$\frac{1}{2}\mathbb{Z}$分次模顶点超代数的扭曲模

Xiangyu Jiao 数学科学学院，MEA重点实验室（教育部）和上海市PMMP重点实验室，华东师范大学，中国上海 200241电子邮箱：xyjiao@math.ecnu.edu.cn

Qiang Mu 数学科学学院，哈尔滨师范大学，中国黑龙江哈尔滨 150025电子邮箱： qmu520@gmail.com

Wei Wang 数学科学学院，江苏大学，中国江苏镇江 212013电子邮箱： wangweiixyz@163.com

arXiv:2603.15173v1 [math.QA] 16 Mar 2026

摘要

本文研究代数闭域 $\mathbb{F}$（其特征为素数 $p > 2$）上模$\frac{1}{2}\mathbb{Z}$分次顶点超代数的 g扭曲模理论。对于一个$\frac{1}{2}\mathbb{Z}$分次顶点超代数 V 及其有限阶自同构 g ，若该自同构的阶 T与 p互素，我们给出朱代数$A_g(V)$的一个扭曲版本。我们证明，简单 $A_g(V)$-模的等价类集合与简单 $\frac{1}{T_0}\mathbb{N}$分次g扭曲 V-模的等价类集合之间存在一一对应，其中 T_0 是自同构 $g\sigma$ 的阶，且 σ 为宇称自同构。

作为一项应用，我们研究与仿射李超代数相关的模顶点超代数的扭曲模，并确定相应的扭曲 Zhu 代数。我们还计算了模 Neveu–Schwarz 顶点超代数的扭曲 Zhu 代数，并对其不可约扭曲模进行分类。

1 引言

自Borcherds [B] 和Frenkel-Lepowsky-Meurman [FLM], 的工作提供了

X. Jiao 得到上海市科学技术委员会（项目编号：23ZR1418600、22DZ2229014）的资助。Q. Mu 得到黑龙江省自然科学基金（项目编号：PL2025A004）的资助。W. Wang 得到江苏省教育厅面上项目（项目编号：24KJB110004）的资助。

二维共形场论严谨的数学基础以来，顶点算子代数及其表示理论一直是备受深入研究的领域。顶点算子代数表示论的一项核心成果，是Zhu [Z]引入的结合代数$A(V)$。这一代数如今称为Zhu代数，它在顶点算子代数 V 的表示论与结合代数的表示论之间建立了强有力的对应关系，使$\mathbb{N}$分次不可约 V模与不可约 $A(V)$模一一对应。后来，Dong、Li和Mason [DLM], 将这一框架推广到扭曲模的情形，他们构造了与 V的任意有限阶自同构 g 相关联的g扭曲结合代数 $A_g(V)$。

近年来，人们一直在系统地发展素特征域上的顶点代数理论 p。这一发展部分源于对模李代数及其表示的研究。正如 [JLM、LM3], 所观察到的，模李代数往往具有特征零时不存在的结构特征，例如受限李代数结构和非平凡的 p中心。这些现象自然也延伸到了顶点代数的情形。特别是，特征 p 下与海森堡、Virasoro 和仿射李代数相关的万有顶点代数通常并非简单代数，因为源自底层万有包络代数 p中心的元素会生成真理想[JLM、LM2、LM3]。因此，人们开始研究一些重要的商顶点代数，例如 $V_{\widehat{\mathfrak{g}}}^{\chi}(\ell,\ 0)$，以及它们的不可约模。

尽管 $\mathbb{Z}$分次模顶点代数理论已取得显著进展，但数学和物理学中的许多基本例子，例如Clifford顶点超代数和 Neveu-Schwarz 顶点超代数，都具有 $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$分次，而非 $\mathbb{Z}$分次。这类顶点超代数在特征 p 下的表示理论需要细致处理宇称自同构 σ 及其与其他自同构 g的相互作用。此外，特征零下常用的解析工具，例如形如 $e^{z\mathcal{D}}$的指数算子，已不再适用。为避免整数除法问题 [，必须以涉及 Hasse导数的伪指数级数 $e^{z\mathcal{D}}=\sum_{n\geq 0}\mathcal{D}^{(n)}z^n$取而代之 1], [JLM],等。

本文旨在为代数闭域上特征为 $p>2$ 的 $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ 分次顶点超代数发展一套一般的 g 扭曲模理论。假设自同构 g 的阶 T 与 p 互素，我们将 [L] 中发展的局部系统理论推广到模情形，并证明任意一族两两局部的 $\mathbb{Z}/T\mathbb{Z}$ 扭曲顶点算子都会生成一个具有自然扭模结构的顶点超代数。

以超扭曲 Zhu 代数的特征零版本为基础（参见 [X, DZ]），我们构造了扭曲 Zhu 代数 $A_g(V)$ 的模化类比，并研究它与 g-扭曲 V-模范畴之间的关系。特别地，我们建立了简单 $A_g(V)$-模的等价类与简单 $\frac{1}{T_0}\mathbb{N}$ 分次 g-扭曲 V-模的等价类之间的双射，其中 $\underline{T_0}$ 是自同构 $g\sigma$ 的阶。

作为该理论的应用，我们研究了若干著名的无限维李超代数。首先，我们考察模仿射李超代数 $\widehat{\mathfrak{g}}$ 及其扭曲版本 $\widehat{\mathfrak{g}}[\tau]$，其中 τ 是 $\mathfrak{g}$的一个自同构。我们证明，任意层为 ℓ的局部截断 $\widehat{\mathfrak{g}}[\tau]$-模都自然带有相关通用顶点超代数的 τ-扭曲模结构，并确定相应的扭曲 Zhu 代数。接下来，我们对模Clifford顶点超代数的扭曲模进行分类，并证明它们完全可约。最后，我们研究模 Neveu–Schwarz 顶点超代数 $V_{\mathcal{NS}}(c,\ 0)$。通过分析 Neveu-Schwarz 代数的受限李超代数结构，我们计算出扭曲 Zhu 代数 $A_\sigma(V_{\mathcal{NS}}(c,\ 0))$，并证明它同构于某个多项式代数的适当商。

本文组织如下。第 2 节回顾模顶点超代数和 g-扭曲模的定义。第 3 节发展扭曲顶点算子的局部

系统的模理论。第 4 节构造扭曲 Zhu 代数 $A_g(V)$，并阐明其与 g-扭曲模之间的关系。第 5—7 节分别 посвящ于以下应用：扭曲仿射李超代数、模Clifford顶点超代数和模Neveu–Schwarz顶点超代数。

2 预备知识

本节简要回顾关于模顶点超代数及其扭曲模的若干定义和基本结果。这些预备知识与 [L], 中发展的非扭曲和扭曲理论相对应，并针对模情形作了必要的修改。

设 p 为素数， $\mathbb{F}$ 为特征为 p 的代数闭域。定义

$$\mathbb{D} = \left\{ a \in \mathbb{Q} \;\middle|\; a = \frac{m}{n} \text{ for some } m, n \in \mathbb{Z} \text{ with } p \nmid n \right\}.$$

这是域 $\mathbb{Q}$ 的一个子环。存在一个环同态 $\pi : \mathbb{D} \to \mathbb{Z}_p \subset \mathbb{F}$ ，它将从 $\mathbb{Z}$ 到 $\mathbb{Z}_p$ 的自然同态唯一地延拓。

对于 $\alpha \in \mathbb{D}$ 和 $i \in \mathbb{N}$，定义二项式系数

$$\binom{\alpha}{i} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-i+1)}{i!}.$$

由于对所有 $\alpha \in \mathbb{D}$ 和 $i \in \mathbb{N}$ 均有 $\binom{\alpha}{i} \in \mathbb{D}$ ，我们通过 π 将这些二项式系数视为 $\mathbb{Z}_p$ 和 $\mathbb{F}$ 中的元素。

设 U 是 $\mathbb{F}$上的一个向量空间。我们定义

$$U[[z, z^{-1}]] = \left\{ \sum_{n\in\mathbb{Z}} u(n) z^n \;\middle|\; u(n) \in U \right\},$$

$$U((z)) = \left\{ \sum_{n\geq k} u(n) z^n \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}, u(n) \in U \right\},$$

$$U\{z\} = \left\{ \sum_{\alpha\in\mathbb{D}} u(\alpha) z^\alpha \;\middle|\; u(\alpha) \in U \right\}.$$

对于 $\alpha \in \mathbb{D}$，表达式$(z_1 + z_2)^\alpha$ 定义为形式幂级数

$$(z_1+z_2)^\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\alpha}{i} z_1^{\alpha-i} z_2^i \in z_1^\alpha \mathbb{F}[z_1, z_1^{-1}][[z_2]] \subset \mathbb{F}\{z_1\}[[z_2]]. \tag{2.1}$$

对于 $k \in \mathbb{N}$， k阶 Hasse微分算子 $\partial_z^{(k)}$定义为

$$\partial_z^{(k)} z^\alpha := \binom{\alpha}{k} z^{\alpha-k} \quad \alpha \in \mathbb{D}. \tag{2.2}$$

相应的形式指数算子为

$$e^{x\partial_z} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \partial_z^{(n)}. \tag{2.3}$$

对于任意 $f(z) \in U\{z\}$，以下平移性质成立：

$$e^{x\partial_z} f(z) = f(z+x). \tag{2.4}$$

回顾一下，对于 $n \in \mathbb{N}$,

$$\partial_{z_2}^{(n)} z_2^{-1} \delta\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = (z_1 - z_2)^{-n-1} - (-z_2 + z_1)^{-n-1} = (-1)^n \partial_{z_1}^{(n)} z_2^{-1} \delta\left(\frac{z_1}{z_2}\right). \tag{2.5}$$

因此，如果 $m > n$，那么

$$(z_1 - z_2)^m \partial_{z_2}^{(n)} z_2^{-1} \delta\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = 0. \tag{2.6}$$

此外，我们还记录以下引理，它表达了 delta- 函数导数的线性无关性（参见 [L]）：

引理 2.1. 设 V是一个向量空间， α、 $\beta \in \mathbb{D}$，并设 $f_j(z_2) \in V((z_2^{\beta}))$，其中 $j = 0$、1、.....、 n。则

$$f_0(z_2) z_2^{-1} \delta\left(\frac{z_1}{z_2}\right)\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{\alpha} + f_1(z_2) \partial_{z_2}^{(1)} z_2^{-1} \delta\left(\frac{z_1}{z_2}\right)\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{\alpha} + \cdots + f_n(z_2) \partial_{z_2}^{(n)} z_2^{-1} \delta\left(\frac{z_1}{z_2}\right)\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{\alpha} = 0$$

当且仅当 $f_j(z_2) = 0$ 对所有 j都成立。

定义 2.2. 一个顶点超代数是一个 $\mathbb{Z}_2$-分次向量空间 $V = V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}}$，配备一个特定向量 $\mathbf{1} \in V_{\bar{0}}$ 以及一个线性映射

$$\begin{aligned} Y(\cdot, x) : V &\to (\operatorname{End} V)[[x, x^{-1}]] \\ v &\mapsto Y(v, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} v_n x^{-n-1}, \end{aligned} \tag{2.7}$$

满足以下条件，其中 $\mathbb{Z}_2$-齐次向量 $u \in V_{\alpha}$、 $v \in V_{\beta}$ 满足 α， $\beta \in \mathbb{Z}_2$:

$$u_n v \in V_{\alpha+\beta} \quad \text{for all } n \in \mathbb{Z}, \tag{2.8}$$

$$u_n v = 0 \quad \text{for } n \text{ sufficiently large} \tag{2.9}$$

（截断条件），

$$Y(\mathbf{1}, x) = 1_V \quad (\text{the identity operator on } V) \tag{2.10}$$

（真空性质），

$$Y(v, x)\mathbf{1} \in V[[x]] \quad \text{and} \quad \lim_{x \to 0} Y(v, x)\mathbf{1} = v \tag{2.11}$$

（创生性质），以及

$$\begin{aligned} x_0^{-1} \delta\left(\frac{x_1 - x_2}{x_0}\right) Y(u, x_1) Y(v, x_2) - (-1)^{|u||v|} x_0^{-1} \delta\left(\frac{x_2 - x_1}{-x_0}\right) Y(v, x_2) Y(u, x_1) \\ = x_2^{-1} \delta\left(\frac{x_1 - x_0}{x_2}\right) Y(Y(u, x_0)v, x_2) \end{aligned} \tag{2.12}$$

（*Jacobi*恒等式），其中 $|u|$表示来自超代数结构的 $\mathbb{Z}_2$-齐次元 u的宇称。

注 2.3. Jacobi恒等式蕴含超交换子公式：对于 $\mathbb{Z}_2$-齐次元 $u,\ v\in V$：

$$\begin{aligned}\big[Y(u,x_1),Y(v,x_2)\big] &= \mathrm{Res}_{x_0}\, x_2^{-1}\delta\left(\frac{x_1-x_0}{x_2}\right)Y(Y(u,x_0)v,x_2)\\ &= \mathrm{Res}_{x_0}\, x_1^{-1}\delta\left(\frac{x_2+x_0}{x_1}\right)Y(Y(u,x_0)v,x_2)\\ &= \sum_{j\in\mathbb{N}}\partial_{x_2}^{(j)}\left(x_1^{-1}\delta\left(\frac{x_2}{x_1}\right)\right)Y(u_jv,x_2).\end{aligned}\tag{2.13}$$

如在 [LM1], 中，令 $\mathcal{B}$ 为具有基 $\{\mathcal{D}^{(r)}\mid r\in\mathbb{N}\}$ 的双代数，其中

$$\mathcal{D}^{(m)}\cdot\mathcal{D}^{(n)}=\binom{m+n}{n}\mathcal{D}^{(m+n)},\quad \mathcal{D}^{(0)}=1,$$

$$\Delta(\mathcal{D}^{(n)})=\sum_{i=0}^{n}\mathcal{D}^{(n-i)}\otimes\mathcal{D}^{(i)},\quad \varepsilon(\mathcal{D}^{(n)})=\delta_{n,0},$$

对于 $m,\ n\in\mathbb{N}$。置

$$e^{x\mathcal{D}}=\sum_{n\geq 0}x^n\mathcal{D}^{(n)}\in\mathcal{B}[[x]],$$

因此 $e^{x\mathcal{D}}$ 作用在任意 $\mathcal{B}$-模上。由此可得

$$e^{x\mathcal{D}}e^{z\mathcal{D}}=e^{(x+z)\mathcal{D}},\quad e^{x\mathcal{D}}e^{-x\mathcal{D}}=1,\quad \Delta(e^{x\mathcal{D}})=e^{x\mathcal{D}}\otimes e^{x\mathcal{D}}.$$

对于任意幂级数 $A(x)=\sum_{m\in\frac{1}{T}\mathbb{Z}}a(m)x^m\in U[[x^{\frac{1}{T}},x^{-\frac{1}{T}}]]$，定义

$$e^{z\partial_x}A(x)=\sum_{n\geq 0}\binom{m}{n}a(m)x^{m-n}.$$

这为 $U[[x^{\frac{1}{T}},x^{-\frac{1}{T}}]]$ 定义了关于 $\mathcal{B}$ 的模结构，其中 $\mathcal{D}^{(i)}=\partial_x^{(n)}$ 且 $e^{z\mathcal{D}}=e^{z\partial_x}$。

令 V 为一个 顶点超代数。定义作用在 V 上的线性算子序列 $\{\mathcal{D}^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 如下：

$$\mathcal{D}^{(n)}v=v_{-n-1}\mathbf{1}\quad \text{for } n\in\mathbb{N}, v\in V.\tag{2.14}$$

于是 V 成为一个 $\mathcal{B}$-模，并且

$$e^{z\mathcal{D}}v:=\sum_{k\in\mathbb{N}}z^k\mathcal{D}^{(k)}v=Y(v,z)\mathbf{1}.\tag{2.15}$$

这些算子 $\mathcal{D}^{(n)}$ 保持 V的 $\mathbb{Z}_2$-分次。

与特征零的情形一样，我们有：

L引理 2.4. 设 V 是一个顶点超代数。则以下性质成立 *d:*

(i) 斜对称性：对于 $\mathbb{Z}_2$-齐次向量 u、$v\in V$，

$$Y(u,z)v=(-1)^{|u||v|}e^{z\mathcal{D}}Y(v,-z)u.\tag{2.16}$$

(ii) 共轭公式：对于 $u\in V$，

$$e^{x\mathcal{D}}Y_W(u,x)e^{-x\mathcal{D}}=Y_W(e^{x\mathcal{D}}u,x).\tag{2.17}$$

(iii) 弱超交换性：对于任意 $\mathbb{Z}_2$-齐次的 u、$v \in V$，存在 $k \in \mathbb{N}$ 使得

$$(x_1-x_2)^k Y(u,x_1)Y(v,x_2) = (-1)^{|u||v|}(x_1-x_2)^k Y(v,x_2)Y(u,x_1). \tag{2.18}$$

(iv) 弱结合性：对于任意 u、v、$w \in V$，存在 $l \in \mathbb{N}$ 使得

$$(x_0+x_2)^l Y(Y(u,x_0)v,x_2)w = (x_0+x_2)^l Y(u,x_0+x_2)Y(v,x_2)w. \tag{2.19}$$

注 2.5. 在顶点超代数的定义中，Jacobi 恒等式公理可以替换为以下任一组等价公理，这与特征为零的情形相同：

(i) 弱超交换性和弱结合性。(ii) 弱结合性和斜对称性。(iii) 弱超交换性和共轭公式。

定义 2.6. A $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$-分次顶点超代数 是一个顶点超代数 $V = V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}}$，配备有一个 $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$-分次 $V = \bigoplus_{q\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}} V_q$，使得

$$\mathbf{1} \in V_0, \quad V_{\bar{0}} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} V_n, \quad V_{\bar{1}} = \bigoplus_{n\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}} V_n, \tag{2.20}$$

并且对于所有 $u \in V_m$、m，$n \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ 和 $k \in \mathbb{Z}$，

$$u_k V_n \subset V_{m+n-k-1}. \tag{2.21}$$

An 具有 $n \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ 的元素 $a \in V_n$ 称为 $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$-齐次，记作 $\deg a = n$.

