arXiv:2603.15207v1 [math.CO] 16 Mar 2026

$K_{t,\ t}$-自由图的强色指数

RICHARD BI、PETER BRADSHAW、Abhishek Dhawan 和 Jingwei Xu

摘要。图 G 的<strong edge coloring 强边染色 ϕ 是一种边着色 $\phi:\ E(G) \to \mathbb{N}$，使得每个颜色类在 G中构成一个诱导匹配。 G的<strong chromatic index 强色指数记作 $\chi'_s(G)$，是对 G进行强边染色所需的最少颜色数。Erdős 和 Nešetřil 于1985年猜想，如果 G 的最大度为 d，那么 $\chi'_s(G) \leq \frac{5}{4}d^2$。

Mahdian 于2000年证明，如果 G 是 C_4-自由的，那么 $\chi'_s(G) \leq (2+o(1))^{d^2/\log d}$，并猜想对于 $K_{t,\ t}$-自由图也成立同样的上界。在本文中，我们证明了这一猜想，并进一步改进结果，证明如下：每个最大度为 d 的 $K_{t,\ t}$-自由图 G满足$\chi'_s(G) \leq (1+o(1))^{d^2/\log d}$。我们采用 Rödl nibble 方法的一个变体来证明这一结果。我们对该方法进行改造时所引入的关键新成分，是应用 Kővári-Sós-Turán 定理来证明 $H := L(G)^2$ 满足某些结构性质。这些性质结合用于处理例外结果的 Talagrand不等式的一个变体，使我们能够在轻咬法过程中集中某些顶点集的大小，即使这些顶点集的阶小于 H的最大余度。我们将这些结构性质概括为关于列表着色的一个更一般的陈述，并相信该陈述本身具有独立的研究价值。鉴于平均情形复杂性理论中关于随机图着色所出现的计算阈值猜想，我们怀疑采用这种方法时我们的结果已是最佳可能结果。

1. 引言

1.1. 背景与主要结果

图 G 的强边染色是一种着色 $\phi:\ E(G) \to \mathbb{N}$，其性质是：如果 $\phi(e) = \phi(e')$，那么 e 的任何端点都不与 e'的任何端点相邻。等价地， G 的强边染色就是对 $L(G)^2$，（即 G的线图的平方）进行正常着色。在 G的强边染色中，每个颜色类都是一个诱导匹配，即一个匹配 $M \subseteq E(G)$，其性质是$E(G[V(M)]) = M$。 G的强色指数记为 $\chi'_s(G)$，它是对 G进行强边染色所需的最少颜色数。

如果 G 是一个最大度为 d的图，那么 G 的线图的平方的最大度至多为 $2d(d-1)$，因此 Brooks 定理意味着 $\chi'_s(G) \leq 2d(d-1)$。1985年，Erdős和Nešetřil提出了以下猜想：

猜想 1.1. 每个最大度为 d 的图 G 都满足 $\chi'_s(G) \leq \frac{5}{4}d^2$ - .

如果该猜想成立，那么上述结果就是最佳可能的，因为 a C_5-膨胀图可达到这一数值。所谓 a C_5-膨胀图，是指由 C_5 得到的图：将每个顶点替换为大小为 t 的独立集，并将每条边替换为完全二分图 $K_{t,t}$。Molloy 和 Reed [39] 首次对平凡上界作出了渐近改进，证明当 d 足够大时， $\chi'_s(G) \leq 1.998d^2$。随后 Bruhn 和 Joos [12], 改进了这一上界，Bonamy、Perrett 和 Postle [9] 又进一步改进。目前已知的最佳上界由 Hurley、de Verclos 和 Kang [27], 给出，他们证明当 d 足够大时， $\chi'_s(G) \leq 1.772d^2$ ；他们采用了一个更一般的论证，该论证适用于局部稀疏图 H，也就是说，对每个顶点 v， $H[N(v)]$ 中的边很少。

在考虑有界度图上的图着色参数上界时，自然会将关注范围缩小到具有特定结构性质的图。例如，Molloy [38]

Peter Bradshaw 和 Abhishek Dhawan 获得了 NSF RTG 项目资助 DMS-1937241 的资助。

改进了 Johansson 的一个结果 [28] ，证明最大度为 d 的无三角形图的色数至多为 $(1+o(1))d/\log d$，这是对 $d+1$这一贪心界的渐近改进。近年来，超越三角形，对 F-自由图的研究在过去约 30 年中受到了广泛关注；我们将在第1.2章节讨论其中的亮点。

顺着这一趋势，我们自然会问，这类结构约束是否能改进 $\chi'_s(\cdot)$的界。考虑最大度为d的图的强色指数时，禁止三角形并不能带来渐近改进，因为猜想1.1中的极值例子本身就是 K_3-自由的。相反，我们的目标是研究那些禁止某些 C_5-膨胀子图的图类。例如，Mahdian [36]研究了 C_4-自由图，并证明了以下结果：

定理 1.2 ([36])：若 G 是最大度为 d的 C_4-自由图，则 $\chi'_s(G) \le (2+o(1))\, d^2/\log d$。

我们将在第 1.3 节详细讨论 Mahdian 的证明策略，因为我们的方法建立在他的思路之上。粗略地说，他在 $H := L(G)^2$，上采用了 Rödl nibble 方法的一种变体——一种半随机图着色过程，并利用了 H 满足的各种余度约束（顶点对 $u, v \in V(H)$ 的余度是集合 $N(u) \cap N(v)$ 的大小）。事实上，将 C_4 替换为 $K_{2,t}$ 后，定理 1.2 仍然成立（参见 [36, 第 8] 节末尾的讨论；证明只需作相应调整即可）。然而，将 $K_{2,t}$ 替换为 $K_{t,t}$ 会带来挑战。尽管如此，通过证明 H 是局部稀疏的，我们可以证明贪心界的一个渐近改进。事实上，若 G 没有与$K_{t,t}$同构的子图，则由 Kővári-Sós-Turán 定理可知

(引理 2.4) 对于每个 $v \in V(H)$， $N(v)$ 中的边数至多为 $O(d^{4-\frac{1}{t-1}})$。在 Alon、Krivelevich 和 Sudakov 的开创性工作基础上 [2] 以及 Vu 的工作 [44], ，Hurley 和 Pirot [41]于 2021 年证明，最大度不超过 D 且每个顶点的邻域中至多包含 D^2/f条边（其中 $1 \le f \le D^2+1$）的图，其色数至多为 $(1+o(1))D/\log f$

（另见 [15]）。给定一个 $K_{t,t}$-自由图 G，其最大度为 d，若令 $D = 2d^2$ 且 $f = \Omega(d^{t-1})$，则可得到以下结果：

定理 1.3。若 G 是一个最大度为 d 的 $K_{t,t}$-自由图，则 $\chi'_s(G) \le (2t-2+o(1))\, d^2 \log d$。

请注意，上述结果还原了定理 1.2 对 $t = 2$的结论。Mahdian 猜想，他的结果对所有 $t \ge 2$都成立：

猜想 1.4 ([36])。设 $t \ge 2$ 为固定值，且 G 是一个最大度为 d的 $K_{t,t}$-自由图。那么 $\chi'_s(G) \le (2+o(1))\, d^2 \log d$。

我们的主要结果改进了定理 1.3中的常数因子，从而以更强的形式解决了猜想 1.4。

定理 1.5。设 $\varepsilon > 0$ 和 $t \ge 2$ 为固定值。设 G 为一个 $K_{t,t}$-自由图，其最大度 d相对于 ε和 t 足够大。那么 $\chi'_s(G) \le (1+\varepsilon)\, d^2 \log d$。

上述结果的证明采用了 Mahdian 的策略，即在 $L(G)^2$上使用蚕食法。不过，为了纳入 $K_{t,t}$-自由约束，并将常数因子从 2 降至 1，我们需要进行若干修改；这些修改的非正式说明见第 1.3 节。

1.2. 与先前研究的关系

在研究猜想 1.1时，关于特殊图类已有不少结果。本节重点介绍其中一些，并请读者参阅 Cranston 的综述 [14] 以了解更

全面的历史。Andersen [3],以及独立地由 Horek、Qing 和 Trotter [25]证明了该猜想对于最大度为 3 的图成立。对于 $d = 4$，Cranston [13] 得到了界 $\chi'_s(G) \leq 22$，仅差 2。Huang、Santana 和 Yu [26] 将界改进至 21，几乎回答了这一情形下的问题。此外，还有不少研究探讨退化图，其中最早的一项由 Faudree、Schelp、Gyárfás 和 Tuza [19], 完成，他们为平面图确立了界$\chi'_s(G) \leq 4d(G) + 4$。Kaiser 和 Kang [30] 研究距离-t 边着色，这是强边着色的一种推广，其中颜色相同的边必须相距更远；我们将在第 1.4 节进一步讨论这一主题。

Mahdian 关于 C_4-free 图的结果是首篇将 F-无约束与猜想 1.1 联系起来进行研究的论文。如前所述，他的证明几乎可以原样推广到$K_{2,\,t}$- free 图。在同一篇论文中，他猜想，对于最大度为 d 的 C_5-free 图，有 $\chi'_s(G) \leq d^2$，而这应当是紧的，因为 $\chi'_s(K_{d,\,d}) = d^2$。Dębski、Junosza-Szaniawski 和 Śleszyńska- Nowak 证明，当 G 不含 $K_{1\text{诱导}}$ 副本时，对于 $t \geq 4$，有 $\chi'_s(G) \leq (2 - 1/(t - 2))d^2$。据我们所知，尚无其他研究针对这一问题探讨（诱导） F-无约束。

关于我们的证明策略，我们借鉴了过去 ~ 30 年间的一系列研究，这些研究将 Rödl Nibble 方法用于图着色问题。Kim [33] 首先在证明围长至少为 5 的图的界 $\chi(G) \leq (1+o(1))d/\log d$ 时采用了这一策略。Johansson 在 Kim 的工作基础上证明了，对于 K_3-free 图，有 $\chi(G) = O(d/\log d)$；更一般地，对于 K_r-free 图，有$\chi(G) = O(d\log\log d/\log d)$（关于这一结果的更简洁证明，见 [7, 38]；关于领先常数因子的近期改进，另见 [15, 17]）。对于$K_{t,t}$- free 图，Anderson、Bernshteyn 以及本手稿的第三位作者 [4] 采用 Kim 的 nibble 方法的一种变体，证明了 $\chi(G) \leq (1 + o(1))d/\log d$，达到了已知最佳的$K_3$-free 上界。在后续工作 [5], 中，他们通过改编 Pettie 和 Su 的策略，证明了$K_{1,t,t}$- free 图的界 $\chi(G) \leq (4 + o(1))d/\log d$；Pettie 和 Su [40] 研究的是 $t = 1$ 的情形。

我们以讨论本结果相对于所用证明技术的最优性作为本节的结尾。对于普通顶点着色，已知存在围长任意高、色数至少为 $d/(2\log d)$ 的 d 正则图 [8]。然而，证明伪随机图类 $\mathcal{G}$ 满足 $\chi(G) < \Delta(G)/\log\Delta(G)$ 对所有 $G \in \mathcal{G}$ 都成立，仍是一个令人着迷的开放问题。事实证明，$\Delta(G)/\log\Delta(G)$ 是 $\chi(G)$ 上界的一个自然阈值，它与随机图平均度为 Δ [1, 46] 时着色的所谓碎裂阈值相吻合。人们猜想，对于随机正则图，不存在能够突破 $\Delta/\log\Delta$ 这一界的高效算法；这是平均情形复杂性理论中一个受到广泛研究的问题（该理论研究随机实例上的 NP 难问题）。一个广为人知的结果指出，无条件证明这一猜想等价于证明一个强于 $P \neq NP$ 的命题。因此，研究者转而致力于为这一猜想提供证据：对于若干受限算法类，都无法突破这一界 [42, 45]。事实证明，在随机优化问题中，这种因子 2 的差距无处不在。若要全面了解随机图及其他背景下的此类差距，请参阅综述 [6, 20, 21, 22]。

在研究强边着色时，Mahdian 证明，从稀疏随机图 $G(n,\ d/n)$ 中删除少量边，可以得到一个最大度至多为 $(1 + o_d(1))d$、强色指数至少为 $(1 + o(1))d^2/(2\log d)$ 的高围长图。虽然尚未从平均情形复杂度的角度研究这个问题，但人们预期也存在类似的差距。正如我们将在下一小节看到的，我们的证明采用了对洛瓦兹局部引理的迭代应用。特别是，得益于局部引理的算法变体，我们的证明给出了一个高效算法，用于计算这样的着色。鉴于人们猜想难以超越这个界限，我们的结果对于这种方法而言是最优的。事实上，蚕食法属于局部算法框架，而已有证明表明，这类算法无法超越碎裂阈值

对于图着色 [42] （所引用的结果是以独立集的形式表述的，不过，只需将推论推广到着色即可得到相应结论。）

1.3. 证明概述

本节将概述我们的证明技巧。需要说明的是，本节的阐述有意忽略了某些次要的技术问题，因此，本文其余部分给出的实际论证和正式定义，可能与此处的描述略有不同。不过，这些差异不会影响我们方法背后的整体概念框架。

如前所述，我们沿用 Mahdian 证明定理 1.2时采用的策略。在本节余下部分，固定一个图 G，并令 $H := L(G)^2$。我们的目标是用较少的颜色对 H 进行适当的顶点着色。为此，我们采用所谓的“Rödl Nibble”方法的一种变体：随机地给 $V(H)$ 的一小部分顶点着色，然后对剩下未着色的顶点迭代重复同一过程；关于该方法在（超）图着色中的应用综述，见 [31]。

在介绍我们对该方法的改编细节之前，我们先给出几个定义。列表着色由 Vizing [43] 以及 Erdős、Rubin 和 Taylor [18], 分别独立提出，是图着色的一种推广：每个顶点都从预先指定给它的颜色列表中被分配一种颜色。形式化地，$L : V(H) \to 2^{\mathbb{N}}$ [1] 是 H的一个列表赋值，而 L着色是 H 的一种正常着色，其中每个顶点 $v \in V(H)$都从其颜色列表 $L(v)$中获得一种颜色。 H的列表色数记作 $\chi_\ell(H)$，是满足以下条件的最小值 q：对于任何满足 $|L(v)| \geq q$ 对所有 v成立的列表赋值 L， H 都存在正常 L着色。给定一个顶点 $v \in V(H)$和一种颜色 $c \in L(v)$， c在 v处的颜色度为 $d_L(v,c) = |N_L(v,c)|$，其中 $N_L(v,c)$是 v中满足 $c \in L(u)$的邻点 u 的集合。

我们论证的核心是一个命题（见命题 4.4），其大意如下：设 H 是一个图，且 $L : V(H) \to 2^{\mathbb{N}}$ 是赋给H 各顶点的列表赋值，满足某些性质（此处我们有意不作具体说明，稍后会详细阐述这些性质）。那么，存在一个 L-部分正常着色 ϕ，以及一个赋给 H 的列表赋值 L_ϕ，使得对于 $H_\phi := H[V(H) \setminus \mathrm{dom}(\phi)]$，以下条件成立：

(1) for each $v \in V(H_\phi)$, $L_\phi(v) \subseteq L(v) \setminus \phi(N(v))$, and

(2) $\dfrac{\max_{v,c} d_{L_\phi}(v,c)}{\min_v |L_\phi(v)|} \leq \zeta \dfrac{\max_{v,c} d_L(v,c)}{\min_v |L(v)|}$, for some $\zeta < 1$.

