(v_q, w) = d(v_q, w_j) + d(w_j, w)$$

并进一步利用 (3.9) 以及关系 $d(w_j, w) = d - j$，我们得到

$$\lambda(w) = k + d = (k + j) + (d - j) = \lambda(w_j) + d(w_j, w)$$

$$= \lambda(v_q) + d(v_q, w_j) + d(w_j, w) = \lambda(v_q) + d(v_q, w).$$

因此，我们得到与 $w \in M_k$ 的极小性 k 矛盾。 ■

现在我们可以回到构造顶点集为 M_k 的树 T_k。对于任意 $w \in M_k$，记 $\chi(w) := d(v_k, w)$，并在 G 中固定一条从 $v_k \in M_k$ 到 $w \in M_k$ 的路径 $p_w = (v_k, a_1^w, \ldots, a_{\chi(w)}^w, w)$。令

$$m = \max_{w \in M_k} \chi(w).$$

我们定义根树序列

$$\{v_k\} = T_k^0 \subset T_k^1 \subset \cdots \subset T_k^m = T_k \tag{3.10}$$

如下。树 $T_k^1 = (M_1, E_1)$ 的边集为

$$E_1 = \{\{v_k, w\} \,|\, \chi(w) = 1\}.$$

此外，我们定义 $T_k^j = (M_j, E_j)$，其中 E_j 的定义是递归的：

$$E_j = E_{j-1} \cup \{a_{\chi(w)}^w \,|\, a_{\chi(w)}^w \text{ is the last edge of } p_w\}.$$

由上述断言可知，集合 E_j 定义良好。此外，由上述断言可通过归纳法得出 T_k^j 连通。此外，T_k^j 是一棵

树，这是引理 2.7 的结论，因为通过归纳法可知， T_k^j 中任意两个顶点之间只有一条路径。

现在，我们用树 $T_k(1 \leq k \leq n)$ 定义图 G 的生成树。对于任意两个不同的树 T_k, $T_l\,(1 \leq k,\ l \leq n)$，我们用 $E_{k,\,l}$ 表示具有形式 $\{x, y\}$ 的顶点集合，其中 $x \in M_k$, $y \in M_l$。注意，对于某些树对 $(k,\ l)$，这个集合可能为空。在每个集合 $E_{k,\,l}$ 中固定一条边 $a_{k,\,l}$。现在定义商图 $\mathbf{G} = G/\sim$，其顶点集为 $\{t_i \,|\, 1 \leq i \leq n\}$，边集由满足边 $a_{k,\,l}$ 存在的这类顶点对 $\{t_k, t_l\}$ 给出。图 $\mathbf{G}$ 是连通的，因为图 G 是连通的。考虑图 $\mathbf{G}$ 的一棵生成树$\mathbf{Q}$。现在，我们通过如下方式定义图 G 的一棵生成树 T

$$T = (V_T, E_T) \ \text{ where } V_T = V,\ E_T = \bigcup_{1 \leq k \leq n} E_{T_k} \bigcup \{a_{k,l} \,|\, \{t_k, t_l\} \in E_{\mathbf{Q}}\}.$$

由我们的构造和定义 2.12 可立即得出，燃烧序列 S_G 是树 T 的一个燃烧序列。 ■

注记 3.3. 上述定理 3.2 与 Bonato 及其合作者所陈述的定理 [3, Th. 2.4] 之间的关键区别在于，在我们的设定中，所有树T_j 都非空。这是因为我们不允许源 v_j是这样一个顶点：它无论如何都会在步骤 j 由另一个源点燃。下面用一个例子说明这一差异。考虑一个路径图P_4，其顶点为 1、2、3、4，边为 $\{i, i+1\}$。根据 Bonato 等人的方法，燃烧序列 (1、2、3、4) 是允许的，这会导致 T_2、T_3、T_4 为空。相反，在我们的设定中，模同构意义下唯一允许的燃烧序列是 (1、3)、(2、4) 和 (1、 4)，对于每个序列，树 T_1 和 T_2 都非空。

在定理 3.2 的证明末尾，我们可以省略最后一步，即构造 G 的生成树。于是得到以下结果。

推论 3.4. 设 $G = (V, E)$ 是一个图， S_G 是一次燃烧的燃烧序列$(v_1, \ldots, v_n)$，该燃烧为 G 的一次燃烧(λ, S_G)。那么存在树 $T_i \subset G, i = 1 \ldots, n$，使得 $V_{\sqcup T_i} = V$，且 S_G 是图$H = T_1 + T_2 + \cdots + T_n$的一次燃烧的燃烧序列。此外，相应的燃烧映射 $\lambda = \lambda_H$ 是一个同态。

证明。显然， S_G 是图 H =(V_H, E_H) 的一次燃烧的燃烧序列。假设存在两个相邻顶点 $v, w \in \lambda_H$，使得$\lambda(v) = \lambda(w)$。根据 H 的定义， v, w 位于同一 T_i 中，因此 $v, w \in M_i$。此外， $d(v_i, v) + i = \lambda(v) = \lambda(w) = d(v_i, w) + i$，即 $d(v_i, w) = d(v_i, v)$ 且 $v \sim w$，这与引理 2.7 矛盾，因为这在树中不可能发生。 ■