设 V^1 和 V^2 是两个顶点超代数。从 V^1到 V^2 的顶点超代数同态是一个线性映射 ϕ：$V^1 \to V^2$，对所有 $a,b \in V^1$均满足以下条件：

$$\phi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}, \quad \phi(Y(a,z)b) = Y(\phi(a),z)\phi(b). \tag{2.22}$$

顶点超代数 V 的自同构是从 V 到其自身的一一同态。每个顶点超代数 $V = V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}}$ 都有一个典范的二阶自同构 σ，称为宇称自同构，其定义如下：

$$\sigma(a) = (-1)^{|a|}a$$

对任意 $\mathbb{Z}_2$-齐次元 $a \in V$均成立。本文中，我们将用 σ 表示顶点超代数的这一典范自同构。

本文中，设 g 是顶点超代数 V 的一个阶为 T的自同构，其中 T 与基域的特征 p 互素。于是，g 在V上半单地作用，并且我们有特征空间分解

$$V = \bigoplus_{j=0}^{T-1} V^j, \quad V^j = \{u \in V \mid g(u) = \eta^j u\}, \tag{2.23}$$

其中，η 是一个固定的 T 次本原单位根。

定义 2.7. g-扭曲 V-模 是一个向量空间 W，配备一个线性映射

$$\begin{aligned} Y_W(\cdot,x):\ V &\to (\operatorname{End} W)[[x^{1/T}, x^{-1/T}]], \\ v &\mapsto Y_W(v,x) = \sum_{n\in\frac{1}{T}\mathbb{Z}} v_n x^{-n-1}, \quad (v_n \in \operatorname{End} W), \end{aligned}$$

使得对于 $u \in V^r$（其中 $r \in \{0,1,\dots,T-1\}$），以及所有 $v \in V$、$w \in W$，以下性质成立：

$$
\begin{gathered}
Y_W(u,x) = \sum_{n \in \frac{r}{T}+\mathbb{Z}} u_n x^{-n-1}, \\
u_n w = 0 \quad \text{for all sufficiently large } n, \\
Y_W(\mathbf{1},x) = 1_W, \\
x_0^{-1}\delta\left(\frac{x_1-x_2}{x_0}\right) Y_W(u,x_1)Y_W(v,x_2) - (-1)^{|u||v|} x_0^{-1}\delta\left(\frac{x_2-x_1}{-x_0}\right) Y_W(v,x_2)Y_W(u,x_1) \\
= x_2^{-1}\delta\left(\frac{x_1-x_0}{x_2}\right)\left(\frac{x_1-x_0}{x_2}\right)^{-\frac{r}{T}} Y_W(Y(u,x_0)v,x_2),
\end{gathered}
$$

其中幂按照方程 (2.1) 展开。

注 2.8. g-扭曲 V-模不一定是 $\mathbb{Z}_2$-分次的。遵循 [DNR], 的思路，若 $W = W_{\bar{0}} \oplus W_{\bar{1}}$ 是一个 $\mathbb{Z}_2$-分次扭曲模，满足

$$
u_n W_\beta \subset W_{\alpha+\beta}, \tag{2.24}
$$

for 所有 $u \in V_\alpha$、α、$\beta \in \mathbb{Z}_2$ 和 $n \in \frac{1}{T}\mathbb{Z}$，那么我们称 W 为一个 g-扭曲超 V-模 .

注 2.9. 设 W 是一个扭曲 V-模，且 $u \in V^r$。扭曲 Jacobi 恒等式给出以下公式：

(i) 扭曲交换子公式：对于 $v \in V$,

$$
\begin{aligned}
\big[Y_W(u,x_1), Y_W(v,x_2)\big] &= \mathrm{Res}_{x_0}\, x_2^{-1}\delta\left(\frac{x_1-x_0}{x_2}\right)\left(\frac{x_1-x_0}{x_2}\right)^{-\frac{r}{T}} Y_W(Y(u,x_0)v,x_2) \\
&= \mathrm{Res}_{x_0}\, x_1^{-1}\delta\left(\frac{x_2+x_0}{x_1}\right)\left(\frac{x_2+x_0}{x_1}\right)^{\frac{r}{T}} Y_W(Y(u,x_0)v,x_2) \\
&= \sum_{j\in\mathbb{N}} \partial_{x_2}^{(j)}\left(x_1^{-1}\delta\left(\frac{x_2}{x_1}\right)\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\frac{r}{T}}\right) Y_W(u_j v,x_2),
\end{aligned} \tag{2.25}
$$

(ii) 弱超交换性：对于任意 $\mathbb{Z}_2$-齐次的 u，$v \in V$，存在 $k \in \mathbb{N}$ 使得

$$
(x_1-x_2)^k Y_W(u,x_1)Y_W(v,x_2) = (-1)^{|u||v|}(x_1-x_2)^k Y_W(v,x_2)Y_W(u,x_1); \tag{2.26}
$$

(iii) 扭曲迭代公式：对于 $v \in V$,

$$
\begin{aligned}
Y_W(Y(u,x_0)v,x_2) = \mathrm{Res}_{x_1} &\left(\frac{x_1-x_0}{x_2}\right)^{\frac{r}{T}} \left(x_0^{-1}\delta\left(\frac{x_1-x_0}{x_2}\right) Y_W(u,x_1)Y_W(v,x_2)\right. \\
&\left. - (-1)^{|u||v|} x_0^{-1}\delta\left(\frac{x_2-x_1}{-x_0}\right) Y_W(v,x_2)Y_W(u,x_1)\right).
\end{aligned} \tag{2.27}
$$

(iv) 扭曲弱结合律：对于 $w \in W$，设 $k \in \mathbb{N}$ 满足 $x^{k+\frac{r}{T}} Y_W(u,z)w \in W[[z]]$。那么对于任意 $v \in V$,

$$
(x_2+x_0)^{k+\frac{r}{T}} Y_W(Y(u,x_0)v,x_2)w = (x_0+x_2)^{k+\frac{r}{T}} Y_W(u,x_0+x_2)Y_W(v,x_2)w. \tag{2.28}
$$

注 2.10。 顶点超代数的扭曲模上的定义 2.7 中的扭曲 Jacobi 恒等式，可以等价地替换为超交换性（2.26）和扭曲结合性（2.28）。证明与 [L] 中引理 2.8 的证明相同。

与特征零的情形一样（见 [L]），我们有：

命题 2.11. 设 g 是顶点超代数 V 的一个有限阶 T自同构，且 (W, Y_W) 是一个忠实的 g-扭曲 V-模。设 $u \in V^r$ 满足 $r \in \{0, \cdots, T-1\}$ 且v， $w^{(0)}$， $\cdots$， $w^{(k)} \in V$是 $\mathbb{Z}_2$-齐次元。那么超交换子公式

$$\big[Y(u,x_1), Y(v,x_2)\big] = \sum_{j=0}^{k} Y(w^{(j)}, x_2)\partial_{x_2}^{(j)} \left(x_1^{-1}\delta\left(\frac{x_2}{x_1}\right)\right) \tag{2.29}$$

在 V 上成立，当且仅当扭曲交换子

$$\big[Y_W(u,x_1), Y_W(v,x_2)\big] = \sum_{j=0}^{k} Y_W(w^{(j)}, x_2)\partial_{x_2}^{(j)} \left(x_1^{-1}\delta\left(\frac{x_2}{x_1}\right)\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\frac{r}{T}}\right) \tag{2.30}$$

在 W 上成立。在此情形下，我们有

$$u_j v = w^{(j)} \quad (0 \le j \le k), \quad u_j v = 0 \ for \ j > k. \tag{2.31}$$

此外，(2.29) 蕴含(2.30) 和(2.31)，无论 W 是否忠实。

定义 2.12. 设 $V = \bigoplus_{q \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}} V_q$ 是一个 $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$-分次顶点超代数， g 是 V 的一个有限阶自同构，且自同构 $g\sigma$ 的阶为 T_0。若一个 g-扭曲 V-模W 满足 $\frac{1}{T_0}\mathbb{N}$-分次，即存在 $W_0 \neq 0$ 使得 $W = \bigoplus_{n \in \frac{1}{T_0}\mathbb{N}} W_n$，并且

$$u_n W_r \subset W_{r+m-n-1} \tag{2.32}$$

对于 $u \in V_q$, $n \in \frac{1}{T}\mathbb{Z}$, $r \in \frac{1}{T_0}\mathbb{N}$。

注 2.13. $\frac{1}{T_0}\mathbb{N}$分次 g扭曲 V-模的定义，与 [DZ] 中针对特征零情形给出的可容许 g扭曲 V-模的定义相同。

3 扭曲顶点算子的局部系统

设 $W = W_{\bar{0}} \oplus W_{\bar{1}}$ 是一个 $\mathbb{Z}_2$分次向量空间。那么 End W =(End $W)_{\bar{0}} \oplus$(End $W)_{\bar{1}}$ 也是 $\mathbb{Z}_2$分次的，其中

$$(\mathrm{End}\, W)_{\bar{0}} = \{f \in \mathrm{End}\, W \mid f(W_{\bar{0}}) \subset W_{\bar{0}},\ f(W_{\bar{1}}) \subset W_{\bar{1}}\},$$
$$(\mathrm{End}\, W)_{\bar{1}} = \{f \in \mathrm{End}\, W \mid f(W_{\bar{0}}) \subset W_{\bar{1}},\ f(W_{\bar{1}}) \subset W_{\bar{0}}\}.$$

因此，

$$(\mathrm{End}\, W)[[x^{1/T}, x^{-1/T}]] = (\mathrm{End}\, W)_{\bar{0}}[[x^{1/T}, x^{-1/T}]] \oplus (\mathrm{End}\, W)_{\bar{1}}[[x^{1/T}, x^{-1/T}]]$$

也是 $\mathbb{Z}_2$分次的。我们为 (End W)$[[x^{1/T}, x^{-1/T}]]$ 赋予自然的 $\mathbb{Z}_T$分次

$$(\mathrm{End}\, W)[[x^{1/T}, x^{-1/T}]] = \bigoplus_{j=0}^{T-1} x^{-j/T}(\mathrm{End}\, W)[[x, x^{-1}]]. \tag{3.1}$$

定义 (End W)$[[x^{1/T}, x^{-1/T}]]$ 的一个自同构 g如下:

$$gf(x^{1/T}) = f(\eta^{-1}x^{1/T}), \quad \text{for } f(x) \in (\operatorname{End} W)[[x, x^{-1}]].$$

Set

$$\mathcal{E}_T(W) = \left\{ a(x) \in (\operatorname{End} W)[[x^{1/T}, x^{-1/T}]] \;\middle|\; a(x)w \in W((x^{1/T})), \forall w \in W \right\}. \tag{3.2}$$

于是， $\mathcal{E}_T(W)$ 在 g 的作用下保持不变，并分解为

$$\mathcal{E}_T(W) = \mathcal{E}_T(W)^0 \oplus \cdots \oplus \mathcal{E}_T(W)^{T-1}, \tag{3.3}$$

其中

$$\mathcal{E}_T(W)^n = \{a(x) \in \mathcal{E}_T(W) \mid ga(x) = \eta^n a(x)\}, \quad n \in \mathbb{Z}_T.$$

令 1_W 表示作用在 W 上的恒等算子。显然， $1_W \in \mathcal{E}_T(W)^0$。

注释 3.1。注意，对于 $a(x) \in \mathcal{E}_T(W)$ 和 $n \in \mathbb{N}$，有 $\partial_x^{(n)} a(x) \in \mathcal{E}_T(W)$。于是，$\mathcal{E}_T(W)$ 自然地成为双代数 $\mathcal{B}$ 上的一个模，其中

$$\mathcal{D}^{(n)} \cdot a(x) = \partial_x^{(n)} a(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

我们对元素 $a(x) \in \mathcal{E}_T(W)$ 约定一些齐次性条件。若 $a(x) \in \mathcal{E}_T(W)$ 是 $\mathbb{Z}_T$-齐次的，即 $a(x) \in \mathcal{E}_T(W)^n$ 对某个 $n \in \mathbb{Z}$ 成立；若 $\mathbb{Z}_2$-齐次，即 $a(x) \in \mathcal{E}_T(W)_{\bar{0}} \cup \mathcal{E}_T(W)_{\bar{1}}$。若 $a(x)$ 既是 $\mathbb{Z}_T$-齐次的又是 $\mathbb{Z}_2$-齐次的，则称 $a(x)$ 为齐次的。

设 $a(x)$ $b(x) \in \mathcal{E}_T(W)$ 为齐次的。若存在 $k \in \mathbb{N}$ ，使得

$$(x_1 - x_2)^k a(x_1)b(x_2) = (-1)^{|a(x)||b(x)|}(x_1 - x_2)^k b(x_2)a(x_1),$$

其中 $|a(x)|$ 表示 $a(x)$ 的 $\mathbb{Z}_2$-宇称。若子空间 $S \subset \mathcal{E}_T(W)$ 由齐次元张成，且其中任意两个齐次元两两局部，则称其为局部的。 W 上的局部系统是 $\mathcal{E}_T(W)$ 的极大局部子空间。采用与特征零情形 [L], 相同的论证，我们得到:

引理 3.2. 若 $a(x)$ 与 $b(x)$ 两两局部，则对于任意 $n \in \mathbb{N}$， $a(x)$ 与 $\partial_x^{(n)} b(x)$ 也两两局部。

设 $a(x)$ $b(x) \in \mathcal{E}_T(W)$ 是齐次且两两局部的，其中 $a(x) \in \mathcal{E}_T(W)^r$，对某个 $r \in \mathbb{Z}$ 成立。对于 $n \in \mathbb{Z}$，我们定义

$$\begin{aligned} a(x)_n b(x) = \operatorname{Res}_{x_1} \operatorname{Res}_{x_0} x_0^n \left(\frac{x_1 - x_0}{x} \right)^{\frac{r}{T}} \Bigg(& x_0^{-1} \delta\left(\frac{x_1 - x}{x_0} \right) a(x_1)b(x) \\ & - (-1)^{|a(x)||b(x)|} x_0^{-1} \delta\left(\frac{x - x_1}{-x_0} \right) b(x)a(x_1) \Bigg). \end{aligned}$$

此表达式属于 $\mathcal{E}_T(W)$。

Usi采用与特征零情形相同的论证（见 [L]），我们得到 n:

命题 3.3。 设 $a(x)$ $b(x)$ $c(x) \in \mathcal{E}_T(W)$ 是齐次且两两局部的。则对每个整数 n，算子 $a(x)_n b(x)$ 与 $c(x)$ 两两局部。

设 $S \subset \mathcal{E}_T(W)$ 是 W 上的一个局部系统。与特征零时一样， S在如下意义下是闭的： 对于任意齐次的 $a(x)$ $b(x) \in S$, $a(x)_n b(x) \in S$ ，对所有 $n \in \mathbb{Z}$ 均成立。对于 $a(x) \in S^r$ （其中$r \in \mathbb{Z}_T$）和 $b(x) \in S$，定义

$$Y_S(a(x), x_0)b(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a(x)_n b(x) x_0^{-n-1}$$

$$= \mathrm{Res}_{x_1}\left(\frac{x_1 - x_0}{x}\right)^{\frac{r}{T}}\left(x_0^{-1}\delta\left(\frac{x_1 - x}{x_0}\right)a(x_1)b(x) - (-1)^{|a(x)||b(x)|}x_0^{-1}\delta\left(\frac{x - x_1}{-x_0}\right)b(x)a(x_1)\right). \tag{3.4}$$

那么， $Y_S(\cdot,\ x_0)$ 是从 S 到 $(\mathrm{End}\ S)[[x_0, x_0^{-1}]]$ 的线性映射，使得

$$Y_S(a(x), x_0)b(x) \in S((x_0)) \quad \text{for } a(x), b(x) \in S. \tag{3.5}$$

通过与 [LM2], 中类似的计算，我们得到：

引理 3.4。 设 S 是 $\mathcal{E}_T(W)$ 中的一个局部系统。对于 $a(z)$ $b(z) \in S$，以下共轭公式成立：

$$e^{x\partial_z}Y_S(a(z), z_0)e^{-x\partial_z}b(z) = Y_S(e^{x\partial_z}a(z), z_0)b(z) = e^{x\partial_{z_0}}Y_S(a(z), z_0)b(z). \tag{3.6}$$

沿用 [L], 中的论证，并将其中的引理 3.3 和 3.11 替换为上述引理 3.2 和 3.4，我们得到：

定理 3.5。 设 W 是一个 $\mathbb{Z}_2$-分次向量空间。那么，每个局部子空间 $S \subset \mathcal{E}_T(W)$ 都生成一个顶点超代数 $\langle S\rangle$ ，其自同构 g 的阶为 T。此外， W 成为一个忠实的 g-扭曲超 $\langle S\rangle$-模，其中 $Y_W(a(x)\ z) = a(z)$ 对于 $a(x) \in \langle S\rangle$。

4 扭曲 Zhu 代数

本节研究模顶点超代数V的扭曲 Zhu 代数 $A_g(V)$。我们给出扭曲 Zhu 代数的单模集合与 $\frac{1}{T_0}\mathbb{N}$ 分次扭曲 V-模的单模集合之间的一个双射。

4.1 扭曲结合代数 $A_g(V)$

令 $\mathrm{Aut}(V)$ 表示顶点超代数 $V = V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}}$ 的自同构群。由于 V 的任一自同构都保持其 $\mathbb{Z}_2$分次，因此容易看出， σ 位于 $\mathrm{Aut}(V)$ 的中心。