特别地，(1) 对任意的 H 的正常 L_ϕ-着色 ϕ'， $\phi \cup \phi'$都是 H 的正常 L-着色；(2) 最大颜色度与最小列表大小之比会降低。我们通过采用 Kim变体的“浪费着色过程” [33] 来证明上述结果（关于该论证的教科书式讲解，见 [39, 第 12]章）。在详细讨论这一过程之前，我们先说明如何利用这个命题证明主要结果。为证明定理 1.5，我们计划反复应用上述结果，直到达到能够完成着色的阶段。更形式化地，令 $H_1 = H$，并对每个 v，令 $L_1(v) = [q]$，其中 $q = (1+\varepsilon)\Delta(H)/\log \Delta(H)$。递归地，通过将上述结果应用于 H_i 和 L_i，定义 H_{i+1}和 L_{i+1}，直至对某个 $i^* \in \mathbb{N}$ 满足以下条件：

$$\frac{\max_{v,c} d_{L_{i^*}}(v,c)}{\min_v |L_{i^*}(v)|} < \frac{1}{8}, \qquad \text{and} \qquad \min_v |L_{i^*}(v)| \gg 1.$$

上面的第二个条件是必要的，因为我们要求列表非空。[2] 此时，我们可以通过以下命题完成着色：

[1]对于集合 S，我们用 2^S 表示 S的幂集。[2]我们注意到，如果改用 $q' = (1-\varepsilon)\Delta(H)/\log \Delta(H)$ 种颜色，则可能不满足这一条件。事实上，对于如上定义的 q，我们可以确保 $\min_v |L_{i^*}(v)| \geq \Delta(H)^{\Theta(\varepsilon)} = \omega(1)$；而对于 q'，则无法保证 $L_{i^*}(v) \neq \emptyset$。

命题 1.6. 设 H 是一个图，其列表赋值为 L ，满足 $|L(v)| \geq 8d$ 对每个$v \in V(H)$均成立，其中 $d =$ 最大值$_{v,\ c} d_L(v, c)$。那么 H 存在一个适当的 L-着色。

这个命题是标准结果，可用洛瓦兹局部引理证明（参见 [39, 第 4 章。1]教科书式的证明）。我们指出，Haxell 的一个结果 [23] 允许将常数8替换为2。现在我们描述用于证明存在满足条件 ϕ 的着色的过程，条件1 和2 如前所述（这构成一次轻咬迭代）。

浪费着色过程该过程是一种用于计算正规部分着色的随机化算法。简而言之，算法如下：

(1) H 中的每个顶点都以某个较小的概率被激活。(2) 每个已激活的顶点都从 $L(v)$ 中均匀随机地分配一个颜色 $\phi(v)$。(3) 对于每个顶点 v，令 $L_\phi(v) = L(v) \setminus \{\phi(u) : u \in N(v)\}$。(4) 如果某个已激活顶点的颜色在上一步后仍然保留，则将该颜色永久分配给该顶点。

久地。

注意，上述过程存在浪费：即使 $N(v)$ 中没有顶点被永久分配 c，我们也可能会从 $L(v)$中删除颜色 c 。事实证明，这种“浪费”大大简化了对该过程的分析。具体来说，像$\Pr(c \in L_\phi(v)$这样的量可以用更简洁的形式表示。这种简化使参数的递归分析更容易进行，大幅减轻了计算的繁琐程度。（关于这种浪费的作用，详见 [39, 第 12 章。2] ）

定义以下参数：

$$\ell := \min_v |L(v)|, \qquad \ell' := \min_v |L_\phi(v)|, \qquad d := \max_{v,c} d_L(v, c), \qquad d' := \max_{v,c} d_{L_\phi}(v, c).$$

目标是证明，以正概率，比值 d'/ℓ' 明显小于 d/ℓ。事实证明，这在局部期望意义下成立，即

$$\frac{\mathbb{E}[\deg_{L_\phi}(v, c)]}{\mathbb{E}[|L_\phi(v)|]} \leq \zeta \frac{d}{\ell},$$

对于某个 $\zeta < 1$。为此，我们注意到以下事实：

- $L_\phi(v)$由满足以下条件的颜色 $c \in L(v)$组成：(1) v 的任何邻点都未被激活并分配到 c。
- $N_{L_\phi}(v,\ c)$由满足以下条件的顶点 $u \in N_L(v,\ c)$组成：(2) u 的邻点均未被激活且未被分配 c，以及 (3) u 未被着色。

上述条件 (1) 和 (2) 发生的概率相同。因此，决定 $\zeta < 1$的是条件 (3)。

回顾一下我们的目标：证明 $d'/\ell' \leq \zeta\, d/\ell$以正概率成立。为此，只需证明随机变量 $|L_\phi(v)|$ 和 $d_{L_\phi}(v,\ c)$都集中在其期望值附近。然后应用洛瓦兹局部引理即可得到该结论。

关键挑战与我们的主要贡献：的集中性 ℓ'的集中性可通过直接应用 Talagrand不等式得到；对于满足某些类Lipschitz条件的随机变量而言，这是一种强大的集中性工具。在考察 d'时，事实证明，相关的 Lipschitz 参数是 H的最大余度，记为 $\Delta_2(H)$。回顾 Kim 首次应用这一过程的情形：对围长至少为 5 的图进行着色。在此， $\Delta_2(H) = 1$ ，因此可通过 Talagrand不等式实现集中。对于其他情形，情况则要微妙得多。

我们首先讨论 Mahdian 证明定理 1.2 的方法。注意，尽管 G 是C_4-自由的， H 却未必如此！事实上，H 可以包含许多 C_4的副本。Mahdian 利用 H 的关键结构性质如下：对于每个顶点 $v \in V(H)$，每个顶点

$u \in V(H) - v$ 除 $O(\sqrt{\Delta(H)})$ 个 v 的邻点（我们称它们为 v 的朋友）之外，都满足$|N(u) \cap N(v)| = O(\sqrt{\Delta(H)})$。有了这一点，他便能有效地忽略 v 的朋友所作的贡献，从而证明

$$d' \leq (1 + o(1))\mathbb{E}[d'] + O(\sqrt{\Delta(H)}),$$

以高概率成立。不幸的是，这一结构性质不是遗传的，也就是说，对于 $H' \subseteq H$，将 $\Delta(H)$ 替换为 $\Delta(H')$ 后，该性质并不成立。因此，Mahdian 在递归应用这一结果时，需要确保对所有 i，$\Delta(H_i) = \omega(\sqrt{\Delta(H_1)})$。这正是他的论证中常数因子 2 不可或缺的原因。[3]

在定理 1.5 的证明中，我们为 H 证明了一个类似的结构性质：对于每个顶点 $v \in V(H)$，除 $O(\Delta(H)^{1-1/t})$ 个 v 的朋友外，每个顶点 $u \in V(H) - v$ 都满足 $|N(u) \cap N(v)| = O(\Delta(H)^{1-1/t})$。有了这一结果，采用与 Mahdian 相同的方法即可证明定理 1.3。为了将常数因子从 $2t-2$ 降至 1，我们还需要控制每个顶点 v 的两个参数：

- 集合 $Q(u, v) = N(u) \cap N(v)$ 的大小，适用于陌生的顶点 u，并且
- 集合 X_v 表示 v 的朋友的大小。

我们对第一条的证明受到 Methuku、Wigal 以及本手稿第二和第三位署名作者近期工作的启发 [11]。第二条的证明体现了本工作的关键技术创新。

令 $v \in V(H)$ 固定，并考虑集合 X_v。[11] 中的余度集中有一个有趣的特点：它依赖于感兴趣集合内部顶点之间的相互作用，而非像以往此类方法的惯常做法那样依赖集合外部顶点的影响。事实证明，存在 X_v 的一个划分 $X_{1,v} \sqcup \cdots \sqcup X_{s,v}$，以及一组集合 $B_{1,v}, \ldots, B_{s,v}$，使得对每个 $i \in [s]$，以下条件均成立：

(1) $X_{i,v}$ 并不“太大”，(2) $X_{i,v}$ 中顶点的“大多数”邻点都位于$B_{i,v}$中，并且 (3) $X_{i,v}$ 中顶点对相对于图 $H[X_{i,v}, B_{i,v}]$ 的余度“很小”。

希望我们能够将注意力限制在$B_{i,v}$ 上，以使$|X_{i,v}|$集中，从而使$|X_v|$集中。事实上，起初$|B_{i,v}|$ “很大”。此外，我们能够证明，在应用浪费着色过程时，$|B_{i,v}|$ 不会“缩小得太快”，因而可以使$|X_{i,v}|$集中。（我们指出，关于$B_{i,v}$ 的实际论证稍微复杂一些，但对本概述并不重要。）

总之：要使 d'集中，我们必须证明，对于所有陌生顶点对 u和 v，$|Q(u, v)|$ 都很小；对于所有 v，X_v 都很小。为了有助于满足后一条件，我们还必须证明，对于每个 $i \in [s]$，$|B_{i,v}|$ 不会缩小得太快。事实证明，可以将所有这些条件归纳为一个更一般的定理。我们将在下一小节陈述这一一般结果及其若干推论，并在本文后文中予以证明。我们指出，尽管这个一般定理的表述颇为繁琐，但我们认为它本身具有独立的研究价值。

1.4. 关于列表着色的一般定理

在下面的定理中，我们考虑这样一个图：其中某些顶点的无序对是朋友。我们假设每个顶点总是自己的朋友。形式上，朋友关系是一个对称自反二元关系 $\mathcal{F} \subseteq V(G) \times V(G)$。给定一个带有朋友关系 $\mathcal{F}$ 的图 G，我们称彼此不是朋友的两个顶点为陌生点。

[3]我们指出，在 [4], 中，作者对$K_{t,t}$-自由图采用了类似的论证 H。由于$K_{t,t}$-自由性具有遗传性，因此满足所需条件，使他们得以获得最优常数 1。

定理 1.7. 设 $\gamma, \varepsilon \in (0,1)$ 且 $N \in \mathbb{N}$。那么，存在 $\Delta_0 \in \mathbb{N}$ 使得下述结论成立。设 G 是一个最大度不超过 $\Delta \geq \Delta_0$ 的图，其带有对称自反朋友关系 $\mathcal{F} \subseteq V(G) \times V(G)$，并满足以下条件：

(1) 任意两个陌生点至多有 $\Delta^{\log^{20}\Delta}$ 个公共邻居。*(2)* 存在一个由 $\mathcal{X}$ 个子集 $X \subseteq V(G)$ 组成的族，满足以下条件：*(a)* 每个 $X \in \mathcal{X}$ 都满足 $|X| \leq \Delta^{\gamma}$；*(b)* 对于每个 $v \in V(G)$，存在一个大小至多为 $\Delta^{(1-\gamma)\varepsilon/12}$ 的族 $\mathcal{X}_v \subseteq \mathcal{X}$，使得 v 的所有朋友都属于 $\bigcup_{X \in \mathcal{X}_v} X$；*(c)* 每个 $v \in V(G)$ 至多属于 Δ^N 个集合 $X \in \mathcal{X}$。*(3)* 对于每个至少含有两个顶点的 $X \in \mathcal{X}$，存在一个集合 $B^X \subseteq V(G)$，满足以下条件：*(a)* 每个 $v \in X$ 在 B^X 中至少有 $d(v)$ 个 $-\Delta(1-\gamma+\log^{-10}\Delta)$ 邻点；*(b)* 对于每一对不同的朋友顶点 u、$v \in X$，u 和 v 在 B^X 中至多有 $\Delta^{\log^{20}\Delta}$ 个公共邻居。

那么，$\chi_\ell(G) \leq (1+\varepsilon)\Delta^{\text{对数}\,\Delta}$。

下面我们为上述结果提供一些直观解释。条件（1）指出，顶点的陌生点对具有较小的余度。条件 (2) 指出，存在一个由 $\mathcal{X}$ $V(G)$的“较小”子集组成的集族，使得对于每个顶点 v，(a) v 的朋友被 $\mathcal{X}$的一个“较小”子集覆盖，并且 (b) v 不包含在 $\mathcal{X}$中“过多”的子集中。条件 (3) 指出，对于每个 $X \in \mathcal{X}$，存在一个集合 $B^X \subseteq V(G)$，使得子图 $G_X := G[X, B^X]$ 满足：(a) 对于每个 $x \in X$，$\deg_{G_X}(x)$都“较大”；(b) u、$v \in X$ 在 G_X 中的余度对于不同的朋友顶点对 u、v而言都“较小”。（这些性质将是通过轻咬法集中 $|X|$ 的关键。）我们在第 3.1 节中根据定理 1.7 推导出定理 1.5。该论证大致是将定理 1.7 应用于 $\mathcal{X}$，其中包含集合 X_i、v 以及 B^{X_i}、$^v = B_i$、v，而X_i、v 和B_i、v 如第 1.3 节所述。

如上一章节所述，我们认为定理 1.7 本身具有独立的研究价值。事实上，取 5 [33]，即可得到 Kim 关于围长至少为

- $\mathcal{F} = \{(v, v) : v \in V(G)\}$,
- $\mathcal{X} = \{\{v\} : v \in V(G)\}$,
- $\mathcal{X}_v = \{\{v\}\}$ 对每个 $v \in V(G)$，并且
- γ，N 任意。

采用相同的参数设定，还可以得到 Methuku、Wigal 以及本手稿第二和第三位署名作者近期的一项结果（并略有改进）。

定理 1.8 ([11])。如果 G 是一个最大度为 d 且余度至多为 $d^{\text{对数}^{20}d}$的图，那么$\chi_\ell(G) \leq (1+o(1))\, d^{\text{对数}\, d}$。

采用类似的设置，令 $\gamma = 1 - \frac{1}{c}$ 和 $\Delta = cd$为给定对象；如果允许每个顶点有少量例外，不满足余度界限，则可以得到系数更大的相同结果。

定理 1.9。设 $c > 1$ 固定。假设 G 是一个最大度为 d的图，并且对于每个 $v \in V(G)$，至多有 $d^{1-1/c}$个顶点 $w \in V(G)$满足 $|N(v) \cap N(w)| > d^{\text{对数}^{20}d}$。那么，$\chi_\ell(G) \leq (c+o(1))\frac{d}{\log d}$.

Mahdian证明了定理1.9 的假设对 $c = 2$成立，因此定理 1.9 立即推出定理 1.2。

超越强边着色后，我们的一般定理还推出了高围长图的距离-t 边着色的一项结果。图 G 的距离-t 边着色是指一种着色 $\phi : E(G) \to \mathbb{N}$，满足：若 $\phi(e) = \phi(e')$，则 e 的任一端点与其中一个

e' 之间的距离至少为 t。（对于 $t=2$，这就是强边着色。）Kaiser 和 Kang 证明，围长至少为 $2t+1$ 的 d-正则图存在一种距离-t 边着色，所用颜色数为 $O(d^t/\log d)$ [30,定理 1.2]。在他们的证明中，他们表明 $L(G)^t$ 是局部稀疏的，并运用了 Alon、Krivelevich 和 Sudakov 关于此类图色数的结果 [2] 。若改用 Hurley 和 Pirot [41] 得到的改进界，他们结果中的隐藏常数为 $1+o(1)$。我们将这一常数改进为 $(1+o(1))2/t$；根据 Kaiser 和 Kang 的另一项结果 [30, 命题 1.3]，这在相差不超过 2 倍的意义下是最优的。

定理 1.10. 对于每个 $\varepsilon>0$ 和整数 $t\geq 2$，都存在一个值 $d_0\in\mathbb{N}$，使得对每个 $d\geq d_0$，以下结论成立。设 G 是一个最大度不超过 d 且围长至少为$2t+1$的图。那么，G 存在一个距离-t 边着色，使用的颜色不超过 $(1+\varepsilon)\,t\,\frac{2d^t}{\log d}$。

我们还证明了一个适用于良好谱扩张图的类似结果。

定理 1.11. 对于每个 $\varepsilon>0$ 和 $C\geq 2$，都存在一个值 $d_0\in\mathbb{N}$，使得对每个 $d\geq d_0$，以下结论成立。若 G 是一个具有 $n\geq d^{2t}$ 个顶点的 d-正则图，且其邻接矩阵 $A(G)$ 的第二大特征值满足 $\lambda(G)\leq C\sqrt{d}$，那么 G 存在一个距离 -t 边着色，使用的颜色不超过 $(1+\varepsilon)\,t\,\frac{2d^t}{\log d}$。

定理 1.5、1.10和1.11 由定理 1.7 推导得出的过程见第 3 章。鉴于这些结果，我们相信定理 1.7 将应用于其他图染色问题。

论文结构。— 本文余下部分的结构如下：第 2 章汇集证明中用到的一些基本记号和事实；第 3 章详细说明如何由定理 1.7 推导出主要结果；第 4 章在一个技术性引理成立的条件下证明定理 1.7，而该引理将在第 5 章证明。

2. 预备知识

我们进一步将本章分为两个小节：第一小节介绍本文后续部分将用到的基本记号和定义；下一小节陈述证明中将用到的一些引理。

2.1. 记号

对于 $n\in\mathbb{N}$，我们令 $[n]:=\{1,\dots,n\}$。给定一个图 G，我们用 $L(G)$ 表示 G 的线图。该图的顶点集为 $E(G)$，其中两个顶点 $e,e'\in E(G)$ 在 $L(G)$ 中相邻，当且仅当 e 和 e' 在 G 中关联。我们用 G^t 表示 G 的 t 次幂，它定义为顶点集为$V(G)$ 的图，其中 $u,v\in V(G)$ 相邻，当且仅当 $\mathrm{dist}_G(u,v)\leq t$。