4 燃烧同态与树

本节研究图的燃烧同态 λ: $G \to P_T$ 及其在树上的性质。

引理 4.1. 设 $G=(V,E)$ 是一个图， S_G 是燃烧同态 (λ, S_G) 的燃烧序列 $(v_1,\ldots,v_n)$，其中该同态定义在 G 上。那么，对于任意 $v_i,v_j \in S_G$，都有 $d(v_i,v_j) \geq 3$ 。

证明。无妨设 $i<j$。由燃烧过程的定义可立即得出 $d(v_i,v_j)\geq 2$。假设 $d(v_i,v_j)=2$，即存在路径 v_i,a_1,w,a_2,v_j，且 w 不是燃烧源。此外，根据推论 2.16，$\lambda(w)\neq i$ 且 $\lambda(w)\neq j$。此外，根据燃烧过程的定义（$v_i\notin U_i$），$\lambda(w)\neq i-1$。因此，由引理 2.14，且由于 $i<j$，可得 $\lambda(v_i)=i$、$\lambda(w)=i+1$、$j=\lambda(v_j)=i+2$，这与 (v_j) 是燃烧源（即 $v_{i+2}\notin U_{i+2}\supset N_2(v_i)$）这一事实矛盾。

■

定理 4.2. 任意路径图 P_n 都存在一个燃烧同态。

证明。设 $P=P_n$ 是一个顶点为 1，$\ldots n$、边为 $\{i,i+1\}$,$i=1,\ldots,n-1$ 的路径图。

若 n 不能被 3 整除，则考虑燃烧序列 $S_P=(1,4,7,\ldots,3k+1,\ldots)$。相应的燃烧映射是一个燃烧同态，因为对于任意顶点 $v=1,\ldots n$ 它将其映射为:

- $k+1$，若 $v=3k+1$,
- $k+2$，若 $v=3k+2$,
- $k+2$，若 $v=3k$,

即，对于所有 $i=1,\ldots,n-1$，$|\lambda(i)-\lambda(i+1)|=1$，且根据推论 2.16，$\lambda$ 是燃烧同态。

若 n 可被 3 整除，考虑燃烧序列 $S_P=(2,5,8,\ldots,3k+2,\ldots)$。那么，相应的燃烧映射是一个燃烧同态，因为对于任意顶点 $v=1,\ldots n$，它将其映射为:

- $k+1$，如果 $v=3k+2$,
- $k+2$，如果 $v=3k+1$,
- $k+1$，如果 $v=3k$,

即，对于所有 $i=1,\ldots,n$，在这种情况下也有 $|\lambda(i)-\lambda(i+1)|=1$，且根据推论 2.16，$\lambda$ 是燃烧同态。 ■

例 4.3. 在这个例子中，我们证明并非每棵树都存在燃烧同态，而且一棵树存在燃烧同态，并不意味着它的子树也存在燃烧同态。

考虑图 T，如图 1 所示，即

$$V_T=\{1,2,3,4,5,6\}, E_T=\{\{1,3\},\{2,3\},\{3,4\},\{4,5\},\{4,6\}\}.$$

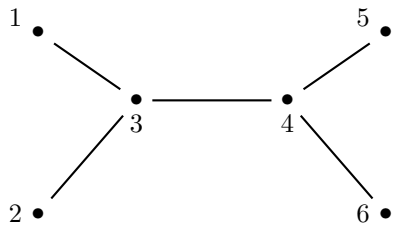


图 1：不存在燃烧同态的树 T。

现在我们证明 T 不存在燃烧同态。如果在第一个时刻燃烧顶点 1，那么为了使对应的燃烧构成一个同态，我们应在时刻 $t = 2$ 燃烧顶点 5 或 6；这意味着到了时刻 $t = 3$，只剩下顶点 6 或 5 可选，而 $\lambda(4) = 3$，因此 λ 不是燃烧同态。

如果在第一个时刻燃烧顶点 3，那么在时刻 $t = 2$，我们可以燃烧顶点 5 或 6，而相应的燃烧不是同态，因为 $\lambda(4) = 2$ 也如此。

对于从任意其他顶点开始的燃烧序列，除环境树 T的同构外，我们都会得到相同的结果。

请注意，根据 [3] 中燃烧的定义，燃烧序列 (1，3，4) 对 T 是允许的，并且给出一个燃烧同态。这再次凸显了我们的定义与 Bonato 及其合作者所给定义之间的差异。

接下来，考虑它的环境树 Q （一棵包含 T 作为子树的树），如图 2 所示，即 $V_Q = V_T \cup \{7\}$， $E_Q = E_T \cup \{\{6, 7\}\}$。