固定一个阶为 T的自同构 $g \in \mathrm{Aut}(V)$，并令 T_0 为乘积 $g\sigma$的阶。我们分别按照 g 和 $g\sigma$ 的作用将 V 分解为特征子空间，如下所示：

$$V = \bigoplus_{r\in\mathbb{Z}/T\mathbb{Z}} V^r, \tag{4.1}$$

$$V = \bigoplus_{r\in\mathbb{Z}/T_0\mathbb{Z}} V^{r*}, \tag{4.2}$$

其中 $V^r = \{v \in V \mid gv = \eta^r v\}$ 和 $V^{r*} = \{v \in V \mid g\sigma(v) = \varepsilon^r v\}$， η （分别为 ε）是 $\mathbb{F}$ 中的一个本原 T（分别为 T_0）次单位根。注意， V^{0^*} 是 V的一个顶点子超代数。

对于一个 $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$-齐次元 $u \in V$和一个非负整数 n，定义

$$u \circ_g^n v = \begin{cases} \mathrm{Res}_z \frac{(1+z)^{\deg u}}{z^{2+n}} Y(u, z)v, & u \in V^{0*}, \\ \mathrm{Res}_z \frac{(1+z)^{\deg u - 1 + \frac{r}{T_0}}}{z^{1+n}} Y(u, z)v, & u \in V^{r*}, r \neq 0, \end{cases} \tag{4.3}$$

and

$$u *_g v = \begin{cases} \mathrm{Res}_z \frac{(1+z)^{\deg u}}{z} Y(u,z)v, & u \in V^{0*}, \\ 0, & u \in V^{r*}, r \neq 0. \end{cases} \tag{4.4}$$

将 $\circ_g^n$ 和 $*_g$ 都线性延拓到 V上。令

$$O_g(V) = \mathrm{span}\left\{a \circ_g^n b \mid a, b \in V, n \in \mathbb{N}\right\}$$

并定义线性超空间

$$A_g(V) = V/O_g(V),$$

其中宇称由 V 的宇称诱导。

当 $g = 1_V$ 时，我们使用记号 $A(V)$、 $O(V)$、 $u \circ^n v$ 和 $u * v$。这恢复了 [LM3] 中定义的结合代数。为了在 $A_g(V)$ 上建立代数结构，我们先给出几个引理。大部分证明沿用文献中的已知论证，仅作了少量修改（参见 [DLM、DZ、JLM、LM2、LM3、LM4、DW、Y]）。

正如 [LM3], 中的引理 3.3，我们有:

引理 4.1。 假设 $u \in V^{r*}$ 是一个 $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$-齐次元。那么对于任意满足 $n \geq m$ 的 m、 $n \in \mathbb{N}$，以及任意 $v \in V$,

$$\mathrm{Res}_z Y(u,z)v \frac{(1+z)^{\deg u + m}}{z^{2+n}} \in O_g(V), \ \textit{for } u \in V^{0*}, \tag{4.5}$$

$$\mathrm{Res}_z Y(u,z)v \frac{(1+z)^{\deg u - 1 + \frac{r}{T_0} + m}}{z^{1+n}} \in O_g(V), \ \textit{for } u \in V^{r*} (r \neq 0). \tag{4.6}$$

以下引理与 [DLM] 中的引理 2.1 类似。

引理 4.2。如果 $r \neq 0$，那么 $V^{r*} \subset O_g$（V）。

证明。 取一个- $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$-齐次的 $u \in V^{r*}$ $(r \neq 0)$，并令 $n = 0$。则

$$\begin{aligned} u \circ_g^0 \mathbf{1} &= \mathrm{Res}_z \frac{(1+z)^{\deg u - 1 + \frac{r}{T_0}}}{z} Y(u,z)\mathbf{1} \\ &= \sum_{i \geq 0} \binom{\deg u - 1 + \frac{r}{T_0}}{i} u_{i-1}\mathbf{1} = u \in O_g(V). \end{aligned}$$ □

注 4.3。 令 $I = O_g(V) \cap V^{0*}$。根据引理 4.2，我们有 $A_g(V) \cong V^{0*}/I$ 作为线性空间。记 $O(V^{0*})$ 为由 $a \circ^n b$ 张成的子空间，其中 a， $b \in V^{0*}$。由于 $O(V^{0*}) \subset I$， $A_g(V)$ 是 $A(V^{0*})$ 的商。

正如 [JLM] 中的引理 2.9（证明略有不同），我们有:

引理 4.4。 设 $u \in V$ 是一个 $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$-齐次向量。则

$$\mathcal{D}^{(n)}u \equiv \binom{-\deg u}{n} u \pmod{O_g(V)}, \ \textit{for } n \in \mathbb{N}. \tag{4.7}$$

证明。 若 $u \in V^{0*}$，证明与 [JLM] 中引理 2.9 的证明相同，其中使用了 Chu–Vandermonde 恒等式

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{\deg u}{i} \binom{-\deg u}{k-i} = 0$$

。

若 $u \in V^{r*}$、 $r \neq 0$，则

$$\mathcal{D}^{(n)}u = u_{-n-1}\mathbf{1} \in V^{r*} \subset O_g(V)$$

由引理 4.2 得。因此 $\mathcal{D}^{(n)}u \equiv 0 \equiv \binom{-\deg u}{n} u$（模 O_g（V））。 □

下面的结果将用于在 $A_g(V)$ 上建立结合代数结构。

引理 4.5. 假设 $u, v \in V^{0*}$ 是齐次的。那么

(i) $u *_g v - (-1)^{|u||v|} \mathrm{Res}_z \frac{(1+z)^{\deg v - 1}}{z} Y(v, z)u \in O(V^{0*})$; (ii) $u *_g v - (-1)^{|u||v|} v *_g u - \mathrm{Res}_z (1+z)^{\deg u - 1} Y(u, z)v \in O(V^{0*})$。

证明。 证明与 [LM4] 中引理 2.6 的证明相同。 □

现在可以证明 $A_g(V)$ 是一个结合代数。

定理 4.6. 子空间 $O_g(V)$ 是非结合代数 $(V, *_g)$的双边理想，并且乘积 $*_g$ 在 $A_g(V) = V/O_g(V)$ 上诱导出结合代数结构，其单位元为 $\mathbf{1} + O_g(V)$。

证明。 我们首先证明 $O_g(V)$ 是 $(V, *_g)$ 的双边理想。对于 $u \in V^{r*}$, $r \neq 0$, 根据 $*_g$ 的定义可得 $u *_g V = 0$。由引理 4.2，我们还知道，对于 $r \neq 0$，有 $V^{0*} *_g V^{r*} \subset V^{r*}$。因此，接下来只需证明 $I = V^{0*} \cap O_g(V)$ 是 $(V^{0*}, *_g)$ 的双边理想。

设 $u \in V^{0*}, v \in V^{r*}, w \in V_{(T_0 - r)^*} \in V$ 是三个 $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$-齐次元。我们必须证明 $u *_g (v \circ_g^n w)$ 和 $(v \circ_g^n w) *_g u$ 都属于 I。

若 $r = 0$, 证明与 [LM4] 中的定理 2.7 类似。现在假设 $r \neq 0$。我们有

$$
\begin{aligned}
& u *_g \left(v \circ_g^n w\right) \\
& \equiv u *_g \left(v \circ_g^n w\right) - (-1)^{|u||v|} v \circ_g^n (u *_g w) \\
& = \mathrm{Res}_{z_1} \mathrm{Res}_{z_2} Y(u, z_1) Y(v, z_2) w \frac{(1+z_1)^{\deg u}}{z_1} \frac{(1+z_2)^{\deg v - 1 + r/T_0}}{z_2^{1+n}} \\
& \quad - (-1)^{|u||v|} \mathrm{Res}_{z_1} \mathrm{Res}_{z_2} Y(v, z_2) Y(u, z_1) w \frac{(1+z_1)^{\deg u}}{z_1} \frac{(1+z_2)^{\deg v - 1 + r/T_0}}{z_2^{1+n}} \\
& = \mathrm{Res}_{z_0} \mathrm{Res}_{z_2} \frac{(1+z_2+z_0)^{\deg u}}{z_2 + z_0} \frac{(1+z_2)^{\deg v - 1 + r/T_0}}{z_2^{1+n}} Y\left(Y(u, z_0)v, z_2\right) w \\
& = \mathrm{Res}_{z_0} \mathrm{Res}_{z_2} \sum_{i \geq 0, j \geq 0} \binom{\deg u}{i} (-1)^j z_0^{i+j} \frac{(1+z_2)^{\deg(u_{i+j}v) - 1 + r/T_0 + j + 1}}{z_2^{2+j+n}} Y\left(Y(u, z_0)v, z_2\right) w \\
& = \mathrm{Res}_{z_2} Y(u_{i+j}v, z_2) w \sum_{i \geq 0, j \geq 0} \binom{\deg u}{i} (-1)^j \frac{(1+z_2)^{\deg(u_{i+j}v) - 1 + r/T_0 + j + 1}}{z_2^{2+j+n}} \\
& \equiv 0 \pmod{O_g(V)}.
\end{aligned}
$$

最后一个等式由引理 4.1 得出。接下来我们将证明 $(v \circ_g^n w) *_g u \in I$。事实上,

$$
\begin{aligned}
& (v \circ_g^n w) *_g u \\
& = \left(\mathrm{Res}_z \frac{(1+z)^{\deg v - 1 + \frac{r}{T_0}}}{z^{1+n}} Y(v, z) w \right) *_g u \\
& = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\deg v - 1 + \frac{r}{T_0}}{j} (v_{j-1-n} w) * u \\
& = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\deg v - 1 + \frac{r}{T_0}}{j} \mathrm{Res}_{z_2} \frac{(1+z_2)^{\deg v + \deg w + n - j}}{z_2} Y(v_{j-1-n} w, z_2) u \\
& = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\deg v - 1 + \frac{r}{T_0}}{j} \mathrm{Res}_{z_2} \mathrm{Res}_{z_0} z_0^{j-1-n} \frac{(1+z_2)^{\deg v + \deg w + n - j}}{z_2} Y(Y(v, z_0)w, z_2) u
\end{aligned}
$$

$$= \operatorname{Res}_{z_2}\operatorname{Res}_{z_0}\frac{(1+z_2+z_0)^{\deg v-1+\frac{r}{T_0}}(1+z_2)^{\deg w+n+1-\frac{r}{T_0}}}{z_0^{1+n}z_2}Y(Y(v,z_0)w,z_2)u$$

$$= \operatorname{Res}_{z_1}\operatorname{Res}_{z_2}Y(v,z_1)Y(w,z_2)u\frac{(1+z_1)^{\deg v-1+\frac{r}{T_0}}(1+z_2)^{\deg w+n+1-\frac{r}{T_0}}}{(z_1-z_2)^{1+n}z_2}$$

$$-(-1)^{|v||w|}\operatorname{Res}_{z_2}\operatorname{Res}_{z_1}Y(w,z_2)Y(v,z_1)u\frac{(1+z_1)^{\deg v-1+\frac{r}{T_0}}(1+z_2)^{\deg w-1+(n+1)+1-\frac{r}{T_0}}}{(z_2-z_1)^{1+n}z_2}$$

$$\equiv 0 \pmod{O_g(V)}.$$

为了证明 $*_g$ 在 $A_g(V)$ 中的结合律，我们需要证明对任意 u、v、$w\in V^{0*}$，$(u*_g v)*_g w\equiv u*_g(v*_g w)$（模 $O_g(V)$）。这与 [LM4] 中的定理 2.7 相同。

由于 $a*\mathbf{1}=\sum_{i\geq 0}\binom{\deg a}{i}a_{i-1}\mathbf{1}=a$ 和 $\mathbf{1}*a=\sum_{i\geq 0}\binom{0}{i}\mathbf{1}_{i-1}a=a$，$\mathbf{1}$ 是单位元。

□

4.2 李代数 $V[g]$

For 对于域 $\mathbb{F}$上的任意顶点超代数 V，众所周知（参见 [B]），商 ent

$$V/\mathcal{D}V$$

带有自然的李超代数结构，其括号为

$$[u+\mathcal{D}V,v+\mathcal{D}V]=u_0v+\mathcal{D}V. \tag{4.8}$$

假设 g 是 V的一个自同构，其阶为 T，且与 $\mathbb{F}$的特征互素。令$V^r\subset V$为方程 (4.1) 中针对 $r=0$，$\mathbf{1}$，.....，$T-1$定义的子集。

令 t为一个不定元。考虑赋有顶点算子 − −

$$Y(f(t),z)g(t)=f(t+z)g(t)=\left(e^{z\frac{d}{dt}}f(t)\right)g(t),$$

其 $\mathcal{D}^{(n)}$-算子为 $\partial_t^{(n)}$（由 $\partial_t^{(n)}(t^m)=\binom{m}{n}t^{m-n}$ for $m\in\frac{1}{T}\mathbb{Z}$ 定义）。对于张量积顶点超代数

$$L(V)=\mathbb{F}\left[t^{\frac{1}{T}},t^{-\frac{1}{T}}\right]\otimes V,$$

我们用 $\widehat{\mathcal{D}}^{(n)}$ 来表示其 $\mathcal{D}^{(n)}$-算子。根据 [LM4]，$\widehat{\mathcal{D}}^{(n)}$ 必须具有以下形式 m

$$\widehat{\mathcal{D}}^{(n)}=\sum_{i=0}^{n}\partial_t^{(n-i)}\otimes\mathcal{D}^{(i)}\quad\text{for } n\in\mathbb{N}.$$

将 g 扩展为 $L(V)$ 的一个自同构，定义如下:

$$g(t^m\otimes a)=\eta^{-m}(t^m\otimes ga).$$

令 $L(V,g)$ 为 $L(V)$ 的 g-不变子代数。显然

$$L(V,g)=\bigoplus_{r=0}^{T-1}t^{\frac{r}{T}}\mathbb{F}[t,t^{-1}]\otimes V^r.$$

^商 $V[g]=L(V,g)/\mathcal{D}L(V,g)$ 上存在李超代数结构，其超括号为

$$[u+\widehat{\mathcal{D}}L(V,g),v+\widehat{\mathcal{D}}L(V,g)]=u_0v+\widehat{\mathcal{D}}L(V,g).$$

为方便起见，当 $v\in V$ 和 $m\in\frac{1}{T}\mathbb{Z}$ 时，记 $t^m\otimes v\in L(V,g)$ 为 $v(m)$。若不会引起混淆，我们也用 $v(m)$ 表示 $t^m\otimes v\in L(V,g)$ 在 $V[g]$ 中的像。

将一般李括号 (4.8) 应用于 $L(V)/\mathcal{D}L(V)$，可得:

引理 4.7。 $V[g]$ 是一个具有以下括号关系的李超代数:

$$[u(m), v(n)] = \sum_{i\geq 0} \binom{m}{i} (u_i v)(m+n-i)$$

对于 u、 $v \in V$、 m、$-n \in \frac{1}{T}\mathbb{Z}$，以及属于 $V[g]$ 中心的$\mathbf{1}(-1)$。

对于任意 $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$-齐次的 $u \in V$ 和 $m \in \frac{1}{T}\mathbb{Z}$，定义

$$\deg(u(m)) = \deg u - m - 1.$$

那么 $L(V, g)$ 和 $V[g]$ 都自然地成为 $\frac{1}{T_0}\mathbb{Z}$-分次的:

$$L(V,g) = \bigoplus_{n\in\frac{1}{T_0}\mathbb{Z}} L(V,g)_n, \quad V[g] = \bigoplus_{n\in\frac{1}{T_0}\mathbb{Z}} V[g]_n.$$

此外， $V[g]$ 有三角分解:

$$V[g] = V[g]_+ \oplus V[g]_0 \oplus V[g]_-$$

其中 $V[g]_\pm = \sum_{0<n\in\frac{1}{T_0}\mathbb{Z}} V[g]_{\pm n}$。 直接计算可得

$$V[g]_0 = \mathrm{span}\{a(\deg a - 1) \mid a \in V^{0*} \text{ homogeneous}\}.$$

Let $A_g(V)_{Lie}$ 是结合代数 $A_g(V)$ 的李超代数，其括号 t

$$[u, v] = u *_g v - (-1)^{|u||v|} v * u.$$

如 [DLM，DZ], 所述，我们有以下结果。

引理 4.8。 存在从 $V[g]_0$ 到 $A_g(V)_{Lie}$的满射李超代数同态，其将 u（次数 $u-1$）映射为 $u + O_g(V)$，其中 $u \in V^{0*}$。

证明。 定义线性映射 $o: V^{0*} \to V[g]_0$，如下:

$$o(a) = a(\deg a - 1)), \text{ for homogeneous } a \in V^{0*}.$$

回忆一下， $\widehat{\mathcal{D}}L(V, g)$ 是 $L(V, g)$ 的 $\frac{1}{T_0}\mathbb{Z}$-分次子空间。因此

$$V[g]_0 = L(V,g)_0/(\widehat{\mathcal{D}}L(V,g))_0.$$

根据定义,

$$L(V,g)_0 = \bigoplus_{n\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}} \mathbb{F}t^{n-1} \otimes V_n^{0*},$$

它与 V^{0*} 线性同构，而 $(\widehat{\mathcal{D}}L(V, g))_0$ 由形如 $\widehat{\mathcal{D}}^{(k)}(t^m \otimes a)$ 的元素张成，其中 $k \in \mathbb{Z}_+$、 $a \in V_n^{0*}$、 m, $n \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ 且 $m = n - 1 + k$。

Let

$$\rho : V^{0*} \to L(V,g)_0$$

为由下式定义的线性同构

$$\rho(v) = t^{\deg v} \otimes v.$$

对于任意齐次的 $v \in V^{0*}$ 和 $k \in \mathbb{Z}_+$，我们有

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{D}}^{(k)}(t^{\deg v+k-1}\otimes v) &= \sum_{i=0}^{k}(\partial_t^{(k-i)}\otimes \mathcal{D}^{(i)})(t^{\deg v+k-1}\otimes v)\\ &= \sum_{i=1}^{k}\binom{\deg v+k-1}{k-i}(t^{\deg v-1+i}\otimes \mathcal{D}^{(i)}v)\\ &= \rho\left(\sum_{i=1}^{k}\binom{\deg v+k-1}{k-i}\mathcal{D}^{(i)}v\right).\end{aligned}$$