给定一个顶点 $v\in V(G)$，我们用 $E_1(v)$ 表示与 v 关联的边的集合。对于 $i\geq 2$，我们用$E_i(v)$ 表示 $E(G)\setminus(E_1(v)\cup\cdots\cup E_{i-1}(v))$ 中与 $E_{i-1}(v)$ 的某条边关联的边。对于每个 $i\geq 1$，我们用 $N_i(v)$ 表示与 v 的距离恰为 i 的顶点集。特别地，$N(v)=N_1(v)$。

在本文余下部分中，必要时我们会忽略上取整和下取整，并假设这不会影响总体论证。

2.2. 工具

我们先给出一些后文会用到的结果。下面的不等式可以利用基本微积分和泰勒展开验证。

引理 2.1. 对于每个常数 $\alpha>0$，如果 $x>0$ 足够小，那么

$$1-x>\exp(-x(1+x))>\exp(-(1+\alpha)x).$$

引理 2.2。对于所有 $x>0$，$\frac{1}{1+x}>1-x$。

下一个引理通常称为伯努利不等式。

引理 2.3。 设 $x \in (0,1)$，并令 r 为正整数。则，$(1-x)^r \geq 1-rx$。此外，若 $rx < \frac{1}{2}$，则 $(1-x)^{-r} \leq \frac{1}{1-rx} < 1+2rx$。 ——

以下是 Kővári、Sós 和 Turán 的一个著名引理。

引理 2.4 ([34])。 设 H 是一个二部图，其部集为 A和 B，大小分别为 m 和n。假设 H 没有一个大小为 t 的子集 $X \subseteq A$ 和一个大小为 s 的子集 $Y \subseteq B$，使它们诱导出一个 $K_{s,t}$。那么，

$$|E(H)| < (t-1)^{1/s} n m^{1-1/s} + (s-1)m.$$

对于 C_{2k}-自由图，Bondy 和 Simmonovits 证明了上述结果的以下改进（这一结果将在我们证明定理 1.10时起到关键作用）：

引理 2.5 ([10])。 设 H 是一个 n顶点的 C_{2k}-自由图，其中 $k \geq 2$。则，

$$|E(H)| < 100kn^{1+1/k}.$$

以下结果通常称为 Hajnal-Szemerédi 定理，它给出了图存在均衡 k-着色的条件。所谓均衡着色，是指图的一种 k-着色，其中任意两个颜色类的大小相差至多为 1。

引理 2.6 ([32]). 若 G 是一个最大度至多为 Δ的图，则 G 存在一个均衡$(\Delta+1)$-着色。

我们还使 用洛瓦兹局部引理，其在 [37, 定理 6.11]中表述如下：

引理 2.7. 设 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 是概率空间中的事件。假设存在 $p \in [0,1)$，使得对所有 $1 \leq i \leq n$ 都有$\Pr(A_i) \leq p$ 。进一步假设每个 A_i 都与除少于 d 个其他事件 A_j以外的所有事件相互独立。若 $4pd \leq 1$，则以正概率没有事件$A_1, \ldots, A_n$ 发生。

对于具有集中性的随机变量，我们将采用两种集中不等式。首先，我们使用以下形式的切尔诺夫界，例如可见于 [37, 第 4] 章。

引理2.8。 设 Y是一个随机变量，它是两两独立的指示变量之和，且令 $\mu = \mathbb{E}[Y]$。那么对于任意值 $\delta > 0$,

$$\Pr(Y > (1+\delta)\mu) \leq \exp\left(-\frac{\delta^2 \mu}{2+\delta}\right).$$

Mitzenmacher [37] 指出，只需令 $\mu \geq \mathbb{E}[Y]$即可。我们还将使用集中不等式 [35, 定理 3.4], ，它是 [16] 中线性 Talagrand 不等式的一个特例。在陈述该不等式之前，我们需要先给出几个定义。

定义 2.9。 设 $\{(\Omega_i, \Sigma_i, \Pr_i)\}_{i=1}^n$ 为一组概率空间，且令 $(\Omega\ \Sigma,\ \Pr)$ 为它们的乘积空间。设 $\Omega^* \subseteq \Omega$ 为例外结果的集合，并令 $Y\colon \Omega \to \{0,1\}$ 为一个随机变量。我们称 Y是由验证器 $R\colon \Omega \setminus \Omega^* \to 2^{\{1,\ldots,n\}}$ 进行-可验证的，如果：

- $R(\omega) = \emptyset$ 当 $Y(\omega) = 0$ 时；
- $|R(\omega)| \leq r$ 对于每个满足 $Y(\omega) = 1$ 的 $\omega \in \Omega \setminus \Omega^*$；
- 如果 $Y(\omega) = 1$，那么对于每个满足 $\omega_i = \omega'_i$ 对所有 $i \in R(\omega)$ 均成立的 $\omega' \in \Omega \setminus \Omega^*$， $Y(\omega') = 1$。

我们常说，集合 $R(\omega)$ 是见证集，因为它由空间 Ω_i 中、由$R(\omega)$ 见证 事件 $Y(\omega) = 1$ 的结果构成。

定义 2.10. 设 $\{(\Omega_i, \Sigma_i, \Pr_i)\}_{i=1}^n$ 是一组概率空间，且 $(\Omega\ \Sigma,\Pr)$ 是它们的乘积空间。设 $\Omega^* \subseteq \Omega$ 是一组例外结果，并设 $r, d \geq 0$。我们称随机变量 Z 关于 Ω^* 是 (r,d)-可观测的，如果：

- $Z = \sum_{j=1}^{m} Y_j$，其中对于每个 $j \in \{1, \dots, m\}$，Y_j 是 Ω 中的二元随机变量，且可由验证器 R_j 以 r 验证，
- 对于每个 $\omega \in \Omega \setminus \Omega^*$ 和 $i \in \{1, \dots, n\}$, $i \in R_j(\omega)$，至多有 d 个值 j。

集中不等式 [35, 定理 3.4] 表述如下。

引理 2.11. 设 $\{(\Omega_i, \Sigma_i, \Pr_i)\}_{i=1}^{n}$ 为一组概率空间，且 $(\Omega\ \Sigma, \Pr)$ 为它们的乘积空间。设 $\Omega^* \subseteq \Omega$ 为一组例外结果，且 $r, d \geq 0$。设 $Z : \Omega \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 为一个非负随机变量。若 Z 关于 Ω^*是(r, d)-可观测的，则对于任意满足以下条件的 τ

$$\tau > 96\sqrt{rd\mathbb{E}[Z]} + 128rd + 8\Pr(\Omega^*)\sup(Z), \tag{1}$$

以下集中不等式成立：

$$\Pr(|Z - \mathbb{E}[Z]| > \tau) \leq 4\exp\left(-\frac{\tau^2}{8rd(4\mathbb{E}[Z] + \tau)}\right) + 4\Pr(\Omega^*).$$

在浪费着色过程的第 i 次迭代中，我们将应用引理 2.11，并使用如下概率空间 $(\Omega_i, \Sigma_i, \Pr_i)$（有关该过程的非正式描述，参见第 1.3 节）。对于每个顶点 $v \in V(G)$，我们定义集合 $\Omega_{i,v} = L_i(v) \cup \{0\}$。$\Omega_{i,v}$ 中的元素 0 满足 $\Pr_{i,v}(0) = 1 - \eta$，对应于实验中 v 未被激活的结果。每个元素 $c \in L_i(v)$ 满足 $\Pr_{i,v}(c) = \frac{\eta}{|L_i(v)|}$；元素 c 对应于实验中 v 被激活并被分配 c的结果。于是，$\Sigma_{i,v} = 2^{\Omega_{i,v}}$ 是 $\Omega_{i,v}$的概率可测子集，且 $\Pr_{i,v} : \Sigma_{i,v} \to [0, 1]$ 给出了上述实验所定义的概率。因此，$(\Omega_{i,v}, \Sigma_{i,v}, \Pr_{i,v})$构成一个概率空间，用来描述未着色顶点 v处的随机激活和颜色分配。

概率空间（$\Omega_{i,v}, \Sigma_{i,v}, \Pr_{i,v}$）的乘积（记作（$\Omega_i, \Sigma_i, \Pr_i$））由我们浪费着色过程第 i 次迭代的所有结果组成。应用引理 2.11 时，我们使用的例外事件集合 $\Omega_i^* \subseteq \Omega_i$ 取决于所讨论的随机变量。一般来说，我们要么选择 $\Omega_i^* = \emptyset$，要么令 Ω_i^* 由该过程中不太可能发生的结果组成，在这些结果中，G 某个局部部分里的许多顶点被激活并被分配了相同的颜色。

定理 1.7 的推论

本节将从定理 1.5、1.10和1.11 推导出定理 1.7。我们还将本节进一步划分为若干小节，分别讨论各个结果。

3.1. 定理 1.5 的证明

令 $\varepsilon > 0$ 和 $t \geq 2$ 固定。设 G 是一个最大度为 d 的 $K_{t,t}$-自由图（我们将符号 Δ 留作 $L(G)^2$ 的最大度上界，即 G 的线图的平方）。我们的目标是证明，只要 d 足够大，就有 $\chi'_s(G) \leq (1 + \varepsilon)\, d^2 \log d$。为此，我们将以 ε 的取值以及 $\gamma = \frac{1}{2}$ 和 $\Delta = 2d^2$，对 $L(G)^2$ 应用定理 1.7。

由于 G 可以嵌入一个 d正则的$K_{t,t}$-自由图中，不失一般性，我们假设G是 d正则的。我们还假设，就 t 和 ε而言，d 足够大。特别地，我们假设 $t = o\left(\frac{\log d}{\log\log d}\right)$，从而

$$d^{1/t} = (\log d)^{\omega(1)}, \qquad \text{and} \qquad (\log d)^t = d^{o(1)}. \tag{2}$$

我们将证明 $L(G)^2$ 满足定理 1.7 的条件。在定义 $V(L(G)^2) = E(G)$ 的朋友关系之前，我们先为 $V(G)$ 定义朋友关系。若两个顶点 $u, v \in V(G)$ 满足 $|N(u) \cap N(v)| \geq \frac{d}{\log^{40} d}$，则称它们互为朋友。我们规定每个顶点都是自己的朋友。于是，给定两条边$e, e' \in E(G)$，若 e 的某个端点是 G 中 e' 的某个端点的朋友，则称 e 和 e' 互为朋友。在

特别地，若 e 和 e' 关联，则 e 和 e' 互为朋友。这就为 $L(G)^2$ 的顶点集定义了朋友关系。下面我们对顶点和边的友点对作一些观察。

引理 3.1. 每个 $v \in V(G)$ 至多有 $4\log^{40t} d$ 个朋友。

证明。令 $B := N(v)$，并令 $A \subseteq N(N(v))$ 为 v 的朋友集合。令 H 为一个二部图，其部集 A' 和 B' 不相交。对于每个 $a \in A$，向 A' 添加一个顶点 a'；对于每个 $b \in B$，向 B' 添加一个顶点 b'。对于每一对相邻的顶点 $(a, b) \in A \times B$，添加一条边 $a'b'$ 到 H。如果一个大小为 $2t$ 的子集 $X' \subseteq A'$ 和一个大小为 t 的子集 $Y' \subseteq B'$ 诱导出一个 $K_{t,2t}$ 于 H 中，那么取相应的集合 $Y \subseteq B$，以及相应的 $X \subseteq A$ 中一个与 Y 不相交的 t-子集，我们便能在 G 中找到一个 $K_{t,t}$，矛盾。因此，不存在大小为 $2t$ 的 $X' \subseteq A'$ 和大小为 t 的 $Y' \subseteq B'$ 在 H 中诱导出一个 $K_{t,2t}$。

现在，由于每个 $a \in A$ 都是 v的朋友，每个 $a' \in A'$ 的度至少为 $d/\log^{40} d$ 在 H中。因此，$|E(H)| \geq |A|d/\log^{40} d$。另一方面，应用引理 2.4，令 t 替换 s，并令 $2t$ 替换 t，且取 $n = |B| = |N(v)| = d$ 和 $m = |A|$，我们得到

$$\frac{|A|d}{\log^{40} d} \leq e(H) < (2t-1)^{1/t} d|A|^{1-1/t} + (t-1)|A|.$$

若 $(t-1)|A| > (2t-1)^{1/t} d|A|^{1-1/t}$，则 $|A|d/\log^{40} d < 2(t-1)|A|$，这与我们对 t 的上界矛盾。因此，

$$\frac{|A|d}{\log^{40} d} < 2(2t-1)^{1/t} d|A|^{1-1/t} < 4d|A|^{1-1/t}.$$

整理可得 $|A| < 4\log^{40t} d$，证明完毕。 ■

对于每条边 $e \in E(G)$，我们将顶点 e 在 $L(G)^2$ 中的邻点记为 $N(e) = N_{L(G)^2}(e)$。

引理 3.2。 如果 $e、e' \in E(G)$ 是陌生点，那么 $|N(e) \cap N(e')| < \Delta/\log^{20} \Delta$。

证明。由（2），我们有 $d^{\frac{1}{t}} \geq \log^{40} d$。令 $e = uv$、$e' = u'v'$。我们对 $xy \in N(e) \cap N(e')$ 中的边进行计数。至多有 $4d$ 条边 xy 满足 x 或 y 属于 $\{u, v, u', v'\}$。由于 e 和 e' 是陌生点，$|N(u) \cap N(u')| \leq d/\log^{40} d$。因此，至多有 $d^2/\log^{40} d$ 条边 xy 满足 $x \in N(u) \cap N(u')$。对 $\{u, v\} \times \{u', v'\}$ 中的所有点对重复这一论证，可得至多有 $4d^2/\log^{40} d$ 条边 xy，其端点与 e 和 e' 的某个端点都相邻。最后，我们对满足 xy 且 $x \in N(u)$ 以及 $y \in N(u')$ 的边进行计数。由于我们已经计算过端点与 e 和 e' 的某个端点都相邻的边，不妨设 $x \in N(u) \setminus N(u')$，且 $y \in N(u') \setminus N(u)$。注意到 $A := N(u) \setminus N(u')$ 与 $B := N(u') \setminus N(u)$ 不相交，并且 $G[A, B]$ 不包含 $K_{t,t}$ 的副本。因此，通过将引理 2.4 分别应用于 $m、n \leq d$，并令我们的值 $t = o\left(\log d / \log\log d\right)$ 同时表示 s 和 t，这类边的数量至多为

$$(t-1)^{\frac{1}{t}} d^{2-\frac{1}{t}} + (t-1)d = (2+o(1))d^{2-\frac{1}{t}} \leq \frac{(2+o(1))d^2}{\log^{40} d} < \frac{d^2}{\log^{30} d}.$$

对 $\{u, v\} \times \{u', v'\}$ 中的所有顶点对重复这一论证，我们发现这种最后类型的边至多有 $4d^2/\log^{30} d$ 条。综合以上所有情况，

$$|N(e) \cap N(e')| < \frac{4d^2}{\log^{40} d} + \frac{d^2}{\log^{25} d} < \frac{\Delta}{\log^{20} \Delta},$$

即得所需结论。 ■

下面的引理将在我们选取集合 B^X 的情况下证明定理 1.7 的条件 (3a) 时发挥关键作用。

引理 3.3。设 $v \in V(G)$，且设 $vw \in E_1(v)$。如果 v 和 w 不是朋友，那么 vw 在 $E_3(v)$ 中至少与 $\frac{1}{2}\Delta - \frac{\Delta}{\log^{10}\Delta}$ 条边相邻。

证明。令 $N^* = N(w) \setminus N[v]$，并注意到 $N^* \subseteq N_2(v)$。由于 v和 w不是朋友，$|N^*| \geq d\left(1 - \frac{1}{\log^{40} d}\right)$。根据引理~~3.1~~，至少存在 $|N^*| - 4\log^{40t} d$个顶点 $v' \in N^*$不是 v的朋友。每个这样的顶点 v'都属于 $N_2(v)$，并且至少有 $d\left(1 - \frac{1}{\log^{40} d}\right)$个邻点 $w' \notin N[v]$。每一对这样的 $v'w'$ 都是 $E_3(v)$ 中的一条边。因此，所需边的数量至少为

$$\left(d\left(1 - \frac{1}{\log^{40} d}\right) - 4\log^{40t} d\right) \cdot d\left(1 - \frac{1}{\log^{40} d}\right) > d^2\left(1 - \frac{1}{\log^{30} d}\right)^2 > \frac{1}{2}\Delta - \frac{\Delta}{\log^{10}\Delta},$$