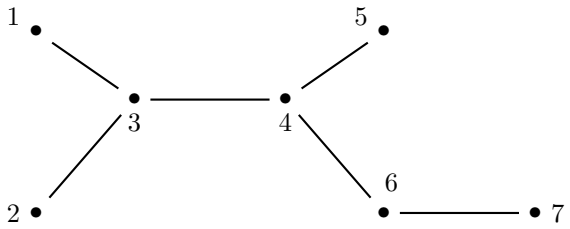


图2：存在燃烧同态的环境树 Q。

那么 Q 存在一个燃烧同态，由燃烧序列$S = (3，7)$给出。

定理4.4。对于任意连通图 $G = (V, E)$， $|V| > 2$ 存在一种图燃烧，但它不是同态。

证明。令 $v, w \in V$ 为相邻且固定的顶点。由于图是连通的，顶点 v, w 中至少有一个还与另一个顶点 z 相邻。不失一般性，假设 $v \sim z, z \neq w$。若 $z \sim w$，则根据 [12,定理 3.10]，不存在燃烧同态。根据 [12, 引理 4.5], ，存在一个燃烧的扩展 (w, z)，扩展到

整个图 G。那么对于这个扩展 $\lambda(z) = \lambda(v) = 2$，也就是说，它不是同态。

■

备注 4.5. 设 $T \subset Q$ 是一对树。由 [12, 定理 4.12]可知， T 的任意一种燃烧都可以扩展为 Q的一种燃烧。对于 T上的燃烧同态，一般而言，类似的结论并不成立。事实上，并非每棵树都有燃烧同态，但每棵树都有一个子树P_2，它具有燃烧同态。

5 燃烧的结束时间

本节讨论燃烧同态情形下树的燃烧可能具有的结束时间。特别地，我们为路径图 P_n， $n \in \mathbb{N}$的燃烧同态结束时间得到了紧确的上下界。

引理 5.1. 设 $G = (V, E)$ 是一个图，且 S_G 是 G 的一种燃烧 (λ, S_G) 的燃烧序列 $(v_1, \ldots, v_n)$，其结束时间为 $\mathbf{T}$。若 λ 是一个燃烧同态，则 $\mathbf{T} = n + 1$。

证明。 假设 $\mathbf{T} = n$。令 w 为任意一个固定顶点，它与 v_n相邻。因此，由于 λ是到路径图 $P_{\mathbf{T}}$的图映射，$\mathbf{T} = n$，我们有 $\lambda(w) \in \{n, n-1\}$。如果 $\lambda(w) = n - 1$，那么对于某个燃烧源 $v_i \neq v_n$，有 $w \in N_{n-i-1}(v_i)$。因此，$v_n \in N_{n-i}(v_i) \subset U_n$，这与燃烧序列的定义 2.12 矛盾，因为其中 $v_n \notin U_n$。所以， $\lambda(w) = n = \lambda(v_n)$，并且根据推论 2.16， λ 不是同态。因此，根据定理 2.13，我们有 $\mathbf{T} = n + 1$。

■

下一个结果——定理 5.2——讨论了图与树的不交并的燃烧同态的存在性和结束时间。从某种意义上说，这一结果可以视为试图逆转看待燃烧过程的视角，因为根据推论 3.4，任何燃烧过程都会定义一个由树构成的不交并，并在这些树上定义燃烧同态。

我们提醒，对于任意图 $G = (V, E)$，其半径 $r = r(G)$定义为

$$r(G) = \min_{v \in V} \max_{u \in V} d(v, u).$$

G 的中心 是由下式定义的顶点集 $O = O(G)$:

$$O(G) = \{v \in V \mid \max_{u \in V} d(v, u) = r(G)\}.$$

定理 5.2. 设 $G = (V_G, E_G)$ 是一个图， $T = (V_T, E_T)$ 是一棵树。设λ_G 是 G 的一个燃烧同态，其燃烧序列为 $S_G = (v_1, \ldots, v_n)$。若 T的半径满足 $r(T) \leq n + 1$，那么，对任意固定顶点 $v_0 \in O(T)$，序列 $S_{G+T} = (v_0, v_1, \ldots, v_n)$定义了图 $G + T$的一个燃烧同态 λ_{G+T}。

证明。 设 S_G 定义了图 G 的滤过 $\{U_j^G\}_{j=1}^n$。注意，由于 $G+T$ 是不交并，任意顶点 $v \in V_{G+T}$ 的第 n 闭邻域

与其在 G 中的第 n 闭邻域重合（若 $v \in V_G$），或在 T 中的第 n 闭邻域重合（若 $v \in T$）。那么，由 S_{G+T} 定义的图 $G+T$ 的滤过 $\{U_j^{G+T}\}_{j=2}^{n+2}$ 满足:

$$U_2^{G+T} = N_1(v_0)$$
$$U_j^{G+T} = N_{j-1}(v_0) + U_{j-1}^G, \quad j = 3, \ldots, n+2,$$