由于 ρ 是同构，因此

$$\ker\rho = \operatorname{span}\left\{\sum_{i=1}^{k}\binom{\deg v+k-1}{k-i}\mathcal{D}^{(i)}v \mid v\in V^{0*}, k\in\mathbb{Z}_+\right\}.$$

由引理 4.4 可得

$$0=\binom{k-1}{k}v=\sum_{i=1}^{k}\binom{\deg v+k-1}{k-i}\binom{-n}{i}v\equiv\sum_{i=1}^{k}\binom{\deg v+k-1}{k-i}\mathcal{D}^{(i)}v \pmod{O_g(V)}.$$

因此,

$$\ker\rho\subset O_g(V).$$

因此，存在一个满射线性映射

$$\phi: V[g]_0\cong V^{0*}/\ker\rho\to A_g(V)$$

使得

$$\phi(a(\deg a-1))=a+O_g(V),\quad a\in V^{0*}.$$

$V[g]_0$ 的李括号由下式给出

$$[u(\deg u-1),v(\deg v-1)]=\sum_{i\geq 0}\binom{\deg u-1}{i}u_iv(\deg(u_iv)-1),$$

而 $A_g(V)_{Lie}$ 上的李括号定义为

$$[u+O_g(V),v+O_g(V)]=u*_g v-(-1)^{|u||v|}v*u+O_g(V).$$

由此可知， ϕ 保持李超括号。因此， ϕ 是从 $V[g]_0$ 到 $A_g(V)_{Lie}$的李超代数同态。

□

4.3 函子 Ω

我们将构造一个协变函子 Ω，它从 g-扭曲的 V-模范畴映到 $A_g(V)$-模范畴。

设 M 是一个 g-扭曲的 V-模。定义 M的一个子空间

$$\Omega(M)=\{w\in M\mid u_nw=0, u\in V, n\in\frac{1}{T}\mathbb{Z}, n>\deg u-1\}.$$

本节的主要结果是以下定理，它表明 $\Omega(M)$ 是一个 $A_g(V)$-模。其证明与特征零情形 [DZ, DLM, Z] 以及模情形 [DW, LM3, LM4] 的证明基本相同。

定理 4.9。 设 M 是一个弱 g-扭曲 V-模。对每个 $a \in V$，令

$$[a] = a + O_g(V) \in A_g(V).$$

那么，$\Omega(M)$ 是一个 $A_g(V)$-模，其中 $[a]$ 的作用为 $o(a)$。

证明。 我们先证明，对于所有 $a \in V$，$\Omega(M)$ 在 $o(a)$ 的作用下是不变的。对于任意 $a \in V^{r*}(\neq 0)$, 显然有 $o(a) = 0$。现在令 $a \in V^{0*}$。取 $b \in V$, $w \in \Omega(M)$, 且$n > \deg b - 1$。由公式 (2.13),

$$b_n o(a)w = (-1)^{|u||v|} o(a) b_n w + \sum_{i \geq 0} \binom{n}{i} (b_i a)_{\deg a + n - 1 - i} w = 0,$$

si因为 $b_n w = 0$ 且对于所有 $i \geq 0$, $(b_i a)_{\deg a + n - 1 - i} w = 0$。因此 $o(a)\Omega(M) \subset \Omega(M)$

利用与 [Z], 中相同的论证，我们得到，对于任意 $u, v \in V^{0*}$, $o(u *_g v) = o(u)o(v)$ 在 $\Omega(V)$ 上成立。

剩下要证明的是，对于所有 $a \in O_g(V)$, $o(a)$ 在 $\Omega(M)$ 上的作用为 0。若 $a \in V^{r*}$ 且 $r \neq 0$, 则 $a \notin V^0$，从而 $o(a) = 0$。现在假设 $a \in V^{0*} \cap O_g(V)$。有两种可能的情况:

$$a = \mathrm{Res}_z \frac{(1+z)^{\deg u}}{z^{2+n}} Y(u,z)v, \text{ for } u, v \in V^{0*};$$

or

$$a = \mathrm{Res}_z \frac{(1+z)^{\deg u - 1 + \frac{r}{T_0}}}{z^{1+n}} Y(u,z)v$$

对于某些 $u \in V^{r*}$, $v \in V_{(T_0 - r)*}$, $0 < r \leq T_0 - 1$。对于第一种情况， $a = u \circ_g^n v$, u, $v \in V^{0*}$，证明与 [LM4] 中命题 2.14 的证明相同。对于第二种情况，我们应用结合公式 (2.28)。由于 $z^{\deg u - 1 + \frac{r}{T_0}} Y_W(u,z)w$ 对于 $w \in \Omega(M)$ 仅涉及 z 的非负整数次幂，我们得到

$$(z_0 + z_2)^{\deg u - 1 + \frac{r}{T_0}} Y_M(u, z_0 + z_2) Y_W(v, z_2)w = (z_2 + z_0)^{\deg u - 1 + \frac{r}{T_0}} Y_M(Y(u,z_0)v, z_2)w.$$

对上式应用 $\mathrm{Res}_{z_0} \mathrm{Res}_{z_2} z_0^{-1-n} z_2^{\deg v - \frac{r}{T_0} + n}$ 得到

$$\begin{aligned}
0 &= \mathrm{Res}_{z_0} \mathrm{Res}_{z_2} z_0^{-1-n} z_2^{\deg v - \frac{r}{T_0} + n} (z_0 + z_2)^{\deg u - 1 + \frac{r}{T_0}} Y_M(u, z_0 + z_2) Y_W(v, z_2)w \\
&= \mathrm{Res}_{z_2} \sum_{i \geq 0} \binom{\deg u - 1 + \frac{r}{T_0}}{i} \mathrm{Res}_{z_2} z_2^{\deg u + \deg v + n - i - 1} Y_M(u_{i-1-n}v, z_2)w \\
&= \sum_{i \geq 0} \binom{\deg u - 1 + \frac{r}{T_0}}{i} o(u_{i-1-n}v)w \\
&= o(a)w.
\end{aligned}$$

因此， $o(a)$ 在 $\Omega(M)$ 上作用为零。所以，赋值 $[a] \mapsto o(a)$ 在 $\Omega(M)$ 上定义了一个 $A_g(V)$-模结构。 □

采用与 [DLM], 中相同的证明，我们有:

命题 4.10. 设 $M = \bigoplus_{n \in \frac{1}{T_0}\mathbb{N}} M(n)$ 是一个不可约的 $\frac{1}{T_0}\mathbb{N}$-分次 g-扭曲 V-模，且 $M(0) \neq 0$。那么，$\Omega(M)$ 是一个简单的 $A_g(V)$-模，并且 $\Omega(M) = M(0)$。

4.4 广义 Verma 模与函子 L

设 U 是一个 $A_g(V)$-模。那么， U 自然成为李超代数$A_g(V)_{Lie}$的一个模，因此也成为 $V[g]_0$ 的一个模。我们通过定义$V[g]_-U=0$，将其扩展为一个 $V[g]_{\leq 0}$-模。考虑诱导模

$$M(U)=U(V[g])\otimes_{U(V[g]_{\leq 0})}U,$$

其中， $U(V[g])$ 表示李超代数 $V[g]$ 的万有包络代数。令 $\deg U=0$。于是 $M(U)$ 成为一个 $\frac{1}{T_0}\mathbb{N}$-分次模。根据 PBW 定理， $M(U)(n)=U(V[g]_+)_nU$for $n\in\frac{1}{T_0}\mathbb{N}$，特别地， $M(U)_0=U$。

对于 $v\in V$，我们定义

$$Y_{M(U)}(v,z)=\sum_{m\in\frac{1}{T}\mathbb{Z}}v(m)z^{-m-1}.$$

此算子满足成为一个 g-扭曲的 V-模所需的所有条件，唯独不满足结合律。为使其满足结合律，考虑由以下两个表达式的系数张成的子空间 $W\subset M(U)$:

(1) $(z_0+z_2)^{\deg u}Y(u,\ z_0+z_2)Y(v,\ z_2)w-(z_2+z_0)^{\deg u}Y(Y(u,\ z_0)v,\ z_2)w$，其中 u 是 V^{0*} 中的齐次元素，$v\in V$，且 $w\in W$。

(2) $(z_0+z_2)^{\deg u-1+\frac{r}{T_0}}Y(u,\ z_0+z_2)Y(v,\ z_2)w-(z_2+z_0)^{\deg u-1+\frac{r}{T_0}}Y(Y(u,\ z_0)v,\ z_2)w$，其中 u 是 V^{r*} 中的齐次元，适用于 $r\neq 0$、 $v\in V$和 $w\in U$。

用与 [DZ] , 相同的论证可得:

定理 4.11。 设 U是一个 $A_g(V)$-模。那么商 $M(U)=M(U)^{\sim}/W$带有一个 g-扭曲 V-模的结构，其顶点算子为

$$Y(v,z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}/T_0}v(n)z^{-n-1}\ for\ v\in V.$$

此外， $M(U)^{\sim}(0)=U$和 $M(U)^{\sim}$ 具有如下泛性质：对于任意 g-扭曲V-模 M以及任意 $A_g(V)$-模态射 $\phi:\ U\to\Omega(M)$，存在唯一的g-扭曲 V-模同态 $\phi:\ M(U)\to M$，使其延拓 ϕ。

注意到 $M(U)$ 有唯一的极大 $V[g]$-子模 J，满足性质 $J\cap U=0$。令 $L(U)=M(U)/J$。我们有:

定理 4.12. $L(U)$是一个 $\frac{1}{T_0}\mathbb{N}$-分次的 g-扭曲 V-模，且 $\Omega L(U)\cong U$。此外，这一构造定义了一个函子

$$L:\{A_g(V)\text{-}modules\}\to\left\{\frac{1}{T_0}\mathbb{N}\text{-}graded\ g\text{-}twisted\ V\text{-}modules\right\}$$

它是函子 Ω 的左伴随，即 $\Omega\circ L\cong 1$。

以下结果可直接推出。

定理 4.13. 设 U是一个简单的 $A_g(V)$-模。那么， $L(U)$是一个简单的 $\frac{1}{T_0}\mathbb{N}$-分次g-扭曲 V-模。

5 （扭曲）仿射李超代数

本节中，我们研究与扭曲仿射李超代数相关的模顶点超代数的扭曲模。全文中，设 $\mathbb{F}$ 为特征为 $p>2$的代数闭域。

设 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_{\bar{0}}\oplus\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ 是一个有限维李超代数，满足 $[\mathfrak{g}_{\bar{1}},\mathfrak{g}_{\bar{1}}]=0$。假设$\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ 是 $\mathfrak{g}$ 上满足以下条件的对称双线性型：

$$\langle\mathfrak{g}_{\bar{0}},\mathfrak{g}_{\bar{1}}\rangle=0,\quad \langle[a,u],v\rangle=-\langle u,[a,v]\rangle, \tag{5.1}$$

对所有的 $a\in\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ 和 $u,\ v\in\mathfrak{g}$。定义仿射李超代数

$$\widehat{\mathfrak{g}}=\mathfrak{g}\otimes\mathbb{F}[t,t^{-1}]\oplus\mathbb{F}\mathbf{k}, \tag{5.2}$$

其李超括号由下式确定：

$$\big[a\otimes t^m,b\otimes t^n\big]=\big[a,b\big]\otimes t^{m+n}+m\delta_{m+n,0}\langle a,b\rangle\mathbf{k}, \tag{5.3}$$
$$\big[a\otimes t^m,u\otimes t^n\big]=\big[a,u\big]\otimes t^{m+n}, \tag{5.4}$$
$$\big[u\otimes t^m,v\otimes t^n\big]=\delta_{m+n+1,0}\langle u,v\rangle\mathbf{k}, \tag{5.5}$$
$$\big[\mathbf{k}\ \widehat{\mathfrak{g}}\big]=0, \tag{5.6}$$

对 $a,\ b\in\mathfrak{g}_{\bar{0}}$、$u,\ v\in\mathfrak{g}_{\bar{1}}$、$m,\ n\in\mathbb{Z}$。奇偶分解为：

$$\widehat{\mathfrak{g}}_{\bar{0}}=\mathfrak{g}_{\bar{0}}\otimes\mathbb{F}[t,t^{-1}]\oplus\mathbb{F}\mathbf{k},\quad \widehat{\mathfrak{g}}_{\bar{1}}=\mathfrak{g}_{\bar{1}}\otimes\mathbb{F}[t,t^{-1}]. \tag{5.7}$$

对于 $a\in\mathfrak{g}$，令

$$a(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}(a\otimes t^n)z^{-n-1}\in\widehat{\mathfrak{g}}[[z,z^{-1}]]. \tag{5.8}$$

那么，定义关系推出

$$[a(z_1),b(z_2)]=[a,b](z_2)z_1^{-1}\delta\left(\frac{z_2}{z_1}\right)+\langle a,b\rangle\partial_{z_2}^{(1)}\left(z_1^{-1}\delta\left(\frac{z_2}{z_1}\right)\right)\mathbf{k}, \tag{5.9}$$
$$[a(z_1),u(z_2)]=[a,u](z_2)z_1^{-1}\delta\left(\frac{z_2}{z_1}\right), \tag{5.10}$$
$$[u(z_1),v(z_2)]=\langle u,v\rangle z_1^{-1}\delta\left(\frac{z_2}{z_1}\right)\mathbf{k}, \tag{5.11}$$

对 $a,\ b\in\mathfrak{g}_{\bar{0}},u,\ v\in\mathfrak{g}_{\bar{1}}$。我们在 $\widehat{\mathfrak{g}}$ 上定义一个次数：

$$\deg\mathbf{k}=0,\quad \deg(a\otimes t^n)=-n,\quad \deg(u\otimes t^n)=-n-\frac{1}{2}, \tag{5.12}$$

对任意$a\in\mathfrak{g}_{\bar{0}}$、$u\in\mathfrak{g}_{\bar{1}}$、$n\in\mathbb{Z}$。由此，$\widehat{\mathfrak{g}}$ 构成一个 $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$-分次李超代数。令 $\widehat{\mathfrak{g}}_{(q)}$ 表示 $\widehat{\mathfrak{g}}$ 中次数为 q的齐次子空间。那么$\widehat{\mathfrak{g}}=\widehat{\mathfrak{g}}_+\oplus\widehat{\mathfrak{g}}_{(0)}\oplus\widehat{\mathfrak{g}}_-$有如下三角分解：

$$\begin{aligned}
&\widehat{\mathfrak{g}}_{(0)}=\mathfrak{g}_{\bar{0}}\oplus\mathbb{F}\mathbf{k},\\
&\widehat{\mathfrak{g}}_+=\bigoplus_{q\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}_+}\widehat{\mathfrak{g}}_{(q)}=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+}(\mathfrak{g}_{\bar{0}}\otimes t^{-n})\oplus\bigoplus_{m\in\mathbb{Z}_+}\mathfrak{g}_{\bar{1}}\otimes t^{-m},\\
&\widehat{\mathfrak{g}}_-=\bigoplus_{q\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}_+}\widehat{\mathfrak{g}}_{(-q)}=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+}(\mathfrak{g}_{\bar{0}}\otimes t^{n})\oplus\bigoplus_{m\in\mathbb{N}}\mathfrak{g}_{\bar{1}}\otimes t^{m}.
\end{aligned}$$

令 $\mathbb{F}_\ell$ 为一维 $\widehat{\mathfrak{g}}_- \oplus \widehat{\mathfrak{g}}_{(0)}$-模，其中$\mathbf{k}$ 的作用为标量 $\ell \in \mathbb{F}$，而 $\mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \widehat{\mathfrak{g}}_-$的作用平凡。诱导模

$$V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(\ell, 0) = U(\widehat{\mathfrak{g}}) \otimes_{U(\widehat{\mathfrak{g}}_- \oplus \widehat{\mathfrak{g}}_{(0)})} \mathbb{F}_\ell \cong U(\widehat{\mathfrak{g}})/U(\widehat{\mathfrak{g}})(\widehat{\mathfrak{g}}_- \oplus \widehat{\mathfrak{g}}_{(0)}) \tag{5.13}$$

具有顶点超代数结构，见 [LM3]。

定理 5.1. 在 $V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(\ell,0)$上存在一个顶点超代数结构，该结构由条件 $\mathbf{1} = 1 \otimes 1$ 是真空向量唯一确定，且

$$Y(a, x) = a(x) \in (\mathrm{End}\, V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(\ell, 0))[[x, x^{-1}]], \quad \textit{for } a \in \mathfrak{g}. \tag{5.14}$$

设 τ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个自同构，并保持双线性型 $\langle \cdot, \cdot \rangle$，也就是说，

$$\langle \tau a, \tau b \rangle = \langle a, b \rangle \qquad \text{for } a, b \in \mathfrak{g}.$$

假设 τ 的阶为有限数 T，且与 p 互素。那么我们有特征空间分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{T-1}, \tag{5.15}$$

其中 $\mathfrak{g}_i = \{a \in \mathfrak{g} \mid \tau a = \eta^i a\}$ 对于 $i \in \mathbb{Z}_T$， η 是一个本原 T 次单位根。显然，对于任意 $i \in \mathbb{Z}_T$，$\mathfrak{g}_i$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个 $\mathbb{Z}_2$ 分次子空间，其奇偶分解为 $\mathfrak{g}_i = \mathfrak{g}_{\bar{0},i} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1},i}$。将 τ 延拓到 $\widehat{\mathfrak{g}}$，定义如下:

$$\tau(\mathbf{k}) = \mathbf{k}, \quad \tau(a \otimes t^n) = \tau(a) \otimes t^n. \tag{5.16}$$

这定义了 $\widehat{\mathfrak{g}}$的一个自同构，并诱导出顶点超代数$V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(\ell,\ 0)$的一个自同构，也记作 τ，其阶为 T。