如所愿。 ■

以下引理将在我们利用所选的集合 B^X证明定理 3b的条件（1.7）时发挥关键作用。

引理 3.4。若 $e = vw$ 和 $e' = vw'$ 是 G 中的两条边，且 w 和 w' 不是朋友，则$|N(e) \cap N(e') \cap E_3(v)| \leq \frac{\Delta}{\text{对数}^{20}\Delta}$。

证明。固定 $xy \in N(e) \cap N(e') \cap E_3(v)$。由于 $xy \in E_3(v)$，我们有 $\{x, y\} \cap \{w, w', v\} = \emptyset$。此外，由于 $xy \in N(e) \cap N(e')$，我们有 $\{x, y\} \cap N(w) \neq \emptyset$和 $\{x, y\} \cap N(w') \neq \emptyset$。需要考虑两种情况：$\{x, y\} \cap N(w) \cap N(w') \neq \emptyset$和 $\{x, y\} \cap N(w) \cap N(w') = \emptyset$。

若 $\{x, y\} \cap N(w) \cap N(w') \neq \emptyset$，则 x或 y必为 w和 w'的公共邻点。由于 w和w'是陌生点，因此 $|N(w) \cap N(w')| \leq \frac{d}{\log^{40} d}$。于是，我们有

$$|\{xy : \{x, y\} \cap N(w) \cap N(w') \neq \emptyset\}| \leq \sum_{z \in N(w) \cap N(w')} \deg_G(z) \leq \frac{d^2}{\log^{40} d}.$$

若 $\{x, y\} \cap N(w) \cap N(w') = \emptyset$，则不失一般性，可设 $x \in N(w) \setminus N(w')$ 且$y \in N(w') \setminus N(w)$。我们有 $|N(w) \setminus N(w')| \leq d$以及 $|N(w') \setminus N(w)| \leq d$，因此，将引理 2.4 应用于一个禁用的$K_{t,t}$，并结合式 (2)，一端点在 $N(w) \setminus N(w')$、另一端点在 $N(w') \setminus N(w)$ 的边数小于

$$(t-1)^{1/t} d^{2-1/t} + (t-1)d \leq (2 + o(1))d^{2-1/t} < \frac{d^2}{\log^{40} d}.$$

因此，

$$|N(e) \cap N(e') \cap E_3(v)| \leq \frac{d^2}{\log^{40} d} + \frac{d^2}{\log^{40} d} < \frac{\Delta}{\log^{20}\Delta},$$

如所述。 ■

有了这些引理，我们现在证明 $L(G)^2$ 满足定理1.7的条件，其中 $\gamma = \frac{1}{2}$，$N = 1$，且取值 $\varepsilon > 0$。由于 $\Delta = 2d^2$，$L(G)^2$ 的最大度至多为 Δ。我们分别验证每个条件：

(1) 根据引理 3.2，对于每一对陌生点对 $e, e' \in E(G)$，$|N_{L(G)^2}(e) \cap N_{L(G)^2}(e')| < \frac{\Delta}{\log^{20}\Delta}$，因此条件（1）得到满足。(2) 接下来，我们检查条件 (2)。我们定义如下族 $\mathcal{X}$。首先，对每个顶点$v \in V(G)$，我们定义一个族 $\mathcal{Y}_v$。对每个 $w \in N(v)$，如果 v 和 w 是朋友，则将集合$X_{vw} = \{vw\}$加入 $\mathcal{Y}_v$。接下来，令 $N'(v) \subseteq N(v)$ 为 v的所有邻点中与 v不是朋友的顶点所构成的集合。利用引理 3.1，我们将 $N'(v)$ 划分为子集 $S_{v,1}, \ldots, S_{v,r}$，其中每个子集由互不相识的顶点组成，某个 $r < 5\log^{40t} d$。对每个 $S_{v,i}$，我们将集合 $X_{v,i} = \{vw : w \in S_{v,i}\}$ 加入 $\mathcal{Y}_v$。由于引理 3.1 表明，v至多有 $4\log^{40t} d$ 个朋友，因此集合数至多为 $4\log^{40t} d$

X_{vw} 在 $\mathcal{Y}_v$中，且集合数至多为$5\log^{40t} d$ 个$S_{v,\ i}$ 在 $\mathcal{Y}_v$中。总而言之， $\mathcal{Y}_v$ 至多有$9\log^{40t} d$ 个集合。我们令$\mathcal{X} = \bigcup_{v\in V\ (G)} \mathcal{Y}_v$。（出于技术原因，如果某个集合 X 在这个并集中出现多次，我们就令 X 在 $\mathcal{X}$中以重数计入。显然，如果多重集1.7 满足定理的条件 $\mathcal{X}$，那么将每个 $X \in \mathcal{X}$ 的重数设为1后，这些条件仍然成立。）

现在我们验证，对于所选择的 $\mathcal{X}$，条件 (2) 成立。由于每个集合 $X \in \mathcal{X}$ 都由与同一个顶点 $v \in V(G)$ 关联的边组成， $|X| \le d < \Delta^{\gamma}$，因此条件 (2a) 成立。接下来，对于每个 $e \in E(G)$，我们将 $F(e)$ 记为这样的顶点 $w \in V(G)$ 的集合：它们是 e 的某个端点的朋友；并定义 $\mathcal{X}_e = \bigcup_{w\in F(e)} \mathcal{Y}_w$。引理 3.1 表明， $|F(e)| \le 8\log^{40t} d$。此外，正如前面所观察到的，对于每个 $w \in F(e)$，我们有 $|\mathcal{Y}_w| \le 9\log^{40t} d$。因此，$|\mathcal{X}_e| \le 72\log^{80t} d < \Delta^{(1-\gamma)\varepsilon/12}$。由于 e 的所有朋友都属于 $\mathcal{X}_e$ 中的某个集合，条件 (2b) 成立。最后，对于端点为 u 和 v 的每个 $e \in E(G)$， e 仅属于 $\mathcal{Y}_u \cup \mathcal{Y}_v$ 中的集合。因此，由于 d 足够大， e 至多属于 $18\log^{40t} d < \Delta$ 个集合 $X \in \mathcal{X}$。于是，条件 (2c) 成立。

（3）最后，我们检验条件（3）成立。考虑一个集合 $X \in \mathcal{X}$ 满足 $|X| \ge 2$，并令$v \in V$（G）为满足 $X \in \mathcal{Y}_v$的唯一顶点。（这正是我们必须允许$\mathcal{X}$ 为多重集的地方，因为族 $\mathcal{Y}_v$ 可能并不互不相交。）令 $B^X = E_3$（v）。注意，由于 $|X| \ge 2$，必有 w 和 w' 对于任意不同的 vw, $vw' \in X$都是陌生点。因此，根据引理 3.3，每条边 $e \in X$ 至少有

$$d^2\left(1 - \frac{1}{\log^{400} d}\right)^2 > \Delta\left(\frac{1}{2} - \log^{-10}\Delta\right) \ge d_{L(G)^2}(e) - \left(1 - \gamma + \log^{-10}\Delta\right)\Delta$$

个邻点属于 B^X，因此条件（3a）成立。此外，根据引理 3.4，对于任意两条边e, $e' \in X$，有

$$|N(e) \cap N(e') \cap B^X| < \frac{\Delta}{\log^{20}\Delta},$$

因此条件（3b）成立。

因此，根据定理 1.7， $\chi_\ell(L(G)^2) \le (1+\varepsilon)$ $^{\Delta}$对数~~ Δ。~~ 由此可得

$$\chi'_s(G) \le (1+\varepsilon)\frac{2d^2}{\log(2d^2)} < (1+\varepsilon)\frac{d^2}{\log d}.$$

完成定理1.5的证明。

3.2. 定理1.10的证明

固定 $\varepsilon > 0$ 和 $t \ge 2$。设 G 是一个最大度为 d 且围长至少为 $2t+1$ 的图（我们将符号 Δ 保留为 $L(G)^t$的最大度上界）。不失一般性，我们假设 G 是 d-正则的。我们旨在证明，只要 d 相对于 ε 和 t 足够大， G 就存在一种距离-t 边着色，所用颜色数为$(1+\varepsilon)$ $^{d^2}$ $\log d$。为此，我们将用 ε的取值以及 $\gamma = \frac{1}{2}$和 $\Delta = 2d^t$，对 $L(G)^t$ 应用定理1.7 。为此，我们称两条边 $e, e' \in E(G)$为朋友，如果它们在 $L(G)^t$中至少有$^{\Delta}$ $\log^{20}\Delta$ 个公共邻居。

引理 3.5. 对于每一对不同的 $u, v \in V(G)$ $|N_{t-1}(u) \cap N_{t-1}(v)| < td^{t-2}$。

证明。 我们沿用 Kaiser 和 Kang 的方法 [30]。设 T 为由满足以下条件的顶点 w所诱导的树：存在一条长度至多为 $t-1$ 的路径连接 w 与 u，且该路径位于 $G-v$中。关于 G 的围长条件保证 T是一棵树。注意， T中的任意两个顶点之间的距离至多为 $2t-2$，且该距离是在 T中计算的。因此， $V(G) \setminus V(T)$ 的每个顶点在 T中至多有一个邻点。

现在，我们来计算长度至多为 $t-1$、以 v 为起点并以 V（T）为终点的路径数。长度至多为 $t-2$ 的路径数至多为 $1 +$（$d-1$） $+$（$d-1$）$^2 + \cdots +$（$d-1$）$^{t-2} <$

d^{t-2}。现在，考虑一条长度为 $t-1$ 的路径 P，它以 v 为起点并以 $V(T)$ 为终点。记 $V(P) = (v, v_1, v_2, \ldots\ldots, v_{t-1})$。由于 $v \notin V(T)$，顶点 v_i 中必有一个是 $V(T)$ 中的第一个。由于 $V(G) \setminus V(T)$ 中的每个顶点在 $V(T)$ 中至多有一个邻点，因此满足 v_i 是 $V(T)$ 中第一个的路径 P 至多有 d^{t-2} 条。取并集可知，以 v 为起点并以 $V(T)$ 为终点、长度至多为 $t-1$ 的路径数至多为 $(t-1)d^{t-2} + d^{t-2} = td^{t-2}$。■

下面的引理将在我们证明定理 1.7 的条件 (3a 时发挥关键作用，其中我们选择集合 B^X。

引理 3.6。设 $v, w \in V(G)$ 为邻点。那么，至少有 $d|N_{t-1}(w)| - d^t \log^{-12}(2d^t)$ 条边与 $E_{t+1}(v)$ 相邻，且这些边关联于 vw 中的 $L(G)^t$。

证明。记 $S = N_{t-1}(w) \setminus N_{t-1}(v)$。由引理 3.5，可得

$$|S| > |N_{t-1}(w)| - td^{t-2}.$$

对于每个 $x \in S$，若边 xy 关联于 x 和 $y \notin N_{t-1}(v)$，则 $xy \in E_{t+1}(v) \cap N_{L(G)^t}(vw)$。因此，我们要计算满足 $x \in S$ 且满足 $y \notin N_{t-1}(v)$ 的边 xy 的数量。为此，令 $T = N_{t-1}(v)$，并估计 $e(S,T)$。由引理 2.5，$e(S,T) = O(t(|S|+|T|)^{1+\frac{1}{t}}) = O(d^{t-\frac{1}{t}})$。因此，

$$|E_{t+1}(v) \cap N_{L(G)^t}(vw)| > d\left(|N_{t-1}(w)| - td^{t-2}\right) - O(d^{t-\frac{1}{t}}) > d|N_{t-1}(w)| - d^t \log^{-12}(2d^t$$

如所需。■

引理 3.7. 令 $uv, u'v' \in E(G)$，并令 $A \subseteq N_{L(G)^t}(uv) \cap N_{L(G)^t}(u'v')$ 为任意对象。定义

$$A_1 := \bigcup_{(w,w') \in \{u,v\} \times \{u',v'\}} \left\{xy \in A : x \in N_{t-1}(w) \cap N_{t-1}(w')\right\}.$$

则，$|A| < |A_1| + \frac{d^t}{\text{对数}^{24} d}$。

证明。我们再定义两个边集 $A_2, A_3 \subseteq A$，使得 $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$。令

$$A_2 := \bigcup_{\substack{w \in \{u,v,u',v'\} \\ 1 \le i \le t-2}} \{xy \in A : x \in N_i(w)\}$$

表示 e 的集合　在 A 中，端点距离 $t-2$ 以内的边，且该端点到 u, v, u', v' 之一。我们定义

$$A_3 := \bigcup_{(w,w') \in \{u,v\} \times \{u',v'\}} \{xy \in A : x \in N_{t-1}(w) \text{ and } y \in N_{t-1}(w')\}.$$

显然，$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$。

由于 G 是 d-正则的，对于给定的顶点 $w \in V(G)$，$\bigcup_{1 \le i \le t-2} N_i(w)$ 中的顶点数至多为 d^{t-2}。因此，端点属于 $\bigcup_{1 \le i \le t-2} N_i(w)$ 的边数至多为 d^{t-1}，这意味着 $|A_2| \le 4d^{t-1}$。

为了估计 $|A_3|$，注意到 A_3 中的每条边的两个端点都在 $N_{t-1}(w) \cup N_{t-1}(w')$ 中。由于 $|N_{t-1}(w) \cup N_{t-1}(w')| < 2d^{t-1}$，引理 2.5 推出 $|A_3| = O(td^{t-1/t})$。因此，对于充分大的 d，$|A| < |A_1| + |A_2| + |A_3| < |A_1| + \frac{d^t}{\log^{24} d}$。■

引理 3.8。如果 e 和 e' 不关联，那么它们就是陌生点。

证明。假设 e 和 e' 是朋友。那么，

$$|N_{L(G)^t}(e) \cap N_{L(G)^t}(e')| > \frac{\Delta}{\log^{20} \Delta} > \frac{d^t}{\log^{21} d}.$$

令 $A = N_{L(G)^t}(e) \cap N_{L(G)^t}(e')$，由上可知，对于关于 A 的引理 3.7 中定义的集合 A_1，$|A_1| > \frac{d^t}{2 \log^{21} d}$。然而，根据引理 3.5，$|A_1| = O(td^{t-1})$，这就产生了矛盾。■

下面的引理将在我们证明定理 1.7 中的条件（3b）时发挥关键作用，其中我们选取集合 B^X。

引理 3.9。令 $v \in V(G)$，并令 $w, w' \in N(v)$。那么，

$$|N_{L(G)^t}(vw) \cap N_{L(G)^t}(vw') \cap E_{t+1}(v)| < \frac{2d^t}{\log^{24} d}.$$

证明。对于 $A = N_{L(G)^t}(vw) \cap N_{L(G)^t}(vw') \cap E_{t+1}(v)$，令

$$A_1 := \{xy \in A : x \in N_{t-1}(w) \cap N_{t-1}(w')\}.$$

由引理 3.5，$|A_1| < td^{t-1}$。此外，根据距离的定义，$E_{t+1}(v)$ 的任何一条边的端点都不在 $N_{t-1}(v)$ 中。因此，由于 $A \subseteq E_{t+1}(v)$，此处定义的集合 A_1 与引理 中定义的集合 A_1定义3.7相同，因此

$$|A| < |A_1| + \frac{d^t}{\log^{24} d} < \frac{2d^t}{\log^{24} d},$$

正如所需。 ■

有了这些引理，我们现在证明 $L(G)^t$ 满足定理 1.7 的条件，其中$\gamma = \frac{1}{2}$，$N = 1$，以及我们取的值$\varepsilon > 0$。由于 $\Delta = 2d^2$，$L(G)^2$ 的最大度至多为 Δ。我们分别验证每个条件：