其中，$N_j(v_0)$ 是 T或 $G+T$ 中重合的第 $n-$ 个闭邻域。由于 S_G 是一个燃烧序列，且 $G+T$ 是不交和，因此对于 $0 \leq j \leq n+1$，有 $v_{j+1} \notin U_j^{G+T}$。此外，由于 S_G 是一个燃烧序列，故有 $U_{n+1}^G = G$；并且，由于 $r(T) \leq n+1$，$v_0 \in O(T)$，因此 $N_{n+1}(v_0) = T$。于是，

$$U_{n+2}^{G+T} = N_{n+1}(v_0) + U_{n+1}^G = G + T.$$

因此，根据定义 2.12，S_{G+T} 是一个燃烧序列。此外，由于 $G+T$ 是不交和，且根据 S_{G+T} 的定义，我们得到对于所有 $v \in V_G$，$\lambda_{G+T}(v) = \lambda_G(v) + 1$，即，$\lambda_{G+T}$ 在 G 上的限制是一个同态。此外，显然，对于所有 $v \in V_T$ 且仅对于这些元素，相应的源是 v_0；因此，λ_{G+T} 在 T 上是一个燃烧同态，这是推论 3.4 的结论。最后，同样由于 $G+T$ 是不交和，我们得出 λ_{G+T} 是一个燃烧同态。

■

现在让我们仔细考察路径图上燃烧过程的结束时间。先来看几个例子。

例 5.3. 设 $P = P_n$ 是一个路径图，其顶点集为 $1, \ldots, n$，边集为 $\{\{i, i+1\}\}_{i=1}^{n-1}$。那么，定义 $n \leq 7$ 的燃烧同态的燃烧序列完整列表如下:

- $S_P = (1)$ and $S_P = (2)$ for $n = 2$,
- $S_P = (2)$ for $n = 3$,
- $S_P = (1, 4)$ and $S_P = (4, 1)$ for $n = 4$,
- $S_P = (1, 4)$ and $S_P = (2, 5)$ for $n = 5$,
- $S_P = (2, 5)$, $S_P = (4, 1)$ and $S_P = (3, 6)$ for $n = 6$,
- $S_P = (3, 6)$, $S_P = (5, 2)$, $S_P = (1, 4, 7)$ and $S_P = (7, 4, 1)$ for $n = 7$.

定理 5.4. 设 $P = P_n$ 是一个路径图，$n \geq 2$ 是其燃烧序列，定义燃烧同态 λ_P。那么

$$\left\lceil \frac{\sqrt{4n-3} - 1}{2} \right\rceil \leq |S_P| \leq \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil,$$

并且对于两边任意的 n，等式都可以取到。

证明。 上界由引理 4.1 得出，并且根据定理 4.2 的证明可知，该界可以取到。

对于下界，首先注意到，根据 [12, 命题 3.12]

$$n \leq k^2 + k + 1,$$

其中 $k = |S_P|$。由此可得

$$k \geq \frac{\sqrt{4n-3}-1}{2},$$

因此得到下界。现在证明这些等式可以取到。注意，由于 k^2+k+1 是严格单调递增函数，对于任意 n ，只存在一个 $k = k(n) \in \mathbb{N}$ 满足

$$(k(n)-1)^2 + (k(n)-1) + 1 < n \leq k^2(n) + k(n) + 1.$$

显然,

$$k(n) = \left\lceil \frac{\sqrt{4n-3}-1}{2} \right\rceil.$$

现在令 $m > 0$ 满足 $n = (k(n)-1)^2+(k(n)-1)+1+m$。根据例 5.3，我们可以假设 $k(n) \geq 3 (n > 7)$。考虑将$Q = P_{(k(n)-1)^2+(k(n)-1)+1}$作为 $P = P_n$ 的一个子图，其顶点为 $m+1, m+2, \ldots n$。根据 [12,命题 3.11 和命题 3.12] 的证明，燃烧序列 $S_Q = (v_1, \ldots, v_{k-1})$

$$\begin{aligned} v_1 &= m + k(n) \\ v_j &= m + \left(\sum_{i=k(n)-(j-1)}^{k(n)-1} 2i \right) + k(n) - j \qquad \text{for } j \geq 2 \end{aligned}$$

定义了 λ_Q 在 Q上的燃烧同态。现在我们定义燃烧序列S_P，它取决于 m的值。注意，在以下所有情形中， $|S_P| = k(n)$。在本证明中，我们进一步记 $k := k(n)$。

- 设 $m \geq k$。那么， $S_P = (m-k+1, v_1, \ldots, v_{k-1})$定义了 λ_P 在 P上的燃烧同态。事实上，我们有

$$\begin{aligned} &\lambda_P(i) = m - k + 2 - i, \ i \leq m - k + 1, \\ &\lambda_P(i) = i - (m-k), \ m - k + 1 < i \leq m, \\ &\lambda_P(m+1) = k + 1 = \lambda_Q(m+1) + 1, \end{aligned}$$

  因为 $\lambda_Q(m+1) = 2 + d(v_1, m+1) = 2 + d(m+k, m+1) = k+1$，并且进一步，

$$\lambda_P(i) = \lambda_Q(i+1) + 1, i \geq m+1.$$

  由于路径图中只有边$\{i, i+1\}$、 $i = 1$、.....、 $n-1$，且 λ_Q 是同态，因此 λ_P 是同态。

用文字描述对应的燃烧过程：我们保留 Q 上的燃烧序列（它是 P的右侧部分），但将开始时间推迟一刻（这也会使 λ 整体后移一位）；同时，在第一个时刻，我们在左侧部分燃烧一个顶点，使 λ 在 Q的第一个顶点上的取值保持一致。