为研究 τ-扭曲的 $V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(\ell,\ 0)$-模，我们定义扭曲仿射李超代数

$$\widehat{\mathfrak{g}}[\tau] = \bigoplus_{i=0}^{T-1} \mathfrak{g}_i \otimes t^{\frac{i}{T}} \mathbb{F}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{F}\mathbf{k} \tag{5.17}$$

其超括号关系为:

$$[a \otimes t^{m+\frac{i}{T}}, b \otimes t^{n+\frac{j}{T}}] = [a, b] \otimes t^{m+n+\frac{i+j}{T}} + \langle a, b \rangle \big(m + \frac{i}{T}\big) \delta_{m+n+\frac{i+j}{T}, 0} \mathbf{k}, \tag{5.18}$$

$$[a \otimes t^{m+\frac{i}{T}}, v \otimes t^{n+\frac{j}{T}}] = [a, v] \otimes t^{m+n+\frac{i+j}{T}}, \tag{5.19}$$

$$[u \otimes t^{m+\frac{i}{T}}, v \otimes t^{n+\frac{j}{T}}] = \langle u, v \rangle \delta_{m+n+1+\frac{i+j}{T}, 0} \mathbf{k}, \tag{5.20}$$

$$[\mathbf{k}\ \widehat{\mathfrak{g}}[\tau]] = 0, \tag{5.21}$$

其中$a \in \mathfrak{g}_{\bar{0}} \cap \mathfrak{g}_i$, $b \in \mathfrak{g}_{\bar{0}} \cap \mathfrak{g}_j$, $u \in \mathfrak{g}_{\bar{1}} \cap \mathfrak{g}_i$, $v \in \mathfrak{g}_{\bar{1}} \cap \mathfrak{g}_j$。偶子空间和奇子空间分别为:

$$\widehat{\mathfrak{g}}[\tau]_{\bar{0}} = \bigoplus_{i=0}^{T-1} \mathfrak{g}_{\bar{0},i} \otimes t^{\frac{i}{T}} \mathbb{F}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{F}\mathbf{k}, \tag{5.22}$$

$$\widehat{\mathfrak{g}}[\tau]_{\bar{1}} = \bigoplus_{i=0}^{T-1} \mathfrak{g}_{\bar{1},i} \otimes t^{\frac{i}{T}} \mathbb{F}[t, t^{-1}]. \tag{5.23}$$

$\widehat{\mathfrak{g}}[\tau]$-模 M称为局部截断模，如果对任意 $u \in M$、 $\big(\mathfrak{g}_i \otimes t^{n+\frac{i}{T}}\big)u = 0$，当 n 足够大时均成立。如果 M 还具有 $\mathbb{Z}_2$-分次 $M = M_{\bar{0}} \oplus M_{\bar{1}}$ 并与宇称相容，则 M 称为 $\widehat{\mathfrak{g}}[\tau]$-超模。

对于 $\widehat{\mathfrak{g}}[\tau]$-模 M 和 $a\in\mathfrak{g}_i$，定义形式级数

$$a_\tau(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}(a\otimes t^{n+\frac{i}{T}})z^{-n-1-\frac{i}{T}}\in \operatorname{End}M[[z^{\frac{1}{T}},z^{-\frac{1}{T}}]]. \tag{5.24}$$

那么对于 $a\in\mathfrak{g}_{\bar{0},\,i}$、$b\in\mathfrak{g}_j$、$u\in\mathfrak{g}_{\bar{1},\,k}$、$v\in\mathfrak{g}_{\bar{1}}$，我们有

$$[a_\tau(z_1),b_\tau(z_2)]=[a,b]_\tau(z_2)z_1^{-1}\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^{\frac{i}{T}}\delta\left(\frac{z_2}{z_1}\right)+\langle a,b\rangle\partial_{z_2}^{(1)}z_1^{-1}\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^{\frac{i}{T}}\delta\left(\frac{z_2}{z_1}\right)\mathbf{k}, \tag{5.25}$$

$$[a_\tau(z_1),u_\tau(z_2)]=[a,u]_\tau(z_2)z_1^{-1}\delta\left(\frac{z_2}{z_1}\right)\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^{\frac{i}{T}}, \tag{5.26}$$

$$[u_\tau(z_1),v_\tau(z_2)]_+=\langle a,b\rangle z_1^{-1}\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^{\frac{k}{T}}\delta\left(\frac{z_2}{z_1}\right)\mathbf{k}. \tag{5.27}$$

如果 M 是一个 $\widehat{\mathfrak{g}}[\tau]$-超模，那么当且仅当每个 $a_\tau(z)$ 都属于 $\mathcal{E}_T(M)$ 时，它是局部截断的。如果 M 不是超模，我们按如下方式构造一个 $\widehat{\mathfrak{g}}[\tau]$-超模 $\tilde{M}$：

$\tilde{M}=M\oplus M$，其中 $a\in\widehat{\mathfrak{g}}[\tau]_{\bar{0}}$ 作用为 $(a,\ a)$，而 $u\in\widehat{\mathfrak{g}}[\tau]_{\bar{1}}$ 作用为 $(u,\ -u)$。于是 M 是一个带有 $\mathbb{Z}_2$-分次的 $\widehat{\mathfrak{g}}[\tau]$-超模

$$\tilde{M}_{\bar{0}}=\{(w,w)\mid w\in M\},\quad \tilde{M}_{\bar{1}}=\{(w,-w)\mid w\in M\}. \tag{5.28}$$

我们得出，M 是一个局部截断的 $\widehat{\mathfrak{g}}[\tau]$-模，当且仅当 M 是局部截断的；而这又等价于：M 上的每个 $a_\tau(z)$ 都是 $\mathcal{E}_T(M)$ 中的元素。

我们有如下定理：局部截断的 $\widehat{\mathfrak{g}}[\tau]$-模对应于 τ-扭曲的 $V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(\ell,\ 0)$-模。

定理 5.2。设 $\mathfrak{g}$ 是如前所述的李超代数，且 τ 是 $V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(\ell,0)$ 的一个阶为 T 的自同构。那么，任意层为 ℓ 的局部截断 $\widehat{\mathfrak{g}}[\tau]$-模都是一个 τ-扭曲的 $V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(\ell,\ 0)$-模。

证明。设 M 是一个层为 ℓ 的局部截断 $\widehat{\mathfrak{g}}[\tau]$-超模。由方程 (5.25)、(5.26) 和 (5.27) 可知，$\{a_\tau(z)\mid a\in\mathfrak{g}\}$ 是 $\mathcal{E}_T(M)$ 的局部子空间。令 V 为由 $\{a_\tau(z)\mid a\in\mathfrak{g}\}$ 和恒等算子 $I(z)$ 生成的顶点超代数。由定理 3.5，M 是一个忠实的 τ-扭曲 V-模，其中 $Y_M(a_\tau(z)\ x)=a_\tau(x)$。由命题 2.11 以及方程 (5.9)–(5.11)、(5.25)–(5.26)，V 成为一个 $\hat{g}$-超模，并且 a_m（对于 $\mathbb{Z}_2$-齐次的 $a\in\mathfrak{g}$，$m\in\mathbb{Z}$）由 $a_\tau(z)_m$ 表示。由于 V 是一个层为 ℓ、带有最低权向量 $I(z)$ 的最低权 $\widehat{\mathfrak{g}}$-模，因此它是 $V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(\ell,0)$ 的一个商。这意味着 M 是一个 τ-扭曲的 $V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(\ell,0)$-模。

若 M 是局部截断的 $\widehat{\mathfrak{g}}[\tau]$-模，但不是超模，则我们对 $\tilde{M}$ 应用相同的论证，得到一个 τ-扭曲超 $V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(\ell,\ 0)$-模。对所有 $a\in\widehat{\mathfrak{g}}$，$V$ 都由 $a_\tau(z)$ 生成，而这些元素的作用保持子空间 M 不变。因此，我们得出结论：M 是 $\tilde{M}$ 的一个 τ- 扭曲 $V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(\ell,\ 0)$- 子模。 □

在李超代数 $\widehat{\mathfrak{g}}[\tau]$ 上定义次数算子：

$$\deg(\mathfrak{g}_{\bar{0},r}\otimes t^{n+\frac{i}{T}})=-\left(n+\frac{i}{T}\right),$$
$$\deg(\mathfrak{g}_{\bar{1},r}\otimes t^{n+\frac{i}{T}})=-\frac{1}{2}-\left(n+\frac{i}{T}\right),$$
$$\deg\mathbf{k}=0,$$

使 $\widehat{\mathfrak{g}}[\tau]$ 成为一个 $\frac{1}{T_0}\mathbb{N}$-分次李超代数。

注 5.3。$\widehat{\mathfrak{g}}[\tau]$ 实际上是 $\frac{1}{T_0}\mathbb{N}$ 分次的，其中 T_0 是自同构 $\tau\sigma$ 的阶，σ 是 $\widehat{\mathfrak{g}}[\tau]$ 的奇偶同构。

于是， $\widehat{\mathfrak{g}}[\tau]$有一个自然的三角分解:

$$\widehat{\mathfrak{g}}[\tau] = \widehat{\mathfrak{g}}[\tau]^+ \oplus \widehat{\mathfrak{g}}[\tau]^0 \oplus \widehat{\mathfrak{g}}[\tau]^-,$$

其中

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathfrak{g}}[\tau]^+ &= \mathrm{span}\{a \otimes t^l \in \widehat{\mathfrak{g}}[\tau] \mid \deg a \otimes t^l > 0\},\\
\widehat{\mathfrak{g}}[\tau]^- &= \mathrm{span}\{a \otimes t^l \in \widehat{\mathfrak{g}}[\tau] \mid \deg a \otimes t^l < 0\},\\
\widehat{\mathfrak{g}}[\tau]^0 &= \mathrm{span}\{a \otimes t^l \in \widehat{\mathfrak{g}}[\tau] \mid \deg a \otimes t^l = 0\}.
\end{aligned}$$

我们看到

$$\widehat{\mathfrak{g}}[\tau]^{\leq 0} := \widehat{\mathfrak{g}}[\tau]^- \oplus \mathbb{F}\mathbf{k} \oplus (\mathfrak{g}_{\bar{0},0} + \mathfrak{g}_{\bar{1},\frac{T}{2}} \otimes t^{-\frac{1}{2}})$$

是李超子代数的直和。我们将$\mathfrak{g}_{\bar{0},\ 0} + \mathfrak{g}_{\bar{1},\ \frac{T}{2}} \otimes t^{-\frac{1}{2}}$记作 $\mathfrak{g}^o$。

设 U 是一个 $\mathfrak{g}^o$-模。为了使 U 成为一个 $\widehat{\mathfrak{g}}[\tau]^{\leq 0}$-模，我们令$\mathbf{k}$ 作用为标量 $\ell \in \mathbb{F}$ ，并令$\widehat{\mathfrak{g}}[\tau]^-$在 U上平凡作用。将广义 Verma $\widehat{\mathfrak{g}}[\tau]$-模记为

$$M_{\widehat{\mathfrak{g}}[\tau]}(\ell, U) = U(\widehat{\mathfrak{g}}[\tau]) \otimes_{\widehat{\mathfrak{g}}[\tau]^{\leq 0}} U,$$

并设 $\deg\ U = 0$。由此立即可得，$M_{\widehat{\mathfrak{g}}[\tau]}(\ell,\ U)$是一个局部截断的 $\widehat{\mathfrak{g}}[\tau]$-模。于是，$M_{\widehat{\mathfrak{g}}[\tau]}(\ell,\ U)$成为一个 $\frac{1}{T_0}\mathbb{N}$-分次的 τ-扭曲$V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(\ell,\ 0)$-模。

接下来我们计算扭曲 Zhu 代数 $A_\tau(V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(\ell, 0))$。

定理 5.4。 扭曲 *Zhu* 代数 $A_\tau(V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(\ell, 0)) \cong U(\mathfrak{g}^o)$。

证明。 我们首先断言，对于任意齐次元素 $u \in V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(\ell,0)$，其等价类 $[u]$ 可以写成如下形式的元素的线性组合

$$[a_{-1}^{i_1} \cdots a_{-1}^{i_r}\mathbf{1}] \text{ in } A_\tau(V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(\ell, 0))$$

其中 $a^{i_j} \in \mathfrak{g}^o$ 且 $\deg\ a_{-1}^{i_1} \cdots a_{-1}^{i_r}\mathbf{1} \leq \deg\ u$。

根据引理 4.2，只需对 $u \in (V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(\ell,0))^{0*}$验证此断言。根据 PBW 定理，$V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(\ell,0)$由如下形式的向量张成

$$b_{-n_1}^{i_1} \ldots b_{-n_k}^{i_k}\mathbf{1},$$

其中 $b^{i_l} \in \mathfrak{g}$ 且 $n_l \in \mathbb{Z}_{>0}$。

我们对 $\deg(u)$ 进行归纳。取 $u = b_{-n_1}^{i_1} \ldots b_{-n_k}^{i_k}\mathbf{1} \in (V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(\ell,\ 0))^{0*}$。我们通过对 $\deg(b_{-n_1}^{i_1} \ldots b_{-n_k}^{i_k}\mathbf{1})$ 进行归纳，计算$[b_{-n_1}^{i_1} \ldots b_{-n_k}^{i_k}\mathbf{1}]$ 在 $A_\tau(V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(\ell,\ 0))$ 中的值。若 $\deg(u) = 0$，则 $[u] = k[\mathbf{1}]$对某个 $k \in \mathbb{F}$ 成立。若 $\deg(u) = \frac{1}{2}$，则 $[u] = [b_{-1}\mathbf{1}]$ 对某个$b \in \mathfrak{g}_{\bar{1},\ \frac{T}{2}} \subset \mathfrak{g}^o$ 成立。

现在假设 $\deg(u) = 1$。那么

$$[u] = [b_{-1}\mathbf{1}] + \sum_j [b_{-1}^{(1_j)} b_{-1}^{(2_j)}\mathbf{1}] \tag{5.29}$$

其中$b \in \mathfrak{g}_{\bar{0},\ 0}$, $b^{(1_j)} \in \mathfrak{g}_{\bar{1},\ r_j}$，且 $b^{(2_j)} \in \mathfrak{g}_{\bar{1},\ T-r_j}$。对于每个满足 $r_j \neq \frac{T}{2}$ 的加项 $[b^{(1_j)}{}_{-1} b^{(2_j)}\mathbf{1}]$，注意到 $b^{(1_j)} \in (V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(\ell,\ 0))^{k*}$，其中某个 k。根据扭曲 Zhu 乘积的定义（4.3），我们计算

$$b^{(1_j)} \circ_g^0 b^{(2_j)} = \sum_{i \geq 0} \binom{-\frac{1}{2} + \frac{k}{T_0}}{i} b_{i-1}^{(1_j)} b^{(2_j)} = b_{-1}^{(1_j)} b_{-1}^{(2_j)}\mathbf{1}.$$

因此，这些项属于 $O_\tau(V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(\ell, 0))$，并在扭曲 Zhu 代数中为零。因此， $[u]$ 化为 $[a_{-1}\mathbf{1}]$ 和 $[a_{-1}^{(1)} a_{-1}^{(2)}\mathbf{1}]$ 的线性组合，其中 $a \in \mathfrak{g}_{\bar{0},0}$，且 $a^{(1)}, a^{(2)} \in \mathfrak{g}_{\bar{1},\frac{T}{2}}$。

现在归纳地假设，对于所有满足 $\deg u < m$ 的齐次元 $u \in (V_{\hat{\mathfrak{g}}}(\ell,0))^{0*}$，该结论均成立。

取任意齐次元 $u \in (V_{\hat{\mathfrak{g}}}(\ell, 0))^{0*}$，使得 $\deg(u) = m$，其中 $m > 1$ 和 $m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$。根据 PBW 定理，$u$ 是形如 $a_{-k}v$ 的元素的线性组合，其中 $a \in \mathfrak{g}$、$k \in \mathbb{Z}_{>0}$、$v \in V_{\hat{\mathfrak{g}}}(\ell, 0)$，且 $\deg v < m$。我们将证明对每个元素 $a_{-k}v$，该结论都成立。在 $V_{\hat{\mathfrak{g}}}(\ell, 0)$ 中，将 $a \in \mathfrak{g}$ 与 $a_{-1}\mathbf{1}$ 等同。根据扭曲 Zhu 代数的定义，我们有

$$a *_g v = \sum_{i\geq 0} \binom{\deg a}{i} a_{i-1}v, \quad a \in (V_{\hat{\mathfrak{g}}}(\ell,0))^{0*} \cap \mathfrak{g} = \mathfrak{g}^o, \tag{5.30}$$

$$a \circ_g^n v = \begin{cases} \sum_{i\geq 0} \binom{\deg a}{i} a_{i-n-2}v, & a \in (V_{\hat{\mathfrak{g}}}(\ell,0))^{0*} \cap \mathfrak{g} = \mathfrak{g}^o, \\ \sum_{i\geq 0} \binom{\deg a - 1 - \frac{r}{T}}{i} a_{i-n-1}v, & a \in \mathfrak{g} \cap (V_{\hat{\mathfrak{g}}}(\ell,0))^{r*}, r \neq 0. \end{cases} \tag{5.31}$$

我们的证明将分为几种情形。

情形 *1*：$k = 1$ 和 $a \in \mathfrak{g}^o$。由于 $\deg v < m$，根据归纳假设，$[v]$ 可以写成 $A_\tau(V_{\hat{\mathfrak{g}}}(\ell, 0))$ 中形如 $[a_{-1}^{i_1} \cdots a_{-1}^{i_r}\mathbf{1}]$ 的项的线性组合，其中 $a^{i_j} \in \mathfrak{g}^o$ 满足 $\deg\, a_{-1}^{i_1} \cdots a_{-1}^{i_r}\mathbf{1} \leq \deg\, v$。不失一般性，设对于某个 $a^{i_j} \in \mathfrak{g}^o$，有 $[v] = [a_{-1}^{i_1} \cdots a_{-1}^{i_r}\mathbf{1}]$。根据等式 (5.30)，我们得到

$$[a_{-1}v] = [a] *_g [a_{-1}^{i_1} \cdots a_{-1}^{i_r}\mathbf{1}] - \sum_{i\geq 1} \binom{\deg a}{i} [a_{i-1}v] \tag{5.32}$$

$$= \sum_{i\geq 0} \binom{\deg a}{i} [a_{i-1}a_{-1}^{i_1} \cdots a_{-1}^{i_r}\mathbf{1}] - \sum_{i\geq 1} \binom{\deg a}{i} [a_{i-1}v]. \tag{5.33}$$