(1) 我们定义了对称朋友关系 $\mathcal{F} \subseteq E(G) \times E(G)$，使得当且仅当两条边在 $L(G)^t$ 中至多有 $\Delta/\log^{20}\Delta$ 个公共邻点时，它们互为陌生点，因此条件 (1) 成立。(2) 接下来，我们检查条件 (2)。我们定义如下一个族 $\mathcal{X}$。对于每个 $v \in V(G)$，定义集合 X_v，它由所有与 v 关联的边组成。注意到 $|X_v| = d < \Delta^\gamma$，因此条件 (2a) 成立。接下来，对于每个以 u 和 v 为端点的 $e \in E(G)$，e 的所有朋友都属于大小为 2 的族 $\{X_u, X_v\}$；因此，条件 (2b) 成立。最后，对于每个以 u 和 v 为端点的 $e \in E(G)$，e 不属于 $\mathcal{X}$ 中的任何集合，除了 X_u 和 X_v；因此，条件 (2c) 也成立。(3) 最后，我们检查条件 (3) 是否成立。对于每个集合 $X_v \in \mathcal{X}$，令 $B^{X_v} = E_{t+1}(v)$。根据引理 3.6，形式为 uw 的每条边 $e \in X_v$ 在 B^X 中至少有 $d|N_{t-1}(w)| - d^t\log^{-12}(2d^t)$ 个邻点。由于 $d_{L(G)^t}(e) < d|N_{t-1}(w)| + d^t$，我们有

$$\begin{aligned} d_{L(G)^t}(e) - \Delta(1 - \gamma + \log^{-10}\Delta) &< d|N_{t-1}(w)| - \frac{\Delta}{\log^{10}\Delta} \\ &< d|N_{t-1}(w)| - d^t \log^{-12}(2d^t), \end{aligned}$$

这表明条件（3a）成立。此外，对于任意一对 w，$w' \in N(v)$，引理 3.6 表明 vw 和 vw' 在 B^X中至多有 $\frac{\Delta}{\log^{24} d} < \frac{\Delta}{\log^{20}\Delta}$ 个公共邻点。因此，条件（3b）成立。

因此，根据定理 1.7，$\chi_\ell(L(G)^t) \le (1+\varepsilon)\frac{\Delta}{\log \Delta}$。由此，$G$ 存在一种适当的距离-t边着色，其颜色数至多为

$$(1+\varepsilon)\frac{2d^t}{\log(2d^t)} < (1+\varepsilon)\frac{2d^t}{t\log d}$$

颜色，从而完成定理 1.5的证明。

3.3. 定理的证明1.11

我们考虑一个 d-正则、具有 n 个顶点的图，其中 $n \geq d^{2t}$，且第二特征值为 $\lambda \leq C\sqrt{d}$，这里 $C \geq 2$ 是某个常数。我们旨在利用定理 1.7 证明图 $L(G)^t$ 存在一个正常着色，所用颜色数为 $(1+o(1))\frac{2d^t}{t}\log d$。与定理 1.10 的证明类似，我们令 $\Delta = 2d^t$，并注意到 $L(G)^t$ 的最大度至多为 Δ。我们旨在对任意取值的 $\varepsilon > 0$、$\gamma = \frac{1}{2}$ 和 $\Delta = 2d^t$，将定理 1.7 应用于 $L(G)^t$。

在考虑 $L(G)^t$之前，我们先观察 G的一些性质。由于 G 是谱扩张图，因此可以利用扩展混合引理推导出 G 的许多重要性质：

引理 *3.10*（[24, 引理 2.5]）。设 $S, T \subseteq V(G)$，令 $e(S,T)$表示满足 $u \in S$, $v \in T$的有序对(u,v)的数量，且 $uv \in E(G)$。那么，$\left|e(S,T) - \frac{d}{n}|S||T|\right| \leq \sqrt{\lambda|S||T|}$。

我们经常使用扩展混合引理的以下较弱推论。

引理 3.11. 设 $S, T \subseteq V(G)$，并假设 $|S||T| \leq d^{4t-2}$。那么，$e(S,T) < 2\lambda\sqrt{|S||T|}$。

证明。由扩展混合引理（引理 3.10），

$$e(S,T) \leq \sqrt{|S||T|}\left(\frac{d}{n}\sqrt{|S||T|} + \lambda\right).$$

由于 $n \geq d^{2t}$ 且 $|S||T| \leq d^{4t-2}$，我们有 $\frac{d}{n}\sqrt{|S||T|} \leq 1 < \lambda$。因此，$e(S,T) < 2\lambda\sqrt{|S||T|}$。■

我们称 $V(G)$ 中的两个顶点为朋友，如果它们在 G^t 中的余度至少为 d^t 对数^{25} d。下面的引理表明，每个 $v \in V(G)$ 的朋友都很少。

引理 3.12。每个 $v \in V(G)$ 至多有 $4C^{2t}$对数$^{60}(d^t)$ 个朋友。

证明。考虑 v的一个朋友 w。由于 G 中至多有 $2d^{t-1}$ 个顶点与 v 或 w的距离不超过 $t-1$，因此 G 中至少有 $d^t \log^{25} d - 2d^{t-1} > d^t \log^{30} d =: h$ 个顶点与 v 和 w的距离都恰好为 t。现在，令 A 为 G的邻接矩阵。令 $G(A^t)$ 为邻接矩阵等于 A^t的多重图（可能含有自环和平行边）。换言之，连接两个顶点 u、$u' \in V(G(A^t))$ 的边数 $= V(G)$ 等于 G 中从 u 到 u'长度恰好为 t 的游走数。我们用 N 表示图 $G(A^t)$ 中 v 的邻域，并注意到 $|N| \leq d^t$。我们观察到，对于 v的每个朋友 w，w 在图 $G(A^t)$ 中于 N 内至少有 h 个邻点。

注意，$G(A^t)$ 是 d^t-正则的，其谱等于 A 的谱的 t 次幂。此外，根据佩龙-弗罗贝尼乌斯定理，如果 G 不是二分图，或者 t 是奇数，则 $G(A^t)$ 的最大特征值为 d^t，而 $G(A^t)$ 的第二大特征值为 $\lambda^t \leq C^t d^{t/2}$。如果 G 是二分图且 t 是偶数，则 G^t 包含两个连通分量，每个连通分量的最大特征值为 d^t，第二大特征值为 $\lambda^t \leq C^t d^{t/2}$。

现在，令 $F \subseteq V(G)$ 为与 v 互为朋友的顶点集。由于每个 $w \in F$ 通过 $G(A^t)$ 在 F 中至少有 h 个邻点，因此 $G(A^t)$ 中一个端点位于 F、另一个端点位于N的边数（按重数计）至少为 $h|F|$。根据扩展混合引理，

$$h|F| \leq e(F,N) \leq \frac{d^t|N||F|}{n} + \lambda^t\sqrt{|N||F|} \leq \frac{d^{2t}|F|}{n} + C^t d^t\sqrt{|F|}.$$

由于每个 $w \in F$ 在 $G(A^t)$ 中到 v 的距离至多为 2，$\sqrt{|F|} \leq d^t$，因此

$$h|F| \leq \frac{d^{3t}\sqrt{|F|}}{n} + C^t d^t\sqrt{|F|} < 2C^t d^t\sqrt{|F|},$$

其中我们用到了 $n \geq d^{2t}$这一事实。重新整理可得

$$|F| \leq \frac{4C^{2t}d^{2t}}{h^2} = 4C^{2t}\log^{60} d,$$

如所需。 ■

引理 3.13. 若 $v, w \in V(G)$ 是陌生点，则 $|N_{t-1}(v) \cap N_{t-1}(w)| < d^{t-1}$ 对数^{24} d。

证明。 记 $S = N_{t-1}(v) \cap N_{t-1}(w)$。令 $T = N_G(S)$，于是 $e(S,T) = d|S|$。由引理 3.11，

$$d|S| = e(S,T) < 2\lambda\sqrt{|S||T|}.$$

重新整理可得

$$|S| < \frac{4\lambda^2|T|}{d^2} = \frac{4C^2|T|}{d}.$$

由于 $T \subseteq N_{G^t}(v) \cap N_{G^t}(w)$，且 v和 w是陌生点，$|T| \leq d^t$ 对数^{25} d。因此，

$$|S| < \frac{4C^2 d^{t-1}}{\log^{25} d} < \frac{d^{t-1}}{\log^{24} d},$$

当 d 充分大时。 ■

引理 3.14. 对于每个 $v \in V(G)$ 以及 $i \in \{1, \ldots, t\}$, $|N_i(v)| \geq d^i/(5C^2)^{i-1}$。

证明。我们用归纳法证明更强的命题 $|N_i(v)| \geq \frac{d}{5C^2}|N_{i-1}(v)|$，其中 $i \in [t]$, 且$N_0(v) = \{v\}$。当 $i = 1$ 时，基例显然成立，因为 G 是 d-正则的。对于 $2 \leq i \leq t$，令 $S = N_{i-1}(v)$ 且 $T = \{v\} \cup N_1(v) \cup \cdots \cup N_i(v)$，则有 $e(S,T) = |S|d$。因此，由引理 3.11 可得

$$|S|d = e(S,T) < 2\lambda\sqrt{|S||T|} \implies |T| \geq \frac{|S|d}{4C^2}.$$

由归纳假设，当 $2 \leq j \leq i-1$ 且 d充分大时，$|N_j(v)| > 2|N_{j-1}(v)|$，这意味着

$$|T| < |N_i(v)| + 2|N_{i-1}(v)| = |N_i(v)| + 2|S|.$$

因此，

$$|N_i(v)| > |T| - 2|S| \geq \left(\frac{d}{4C^2} - 2\right)|S| > \frac{d}{5C^2}|S|,$$

如所需。 ■

有了上述结果，现在让我们转向本章节的主要目标：应用定理 1.7 于 $L(G)^t$，以证明定理 1.11。首先，我们估计图 $L(G)^t$中边$vw \in E(G)$ 的度。

引理 3.15。对于每个 $vw \in E(G)$，$d_{L(G)^t}(vw) < d|N_{t-1}(v)| + d^t + O(d^{t-1})$。

证明。 图 $N_{L(G)^t}(vw)$ 中的每条边都与某个 $1 \leq i \leq t-1$ 的 $N_i(v)$ 或 $N_i(w)$ 关联。由于$\left|\bigcup_{i=1}^{t-2} N_i(v) \cup N_i(w)\right| = O(d^{t-2})$，与 $N_i(v)$ 或 $N_i(w)$ 关联的边数对于 $i \leq t-2$ 而言为$O(d^{t-1})$。因此，

$$d(vw) \leq d|N_{t-1}(v)| + d|N_{t-1}(w)| + O(d^{t-1}) < d|N_{t-1}(v)| + d^t + O(d^{t-1}),$$

完成证明。 ■

以下引理将在我们证明定理 3a 的条件 1.7 时发挥关键作用，其中我们选择的集合为 B^X。

引理 3.16. 设 $vw \in E(G)$。若 v和 w是陌生点，则至少有 $d|N_{t-1}(w)| - d^t\log^{-12}(2d^t)$条边与 $E_{t+1}(v)$ 中的 vw 相邻。

证明。记 $S = N_{t-1}(w) \setminus N_{t-1}(v)$。根据引理 3.13，$|S| > |N_{t-1}(w)| - d^{t-1}\log^{24} d$。对于每个 $x \in S$，若边 xy 满足 $y \notin N_{t-1}(v)$，则 $xy \in E_{t+1}(v) \cap N_{L(G)^t}(vw)$。接下来，我们估计满足 $x \in S$ 且 $y \notin N_{t-1}(v)$的边 xy 的数量。为此，令 $T = N_{t-1}(v)$，并应用引理 3.11，得到

$$e(S,T) < 2\lambda\sqrt{|S||T|} \le 2C\sqrt{d}\cdot d^{t-1} < d^{t-\frac{1}{3}}.$$

由此可得

$$|E_{t+1}(v) \cap N_{L(G)^t}(vw)| > d\left(|N_{t-1}(w)| - \frac{d^{t-1}}{\log^{24} d}\right) - d^{t-\frac{1}{3}} > d|N_{t-1}(w)| - \frac{d^t}{\log^{12}(2d^t)},$$

正如所需。 ■

引理 3.17. 设 $uv, u'v' \in E(G)$ 以及 $A \subseteq N_{L(G)^t}(uv) \cap N_{L(G)^t}(u'v')$ 为任意对象。定义

$$A_1 := \bigcup_{(w,w')\in\{u,v\}\times\{u',v'\}} \left\{xy \in A : x \in N_{t-1}(w) \cap N_{t-1}(w')\right\}.$$

那么，$|A| < |A_1| + d^t$ 对数^{24} d。

证明。 我们定义另外两个边集 $A_2, A_3 \subseteq A$，使得 $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$。令

$$A_2 := \bigcup_{\substack{w\in\{u,v,u',v'\}\\ 1\le i\le t-2}} \{xy \in A : x \in N_i(w)\}$$

表示 e 的集合 在 A 中，端点到 u 中某个顶点的距离不超过 $t-2$ 的边，v，u'，v'。我们定义

$$A_3 := \bigcup_{(w,w')\in\{u,v\}\times\{u',v'\}} \{xy \in A : x \in N_{t-1}(w) \text{ and } y \in N_{t-1}(w')\}.$$

显然，$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$。

由于 G 是 d-正则的，对于给定的顶点 $w \in V(G)$，$\bigcup_{1\le i\le t-2} N_i(w)$ 中的顶点数至多为 d^{t-2}。因此，端点位于 $\bigcup_{1\le i\le t-2} N_i(w)$ 中的边数至多为 d^{t-1}，这意味着 $|A_2| \le 4d^{t-1}$。

为了估计 $|A_3|$，我们令 $S = N_{t-1}(w)$，$T = N_{t-1}(w')$，并注意到 $|S|$，$|T| < d^{t-1}$。由引理3.11，可得

$$|A_3| \le e(S,T) \le 2\lambda\sqrt{|S||T|} < 2C\sqrt{d}\cdot d^{t-1} < d^{t-1/3}.$$

因此，对于充分大的 d，$|A| \le |A_1| + |A_2| + |A_3| < |A_1| + d^t$ 对数^{24} d。 ■

以下引理将在我们使用集合 B^X 来证明定理 1.7 的条件（3b）时发挥关键作用。

引理 3.18. 设 $v \in V(G)$，且 $w, w' \in N(v)$ 是陌生点。那么，

$$|N_{L(G)^t}(vw) \cap N_{L(G)^t}(vw') \cap E_{t+1}(v)| < \frac{2d^t}{\log^{24} d}.$$

证明。 对于 $A = N_{L(G)^t}(vw) \cap N_{L(G)^t}(vw') \cap E_{t+1}(v)$，令

$$A_1 = \left\{xy \in A : x \in N_{t-1}(w) \cap N_{t-1}(w')\right\}.$$

由于 w 和 w' 是陌生点，引理 3.13 说明 $|A_1| < d^t \log^{24} d$。此外，根据距离的定义，$E_{t+1}(v)$ 的边均没有端点落在 $N_{t-1}(v)$中。因此，由于 $A \subseteq E_{t+1}(v)$，此处定义的集合 A_1与引理 3.17 中定义的集合 A_1 相同，故

$$|A| < |A_1| + \frac{d^t}{\log^{24} d} < \frac{2d^t}{\log^{24} d},$$

正如所需。 ■

有了这些引理，我们来检验图 $L(G)^t$ 满足$N = 1$、 $\Delta = 2d^t$和 $\gamma = \frac{1}{2}$ 的条件，从而应用定理 1.5

(1) 回顾一下，若图 G 中的两个顶点至少有 $d^t \log^{25} d$ 个公共邻居，则它们互为朋友。我们定义对称朋友关系 $\mathcal{F} \subseteq E(G) \times E(G)$，使得两条边 e, e' 互为朋友，当且仅当 e 的一个端点 v 是 G 中 v' 的一个端点 e' 的朋友。现在，考虑 G 中两条陌生边 $e = uv$ 和 $e' = u'v'$。根据引理 3.17， $L(G)^t$ 中 e 和 e' 的公共邻居数小于 $|A_1| + d^t \log^{24} d$，其中

$$A_1 := \bigcup_{(w,w') \in \{u,v\} \times \{u',v'\}} \{xy \in A : x \in N_{t-1}(w) \cap N_{t-1}(w')\}.$$

由于 e和 e'互为陌生点，引理3.13 推出 $|A_1| < 4d^t \log^{24} d$。因此， e和 e'在 $L(G)^t$中的公共邻居数小于$5d^t \log^{24} d < \Delta \log^{20} \Delta$，条件（1）成立。

(2) 接下来，我们验证条件 (2)。我们以类似于定理 1.5 的证明的方式定义族 $\mathcal{X}$。对于每个 $v \in V(G)$，我们定义一个族 $\mathcal{Y}_v$。对于每个朋友 $w \in N(v)$，我们将一个集合 $X_{vw} = \{vw\}$ 加入 $\mathcal{Y}_v$。接下来，我们使用引理 3.12 将 v 的陌生邻点集合 $N'(v) \subseteq N(v)$ 划分为子集 $S_{v,1}, \ldots, S_{v,r}$，其中每个子集由互不相识的顶点组成，某个值$r < 5C^{2t}\log^{60}(d^t)$，并将集合 $\{vw : w \in S_{v,i}\}_{i=1}^{r}$ 加入 $\mathcal{Y}_v$。由于引理 3.12 表明 v 至多有 $4C^{2t}\log^{60}(d^t)$ 个朋友，因此 $|\mathcal{Y}_v| < 9C^{2t}\log 60(d^t)$。我们令 $\mathcal{X} = \bigcup_{v \in V(G)} \mathcal{Y}_v$（并且与定理 1.5 的证明一样，我们将 $\mathcal{X}$ 视为一个多重集）。