- 设 $m < k$和 $m + k$为偶数。那么， $S_P = (1, v_1, \dots, v_{k-1})$ 在 P上定义了一个燃烧同态 λ_P。事实上，我们有

$$\lambda_P(i) = i,\ i \le (m+k)/2,$$
$$\lambda_P((m+k)/2+1) = (m+k)/2+1 = \lambda_Q((m+1)/2+1)+1,$$

因为 $\lambda_Q((m+k)/2)+1) = 2 + d(v_1,(m+k)/2+1) = 2 + d(m+k,(m+k)/2+1) = 2+(m+k)/2-1$，并且进一步有

$$\lambda_P(i) = \lambda_Q(i+1)+1, i \ge (m+1)/2+1.$$

事实上， λ_P 是同态，这一点可由以下事实得出：路径图中只有边$\{i, i+1\}$，$i = 1, \dots, n-1$，并且 λ_Q是一个同态。
用文字描述相应的燃烧过程：我们保留 Q 上的燃烧序列（它是 P的右侧部分），但将开始时间推迟一个时刻（这也会使 λ 向后移动一位）；同时，在第一个时刻，我们点燃 P_n的第一个顶点。接着，由于 $m + k$是偶数，我们证明 1 与 v_1 之间的 λ_P 是一个同态。

- 令 $m < k$且 m为奇数。则 $S_P = (2, v_1, \dots\dots, v_{k-1})$ 在 P 上为 $k \ge 3$ 定义了一个燃烧同态 λ_P。证明遵循与前一种情况相同的思路。

■

推论 5.5。设 $P = P_n$ 为一个路径图， S_P 为其燃烧序列，并定义一个燃烧同态 λ_P，其结束时间为 $\mathbf{T}$。则

$$\left\lceil \frac{\sqrt{4n-3}-1}{2} \right\rceil + 1 \le \mathbf{T} \le \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil + 1,$$

且等号两边均可取到。

证明。由引理 5.1 可得 $\mathbf{T} = |S_P| + 1$。 ■

我们以树这一类中一个有趣的例子结束本节；从某种意义上说，与路径图相比，这些树的燃烧效果更差。更准确地说，已知，见 [1],路径图 P_m， $m = n^2 - 1$ 可以在时间 n 内完成燃烧，其燃烧序列满足 $|S_P| = n-1$。此外，很容易看出，在这一时间内选择燃烧序列中的第一个顶点时存在一定自由度。我们给出一族具有 $m = (n^2-1)$ $n \in \mathbb{N}$ 个顶点的树的例子；只有当燃烧序列满足 $|S| = n-1$时，这些树才能完成燃烧，而这仅在

燃烧从某个特定顶点开始时才成立，而其他所有燃烧序列都会更长。此外，相应的燃烧映射是同态；而对于路径图 P_m，由于定理 5.2，不存在具有 $|S_P| = n-1$ 的燃烧同态。

例 5.6. 我们先定义路径图 Y_m，其中 $m = n^2-1, n > 1$ 的顶点集为 $1, 2, \ldots, m$；再定义路径图 $Q_{i+1}, i = 0, n-2$，其顶点集为 $V_{i+1} = \{ni+1, ni+n\}$，边集为 $E_{i+1} = \{\{j, j+1\}\}_{j=ni+1}^{ni+n-1}$；并定义路径图 Q_n 为一个图，其顶点集为 $V_n = \{n^2-n+1, n^2-1\}$，边集为 $E_n = \{\{j, j+1\}\}_{j=n^2+n-1}^{n^2-2}$。现在我们将边集 E_{Y_m} 定义为

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \bigcup \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} \{1, 1+ni\}\right)$$

$n = 4$ ($m = 15$) 对应的图如图3和图4所示。

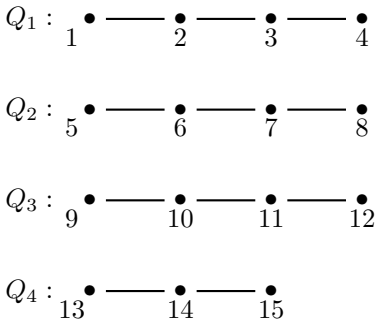


图3：例 5.6 的图 Q_1, Q_2, Q_3, Q_4

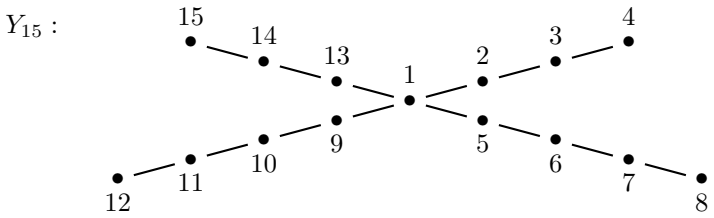


图4：例 5.6 的图 Y_{15}

$S_m =$（v_1，……，v_n）对于 Y_m 满足 $v_1 = 1$（否则，在任意一次燃烧之后都会留下 n 个非连通分支，少于 n，因此不可能存在包含 $n-1$ 个顶点的燃烧序列）。

但可以看出，序列 $S_m =$（1， v_2， $\ldots v_{n-1}$），其中

$$v_{i+1} = \begin{cases} ni+n, n+i \text{ is even}, \\ ni+n-1, n+i \text{ is odd}, \end{cases}$$