由于对于 $i \geq 1$、$[a_{-1}v]$，$\deg\, a_{i-1}v < m$ 和 $\deg\, a_{i-1}a_{-1}^{i_1} \cdots a_{-1}^{i_r}\mathbf{1} < m$ 可以表示为某些 $a^{j_l} \in \mathfrak{g}^o$ 的线性组合，其中 $\deg\, a_{-1}^{j_1} \ldots a_{-1}^{j_k}\mathbf{1} \leq \deg\, a_{-1}v$。

情形 *2*：$k = 1$ 和 $a \in \mathfrak{g} \cap (V_{\hat{\mathfrak{g}}}(\ell, 0))^{r*}$，$r \neq 0$。根据方程（5.31），我们有

$$[a_{-1}v] = -\sum_{i\geq 1} \binom{\deg a - 1 - \frac{r}{T}}{i} a_{i-1}v, \quad a \in \mathfrak{g} \cap (V_{\hat{\mathfrak{g}}}(\ell,0))^{r*}, r \neq 0. \tag{5.34}$$

由于在此情形下，对于 $i \geq 1$、$[a_{-1}v]$，$\deg\, a_{i-1}v < m$ 可以表示为 $[a_{-1}^{j_1} \ldots a_{-1}^{j_k}\mathbf{1}]$ 的线性组合，其中 $a^{j_l} \in \mathfrak{g}^o$ 满足 $\deg\, a_{-1}^{j_1} \ldots a_{-1}^{j_k}\mathbf{1} \leq \deg\, a_{-1}v$。

情形 *3*：$k \geq 2$。我们对适当的 n 使用等式 (5.31)，得到

$$[a_{-k}v] = -\sum_{i\geq 1} \binom{\deg a}{i} [a_{i-k}v], \quad a = \mathfrak{g}^o, \tag{5.35}$$

$$[a_{-k}v] = -\sum_{i\geq 1} \binom{\deg a - 1 - \frac{r}{T}}{i} [a_{i-k}v], \quad a \in \mathfrak{g} \cap (V_{\hat{\mathfrak{g}}}(\ell,0))^{r*}, r \neq 0, \tag{5.36}$$

其中右边可写成 $[a_{-1}^{j_1} \ldots a_{-1}^{j_k}\mathbf{1}]$ 关于 $a^{j_l} \in \mathfrak{g}^o$ 的线性组合，因为 $\deg\, a_{i-k}v < m$ 对于 $i \geq 1$。这就完成了归纳并证明了该断言。

现在定义一个线性映射 $f\colon \mathfrak{g}^o \to A_\tau(V_{\hat{\mathfrak{g}}}(\ell,0))$，$a \mapsto a_{-1}\mathbf{1}$。根据引理 4.5，对于任意 $\mathbb{Z}_2$-齐次元 u, $v \in \mathfrak{g}^o$，我们有

$$\begin{aligned} f(u) *_g f(v) - (-1)^{|u||v|} f(v) *_g f(u) &= \mathrm{Res}_z (1+z)^{\deg u - 1} Y(u,z)v \\ &= u_0 v_{-1}\mathbf{1} = [u,v]_{-1}\mathbf{1} + (-1)^{|u||v|} v_{-1}u_0\mathbf{1} \\ &= [u,v]_{-1}\mathbf{1} = f([u,v]). \end{aligned}$$

这表明 f 是李超代数同态，将 $a^1 \dots a^r$ 映为 $[a^1_{-1} \dots a^r_{-1}\mathbf{1}]$，即可将其扩张为结合代数同态 $\tilde{f}\colon U(\mathfrak{g}^o) \to A_\tau(V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(\ell,0))$。根据上述断言，这是一个满射。

由于 对于任意 $\mathfrak{g}^o$-模 U，我们可以构造一个 $\frac{1}{T_0}\mathbb{Z}$-分次的 τ-扭曲 $V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(\ell, 0)$-模 e

$$M = M_{\widehat{\mathfrak{g}}[\tau]}(\ell, U),$$

其中 $M(0) = U$。注意， $M(0)$ 也是一个 $A_\tau(V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(\ell, 0))$-模，其中 $[a_{-1}\mathbf{1}]$ 作用为 $o(a)$，对于 ~ ~a ∈ $\mathfrak{g}^o$。取 $U = U(\mathfrak{g}^o)$。若 $a \in \ker f$，则 $aU(\mathfrak{g}^o) = 0$。这意味着 $a = 0$。因此， f是一个同构。 □

若取 U 为不可约 $\mathfrak{g}^o$-模，则 $M_{\widehat{\mathfrak{g}}[\tau]}(\ell, U)$ 有唯一的极大分次子模。我们将不可约 $\frac{1}{T_0}\mathbb{N}$-分次商模记为 $L_{\widehat{\mathfrak{g}}[\tau]}(\ell, U)$。利用标准证明，我们可以证明，每个不可约 $\frac{1}{T_0}\mathbb{N}$-分次 $\widehat{\mathfrak{g}}[\tau]$-模都同构于某个不可约 $\mathfrak{g}^o$-模 U 对应的 $L_{\widehat{\mathfrak{g}}[\tau]}(\ell, U)$。根据定理 5.2，这些都是不可约$\frac{1}{T_0}\mathbb{N}$-分次的 τ-扭曲 $V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(\ell, 0)$-模。

现在我们可以得出结论：

定理 5.5. 设 $\ell \in \mathbb{F}$。不可约的 $\frac{1}{T_0}\mathbb{N}$-分次 $\widehat{\mathfrak{g}}[\tau]$-模 $L_{\widehat{\mathfrak{g}}[\tau]}(\ell, U)$，其中 U是不可约的 $\mathfrak{g}^o$-模，构成层为 ℓ 的不可约 $\frac{1}{T_0}\mathbb{N}$-分次 $\widehat{\mathfrak{g}}[\tau]$-模的完备等价类代表元集合。此外，它们也构成层为 $-\ell$ 的不可约 $\frac{1}{T_0}\mathbb{N}$-分次 τ-扭曲 $V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(\ell, 0)$-模的完备等价类代表元集合。

现在假设 $\mathfrak{g}$ 是一个李超代数，配备了一个 p-映射 $a \mapsto a^{[p]}$ （从 $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ 到 $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$），满足在 $\mathfrak{g}$ 上对于 $a \in \mathfrak{g}_{\bar{0}}$，$(\mathrm{ad}\, a)^p = \mathrm{ad}\, a^{[p]}$。这样的李超代数 $\mathfrak{g}$ 称为受限李超代数。那么， $\widehat{\mathfrak{g}}$ 是一个配备有 p-映射的受限李超代数

$$\mathbf{k}^{[p]} = \mathbf{k}, \quad (a \otimes t^n)^{[p]} = a^{[p]} \otimes t^{np} \tag{5.37}$$

对于 $a \in \mathfrak{g}_{\bar{0}}, n \in \mathbb{Z}$。

在适当假设下，扭曲仿射李超代数 $\widehat{\mathfrak{g}}[\tau]$ 也可通过与[LM2] 中类似的证明得到其受限性。

引理 5.6. 设 τ 是受限李超代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}$ 的一个阶为T的自同构，它保持 $\mathfrak{g}$ 上的双线性型 $\langle \cdot, \cdot \rangle$，并且与 p- 映射相交换。那么 $\widehat{\mathfrak{g}}[\tau]$ 是一个受限李超代数，且满足：

$$\mathbf{k}^{[p]} = \mathbf{k}, \quad (a \otimes t^\alpha)^{[p]} = a^{[p]} \otimes t^{p\alpha}, \quad \textit{for } a \in \mathfrak{g}_{\bar{0}},\ \alpha \in \frac{1}{T}\mathbb{Z}. \tag{5.38}$$

设 $\chi \in \mathfrak{g}_{\bar{0}}^*$ 是$\mathfrak{g}_{\bar{0}}$上的一个线性泛函。定义 J_χ 为由以下元素生成的 $V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(\ell,0)$的 $\widehat{\mathfrak{g}}$-子模

$$\big(a(-1)^p - a^{[p]}(-p) - \chi(a)^p\big)\mathbf{1} \tag{5.39}$$

对于 $a \in \mathfrak{g}_{\bar{0}}$, $m \in \mathbb{Z}_+$。那么 J_χ 是顶点超代数 $V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(\ell,0)$ [LM4], 的一个理想，它与由 $\big(a(-m)^p - a^{[p]}(-mp) - \delta_{m,1}\chi(a)^p\big)\mathbf{1}$ 生成的理想相同（详情参见 [JLM]）。因此， $V^\chi_{\widehat{\mathfrak{g}}}(\ell,0) = V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(\ell, 0)/J_\chi$ 也是一个顶点超代数。

现在考虑满足 $\chi(\tau a) = \chi(a)$、其中 $a \in \mathfrak{g}_{\bar{0}}$ 的 $\chi \in \mathfrak{g}_{\bar{0}}^*$。令 J_χ 为由 $(a^p_{-1} - a^{[p]}_{-p} - \chi(a)^p)\ \mathbf{1}$ 生成的 $V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(\ell, 0)$ 的理想，其中 $a \in \mathfrak{g}_{\bar{0}}$ 如前所述。容易看出 $\tau(J_\chi) \subset J_\chi$。因此， τ 诱导出 $V^\chi_{\widehat{\mathfrak{g}}}(\ell, 0)$ 的一个自同构，也记作 τ。

下述定理可仿照 [LM2] 中的定理 4.7 证明。

定理 5.7。 设 $\mathfrak{g}$ 是一个带有对称不变双线性型的受限李超代数，且 τ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个阶为 T 的自同构，使得

$$\langle \tau a, \tau b\rangle = \langle a, b\rangle, \quad \tau(a^{[p]}) = (\tau a)^{[p]} \quad \text{for } a, b \in \mathfrak{g}. \tag{5.40}$$

令 $\ell \in \mathbb{F}$和 $\chi \in \mathfrak{g}_{\bar{0}}^*$满足 $\chi(\tau a) = \chi(a)$，其中 $a \in \mathfrak{g}_{\bar{0}}$。那么，每个 τ-扭曲的 $V_{\widehat{\mathfrak{g}}}^{\chi}(\ell, 0)$-模$W$都是层为 ℓ的局部截断 $\widehat{\mathfrak{g}}[\tau]$-模，并且对于 $a \in \mathfrak{g}$，有 $a_\tau(z) = Y_W(a, z)$，满足以下条件：

$$a_{n+\frac{r}{T}}p - a^{[p]}_{p(n+\frac{r}{T})} - \delta_{n,-1}\chi(a)^p = 0 \tag{5.41}$$

对于带有 $0 \le r \le T-1$ 且满足 $n \in \mathbb{Z}$的 $a \in \mathfrak{g}_r$，在 W 上成立。另一方面，对于每个满足条件 ***5.41*** 、层为 ℓ 的局部截断 $\widehat{\mathfrak{g}}[\tau]$- 模 W，在 W 上，对于 $a \in \mathfrak{g}$，存在一个 τ- 扭曲的 $V_{\widehat{\mathfrak{g}}}^{\chi}$（$\ell$，0）- 模结构 $Y_W(\cdot, z) = a_\tau(z)$。

回顾一下，受限李超代数的受限包络代数 $\mathfrak{u}(\mathfrak{g})$ 是将 $U(\mathfrak{g})$ 对由中心元 $a^p - a^{[p]}$ for $a \in \mathfrak{g}_{\bar{0}}$ 生成的理想取商所得的商代数。设 $\mathfrak{g}$ 是一个受限李超代数，且 τ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个与 p- 映射可交换的自同构。那么 $\mathfrak{g}_{\bar{0},\,0} + \mathfrak{g}_{\bar{1},\,\frac{T}{2}} \otimes t^{-\frac{1}{2}}$ 也是一个受限李超代数。取 $\chi = 0$，并注意到 $V_{\widehat{\mathfrak{g}}}^{0}(\ell,\ 0)$ 是一个 $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$- 分次顶点超代数。以下定理可由与 [LM2] 中定理 4.8 相同的证明得到。

定理 5.8。假设定理 *5.7* 的条件成立。若 U 是一个不可约的 $\mathfrak{u}(\mathfrak{g}^o)$-模，则 $L_{\widehat{\mathfrak{g}}[\tau]}(\ell, U)$ 是一个不可约的 $\frac{1}{T_0}\mathbb{N}$-分次 τ-扭曲 $V_{\widehat{\mathfrak{g}}}^{0}(\ell,\ 0)$-模。反之，若 $W = \bigoplus_{n\in\frac{1}{T_0}\mathbb{N}} W_n$ 是一个不可约的 $\frac{1}{T_0}\mathbb{N}$-分次 τ-扭曲 $V_{\widehat{\mathfrak{g}}}^{0}(\ell,\ 0)$-模，且满足 $W_0 \neq 0$，则 W_0 是一个不可约的 $\mathfrak{u}(\mathfrak{g}^o)$-模，并且 W 与 $L_{\widehat{\mathfrak{g}}[\tau]}(\ell, W_0)$ 同构。

6（扭曲）克利福德代数

设 U 是一个 d维向量空间，配备非退化对称双线性型$\langle\cdot,\ \cdot\rangle$。令 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}$，其中 $\mathfrak{g}_{\bar{0}} = 0$ 且 $\mathfrak{g}_{\bar{1}} = U$，于是 $\mathfrak{g}$ 是一个阿贝尔李超代数。

设 τ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个自同构，且保持双线性型 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$，即

$$\langle \tau b, \tau b\rangle = \langle a, b\rangle, \quad \text{for } a, b \in \mathfrak{g}.$$

假设 T 是一个与 p 互素的正整数，且满足 $\tau^T = 1$。那么

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{T-1},$$

其中，对 $n \in \mathbb{Z}$有 $\mathfrak{g}_n = \{a \in \mathfrak{g} \mid \tau a = \eta^n a\}$。

扭曲李超代数 $\widehat{\mathfrak{g}}[\tau]$ 定义为 $\widehat{\mathfrak{g}}[\tau] = \bigoplus_{i=0}^{T-1} \mathfrak{g}_i \otimes t^{\frac{i}{T}}\mathbb{F}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{F}\mathbf{k}$，其定义关系如下：

$$[a \otimes t^{m+\frac{i}{T}}, b \otimes t^{n+\frac{j}{T}}] = \langle a, b\rangle \delta_{m+n+1+\frac{i+j}{T},0}\mathbf{k},$$
$$[\mathbf{k}, \widehat{\mathfrak{g}}] = 0,$$

对于 $a \in \mathfrak{g}_i$、$b \in \mathfrak{g}_j$。

对于 $a \in \mathfrak{g}_i$，令

$$a_\tau(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (a \otimes t^{n+\frac{i}{T}})x^{-n-1-\frac{i}{T}}.$$

那么对于 $b \in \mathfrak{g}$，我们有

$$[a_\tau(x_1), b_\tau(x_2)] = \langle a, b\rangle x_1^{-1}\delta\left(\frac{x_2}{x_1}\right)\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\frac{i}{T}}\mathbf{k}.$$

若 $\widehat{\mathfrak{g}}[\tau]$-模 W上$\mathbf{k}$作为标量 $\ell \in \mathbb{F}$作用，则称其为层 ℓ。如果对于 $a \in \mathfrak{g}$， $w \in W$， $a_\tau(z)w \in W((z^{1/T}))$，则称 $\widehat{\mathfrak{g}}[\tau]$-模 W为局部截断 $\widehat{\mathfrak{g}}[\tau]$-模。

与特征零的情形一样，在 [L] 中，我们有：

命题 *6.1.* 设 $\ell \in \mathbb{F}$。那么，每个 τ-扭曲的 $V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(\ell, 0)$-模 W 都是层为 ℓ 的局部截断$\widehat{\mathfrak{g}}[\tau]$-模，并且对于 $a \in \mathfrak{g}$，满足 $a_\tau(z) = Y_W(a, z)$。另一方面，在每个层为 ℓ 的局部截断 $\widehat{\mathfrak{g}}[\tau]$-模 W 上，都存在一个 τ-扭曲的 $V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(\ell, 0)$-模结构 $Y_W(\cdot, z)$；该结构由对于 $a \in \mathfrak{g}$ 的 $Y_W(a, z) = a_\tau(z)$ 唯一确定。

对于 $a \in \mathfrak{g}_i$, $n \in \mathbb{Z}$，定义

$$\deg a_{n+\frac{i}{T}} = -n - \frac{1}{2} - \frac{i}{T}.$$

若 T 为奇数，则 $\widehat{\mathfrak{g}}[\tau]$ 是 $\frac{1}{2T}\mathbb{Z}$-分次的；若 T 为偶数，则 $\widehat{\mathfrak{g}}[\tau]$ 是 $\frac{1}{T}\mathbb{Z}$-分次的。

假设 T 是奇的。对于 $a \in \mathfrak{g}_i$、 $n \in \mathbb{Z}$，定义

$$\phi(a_n) = \begin{cases} a_{n+\frac{i}{T}} & i = 0 \\ a_{n+\frac{i}{T}} & 1 \le i < \frac{T}{2} \\ a_{n+\frac{i}{T}-1} & \frac{T}{2} < i \le T-1. \end{cases}$$

将 ϕ 线性延拓，得到一个线性映射 $\phi : \widehat{\mathfrak{g}} \to \widehat{\mathfrak{g}}[\tau]$。显然， ϕ 是李超代数同构。