现在验证对于我们选择的 $\mathcal{X}$，条件 (2) 成立。由于每个 $X \in \mathcal{X}$ 都由与同一个顶点 $v \in V(G)$ 关联的边组成， $|X| \le d < \Delta^\gamma$，因此条件 (2a) 成立。接下来，对于每个 $e \in E(G)$，我们将 $F(e)$ 记作由 $w \in V(G)$ 组成的顶点集，其中这些顶点都是 e 某个端点的朋友，并定义 $\mathcal{X}_e = \bigcup_{w \in F(e)} \mathcal{Y}_w$。引理 3.12 意味着 $|F(e)| \le 8C^{2t}\log^{60}(d^t)$。此外，正如前面所述，对于每个 $w \in F(e)$，都有 $|\mathcal{Y}_w| < 9C^{2t}\log 60(d^t)$。因此，当 d 足够大时， $|\mathcal{X}_e| \le 72C^{4t}\log^{120}(d^t) < \Delta^{(1-\gamma)\varepsilon/12}$。由于 e 的所有朋友都属于 $\mathcal{X}_e$ 中的某个集合，条件 (2b) 成立。最后，对于每个端点为 u 和 v 的 $e \in E(G)$， e 只属于 $\mathcal{Y}_u \cup \mathcal{Y}_v$ 中的集合。因此，当 d 足够大时， e 至多属于 $18C^{2t}\log^{60}(d^t)$ 个集合 $X \in \mathcal{X}$。由此，条件 (2c) 成立。

(3) 最后，我们检验条件（3）成立。考虑一个集合 $X \in \mathcal{X}$，其中 $|X| \ge 2$，并令 $v \in V(G)$ 为满足 $X \in \mathcal{Y}_v$ 的唯一顶点。令 $B^X = E_{t+1}(v)$。由引理 3.15 和 3.16，每条边 $vw \in X$ 至少有

$$d|N_{t-1}(w)| - d^t \log^{-12}(2d^t) > d_{L(G)^t}(vw) - (1 - \gamma + \log^{-10}\Delta)\Delta$$

个在 B^X 中经由 $L(G)^t$ 的邻点，因此条件（3a）成立。此外，由于 $|X| \ge 2$，对于任意不同的 w 和 w'，必有 $vw, vw' \in X$ 为陌生点。因此，对于任意两条边 $e, e' \in X$，引理 3.18 表明

$$|N_{L(G)^t}(e) \cap N_{L(G)^t}(e') \cap B^X| < \frac{2d^t}{\log^{24} d} < \frac{\Delta}{\log^{20}\Delta},$$

，从而验证了条件（3b）。

因此，根据定理 1.5, $\chi_\ell(L(G)^t) \le (1+\varepsilon)\Delta \log \Delta$。由此， G 存在一种恰当的距离-t边着色，至多使用

$$(1+\varepsilon)\frac{2d^t}{\log(2d^t)} < (1+\varepsilon)\frac{2d^t}{t\log d}$$

颜色，完成定理1.11的证明。

4. 定理1.7的证明

为方便读者，我们重述这一结果：

定理（定理1.7的重述）。设 γ，$\varepsilon \in (0,1)$ 且 $N \in \mathbb{N}$。那么，存在 $\Delta_0 \in \mathbb{N}$使得以下结论成立。设 G 是一个最大度至多为 $\Delta \geq \Delta_0$ 的图，带有一个对称自反朋友关系 $\mathcal{F} \subseteq V(G) \times V(G)$，并满足以下条件：

(1) 任意两个陌生点至多有$^{\Delta}$ $log^{20}\Delta$ 个公共邻点。*(2)* 存在一个由子集 $X \subseteq V(G)$构成的族 $\mathcal{X}$，满足以下条件：*(a)* 每个 $X \in \mathcal{X}$ 都满足 $|X| \leq \Delta^{\gamma}$；*(b)* 对每个 $v \in V(G)$，存在一个大小至多为 $\Delta^{(1-\gamma)\varepsilon/12}$ 的族 $\mathcal{X}_v \subseteq \mathcal{X}$，使得 v 的所有朋友都属于 $\bigcup_{X\in\mathcal{X}_v} X$；*(c)* 每个 $v \in V(G)$至多属于 Δ^N 个集合 $X \in \mathcal{X}$。*(3)* 对每个至少有两个顶点的 $X \in \mathcal{X}$，存在一个集合 $B^X \subseteq V(G)$，满足以下条件：*(a)* 每个 $v \in X$ 在 B^X中至少有 $d(v) - \Delta(1-\gamma+log^{-10}\Delta)$个邻点；*(b)* 对每一对不同的友点 u、$v \in X$，u和 v 在 B^X中至多有$^{\Delta}$ $log^{20}\Delta$ 个公共邻点。

那么，$\chi_\ell(G) \leq (1+\varepsilon)$ $^{\Delta}$对数 Δ。

我们将反复应用 Kim变体的浪费型着色过程（该过程的非正式说明见第 5 页），以证明定理 1.7。初始时，每个顶点 $v \in V(G)$ 都有一个包含 k 种颜色的颜色列表 $L_1(v)$，其中 $k = (1+\varepsilon)$ $^{\Delta}\log\Delta$。每次迭代后，我们都会更新每个未着色顶点 $v \in V(G)$ 的颜色列表 $L_i(v)$，使得每种颜色 $c \in L_i(v)$ 都满足：没有 $u \in N(v)$ 被着色c。此外，对于每个未着色顶点 $v \in V(G)$ 和 $c \in L_i(v)$，我们还会跟踪集合 $T_i(v,c) \subseteq N(v)$。该集合包含满足 $c \in L_i(u)$ 的未着色邻点 $u \in N(v)$。令 $t_i(v,c) = |T_i(v,c)|$。我们证明，经过足够多次迭代后，会达到这样一个阶段：存在满足 $\ell \geq 8d$ 的整数 $d, \ell \in \mathbb{N}$，使得对每个未着色顶点 $v \in V(G)$，都有 $|L_i(v)| \geq \ell$；并且对每个未着色顶点 $v \in V(G)$ 和 $c \in L_i(v)$，都有 $t_i(v,c) \leq d$。此时，我们可以将命题 1.6 应用于由未着色顶点诱导的 G 的子图，以及颜色列表赋值 $L_i(\cdot)$。

在正式描述我们的着色过程之前，我们先引入几个相关参数。首先，固定 $K := \frac{\varepsilon}{1000}$ 和 $\eta := \frac{K}{\log\Delta}$。然后，对于每个 $i \geq 1$，我们定义：

$$\begin{aligned}
L_1 &= (1+\varepsilon)\frac{\Delta}{\log\Delta} = k,\\
T_1 &= \Delta,\\
\mathrm{Keep}_i &= \left(1-\eta L_i^{-1}\right)^{T_i},\\
L_{i+1} &= L_i \,\mathrm{Keep}_i \left(1-\frac{1}{\log^2\Delta}\right),\\
T_{i+1} &= T_i \,\mathrm{Keep}_i \,(1-\eta\,\mathrm{Keep}_i)\left(1+\frac{1}{\log^2\Delta}\right).
\end{aligned}$$

注意，这些值都有明确定义，因为 T_1 和 L_1 定义 Keep_1，而后者又定义 T_2 和 L_2，它们再定义 Keep_2，依此类推。

现在正式陈述我们的着色过程。对于每个 $i \geq 1$，我们执行以下两部分过程：

请注意，我们区分为顶点 c 分配颜色 v 与为顶点着色 v（使用颜色 c （分别对应算法（N3）和（N4））4.1 ）。在一次迭代过程中，一个顶点

算法 4.1 Nibble（第 i 次迭代）

（N1）以概率 η独立地激活每个未着色的 $v \in V(G)$。（N2）对于每个未着色的 $v \in V(G)$，复制 $L_{i+1}(v) = L_i(v)$。（N3）对于每个已激活的顶点 v，均匀随机地为 v 分配颜色 $c \in L_i(v)$，并从 $L_{i+1}(u)$ 中删除c，对所有 $u \in T_i(v,\ c)$ 均如此。（N4）对于每个已激活且被分配颜色 c 的顶点 v，如果未从 $L_{i+1}(v)$中删除 c，则使用 c为v 着色。（N5）对于每个未着色的 $v \in V(G)$ 和 $c \in L_i(v)$，执行一次独立的均衡硬币翻转，通过该操作（$v,\ c$）以概率

$$\mathrm{Eq}_i(v,c) := \min\left\{1,\ \left(1-\eta L_i^{-1}\right)^{T_i - t_i(v,c)}\right\}.$$

如果 (v,c) 未能存活，则从 $L_{i+1}(v)$ 中删除 c。

算法 4.2 Trim（第 i 次迭代）

(T1) 对每个未着色的 $v \in V(G)$，从 $L_{i+1}(v)$ 中任意删除 $\max\{|L_{i+1}(v)| - L_{i+1}, 0\}$ 个颜色。(T2) 对每条满足 $L_{i+1}(u) \cap L_{i+1}(v) = \emptyset$ 的边 $uv \in E(G)$，从 $E(G)$ 中删除边 uv。

v 若被着上颜色 c，则必然被分配颜色 c；但被分配颜色 c 的顶点 v，未必被着上颜色 c（如果另一个顶点 $u \in N(v)$ 也被分配了颜色 c）。我们将第 i 次迭代期间计算出的部分着色记为 ϕ_i。

前面定义的量 T_i 和 L_i，在整个过程中各次迭代期间分别近似表示颜色度和列表大小。我们将看到，在每次迭代 i 之前，对于每个未着色的 $v \in V(G)$ 和 $c \in L_i(v)$，都有 $|L_i(v)| \geq L_i$ 且 $t_i(v,c) \leq T_i$。此外，我们很快将看到，对于某个整数 $i^* \geq 1$，$1 \ll T_{i^*} \leq \frac{1}{8}L_{i^*}$。因此，如果在整个过程中每次迭代期间，不等式 $|L_i(v)| \geq L_i$ 和 $t_i(v,c) \leq T_i$ 均成立，那么经过 i^* 次迭代后，我们将达到这样一种情形：可以应用命题 1.6，将 $V(G)$ 的部分着色扩展为 G 的一个适当的 L-着色。如第 1.3 节所述，要证明列表大小 $|L_i(v)|$集中在其期望值附近相当直接，但要证明颜色度$t_i(v,c)$ 从上方集中则很困难。为此，我们需要引入若干额外参数：

- 对每个 $X \in \mathcal{X}$ 和 $c \in \bigcup_{v \in X} L(v)$，令

$$X_i(c) = \{v \in X : v \text{ is uncolored and } c \in L_i(v)\}.$$

- 对每个大小至少为 2 的 $X \in \mathcal{X}$、$v \in X$ 和 $c \in L(v)$，令

$$B_i^X(v,c) = T_i(v,c) \cap B^X.$$

- 对每个陌生点对 $u,\ v \in V(G)$ 以及 $c \in L(u) \cap L(v)$，定义

$$Q_i(u,v,c) = T_i(u,c) \cap T_i(v,c).$$

- 对每个 $X \in \mathcal{X}$ 和不同的朋友顶点对 $u,\ v \in X$，定义

$$Q_i^X(u,v,c) = B_i^X(u,c) \cap B_i^X(v,c) = T_i(u,c) \cap T_i(v,c) \cap B^X.$$

我们记 $q_i(u,v,c) = |Q_i(u,v,c)|$，$q_i^X(u,v,c) = |Q_i^X(u,v,c)|$，以及 $b_i^X(v,c) = |B_i^X(v,c)|$。

我们还为 $i \geq 1$ 定义了量 B_i、 Q_i 和 X_i （这些量的用途很快就会明了）：

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{\gamma\Delta}{10\log^{18}\Delta}, \\ Q_{i+1} &= Q_i \operatorname{Keep}_i (1-\eta \operatorname{Keep}_i)\left(1+\frac{1}{\log^2\Delta}\right), \\ X_i &= T_i^{\gamma}, \\ B_1 &= \Delta(\gamma - \log^{-2}\Delta), \\ B_{i+1} &= B_i \operatorname{Keep}_i (1-\eta \operatorname{Keep}_i)\left(1+\frac{1}{\log^2\Delta}\right). \end{aligned}$$

目标是证明以下性质在整个轻咬法过程中始终成立。

定义 4.1 （性质 $P(i)$）。考虑部分着色 $\cup_{j<i}\phi_j$。以下列表包含未着色子图及其列表 $L_i(\cdot)$所需的结构性质。

（P1）对于每个未着色 $v \in V(G)$， $|L_i(v)| = L_i$。 （P2）对于每个未着色 $v \in V(G)$ 和 $c \in L_i(v)$， $t_i(v,c) \leq T_i$。 （P3）对于每个陌生点对 $u, v \in V(G)$ 以及颜色 $c \in L_i(u) \cap L_i(v)$， $q_i(u,v,c) \leq Q_i$。 （P4）对于每个 $X \in \mathcal{X}$、每个不同的朋友顶点对 $u, v \in X$ 以及颜色 $c \in L_i(u) \cap L_i(v)$， $q_i^X(u,v,c) \leq Q_i$。 （P5）对于每个 $X \in \mathcal{X}$ 以及颜色 c, $|X_i(c)| \leq X_i$。 （P6）对于每个大小至少为 2 的 $X \in \mathcal{X}$、 $v \in X$ 和 $c \in L_i(v)$， $t_i(v,c) - b_i^X(v,c) \leq T_i - B_i$。

注意，若性质 $P(i)$ 成立，则有等式 $\mathrm{Eq}_i(v,c) = (1-\eta L_i^{-1})^{T_i - t_{i(v,c)}}$。下面先证明 $P(1)$ 成立。

引理 4.2. $P(1)$ 成立。

证明。 我们分别检验 $P(1)$ 的六个条件。

- 对所有 $v \in V(G)$， $|L_1(v)| = k = (1+\varepsilon)^{\Delta_{\text{对数}\Delta}} = L_1$。
- 对每个 $v \in V(G)$ 和 $c \in L_1(v)$， $t_1(v,c) \leq |N(v)| = \Delta = T_1$。
- 对每个陌生点对 u, v 以及颜色 $c \in L_1(u) \cap L_1(v)$，根据陌生点的定义可知， $q_1(u,v,c) \leq |N(u) \cap N(v)| \leq \Delta_{\text{对数}^{20}\Delta} < Q_1$。
- 对每个 $X \in \mathcal{X}$、互不相同的对 u， $v \in X$ 以及 $c \in L_1(u) \cap L_1(v)$，根据我们的假设可知 $q_1^X(u, v, c) \leq |N(u) \cap N(v) \cap B^X| \leq \Delta_{\text{对数}^{20}\Delta} < Q_1$。
- 对每个 $X \in \mathcal{X}$ 和颜色 c, $|X_1(c)| \leq |X| \leq \Delta^{\gamma} = T_1^{\gamma} = X_1$。
- 考虑大小至少为 2 的 $X \in \mathcal{X}$, $v \in X$，以及 $c \in L_1(v)$。根据假设， v 在 B^X 中至少有$B_1 + d(v)$ 个邻点 $-\Delta$。因此，

$$|T_1(v,c) \setminus B_1^X(v,c)| \leq d(v) - (B_1 + d(v) - \Delta) = \Delta - B_1 = T_1 - B_1.$$

因此， $P(1)$ 成立。 ■

目标是证明对于所有 $i \leq i^*$， $P(i)$ 都成立，其中 i^* 是满足$L_{i^*} \geq 8T_{i^*}$的最小整数。在陈述关于着色过程的主要结果之前，我们先陈述参数的若干性质，这些性质将在证明该结果时派上用场。

引理 4.3. 设 $r_i = T_i/L_i$。对于 $i \leq$ 最小值$\{$对数$^{3/2}\Delta, i^*\}$，我们有

(i) 保留$_i \geq$ 保留$_1 > e^{-K}$。 *(ii)* $r_i \leq r_1(1-\eta$保留$_1)^{i-1}$ 指数 $\left(4(i-1)\text{对数}^{-2}\Delta\right) \leq r_1 <$对数 Δ。 *(iii)* $L_i > 10\Delta^{\varepsilon/2}$。

(iv) $T_i > \Delta^{\varepsilon/2}$.
(v) $\frac{B_i}{T_i} = \gamma - \log^{-2}\Delta$.
(vi) $\frac{T_i}{Q_i} = \frac{10}{\gamma}\log^{18}\Delta$.
(vii) $\frac{B_i}{Q_i} > 5\log^{18}\Delta$.
(viii) $\frac{Q_i}{X_i} > \Delta^{(1-\gamma)\varepsilon/3}$.