给出 Y_m 的燃烧映射。注意，该映射是一个燃烧同态，相应的结束时间为 n。

6 已燃烧树上的有向图结构

现在我们探讨如何在已燃烧图的生成树上引入一种自然的有向图结构。

我们提醒读者，有向图（*digraph*） $G = (V_G, D_G)$由顶点集 V_G 和由不同顶点的有序对 $(v, w) \in D_G$ 组成的集合 D_G 构成，这些有序对称为有序边$v, w \in V_G$。

定义 6.1. 对于两个有向图 $G = (V_G, D_G)$ 和 $H = (V_H, D_H)$，有向图映射 $f\colon G \to H$ 由一个映射 $f\colon V_G \to V_H$ 给出，使得 $(v, w) \in D_G$ 意味着 $(f(v)\ f(w)) \in D_H$或者 $(f(v) = f(w)) \in V_H$。若对于任意 $(v, w) \in D_G$，都有 $(f(v)\ f(w)) \in D_H$，则有向图映射 f 是一个有向图同态。

令 $G = (V, E)$ 为一个图。通过为每条边 $\{v, w\} \in E$赋予一个序，可以在 G 上给出一个有向图结构。

回到燃烧问题，我们提醒，对于任意图 $G = (V, E)$，任意燃烧映射 $\lambda = \lambda(\mathbf{B^T}(G))$ 都将该图映射到路径图 $P_{\mathbf{T}}$上；其顶点若记为 1、2、.....、$\mathbf{T}$，则分别对应于原像的燃烧时间。因此，在我们的设定中，路径图 $P = P_n$， $n \in \mathbb{N}$ 具有由 $(i, i+1) \in D_P$对所有 $i = 1$、.....、$n-1$定义的自然有向图结构。

此外，以下结果几乎可以直接由定理 3.2 的证明得到。

命题 6.2。 设 $T = (V_T, E_T)$ 为一棵树，且 (λ, S_T) 为其燃烧。则在图 T上存在一个由 λ诱导的自然有向图结构，使得 λ 是一个有向图映射。

证明。 由于 T 是其自身的生成树， $V_T = V_{\cup T_i}$， 其中 T_i 的定义与定理 3.2 的证明中相同。任取 T中的一对顶点 $v \sim w$。根据引理 2.14， $|\lambda(v) - \lambda w| \in \{0, 1\}$。假设 $|\lambda(v) - \lambda(w)| = 1$。那么方向应当从较小的 λ 对应的顶点指向较大的 λ对应的顶点。现在假设 $\lambda(v) = \lambda(w)$。那么根据定理 3.2 的证明，我们得到 $v \in T_i$， $w \in T_j$， $j \neq i$，并且可以将有向边定义为 $(v,\ w)$（如果$i < j$），否则定义为 $(w,\ v)$。 ■

推论 6.3。 设 G 为一个图，且（λ, S_G）为其燃烧。那么 G 存在一棵具有自然有向图结构的生成树，它由 λ导出。

证明。 由定理 3.2 得出。 ■

推论 6.4。 设 $T \subset Q$ 为树，且 (λ_T, S_T)、(λ_Q, S_Q) 为它们的燃烧，使得包含 $i : T \subset Q$ 是一个燃烧态态射。那么 i 与由 λ_T 和 λ_Q 诱导的自然有向图结构一致。

证明。 由交换图 (2.7) 可得 ■

命题 6.5。 设 $G = (V, E)$ 为任意图， $\lambda = \lambda(\mathbf{B}^{\mathbf{T}}(G))$为其燃烧同态。那么 G 具有自然的有向图结构，使得映射 λ_G 是有向图同态。

证明。 由命题 6.2 和推论 2.16 的证明可得。 ■

例 6.6。 我们注意到，对于具有给定燃烧序列的任意图 G，上述给定的有向图结构并未得到良好定义。事实上，考虑一个圆C_3，其顶点为 1,2, 3，且包含所有可能的边。燃烧序列 $S =$ (1) 无法按上述方式定义有向图，因为 λ(2) $= \lambda$ (3)，但 $2, 3 \in T_1$。

7 强配置燃烧空间

任意图 G 的所有燃烧构成的集合 $\mathcal{B}(G)$，以及与集合 $\mathcal{B}(G)$ 相关联的单纯复形配置空间 Δ_G，已在 [12] 中定义。本节中，我们利用一个图的所有燃烧同态构成的集合，定义强配置燃烧空间 和相应的强燃烧同调群，并描述其与燃烧同调的关系。我们采用单纯复形和图构造的标准定义，参见 [5, 6, 9, 10, 11, 13]。首先回顾几个最重要的概念。

定义 7.1。 一个单纯复形 $\Delta = (V, F)$由一个顶点集合 V和一个由 V 的有限非空子集构成的集合 F 组成，这些子集称为单形。含有 $q + 1(q \geq 0)$个元素的单形 $\sigma \in F$称为一个 q-单形，数值 q 称为 σ 的维数，记作$(q = \dim \sigma)$。单形集合 F 必须满足以下两个性质:

(i) 对于每个顶点 $v \in V$，集合 $\{v\} \in F$ 都是一个单形，

(ii) 如果 $\sigma \in F$ 是一个单形，那么它的任意非空子集 $\tau \subset \sigma$ 也是一个单形，称为 σ的面 。

如果单形 $\sigma \in \Delta$ 不是任何其他单形的面，则称其为极大 单形。

如果一个单纯复形至少包含一个 n维单形，但不包含任何$(n + 1)$维单形，则称其为 n-维 单纯复形。

定义 7.2。 如果 $V_1 \subset V$ 且 $F_1 \subset F$，则单纯复形 $\Delta_1 = (V_1, F_1)$ 是单纯复形 $\Delta = (V, F)$ 的子复形 。

如果一个单纯复形的顶点数有限，则称其为有限的。本文只考虑有限单纯复形。

现在我们回到燃烧理论。设 $G = (V, E)$ 是一个图。用 $\mathcal{B}(G)$ 表示所有 G 的燃烧的集合，用 $\mathcal{B}_H(G)$ 表示所有燃烧

G 的同态的集合。由于我们只考虑有限图，集合 $\mathcal{B}(G)$ 由有限多个数对 (λ_G, S_G) 组成。每个燃烧序列 S_G 都定义一个集合$\sim S_G = \{v_1, \ldots, v_k\} \subset V$。根据定义 7.1，单纯复形$\Delta = (V, F)$ 由顶点集合 V 和 Δ 的极大单形子集 $F^m \subset F$ 定义。我们称极大单形集合 F^m 生成单形集合 F。

回顾 [12] 中的以下定义。

定义 7.3. 给定一个图 $G = (V, E)$，G 的燃烧配置空间是一个单纯复形 $\Delta(G) = (V_{\Delta(G)}, F_{\Delta(G)})$，其中 $V_{\Delta(G)} = V$，且 $F_{\Delta(G)}$由所有极大单形组成的集合生成

$$F^m_{\Delta(G)} = \{\widehat{S}_G \,|\, (\lambda_G, S_G) \in \mathcal{B}(G)\}.$$

现在我们给出一个与此定义类似的新定义。

定义 7.4. 给定一个图 $G = (V, E)$，我们将 G 的强燃烧构形空间定义为一个单纯复形 $\Gamma(G) = (V_{\Gamma(G)}, F_{\Gamma(G)})$，其中

$$V_{\Gamma(G)} = \{v \in V \,|\, \text{ there exists } \widehat{S}_G \in \mathcal{B}_H(G) \text{ such that } v \in \widehat{S}_G \},$$

且 $F_{\Gamma(G)}$ 由所有极大单形组成的集合生成

$$F^m_{\Gamma(G)} = \{\widehat{S}_G \,|\, (\lambda_G, S_G) \text{ where } \lambda_G \in \mathcal{B}_H(G) \}.$$

请注意，图的强燃烧构形空间以及所有燃烧同态的集合都可能为空，例如，当图包含一个奇圈时 [12, 定理 3.10]。此外，例 4.3 表明，对于树，它们也可能为空。另一方面，以下命题是定理 4.2 的直接推论。

命题 7.5。 对于任意路径图，相应的强燃烧配置空间不是空单纯复形。

命题 7.6。 设 G 是一个具有非空强燃烧配置空间 $\Gamma(G)$ 的图。那么，我们有单纯复形 $\Gamma(G) \to \Delta(G)$ 之间的包含关系。

证明。 这由配置空间的定义可得。 ■

例 7.7. 本例介绍路径图 P_n 在 $2 \leq n \leq 5$下的强配置空间和配置空间，见表 1。

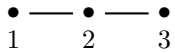
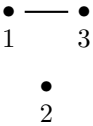
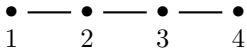
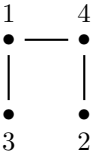
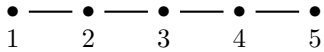
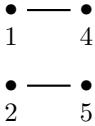
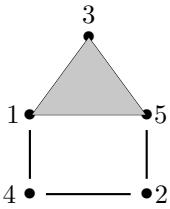
n	图	Γ	Δ
2			
3			
4			
5			

表 1：路径图的强配置空间和配置空间P_n 对于 $2 \leq n \leq 5$

.

设 R 为系数幺交换环。回顾一下，图 G 的燃烧同调 $H_*(\mathcal{B}(G)\ R)$ 是单纯复形 $\Delta(G)$ [12]的单纯同调。现在我们定义图的强燃烧同调，并描述它与燃烧同调之间的关系。