Assu我可知 T 是偶的，且 $\dim \mathfrak{g}_{\frac{T}{2}}$ 是偶数。根据 [DZ], 的相同论证，我们有

$$\mathfrak{g}_{\frac{T}{2}} = \sum_{i=1}^{r} \mathbb{F}h_i + \sum_{i=1}^{r} \mathbb{F}h_i^*$$

其中 $\langle h_i, h_j\rangle = \langle h_i^*, h_j^*\rangle = 0$、 $\langle h_i, h_j^*\rangle = \delta_{i,j}$。令 $\mathfrak{g}^+_{\frac{T}{2}} = \sum_{i=1}^r \mathbb{F}h_i$ 和 $\mathfrak{g}^-_{\frac{T}{2}} = \sum_{i=1}^r \mathbb{F}h_i^*$。于是$\mathfrak{g}_{\frac{T}{2}} = \mathfrak{g}^+_{\frac{T}{2}} \oplus \mathfrak{g}^-_{\frac{T}{2}}$。

引理 6.2。 $\langle\cdot, \cdot\rangle$ 在 $\mathfrak{g}_{\frac{T}{2}}$ 上的限制是非退化的。

证明。 对于 $a \in \mathfrak{g}_{\frac{T}{2}}$, $b \in \mathfrak{g}_i$，其中 $i \neq \frac{T}{2}$，我们有 $\langle a, b\rangle = \langle \tau a, \tau b\rangle = \eta^{i+\frac{T}{2}}\langle a, b\rangle$。由于 $i + \frac{T}{2} \neq T$，可知 $\langle a, b\rangle = 0$，因此对于 $i \neq \frac{T}{2}$，有 $\langle \mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_{\frac{T}{2}}\rangle = 0$。

假设 $a \in \mathfrak{g}_{\frac{T}{2}}$ 满足 $\langle a, \mathfrak{g}_{\frac{T}{2}}\rangle = 0$。那么 $\langle a, \mathfrak{g}\rangle = 0$。由于 $\langle\cdot, \cdot\rangle$ 是非退化的，因此必有 $a = 0$。 □

对于满足 $i \neq \frac{T}{2}$ 和 $n \in \mathbb{Z}$ 的 $a \in \mathfrak{g}_i$，定义

$$\phi(a_n) = \begin{cases} a_{n+\frac{i}{T}} & i = 0 \\ a_{n+\frac{i}{T}} & 1 \le i < \frac{T}{2} \\ a_{n+\frac{i}{T}-1} & \frac{T}{2} < i \le T-1, \end{cases}$$

且对于 $a \in \mathfrak{g}^+_{\frac{T}{2}} \cup \mathfrak{g}^-_{\frac{T}{2}}$，定义[22]

$$\phi(a_n) = \begin{cases} a_{n+\frac{1}{2}} & a \in \mathfrak{g}^+_{\frac{T}{2}} \\ a_{n-\frac{1}{2}} & a \in \mathfrak{g}^-_{\frac{T}{2}}. \end{cases}$$

那么， ϕ 线性延拓为从 $\widehat{\mathfrak{g}}$ 到 $\widehat{\mathfrak{g}}[\tau]$的李超代数同构。

假设 T为偶数且 $\dim \mathfrak{g}_{\frac{T}{2}}$为奇数。与特征零的情形一样（参见 [DZ]），我们可以写成

$$\mathfrak{g}_{\frac{T}{2}} = \sum_{i=1}^{r} \mathbb{F}h_i + \sum_{i=1}^{r} \mathbb{F}h_i^* + \mathbb{F}e$$

其中 $\langle h_i, \ h_j\rangle = \langle h_i^*, \ h_j^*\rangle = 0, \ \langle h_i, \ h_j^*\rangle = \delta_{i,j}, \ \langle e, \ h_i\rangle = \langle e, \ h_j^*\rangle = 0, \ \langle e, \ e\rangle = 2$。令 $\mathfrak{g}_{\frac{T}{2}}^{+} = \sum_{i=1}^{r} \mathbb{F}h_i$ 和 $\mathfrak{g}_{\frac{T}{2}}^{-} = \sum_{i=1}^{r} \mathbb{F}h_i^*$。

对于 $a \in \mathfrak{g}_i$，取 $i \neq \frac{T}{2}$ 和 $n \in \mathbb{Z}$，定义

$$\phi(a_n) = \begin{cases} a_{n+\frac{i}{T}} & i = 0 \\ a_{n+\frac{i}{T}} & 1 \leq i < \frac{T}{2} \\ a_{n+\frac{i}{T}-1} & \frac{T}{2} < i \leq T-1, \end{cases}$$

并且对于 $a \in \mathfrak{g}_{\frac{T}{2}}^{+} \cup \mathfrak{g}_{\frac{T}{2}}^{-} \cup \mathbb{F}e$，定义

$$\phi(a_n) = \begin{cases} a_{n+\frac{1}{2}} & a \in \mathfrak{g}_{\frac{T}{2}}^{+} \\ a_{n-\frac{1}{2}} & a \in \mathfrak{g}_{\frac{T}{2}}^{-} \\ a_{n+\frac{1}{2}} & a \in \mathbb{F}e, n \geq 0 \\ a_{n-\frac{1}{2}} & a \in \mathbb{F}e, n < 0. \end{cases}$$

则 ϕ 是李超代数的单态射，并且 $\widehat{\mathfrak{g}}[\tau] = \phi(\widehat{\mathfrak{g}}) \oplus \mathbb{F}e_{-\frac{1}{2}}$。

现在我们定义 $V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(\ell, 0)$ 上的 $\widehat{\mathfrak{g}}[\tau]$-模结构。令 $\alpha \in \mathbb{F}$ 满足 $\alpha^2 = \ell$。定义 $e_{-\frac{1}{2}}$ 在 $V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(\ell, 0)$ 上作用为 $\alpha_{\bar{0}}$，并在 $V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(\ell, 0)$ 上作用为 $-\alpha_{\bar{1}}$。对于 $v \in \phi(\widehat{\mathfrak{g}})$，定义 v 在 $V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(\ell, 0)$ 上作用为 $\phi^{-1}(v)$。将这个 $\widehat{\mathfrak{g}}[\tau]$-模记为 V^+。类似地，定义 $e_{-\frac{1}{2}}$ 在 $V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(\ell, 0)$ 上作用为 $-\alpha_{\bar{0}}$，并在 $V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(\ell, 0)$ 上作用为 $\alpha_{\bar{1}}$。对于 $v \in \phi(\widehat{\mathfrak{g}})$，定义 v 在 $V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(\ell, 0)$ 上作用为 $\phi^{-1}(v)$。将这个 $\widehat{\mathfrak{g}}[\tau]$-模记为 V^-。那么 V^+ 和 V^- 都是不可约 $\widehat{\mathfrak{g}}[\tau]$-模。

定理 6.3。(i) 若 T为奇数，或若 T为偶数且维数 $\mathfrak{g}_{\frac{T}{2}}$为偶数，则 $V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(\ell, 0)$ 只有一个不可约的 τ-扭曲模。(ii) 若 T为偶数且维数 $\mathfrak{g}_{\frac{T}{2}}$为奇数，则 $V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(\ell, 0)$ 恰有两个不可约的 τ-扭曲模。(iii) 每个 τ-扭曲 $V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(\ell, 0)$-模都是完全可约的。

证明。(i) 和 (ii) 的证明与 [DZ] 中的相同。

(iii) 我们只证明 T为偶数且 $\dim \mathfrak{g}_{\frac{T}{2}}$为奇数的情形，其余情形的证明类似。设 W是一个 τ-扭曲 $V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(\ell, 0)$-模。那么 W是一个层为 ℓ 的局部截断$\widehat{\mathfrak{g}}[\tau]$-模。令 $\widehat{\mathfrak{g}}[\tau]^- = \{\phi(a_n) \mid a \in \mathfrak{g}, n \in \mathbb{N}\}$ 且

$$\Omega_W = \{w \in W \mid \widehat{\mathfrak{g}}[\tau]^- w = 0\}.$$

由于 ϕ 是李超代数同态，因此 W上具有 $\widehat{\mathfrak{g}}$-模结构。根据 ϕ的构造可知，W 是一个层为 ℓ的局部截断 $\widehat{\mathfrak{g}}$-模。由 [LM4，引理 4.11]，，我们有 $\Omega_W \neq 0$。注意，$e_{-\frac{1}{2}}$保持 Ω_W。由于 $e_{-\frac{1}{2}}^2 = \ell$，我们在 Ω_W上有 $(\alpha - e_{-\frac{1}{2}})(\alpha + e_{-\frac{1}{2}}) = 0$。令 $\Omega_W^+ = (\alpha + e_{-\frac{1}{2}})\Omega_W$，且 $\Omega_W^- = (\alpha - e_{-\frac{1}{2}})\Omega_W$。于是 $\Omega_W = \Omega_W^+ \oplus \Omega_W^-$。

根据 [LM4, 推论 4.13]，，对于非零的 $w \in \Omega_W^+$，由 w 生成的 $\widehat{\mathfrak{g}}$-子模同构于 $V_{\widehat{\mathfrak{g}}}(\ell, 0)$。根据 V^+的构造，由 w生成的 $\widehat{\mathfrak{g}}[\tau]$-子模同构于 V^+。类似地，对于非零的 $w \in \Omega_W^-$，由 w 生成的 $\widehat{\mathfrak{g}}[\tau]$-子模同构于$V^-$。现在根据 [LM4, 定理 4.17]，$W$是若干个 V^+和 V^-的直和。□

7 Neveu-Schwarz 顶点超代数的扭曲模

本节研究模 Neveu–Schwarz 顶点超代数的扭曲模。在本节中，我们假设底域 $\mathbb{F}$ 在特征 $p > 3$下代数闭。

我们先回顾 Neveu-Schwarz 代数 $\mathcal{NS}$。它是一个李超代数，其基为 $\{L_n, G_{n+\frac{1}{2}} \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \{\mathbf{c}\}$，其中 $L_n (n \in \mathbb{Z})$ 和 $\mathbf{c}$ 为偶元，而 $G_{n+\frac{1}{2}} (n \in \mathbb{Z})$ 为奇元。其定义关系如下：

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{1}{2}\binom{m+1}{3}\delta_{m+n,0}\mathbf{c}, \tag{7.1}$$

$$[L_m, G_{n+\frac{1}{2}}] = \left(\frac{m}{2} - n - \frac{1}{2}\right) G_{m+n+\frac{1}{2}}, \tag{7.2}$$

$$[G_{m+\frac{1}{2}}, G_{n-\frac{1}{2}}] = 2L_{m+n} + \frac{1}{3}m(m+1)\delta_{m+n,0}\mathbf{c}, \tag{7.3}$$

$$[\mathcal{NS}, \mathbf{c}] = 0. \tag{7.4}$$

等价地，用生成函数表示

$$L(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} L_m z^{-m-2}, \quad G(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} G_{n+\frac{1}{2}} z^{-n-2},$$

这些关系可以写为：

$$[L(z_1), L(z_2)] = z_2^{-1}\delta\left(\frac{z_1}{z_2}\right)\partial_{z_2}^{(1)}L(z_2) - 2L(z_2)\partial_{z_1}^{(1)}\left(z_2^{-1}\delta\left(\frac{z_1}{z_2}\right)\right) - \frac{1}{2}\partial_{z_1}^{(3)}\left(z_2^{-1}\delta\left(\frac{z_1}{z_2}\right)\right)\mathbf{c}, \tag{7.5}$$

$$[L(z_1), G(z_2)] = z_2^{-1}\delta\left(\frac{z_1}{z_2}\right)\partial_{z_2}^{(1)}G(z_2) + \frac{3}{2}\partial_{z_1}^{(1)}\left(z_2^{-1}\delta\left(\frac{z_1}{z_2}\right)\right)G(z_2), \tag{7.6}$$

and

$$[G(z_1), G(z_2)] = 2z_2^{-1}\delta\left(\frac{z_1}{z_2}\right)L(z_2) + \frac{2}{3}\partial_{z_2}^{(2)}\left(z_2^{-1}\delta\left(\frac{z_1}{z_2}\right)\right)\mathbf{c}. \tag{7.7}$$

这里，导数 $\partial^{(i)}$ 通过 Hasse导数作用。

李超代数 $\mathcal{NS}$ 是 $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ 分次的，其次数为

$$\deg \mathbf{c} = 0, \quad \deg L_m = -m, \quad \deg G_{m+\frac{1}{2}} = -m - \frac{1}{2} \quad \text{for } m \in \mathbb{Z}. \tag{7.8}$$

该分次与由 L_0 导出的共形权分次相容 .

对于 $i \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$，我们用 $\mathcal{NS}_{(i)}$ 表示 $\mathcal{NS}$ 中次数为 i 的齐次子空间。于是我们有

$$\mathcal{NS}_{(0)} = \mathbb{F}L_0 + \mathbb{F}\mathbf{c}, \tag{7.9}$$

and

$$\mathcal{NS}_{\bar{0}} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{F}L_n \oplus \mathbb{F}\mathbf{c} = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathcal{NS}_{(i)}, \tag{7.10}$$

$$\mathcal{NS}_{\bar{1}} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{F}G_{n+\frac{1}{2}} = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathcal{NS}_{(i+\frac{1}{2})}. \tag{7.11}$$

我们有三角分解

$$\mathcal{NS} = \mathcal{NS}_+ \oplus \mathcal{NS}_{(0)} \oplus \mathcal{NS}_-,$$

其中

$$\mathcal{NS}_\pm = \bigoplus_{i\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}_\pm} \mathcal{NS}_{(i)} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_\pm} (\mathbb{F}L_n + \mathbb{F}G_{n\mp\frac{1}{2}}), \quad \mathcal{NS}_0 = \mathcal{NS}_{(0)}. \tag{7.12}$$

如 [LM4], 中所示，定义子代数:

$$\mathcal{NS}_{\leq 0} = \mathcal{NS}_- + \mathcal{NS}_{(0)} = \mathcal{NS}_- + \mathbb{F}L_0 + \mathbb{F}\mathbf{c}, \tag{7.13}$$
$$\mathcal{NS}_* = \mathcal{NS}_- + \mathcal{NS}_{(0)} + \mathbb{F}L_{-1} + \mathbb{F}G_{-\frac{1}{2}}. \tag{7.14}$$

它们可分解为李超代数的直和:

$$\mathcal{NS}_{\leq 0} = (\mathcal{NS}_- + \mathbb{F}L_0) \oplus \mathbb{F}\mathbf{c}, \tag{7.15}$$
$$\mathcal{NS}_* = (\mathcal{NS}_- + \mathbb{F}L_0 + \mathbb{F}L_{-1} + \mathbb{F}G_{-\frac{1}{2}}) \oplus \mathbb{F}\mathbf{c}. \tag{7.16}$$

这些子代数在诱导模构造中起到 Borel 型子代数的作用。

对于 $c \in \mathbb{F}$，定义一维 $\mathcal{NS}_*$-模 $\mathbb{F}_c$，其中 $\mathcal{NS}_- + \mathbb{F}L_0 + \mathbb{F}L_{-1} + \mathbb{F}G_{-\frac{1}{2}}$ 作用平凡，而$\mathbf{c}$ 则作为标量乘以 c 作用。如 [LM4], 中所示，诱导$\mathcal{NS}$-模

$$V_{\mathcal{NS}}(c, 0) = U(\mathcal{NS}) \otimes_{U(\mathcal{NS}_*)} \mathbb{F}_c \tag{7.17}$$

具有自然的顶点超代数结构。

命题 7.1. 在 $V_{\mathcal{NS}}(c, 0)$ 上存在顶点超代数结构，其真空向量为 $\mathbf{1} = 1 \otimes 1$，且

$$Y(\omega, z) = L(z), \quad Y(\tau, z) = G(z),$$

其中 $\omega = L_{-2}\mathbf{1}$ 为偶，$\tau = G_{-\frac{3}{2}}\mathbf{1}$ 为奇。此外，对所有 $v \in V$，$Y(L_{-1}v, z) = \frac{d}{dz}Y(v, z)$。

设 σ 为顶点超代数 $V_{\mathcal{NS}}(c,0)$ 的典范二阶自同构。显然，σ 是保持 $\frac{1}{2}\mathbb{N}$-分次的顶点超代数 $V_{\mathcal{NS}}(c,0)$ 的唯一自同构。为了研究 σ-扭曲的 $V_{\mathcal{NS}}(c,0)$-模，我们需要引入 Ramond 代数 $\mathcal{R}$，它是一个李超代数，其基为 $\{L_m, F_m \mid m \in \mathbb{Z}\} \cup \{\mathbf{c}\}$，并满足以下定义关系:

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{1}{2}\binom{m+1}{3}\delta_{m+n,0}\mathbf{c}, \tag{7.18}$$
$$[L_m, F_n] = (\frac{m}{2} - n)F_{m+n}, \tag{7.19}$$
$$[F_m, F_n] = 2L_{m+n} + \frac{1}{3}(m^2 - \frac{1}{4})\delta_{m+n,0}\mathbf{c}, \tag{7.20}$$
$$[L_m, \mathbf{c}] = [F_m, \mathbf{c}] = 0, \tag{7.21}$$

对于 $m, n \in \mathbb{Z}$。令

$$L(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} L_m z^{-m-2}, \quad F(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} F_n z^{-n-\frac{3}{2}}.$$

这可以用生成函数改写为:

$$[L(z_1), L(z_2)] = z_2^{-1}\delta\left(\frac{z_1}{z_2}\right)\partial_{z_2}^{(1)}L(z_2) - 2L(z_2)\partial_{z_1}^{(1)}\left(z_2^{-1}\delta\left(\frac{z_1}{z_2}\right)\right) - \frac{1}{2}\partial_{z_1}^{(3)}\left(z_2^{-1}\delta\left(\frac{z_1}{z_2}\right)\right)\mathbf{c}, \tag{7.22}$$

$$[L(z_1),F(z_2)]=z_2^{-1}\delta\left(\frac{z_1}{z_2}\right)F(z_2)+\frac{3}{2}\partial_{z_2}^{(1)}\left(z_1^{-1}\delta\left(\frac{z_2}{z_1}\right)\right)F(z_2), \tag{7.23}$$

$$[F(z_1),F(z_2)]=2z_1^{-1}\delta\left(\frac{z_2}{z_1}\right)\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^{\frac{1}{2}}L(z_1)+\frac{2}{3}\partial_{z_2}^{(2)}\left(z_1^{-1}\delta\left(\frac{z_2}{z_1}\right)\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^{\frac{1}{2}}\right). \tag{7.24}$$