参见第4.1 节，了解引理4.3的证明。关于算法4.1 和4.2 的主要结果如下：

命题 4.4。以下结论对所有 $i < i^*$都成立。设 $P(i)$ 成立。那么，存在算法 ϕ_i *4.1* 的一个结果 *4.1*，使得 $P(i+1)$ 在执行算法 *4.2*的修剪步骤后成立。

命题 4.4 的证明推迟到第 4.2节。接下来，考虑到引理 4.3 ，我们证明 i^* 很小。

引理 4.5。 $i^* \le$ 对数$^{3/2}\Delta$。

证明。设 $i^* >$ 对数$^{3/2}\Delta$。特别地，对于每个 $r_i > \frac{1}{8}$， $i \in [$对数$^{3/2}\Delta]$。令$i =$ 对数$^{4/3}\Delta + 1$，在引理 4.3 (ii)中代入，得到

$$\begin{aligned} r_i &\le r_1\left(1-\eta\,\mathrm{Keep}_1\right)^{\log^{4/3}\Delta}\exp(4\log^{4/3}\Delta\log^{-2}\Delta) \\ &< \log\Delta\cdot\exp\left(-K\,\mathrm{Keep}_1\log^{1/3}\Delta\right). \end{aligned}$$

根据引理4. 3(i)，且由于 K 是一个下界远离零的正常数，我们有

$$r_i = o(1) < \frac{1}{8},$$

矛盾。 ■

注意，由引理 4.5 可知，引理 4.3 的所有结论对每个 $i \in [i^*]$均成立。在证明本章节中的辅助结果之前，我们先说明这些结果如何推出定理 1.7。

定理 *1.7* 的证明。由引理 4.2 和命题 4.4， $P(i)$ 对所有 $i \in [i^*]$均成立。此外，根据 i^* 的定义，我们有 $L_{i^*} \ge 8T_{i^*}$。特别地，我们可以将命题 1.6 应用于相对于着色 ϕ，由未着色顶点诱导的子图 $= \bigcup_{i=1}^{i^*-1}\phi_i$ 以及颜色列表赋值$L_{i^*}(\cdot)$。设 ψ 为相应的着色。所需的 G 着色为 $\phi \cup \psi$。 ■

4.1. 引理4.3 的证明

我们先证明(i)、(ii)、(v)和(vi)中的不等式，这些不等式无需对 i进行归纳法。由引理2.1 以及 ηL_1^{-1} 足够小这一事实可得，

$$\mathrm{Keep}_1 = (1-\eta L_1^{-1})^{T_1} > \exp\left(-(1+\varepsilon)\frac{\eta T_1}{L_1}\right) = e^{-K}.$$

对于 $i \ge 1$，我们有

$$(1-\eta\,\mathrm{Keep}_1)^{i-1} \le \exp(-\eta(i-1)e^{-K}) \le \exp(-4(i-1)\log^{-2}\Delta),$$

其中，最后一个不等式在 Δ 充分大时成立。有了这一点，我们便有

$$r_1\left(1-\eta\,\mathrm{Keep}_1\right)^{i-1}\exp\left(4(i-1)\log^{-2}\Delta\right) \le r_1 = \frac{\log\Delta}{1+\varepsilon} < \log\Delta.$$

对于 (v)，注意以下内容：

$$\frac{B_i}{T_i} = \frac{B_1}{T_1} = \gamma - \log^{-2}\Delta.$$

最后，我们有

$$\frac{T_i}{Q_i} = \frac{T_1}{Q_1} = \frac{10}{\gamma}\log^{18}\Delta,$$

完成(vi)的证明。

现在，我们通过对 i 使用归纳法，证明其余的不等式。当 $i=1$ 时，(iii) 和 (iv) 成立，因为 L_i 和 T_i 都是 $\Delta^{1-o(1)}$ 阶的；(vii) 成立，因为 $\frac{B_1}{Q_1} = (10-o(1))\log^{18}\Delta$；(viii) 成立，因为 $\frac{Q_1}{X_1} = \Delta^{1-\gamma-o(1)}$。现在，假设 $1 \le i < \min\{\log^{3/2}\Delta, i^*\}$，并且该结论对所有 $1 \le j \le i$ 都成立。（注意，对于每个 $1 \le j \le i$，$r_j > \frac{1}{8}$ 都成立，因为 $i < i^*$。）我们的目标是证明引理中的不等式对 $i+1$ 成立。我们将通过一系列断言来完成证明。

首先，我们来证明 (i) 成立。

断言 4.3.a. 不等式 保持$_{i+1}$ >保持$_i$ ≥ 保持$_1$ 成立。

命题证明。 回顾一下 $\mathrm{Keep}^{i+1} = (1-\eta L_{i+1}^{-1})^{T_{i+1}}$。根据引理 2.1，

$$\mathrm{Keep}_{i+1} > \exp\left(-\eta T_{i+1}L_{i+1}^{-1}(1+\eta L_{i+1}^{-1})\right).$$

要证明该命题，只需证明

$$\exp\left(-\eta T_{i+1}L_{i+1}^{-1}(1+\eta L_{i+1}^{-1})\right) \ge \exp\left(-\eta T_i L_i^{-1}\right) > \left(1-\eta L_i^{-1}\right)^{T_i} = \mathrm{Keep}_i\,.$$

等价地，只需证明 $T_{i+1}L_{i+1}^{-1}(1+\eta L_{i+1}^{-1}) < T_iL_i^{-1}$，或者证明

$$1 > (1+\eta L_{i+1}^{-1})\frac{T_{i+1}}{T_i}\cdot\frac{L_i}{L_{i+1}} = (1-\eta\,\mathrm{Keep}_i)(1+\eta L_{i+1}^{-1})\frac{1+\log^{-2}\Delta}{1-\log^{-2}\Delta}. \tag{3}$$

根据归纳假设，$\mathsf{Keep}_i \ge \mathsf{Keep}_1 > \exp(-K) > \frac{2}{3}$。由于根据归纳假设有 $L_i > \Delta^{\varepsilon/2}$，我们得到

$$L_{i+1} > \frac{1}{2}L_i, \qquad \text{and} \qquad 1+\eta L_{i+1}^{-1} < 1+L_i^{-1} < 1+2\log^{-2}\Delta.$$

综合以上结果并应用引理 2.3，可得

$$(1+\eta L_{i+1}^{-1})\frac{1+\log^{-2}\Delta}{1-\log^{-2}\Delta} < (1+2\log^{-2}\Delta)^3 < \exp(6\log^{-2}\Delta).$$

因此，由于 $\mathrm{Keep}_i > \frac{2}{3}$，(3) 右端的表达式至多为

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\eta + 6\log^{-2}\Delta\right) = \exp\left(-\frac{K}{2\log\Delta} + 6\log^{-2}\Delta\right) < 1,$$

正如所需。 ⊣

下一个命题表明 (ii) 成立。

命题 4.3.b. 不等式 $r_{i+1} < r_1\,(1-\eta\,\mathrm{Keep}_1)^i \exp\left(4i\log^{-2}\Delta\right)$ 成立。

命题证明。 利用 T_i and L_i 的递推关系，我们得到

$$r_{i+1} = \frac{T_{i+1}}{L_{i+1}} = \frac{T_i\,(1-\eta\,\mathrm{Keep}_i)}{L_i}\cdot\frac{1+\log^{-2}\Delta}{1-\log^{-2}\Delta} < r_i\,(1-\eta\,\mathrm{Keep}_i)\,(1+2\log^{-2}\Delta)^2.$$

这意味着

$$r_{i+1} < r_1\prod_{j=1}^{i}(1-\eta\,\mathrm{Keep}_i)\prod_{j=1}^{i}(1+2\log^{-2}\Delta)^2.$$

根据归纳假设，$\mathsf{Keep}_i \ge \mathsf{Keep}_1$。因此，

$$r_{i+1} < r_1\,(1-\eta\,\mathrm{Keep}_1)^i \exp\left(4i\log^{-2}\Delta\right), \tag{4}$$

如所愿。 ⊣

为了证明 (iii) 和 (iv)，我们需要以下命题。

命题 4.3.c. $\prod_{j=1}^{i} \text{保留}_j > \Delta^{\frac{2}{3}\varepsilon-1}$。

命题证明。 由引理 2.1， $\text{保留}_j = (1-\eta L_j^{-1})^{T_j} > \exp(-e^K \eta r_j)$ 对每个 $1 \le j \le i$。因此，

$$\prod_{j=1}^{i} \text{Keep}_j > \prod_{j=1}^{i} \exp\left(-e^K \eta r_j\right).$$

由归纳假设，且由于 $i < \log^{3/2} \Delta$，对每个$1 \le j \le i$，我们有 $r_j < r_1 \left(1 - \eta \text{保留}_1\right)^{j-1} e^K$。因此，

$$\begin{aligned}
\prod_{j=1}^{i} \text{Keep}_j &> \prod_{j=1}^{i} \exp\left(-e^{2K} \eta r_1 \left(1 - \eta \,\text{Keep}_1\right)^{j-1}\right) \\
&= \exp\left(-e^{2K} \eta r_1 \sum_{j=1}^{i} \left(1 - \eta \,\text{Keep}_1\right)^{j-1}\right) \\
&> \exp\left(-e^{2K} \eta r_1 \sum_{j=1}^{\infty} \left(1 - \eta \,\text{Keep}_1\right)^{j-1}\right) \\
&= \exp\left(-e^{2K} \eta \left(\eta \,\text{Keep}_1\right)^{-1} r_1\right) \\
&> \exp\left(-e^{3K} r_1\right) && (\text{因为保留}_1 > e^{-K}) \\
&= \exp\left(-\frac{e^{3K} \log \Delta}{1+\varepsilon}\right) && (\text{因为 } r_1 = \frac{\log \Delta}{1+\varepsilon})。
\end{aligned}$$

由于 $\frac{1}{1+\varepsilon} < 1 - \frac{4}{5}\varepsilon < \exp\left(-\frac{4}{5}\varepsilon\right)$ 且 $K = \frac{1}{1000}\varepsilon$，引理 2.1 表明

$$\frac{e^{3K}}{1+\varepsilon} < \exp\left(3K - \frac{4}{5}\varepsilon\right) = \exp\left(-\frac{199}{250}\varepsilon\right) < 1 - \frac{2}{3}\varepsilon.$$

由此可得

$$\prod_{j=1}^{i} \text{Keep}_j > \exp\left(-\left(1 - \frac{2}{3}\varepsilon\right)\log \Delta\right) = \Delta^{\frac{2}{3}\varepsilon-1},$$

如所述。 ⊣

下面的论断表明 (iii) 成立。

命题4.3.d. 不等式 $L_{i+1} > 10\Delta^{\varepsilon/2}$ 成立。

命题证明。利用递推关系 $L_{i+1} = L_i \,\text{Keep}_i(1 - \log^{-2} \Delta)$，我们得到

$$L_{i+1} = L_1 \prod_{j=1}^{i} \left(\text{Keep}_j(1 - \log^{-2} \Delta)\right).$$

此外，根据引理2.1 可得

$$\prod_{j=1}^{i} \left(1 - \log^{-2} \Delta\right) > \exp\left(-2i \log^{-2} \Delta\right) > \frac{1}{2},$$

s由于 $i \le \log^{3/2}\Delta$ 且 Δ 足够大。因此，根据断言4.3.c，可得

$$L_{i+1} > \frac{1}{2}L_1\prod_{j=1}^{i}\mathrm{Keep}_j > \frac{1}{2}L_1\Delta^{\frac{2}{3}\varepsilon-1} = \frac{(1+\varepsilon)\Delta^{\frac{2}{3}\varepsilon}}{2\log\Delta} > 10\Delta^{\varepsilon/2},$$

如所需。 ⊣

接下来的命题表明(iv) 成立：

命题4.3.e. 不等式 $T_{i+1} > \Delta^{\varepsilon/2}$ 成立。

命题证明。注意到 $r_i > \frac{1}{8}$ 和 $\eta\mathsf{Keep}_1 = o(1)$，我们有

$$T_{i+1} = L_{i+1}r_{i+1} = L_{i+1}r_i(1-\eta\,\mathrm{Keep}_i)\cdot\frac{1+\log^{-2}\Delta}{1-\log^{-2}\Delta} > \frac{L_{i+1}}{10},$$

对于 Δ 充分大。因此，由于 $L_{i+1} > 10\Delta^{\varepsilon/2}$ 根据命题4.3.d， $T_{i+1} > \Delta^{\varepsilon/2}$. ⊣

为证明(vii)，注意到不等式 $\frac{B_{i+1}}{Q_{i+1}} > 5$对数$^{18}\Delta$ 由以下结论可得：(vi) 以及以下事实：$\frac{B_i}{T_i} > \frac{1}{2}\gamma$ 根据(v) 对于 Δ 充分大。

最后，利用不等式（iv）对于 $i+1$ ，如断言4.3.e中所证明的，我们有

$$\frac{Q_{i+1}}{X_{i+1}} = \frac{\gamma T_{i+1}/(10\log^{18}\Delta)}{T_{i+1}^{\gamma}} = \frac{\gamma T_{i+1}^{1-\gamma}}{10\log^{18}\Delta} > \Delta^{(1-\gamma)\varepsilon/3},$$

对于 Δ 足够大时，便完成了（viii）对 $i+1$成立的证明。引理4.3 由归纳法得出。

我们以一个引理结束本小节，该引理对每个值从一次迭代到下一次迭代的变化幅度给出了一个非常粗略的估计。根据引理4.3、引理4.5，以及Δ 足够大的事实，我们可知，对于 $i \in [i^*-1]$, T_i, L_i, X_i, B_i和 Q_i ，其量级均为 $\Delta^{\Omega(1)}$。此外，根据引理4.3 和引理2.1，我们有

$$e^{-K} < \mathrm{Keep}_i = (1-\eta L_i^{-1})^{T_i} < \exp(-\frac{1}{8}\eta) < 1-\log^{-2}\Delta.$$

由此可见，以下不等式显然成立：

引理 4.6。 对于每个 $i \in [i^*-1]$ 和符号 $A \in \{B, L, Q, T, X\}$, $A_{i+1} \le A_i \le 2A_{i+1}$。

4.2. 命题4.4 的证明

本节将证明命题4.4, 该命题指出，若 $i < i^*$ 且 $P(i)$ 成立，则 $P(i+1)$也成立。注意，由引理4.5可知，我们可以假设引理4.3的所有结论对 $i < i^*$均成立。证明中，令 G_i 为 G 中相对于部分着色 $\cup_{j<i}\phi_j$ 的未着色顶点所诱导的图，并令 L_i： $V(G_i) \to 2^{\mathbb{N}}$ 为相应的列表赋值。证明中的一个关键步骤是说明所需条件以高概率在局部成立。

引理 4.7。以下结论成立：

(i) 对每个 $v \in V(G_i)$, $\Pr(|L_{i+1}(v)| < L_{i+1}) < \exp(-\log^2\Delta)$。*(ii)* 对每个 $v \in V(G_i)$ 和 $c \in L_i(v)$, $\Pr(t_{i+1}(v,c) > T_{i+1}) < \exp(-\log^2\Delta)$。*(iii)* 对每个陌生点对 u, $v \in V(G_i)$ 及颜色 $c \in L_i(u) \cap L_i(v)$,

$$\Pr(q_{i+1}(u,v,c) > Q_{i+1}) < \exp(-\log^2\Delta).$$

(iv) 对于每个 $X \in \mathcal{X}$、每一对不同的朋友顶点 $u, v \in X$，以及颜色 $c \in L_i(u) \cap L_i(v)$,

$$\Pr\left(q_{i+1}^X(u,v,c) > Q_{i+1}\right) < \exp(-\log^2\Delta).$$

(v) 对于每个 $X \in \mathcal{X}$和颜色 c, $\Pr(|X_{i+1}(c)| > X_{i+1}) < \exp(-\log^2\Delta)$。