定义 7.8. 图 G的强燃烧同调是单纯复形 $\Gamma(G)$的单纯同调。相应的同调群记作 $H_*(\mathcal{B}_H(G)\ R)$。

设 G 是一个具有非空强燃烧配置空间的图。由命题 7.6 可立即得出，对于 $n \geq 0$ ，存在同态

$$H_n(\mathcal{B}_H(G), R) \to H_n(\mathcal{B}(G), R)$$

同调群的同态。

我们注意到，即使对于顶点数较少的有向图，强同调群也可能本质上非平凡。

例 7.9. (i) 例 5.6 中定义的图 Y_8 的强燃烧构形空间 $\Gamma(Y_8)$ 如图 5 所示。

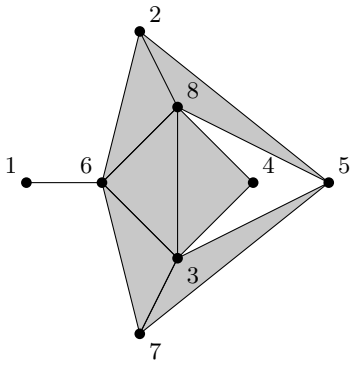


图 5：图 Y_8 的强配置空间

Hence in this case we have $H_i(\mathcal{B}_H(Y_8),\mathbb{Z}) = \begin{cases}\mathbb{Z}, & \text{for } i=0,1,\\ 0, & \text{for other } i.\end{cases}$

(ii) 路径图 P_9 的强燃烧构形空间 $\Gamma(P_9)$ 的极大单形如下：

$$\{1,4,7\},\{1,4,8\},\{1,4,9\},\{1,5,8\},\{1,6,9\},\{2,5,8\},\{2,5,9\},\{2,6,9\},\{3,6,9\}.$$

我们可以将此配置空间几何地写成如下形式

$$\Gamma(P_9) = \Gamma_1 \cup \Delta_1 \cup \Delta_2 \tag{7.11}$$

其中 $\Delta_1 = \langle 1、4、9\rangle$、$\Delta_2 = \langle 3、6、9\rangle$ 是二维单形，其对应的顶点集以及单纯集合 Γ_1 如图 6 所示

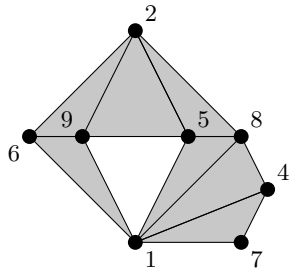


图 6：配置空间 $\Gamma(P_9)$ 的子复形 Γ_1

由 (7.11) 和图 6 可立即得出，存在一个变形 n
到 Γ_1 的 $\Gamma(P_9)$ 退缩。因此 $H_i(\mathcal{B}_H(P_9)\ \mathbb{Z}) = \{$ ，对于 $i=0,\ 1,\ 0$ $i.$ ，

对于其他情况

注 7.10。 由例 7.7 可知，强同调在路径图范畴以及包含映射上就已经不是函子性的。不过我们注意到，对于树的任意包含 $\tau\colon T \to Q$，都存在一个构型空间包含的图表

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(T) & \longrightarrow & \Delta(T) \\ & & \downarrow \\ \Gamma(Q) & \longrightarrow & \Delta(Q) \end{array}$$

它会诱导出相应的同调群与同态构成的图表。

参考文献

[1]A. Bonato，图燃烧综述，arXiv:2009.10642v1 [math.CO](2020)，1–11。[2] A. Bonato、J. Janssen 和 E. Roshanbin，将图燃烧作为社交传染模型，《网络图算法与模型》，第11届国际研讨会 WAW 论文集（2014），13–22。[3] A. Bonato、J. Janssen 和 E. Roshanbin，如何燃烧一张图，《互联网数学》**12** （2016），85–10。[4] Gary Chartrand、Linda Lesniak 和 Ping Zhang，图与有向图，CRC出版社：美国佛罗里达州博卡拉顿，2011。[5] Samuel Eilenberg 和 J. A. Zilber，半单纯复形与奇异同调，**51** （1950），499–513。[6] Alexander Grigor'yan、Yong Lin、Yuri Muranov 和 Shing-Tung Yau，有向图的同伦理论，《纯粹与应用数学季刊》**10**（2014），619–674。[7] Alexander Grigor'yan、Yuri Muranov 和 Shing-Tung Yau，与单纯复形相关的图，《同调、同伦与应用》**16**（2014），295–311。[8] Alexander Grigor'yan、Yuri Muranov 和 Shing-Tung Yau，关于有向图的上同调与霍赫希尔德上同调，《同伦及相关结构杂志》（2015），209–230。[9] Allen Hatcher，代数拓扑，剑桥大学出版社，2002。[10] J. Peter May，代数拓扑中的单纯对象，芝加哥大学出版社，芝加哥，1967。[11] R. Munkres，James，代数拓扑基础，Addison-Wesley出版公司，1984。

[12] Yuri Muranov 和 Anna Muranova，图燃烧的同调，《拓扑学及其应用》**373**（2025年），109486。[13] V. V. Prasolov，同调理论基础，数学研究生系列丛书第81卷。美国罗德岛州普罗维登斯：美国数学学会（AMS），2007年。
Yuri Muranov：奥尔什丁瓦尔米亚-马祖里大学数学与计算机科学学院，波兰奥尔什丁*10-710*，斯沃涅奇纳街*54*号。电子邮箱：yury.muranov@uwm.edu.pl Anna Muranova：奥尔什丁瓦尔米亚-马祖里大学数学与计算机科学学院，波兰奥尔什丁*10-710*，斯沃涅奇纳街*54*号。电子邮箱：anna.muranova@uwm.edu.pl