设 M 是中心荷为 c 的 Ramond 代数的任意局部截断超模，也就是说，对于每个向量 $w\in M$，当指标充分大时，L_n 和 F_n 都平凡作用。于是 $\{L(z)\ F(z)\ I(z)\}$ 是 $\mathcal{E}_2(M)$ 中一组两两局部的齐次元。设 V 为由 $\{L(z)\ F(z)\ I(z)\}$ 生成的顶点超代数。由定理 3.5，M 是一个忠实的 σ-扭曲 V-模，且 $Y_M(L(z)\ x)=L(x)$，$Y_M(F(z)\ x)=F(x)$，$Y_M(I(z)\ x)=I(x)$。命题 2.11 及等式 (7.22)、(7.23)、(7.24) 表明，$Y_V(L(z)\ x_1)$ 和 $Y_V(F(z)\ x_1)$ 满足 Neveu-Schwarz 关系 (7.5)、(7.6)、(7.7)。于是，V 在以下线性映射下是 $\mathcal{NS}$-代数的一个最低权模：$L_m\mapsto L(z)_{m+1}, G_{n+\frac{1}{2}}\mapsto F(z)_n$, $\mathbf{c}\mapsto c$。顶点超代数 V 是 $V_{\mathcal{NS}}(c,0)$ 的一个商代数。因此，M 是 $V_{\mathcal{NS}}(c,0)$ 的一个 σ-扭曲模。由此，我们证明了：

命题7.2。对于任意 $c\in\mathbb{F}$，中心荷为 c 的 *Ramond* 代数的每个局部截断模都是一个 σ-扭曲的 $V_{\mathcal{NS}}(c,0)$-模。

实际上，中心荷为 c 的 Ramond 代数的局部截断模与 σ-扭曲的 $V_{\mathcal{NS}}(c,0)$-模之间存在一一对应。

命题7.3。任意 σ-扭曲的 $V_{\mathcal{NS}}(c,0)$-模都是中心荷为 c的 *Ramond* 代数的局部截断模。

证明。设 M 是一个 σ-扭曲的 $V_{\mathcal{NS}}(c,0)$-模，则 $Y_M(\omega,z)$ 和 $Y_M(\tau,z)$ 是$\mathcal{E}_2(M)$中的元素，并满足扭曲交换子公式 (2.25)，这与 (7.22)、(7.23)、(7.24) 相同。因此，M 是中心荷为 c 的 Ramond 代数的一个模。扭曲模的截断性质迫使 Ramond 模 L_n、F_n 满足截断条件，因此 M是局部截断的。 □

扭曲 Zhu 代数可以显式计算。

命题7.4。令 $\mathbb{F}\langle x,y\rangle$ 为由 x,y生成的自由结合代数。那么扭曲 *Zhu* 代数

$$A_\sigma(V_{\mathcal{NS}}(c,0))\cong\mathbb{F}\langle x,y\rangle/(xy-yx,y^2-x-\tfrac{1}{24}c),$$

其中 x 对应于 $[\omega]$，而 y 对应于 $[\tau]$。

证明。由于顶点超代数 $V_{\mathcal{NS}}(c,0)$是 Neveu-Schwarz 代数的一个诱导模，$V_{\mathcal{NS}}(c,0)$的一组基由以下形式的向量给出

$$L_{-n_1}^{k_1}\cdots L_{-n_s}^{k_s}G_{-m}\mathbf{1},$$

其中 $n_1\geq n_2\geq\cdots\geq n_s\geq 2$, $m\geq\frac{3}{2}$, $n_i\in\mathbb{Z}_{\geq 2}(i=1,\dots,s)$, $m\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}_{\geq 1}$和 $k_1,\dots,k_s$均为非负整数。

对于任意齐次的 $v\in V_{\mathcal{NS}}(c,0)$，按照与非扭曲情形相同的论证（见 [LM3]），我们有

$$L_{-n}v\equiv(-1)^n((n-1)(L_{-2}+L_{-1})+L_0)v\pmod{O_g(V_{\mathcal{NS}}(c,0))},\quad n\geq 2.$$

进一步直接计算可得

$$[\omega]*_\sigma[v]\equiv[(L_{-2}+L_{-1})v]\equiv[v]*_g[\omega]\pmod{O_g(V_{\mathcal{NS}}(c,0))}.$$

因此，我们推导出以下方程： $A_\sigma(V_{\mathcal{NS}}(c,0))$

$$[L_{-n}v] = [(-1)^n((n-1)(L_{-2}+L_{-1})+L_0)v] = \big((-1)^n(n-1)[\omega]+(-1)^n(\deg v)[\mathbf{1}]\big) *_\sigma [v]$$

对于任意齐次的 $v \in V_{\mathcal{NS}}(c,0)$。由此可得

$$[L_{-n_1}^{k_1}\cdots L_{-n_s}^{k_s}G_{-m}\mathbf{1}] = f([\omega]) *_\sigma [G_{-m}\mathbf{1}],$$

对于某个多项式 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$。

接下来，我们分析 $[G_{-m}\mathbf{1}]$ 在 $A_\sigma(V_{\mathcal{NS}}(c,0))$ 中的元素。通过对 $\tau \circ_\sigma^n \mathbf{1}$ 进行直接计算，我们得到

$$[G_{-n-3+\frac{1}{2}}\mathbf{1}] \equiv \sum_{i\geq 1}^{n+1}\binom{\frac{3}{2}}{i}[G_{-n-3+\frac{1}{2}+i}\mathbf{1}] \pmod{O_g(V_{\mathcal{NS}}(c,0)))}, \quad n \geq 0.$$

这表明，每个等价类 $[G_{-m}\mathbf{1}]$ 都是 $A_\sigma(V_{\mathcal{NS}}(c,0))$ 中 $[G_{-\frac{3}{2}}\mathbf{1}]$ 的一个标量倍数。因此， $A_\sigma(V_{\mathcal{NS}}(c,0))$ 中的每个元素都可以写成 $f([\omega]) *_\sigma [\tau]$ 的形式，其中 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ 是某个多项式。定义映射 $\psi\colon \mathbb{F}\langle x,y\rangle \to A_\sigma(V_{\mathcal{NS}}(c,0))$，将生成元 $x \mapsto [\omega]$ 和 $y \mapsto [\tau]$ 映射至相应元素，并将其延拓为结合代数的同态。根据上述讨论， ψ 是满射。

接下来，我们将通过计算 $A_\sigma(V_{\mathcal{NS}}(c,\ 0))$ 中的乘积来确定 ψ 的核。根据 $A_\sigma(V_{\mathcal{NS}}(c,\ 0))$ 的定义，我们有

$$[\omega] *_\sigma [v] \equiv [v] *_\sigma [\omega], \quad [\tau] *_\sigma [\tau] = [\omega - \frac{1}{24}\mathbf{c}].$$

因此

$$xy - yx \in \ker\phi, \quad y^2 - x + \frac{1}{24}c \in \ker\phi.$$

因此，

$$(xy-yx, y^2 - x + \frac{1}{24}c) \subset \ker\phi.$$

现在考虑诱导同态

$$\overline{\psi} : \mathbb{F}\langle x,y\rangle/(xy-yx, y^2-x+\frac{1}{24}c) \to A_\sigma(V_{\mathcal{NS}}(c,0)).$$

由于 $xy = yx$ 和 $y^2 = x - \frac{1}{24}c$ 属于 $\mathbb{F}\langle x,\ y\rangle/(xy-yx,\ y^2-x+\frac{1}{24}c)$，商代数中的每个元素都可以写成 $f_1(x) + f_2(x)\cdot y$ 的形式，其中 $f_1(x)\ f_2(x) \in \mathbb{F}[x]$ 是某个多项式。

我们断言 $\ker\psi = 0$。假设存在非零元素 $f_1(x) + f_2(x)\cdot y \in \ker\psi$，那么 $f_1([\omega]) + f_2([\omega]) *_\sigma [\tau]$ 在任意 $A_\sigma(V_{\mathcal{NS}}(c,0))$-模上都作用为零。换言之，对于任意不可约的自然数集-分次 σ-扭曲 $V_{\mathcal{NS}}(c,0))$-模 M， $f_1([\omega]) + f_2([\omega]) *_\sigma [\tau]$ 在 $\Omega_{V_{\mathcal{NS}}(c,0))}(M)$ 上作用为零；该模也是 Ramond 代数 $\mathcal{R}$ 的一个不可约局部截断模，其中心荷为 c。我们总能找到一个 $\mathcal{R}$ 的局部截断模 M ，使得 $f_1([\omega]) + f_2([\omega]) *_\sigma [\tau]$ 不作用为零。我们将 $\mathcal{R}$ 作如下三角分解

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_+ \oplus \mathcal{R}_0 \oplus \mathcal{R}_-,$$

其中

$$\mathcal{R}_\pm = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_\pm}(\mathbb{F}L_n + \mathbb{F}F_n), \quad \mathcal{R}_0 = \mathbb{F}L_0 + \mathbb{F}F_0 + \mathbb{F}c.$$

取 $h \in \mathbb{F}$ 使得 $(f_1(h))^2 - (f_2(h))^2(h - \frac{c}{24}) \neq 0$。我们考虑一维 $\mathcal{R}_+\oplus\mathcal{R}_0$-模 $\mathbb{F}v_h$，其中 $\mathcal{R}_+$ 的作用为平凡， L_0 的作用为 h，而 F_0 的作用为 $h - \frac{1}{24}c$ 的平方根（因为 $F_0F_0 = L_0 - \frac{1}{24}\mathbf{c}$）。那么诱导模

$$M(h,c) = U(\mathcal{R}) \otimes_{U(\mathcal{R}_+\oplus\mathcal{R}_0)} \mathbb{F}v_h$$

是一个局部截断的 $\mathcal{R}$-模，因此是一个 σ-扭曲的 $V_{\mathcal{NS}}(c,0)$-模，其中 $\Omega(M(h,c)) = \mathbb{F}v_h$。由 h 的选取容易看出，$f_1([\omega]) + f_2([\omega]) *_\sigma [\tau]$ 在 $\Omega(M(h,c))$ 上不为零。这与假设矛盾，因此我们得出

$$\ker \overline{\psi} = 0.$$

因此，ψ 是一个同构，结论得证。 □

对于 $m \in \mathbb{Z}$，若 $p \mid m$，我们定义 $\delta_{p|m} = 1$；若 $p \nmid m$，我们定义 $\delta_{p|m} = 0$。$\mathcal{N}S$ 是一个受限李超代数，其 p-映射由下式唯一确定，这一点已在 [LM3] 的引理 5.5 中证明：

$$\mathbf{c}^{[p]} = \mathbf{c}, \quad (L_m)^{[p]} = \delta_{p|m} L_{mp} \quad \text{for } m \in \mathbb{Z}.$$

考虑由下列元素生成的 $V_{\mathcal{NS}}(c,0)$ 的理想 I_λ：

$$(L_m^p - \delta_{p|m} L_{mp} - \delta_{n,2}\lambda^p)\mathbf{1} \quad \text{for } n \geq 2.$$

于是，$V^\lambda_{\mathcal{NS}}(c,0) = V_{\mathcal{NS}}(c,0)/I_\lambda$ 上存在一个顶点超代数结构（见 [LM3]）。

由于 $V_{\mathcal{NS}}(c,0)$ 的自同构 σ 保持 I_λ 的生成元，σ 在商代数 $V^\lambda_{\mathcal{NS}}(c,0)$ 上诱导出一个自同构，仍记为 σ。注意，若 $\lambda \neq 0$，则 I_λ 不是分次理想，且 $V^\lambda_{\mathcal{NS}}(c,0)$ 不是一个 $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$-分次顶点超代数。当 $\lambda = \underline{0}$ 时，$V^0_{\mathcal{NS}}(c,0)$ 是一个 $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$-分次顶点超代数。从 $V_{\mathcal{NS}}(c,0)$ 到 $V^0_{\mathcal{NS}}(c,0)$ 的商态射诱导出一个从 $A_\sigma(V_{\mathcal{NS}}(c,0))$ 到 $A_\sigma(V(\mathcal{NS}^0(c,0))$ 的结合代数态射。我们直接得到以下结果，其证明与 [LM3] 中的定理 5.8 相同：

命题 7.5. 对于任意 $c \in \mathbb{F}$，存在一个代数同构

$$\mathbb{F}\langle x, y\rangle/(xy - yx, y^2 - x + \frac{1}{24}c, x^p - x) \to A_\sigma(V^0_{\mathcal{NS}}(c,0))$$

将 x 映射为 $[\omega]$，并将 y 映射为 $[\tau]$。

注意

$$x^p - x = \prod_{i=0}^{p-1}(x - [i]),$$

其中 $[i] \in \mathbb{Z}_p \subset \mathbb{F}$ 和 $A_\sigma(V^0_{\mathcal{NS}}(c,0))$ 是交换的。由此立即得到 ：

推论 7.6. 对于任意 $c \in \mathbb{F}$，顶点超代数 $V^0_{\mathcal{NS}}(c,0)$ 只有有限多个不可约的 $\mathbb{N}$-分次 σ-扭曲模，且此类不可约 σ-扭曲 $V^0_{\mathcal{NS}}(c,0)$-模的数量不超过 $2p$。

证明。由于 $A_\sigma(V^0_{\mathcal{NS}}(c,0))$ 是交换的，且 $[\omega]^p - [\omega] = 0$ 属于 $A_\sigma(V^0_{\mathcal{NS}}(c,0))$，任意不可约的 $A_\sigma(V^0_{\mathcal{NS}}(c,0))$-模都是一维的，并且 $[\omega]$ 在任意不可约的 $A_\sigma(V^0_{\mathcal{NS}}(c,0))$-模上作为标量 $h \in \{0,1,\ldots,p-1\}$ 作用。此外，若 $[\tau]^2 = [\omega] - \frac{1}{24}c$ 属于 $A_\sigma(V^0_{\mathcal{NS}}(c,0))$，则 $[\tau]$ 在任意不可约的 $A_\sigma(V^0_{\mathcal{NS}}(c,0))$-模上作为 $h - \frac{1}{24}c$ 的平方根作用。因此，至多有 $2p$ 种选择。 □

参考文献

[B] R.E. Borcherds，顶点代数、Kac-Moody 代数与怪兽，美国国家科学院院刊83(10)（1986）3068–3071。

[DLM] C.-Y. Dong, H.-S. Li, G. Mason，顶点算子代数的扭曲表示，数学年刊 310 （1998年）571–600。

[DNR] C.-Y. Dong, N.-H. Ng, L. Ren，顶点算子超代数与16重方式，美国数学会汇刊 374(11)（2021）7779–7810。[DR1] C.-Y. Dong, L. Ren，任意域上的顶点算子代数表示，代数杂志 403（2014）497–516。[DR2] C.-Y. Dong, L. Ren，任意域上与Virasoro代数相关的顶点算子代数，美国数学会汇刊 368(7)（2016）5177–5196。[DW] C.-Y. Dong, W. Wang，任意域上的顶点算子超代数表示，代数杂志 610（2022）571–590。[DZ] C.-Y. Dong, Z.-P. Zhao，顶点算子超代数的扭曲表示，Commun. Contemp. Math. 08(1)（2006）101–121。[FLM] I. Frenkel, J. Lepowsky, A. Meurman，《顶点算子代数与怪兽》。纯粹与应用数学丛书，134。Academic Press, Inc., 波士顿，MA，1988年。[JLM] X.-Y. Jiao, H.-S. Li, Q. Mu，模Virasoro顶点代数与仿射顶点代数，代数杂志 519（2019）273–311。[KW] V. Kac, W.-Q. Wang，顶点算子超代数及其表示，载于：《共形场论、拓扑场论与量子群的数学方面》（南哈德利，MA，1992年），Contemp. Math.，第175卷，美国数学会，普罗维登斯，RI，1994年，第161–191页。[LL] J. Lepowsky, H.-S. Li，《顶点算子代数及其表示导论》。数学进展丛书，227。Birkh¨auser Boston, Inc.，波士顿，MA，2004年。[L] H.-S. Li，扭曲顶点算子的局部系统、顶点算子超代数与扭曲模。《月光、怪兽及相关主题》（南哈德利，MA，1994年），203-236，Contemp. Math.，193，美国数学会，普罗维登斯，RI，1996年。[LM1] H.-S. Li, Q. Mu，素特征域上的海森堡顶点算子代数及其表示，美国数学会汇刊 370(2)（2018）1159–1184。[LM2] H.-S. Li, Q. Mu，素特征域上的仿射顶点代数扭曲模，代数杂志 541（2020）380–414。[LM3] H.-S. Li, Q. Mu，素特征域上的顶点超代数，代数杂志 606（2022）700–741。[LM4] H.-S. Li, Q. Mu， $\mathbb{N}$分次模顶点超代数的 $\mathbb{Z}$分次模，代数杂志 633（2023）619-647。[M] Q. Mu，素特征域上的格顶点代数，代数杂志 417（2014）39–51。[X] X.-P. Xu，《顶点算子超代数及其模导论》，数学及其应用丛书，第456卷，Kluwer Academic Publishers，多德雷赫特，1998年。[Y] C. Yang，好域上 $\mathbb{N}$分次顶点代数的扭曲表示，J. Algebra Appl. 24(7)（2025年）2550180。[Z] Y.-C. Zhu，顶点算子代数特征标的模不变性，美国数学会杂志 9（1996）237–302。