(*vi*) 对于每个大小至少为2的 $X \in \mathcal{X}$、 $v \in X$和 $c \in L_i(v)$,

$$\Pr\left(t_{i+1}(v,c) - b^X_{i+1}(v,c) > T_{i+1} - B_{i+1}\right) < \exp(-\log^2 \Delta).$$

在证明上述结果之前，我们先说明它如何推出命题4.4。

命题*4.4*的证明。我们定义如下坏事件，它们包含在轻咬法的第 i 次迭代后可能出现的所有不理想结果。对于每个坏事件，我们还指定一个中心。

- 对于每个 $v \in V(G_i)$，令 $\mathcal{L}(v)$表示 $|L_{i+1}(v)| < L_{i+1}$这一事件。令 v 为$\mathcal{L}(v)$的中心。
- 对于每个 $v \in V(G_i)$以及每个 $c \in L_i(v)$，令 $\mathcal{T}(v, c)$表示 $t_{i+1}(v, c) > T_{i+1}$这一事件。令 v 为 $\mathcal{T}(v, c)$的中心。
- 对于每个 $X \in \mathcal{X}$和 $c \in \bigcup_{v\in X} L(v)$，令 $\mathcal{E}_X(c)$表示 $|X_{i+1}(c)| > X_{i+1}$这一事件。令某个顶点 $v \in X$ 为 $\mathcal{E}_X(c)$的中心。
- 对于每个 $X \in \mathcal{X}$、顶点 $v \in X \cap V(G_i)$ 和 $c \in L_i(v)$，令 $\mathcal{B}^X(v, c)$ 表示事件：$t_{i+1}(v, c) - b^X_{i+1}(v, c) > T_{i+1} - B_{i+1}$。令 v为 $\mathcal{B}^X(v, c)$ 的中心。
- 对于每个陌生点对 $u, v \in V(G_i)$，以及每个 $c \in L_i(u) \cap L_i(v)$，若 $Q_i(u, v, c)$ 非空，则令 $\mathcal{Q}(u, v, c)$ 表示事件：$q_{i+1}(u, v, c) > Q_{i+1}$。类似地，对于每个 $X \in \mathcal{X}$和不同的朋友顶点对 $u, v \in X$，以及每个满足 $Q_i(u, v, c)$ 非空的 $c \in L_i(u) \cap L_i(v)$，令$\mathcal{Q}(u, v, c)$ 表示事件：$q_{i+1}(u, v, c) > Q_{i+1}$。令 v为 $\mathcal{Q}(u, v, c)$ 的中心。

容易看出，如果没有坏事件发生，那么 $P(i + 1)$ 成立。特别地，由于在第 i次执行算法 4.2 期间， $P(i+1)$ 中考虑的集合 $T_{i+1}(v, c)$、 $T_{i+1}(v, c) \setminus B^X_{i+1}(v, c)$、 $X_{i+1}(c)$ 和 $Q_{i+1}(u, v, c)$ 的大小不会增加，因此，若上述坏事件均未发生，则第 i次执行算法 4.1 的结果意味着这些集合中的每一个都足够小，从而满足 $P(i + 1)$。此外，如果对于第 i次执行算法 4.1 后仍未着色的每个顶点 v，都有 $|L_{i+1}(v)| \geq L_{i+1}$，那么在第 i次执行算法 4.2 后，我们将有 $|L_{i+1}(v)| = L_{i+1}$。

现在，我们使用洛瓦兹局部引理（引理 2.7）证明没有坏事件发生的概率为正。注意，根据引理 4.7，每个坏事件发生的概率至多为 $\exp(-\log^2 \Delta)$。接下来，我们估计以每个顶点 $v \in V(G)$ 为中心的坏事件数量。对于每个 $v \in V(G)$， v 至多是 k 个事件 $\mathcal{T}(v, c)$、 $\Delta^{O(1)}$ 个事件 $\mathcal{B}^X(v, c)$、$\Delta^{O(1)}$ 个事件 $\mathcal{E}_X(c)$ 以及一个事件 $\mathcal{L}(v)$ 的中心。此外，由于只有当 $Q_i(u, v, c)$ 非空时才定义坏事件 $\mathcal{Q}(u, v, c)$（这要求 u 和 v 至少有一个公共邻点），因此 v 至多是 $k\Delta^2$ 个坏事件 $\mathcal{Q}(u, v, c)$ 的中心。因此，每个 $v \in V(G)$ 至多是 $\Delta^{O(1)}$ 个坏事件的中心。此外，容易验证，对于每个以 v 为中心的坏事件 $\mathcal{E}$， $\mathcal{E}$ 完全取决于满足 $\mathrm{dist}(v, w) \leq 5$ 的顶点 w 的激活和抛硬币；因此，$\mathcal{E}$ 与除至多 $\Delta^{O(1)}$ 个其他坏事件之外的所有坏事件相互独立。因此，根据洛瓦兹局部引理（引理 2.7），由于 $4\Delta^{O(1)} \exp(-\log^2 \Delta) < 1$，没有坏事件发生的概率为正，从而 $P(i + 1)$ 成立。■

以下一般引理将是证明引理 4.7的关键。由于证明相当繁琐，我们将其推迟到第 5 章。

引理 4.8。 设 $R, S \subseteq V(G)$ 和 $i \in [i^* - 1]$ 满足 $P(i)$ 成立。设 $\alpha \geq 4 \log^{18} \Delta$ 为整数。固定一个颜色 c，并对每个 $v \in S$，记 $N_R(v, c) = T_i(v, c) \cap R$。假设以下条件成立：

(C1) 对每个 $v \in S$, $c \in L_i(v)$; *(C2)* $\log^{16} \Delta \leq |S| \leq T_i$;
(C3) 对每个 $v \in S$， $T_i - t_i(v, c) + |N_R(v, c)| \geq \alpha$; *(C4)* 对每一对 $u, v \in S$, $|N_R(u, c) \cap N_R(v, c)| \leq \frac{\alpha}{4} \log^{18} \Delta$。

令 $S' \subseteq S$ 为顶点集 $v \in S$，在算法 i 的迭代过程中，以下条件始终成立：*4.1*:

- v 在步骤*(N4)*期间未着色；
- 没有激活 $u \in N_R(v,c)$，也没有被分配 c；并且
- (v,c) 在均衡硬币翻转中存活下来。

那么，

$$\Pr\left(|S'| \geq \left(1-\eta L_i^{-1}\right)^{\alpha}(1-\eta\,\mathrm{Keep}_i)|S| + \frac{|S|}{2\log^2\Delta}\right) < \exp(-\log^3\Delta).$$

在一些集中性论证中，我们希望在4.8 中取 $R = V(G)$和$\alpha = T_i$时应用引理。然而，由于某些顶点对 $w,\ w' \in S$ 可能是朋友，我们无法保证$|N_R(w,\ c) \cap N_R(w',\ c)| \leq {}_4{}^{\alpha}{}_{\log^{18}\Delta}$。因此，我们将 S划分为互不相识的顶点所组成的集合，并对每个部分应用引理4.8 。下面的引理表明，我们可以将任意集合划分成由互不相识的顶点组成的“大”集合。

引理 4.9. 设 $i \in [i^*-1]$ 满足 $P(i)$。设 $A \subseteq V(G_i)$，并假设对每个 $v \in A$都有 $c \in L_i(v)$。那么，A 可以划分为由互不相识的顶点组成的集合，每个部分的大小至少为 $\frac{|A|}{X_i\Delta^{(1-\gamma)\varepsilon/10}}$。

证明。设 H 是一个辅助图，其顶点集为 $V(H) = A$；当且仅当 w和$w' \in A$是朋友时，两个顶点 w、$w' \in A$在 H 中相邻。给定一个顶点 $w \in A$，定理 1.7 的条件 (2b) 表明，存在一个大小至多为 $\Delta^{(1-\gamma)\varepsilon/12}$ 的族 $\mathcal{X}_w \subseteq \mathcal{X}$，使得 w 的每个朋友都包含在某个集合 $X \in \mathcal{X}_w$中。对于每个 $X \in \mathcal{X}_w$，由性质 $P(i)$，$|X_i(c)| \leq X_i$，因此 w 至多与 $X_i\Delta^{(1-\gamma)\varepsilon/12}$ 个顶点 $w' \in A$是朋友。所以，H 的最大度至多为$X_i\Delta^{(1-\gamma)\varepsilon/12}$。根据 Hajnal-Szemerédi 定理（引理 2.6），H 存在一个至多使用 $X_i\Delta^{(1-\gamma)\varepsilon/12}+1 < X_i\Delta^{(1-\gamma)\varepsilon/10}$ 种颜色的均衡着色，因此每个颜色类的大小至少为 $\frac{|A|}{X_i\Delta^{(1-\gamma)\varepsilon/10}}$ H 的每个颜色类都对应于将 A 划分为若干互不相识的顶点集合所得划分中的一部分。■

作为引理 4.8 和 4.9的推论，我们得到以下结果。证明可通过对引理 4.8 应用 $R = V(G)$ 和 $\alpha = T_i$ 于引理 4.9 的每个部分，然后取并集界而得。

推论 4.10. 设 $S \subseteq V(G)$ 和 $i \in [i^*-1]$ 满足 $P(i)$ 成立。固定一个颜色 c。假设以下条件成立：

- 对每个 $v \in S,\ c \in L_i(v)$；
- $X_i\Delta_{(1-\gamma)^{\varepsilon/8}} \leq |S| \leq T_i$；

令 $S' \subseteq S$ 为顶点集 $v \in S$，其中的顶点在算法 i 的每次迭代 *4.1*中均满足以下条件：

- v 在步骤*(N4)*期间未着色；
- 没有 $u \in N(v,c)$ 被激活并被分配 c；并且
- (v,c) 在均衡硬币翻转后存活。

那么，

$$\Pr\left(|S'| \geq \mathrm{Keep}_i(1-\eta\,\mathrm{Keep}_i)|S| + \frac{|S|}{2\log^2\Delta}\right) < \exp(-\log^2\Delta).$$

证明。利用引理 4.9，我们将 S 划分为若干由互不相识的顶点组成的集合，每个部分的大小至少为 $\frac{|S|}{X_i\Delta^{(1-\gamma)\varepsilon/10}}$考虑该划分中的任意部分 S_0。由于 $|S| \geq X_i\Delta^{(1-\gamma)\varepsilon/10}$，可知 $|S_0| \geq \Delta^{(1-\gamma)\varepsilon/40} \gg \log^{16}\Delta$ 个顶点。令 $R = V(G)$ 和 $\alpha = T_i$，并注意到，对于每个 $v \in S_0$，$T_i - t_i(v,c) + |N_R(v,c)| = T_i = \alpha$。由于 S_0 是由互不相识的顶点组成的集合，

$$|N(u,c) \cap N(v,c)| = |Q_i(u,v,c)| \leq Q_i = \frac{\gamma T_i}{10\log^{18}\Delta} < \frac{\alpha}{4\log^{18}\Delta}.$$

现在，根据引理 4.8，其成立的概率至少为 $1-\exp(-\log^3\Delta)$ 即

$$|S'\cap S_0|<\mathrm{Keep}_i(1-\eta\,\mathrm{Keep}_i)\left(1+\frac{1}{2\log^2}\right)|S_0|.$$

该推论可通过取并集界并对所有部分 S_0 求和得到。 ■

为在本文余下部分进行集中性论证，我们定义如下概率空间：

(1) 对每个 $v\in V(G_i)$，我们令 $(\Omega_v,\Sigma_v,\Pr_v)$ 表示与算法 4.1 的步骤 (N1) 和 (N3) 对应的概率空间。更正式地，令 $\Omega_v=L_i(v)\cup\{0\}$。Ω_v 中的元素 0 满足 $\Pr_v(0)=1-\eta$，并对应于步骤（N1）中 v未被激活的结果。于是，$\Sigma_v=2^{\Omega_v}$ 是 Ω_v 的概率可测子集集合，而 $\Pr_v:\Sigma_v\to[0,1]$ 给出相应的概率。

(2) 此外，对每个 $v\in V(G_i)$ 和 $c\in L_i(v)$，我们令 $(\Omega_{v,c},\Sigma_{v,c},\Pr_{v,c})$ 表示描述算法 4.1 中 (v,c) 的步骤 (N5) 的概率空间。具体而言，$\Omega_{v,c}=\{0,1\}$，其中我们令元素 1 对应于 (v,c) 在抛硬币后存活的结果，并令 0 对应于 (v,c) 在抛硬币后未能存活的结果。因此，$\Pr_{v,c}(0)=1-\mathrm{Eq}_i(v,c)$，且 $\Pr_{v,c}(1)=\mathrm{Eq}_i(v,c)$。我们用 $\Sigma_{v,c}=2^{\Omega_{v,c}}$ 表示 $\Omega_{v,c}$ 的概率可测子集集合，而 $\Pr_{v,c}:\Sigma_{v,c}\to[0,1]$ 给出相应的概率。

令 $(\Omega,\Sigma,\Pr)$ 为这些空间的乘积。

现在我们可以完成引理 4.7 的证明了。我们将分别讨论每一项。

引理 4.7 (i) 的证明： v的集中性。我们将通过一系列引理来证明这一点。首先计算 $\mathbb{E}[|L_{i+1}(v)|]$。

引理 4.11. $\mathbb{E}[|L_{i+1}(v)|]=$保持$_i\,L_i$。

证明。考虑任意颜色 $c\in L_i(v)$。注意，$c\in L_{i+1}(v)$ 当且仅当：(1) $T_i(v,c)$ 中没有顶点被激活并被分配颜色 c；(2) 数对 (v,c) 在均衡硬币翻转后仍然保留。由于所有激活、分配和掷硬币过程彼此独立，我们有

$$\Pr(c\in L_{i+1}(v))=(1-\eta\,L_i^{-1})^{T_i-t_i(v,c)}\prod_{u\in T_i(v,c)}(1-\eta\,|L_i(u)|^{-1}).$$

根据性质 $P(i)$，所有颜色列表的大小均为 L_i，因此上式可简化为

$$(1-\eta\,L_i^{-1})^{T_i-t_i(v,c)}\prod_{u\in T_i(v,c)}(1-\eta\,|L_i|^{-1})=\mathrm{Keep}_i\,.$$

由期望的线性性可得 $\mathbb{E}[|L_{i+1}(v)|]=$保持$_i\,L_i$ 不变，如所声称。 ■

接下来, 我们证明 $|L_{i+1}(v)|$ 是集中的，从而完成引理 4.7 (i)的证明 .

引理 4.12. $\Pr(|L_{i+1}(v)|<L_{i+1})\le\exp(-\log^2\Delta)$。

证明。考虑随机变量 $Z=L_i-|L_{i+1}(v)|$。由引理 4.11，可得

$$\mathbb{E}[Z]=L_i-\mathbb{E}[|L_{i+1}(v)|]=L_i-\mathrm{Keep}_i\,L_i=(1-\mathrm{Keep}_i)L_i.$$

注意，若 $|L_{i+1}(v)|<L_{i+1}$，则

$$Z-\mathbb{E}[Z]=\mathrm{Keep}_i\,L_i-|L_{i+1}(v)|>\frac{\mathrm{Keep}_i\,L_i}{\log^2\Delta}.$$

因此，如果 $|L_{i+1}(v)| < L_{i+1}$，则 $|Z - \mathbb{E}[Z]| > \mathsf{Keep}_i\, L_i/\log^2 \Delta$。因此，只需证明

$$\Pr(|Z - \mathbb{E}[Z]| > \mathrm{Keep}_i\, L_i/\log^2 \Delta) \le \exp(-\log^2 \Delta).$$

为了使 Z集中，我们将使用引理 2.11。为此，回顾一下定义在第 29 页上的概率空间 $(\Omega, \Sigma, \Pr)$。我们令 $\Omega^* = \emptyset$。首先，我们证明 Z 是 $(1, 1)$-可观测的（见定义 2.10）。我们有 $Z = \sum_{c \in L_i(v)} Y_c$，其中 Y_c 对于 $c \in L_i(v)$ 是一个二元随机变量，当且仅当算法 4.1 执行后 $c \notin L_{i+1}(v)$ 时，$Y_c = 1$。对于每个 $c \in L_i(v)$，我们都有 Y_c 是 1-可验证的，其验证器 R_c 定义如下：

- 如果 $Y_c(\omega) = 0$，那么 $R_c(\omega) = \emptyset$;
- 如果某个顶点 $u \in T_i(v, c)$ 已激活并被分配 c，那么我们令 $R_c(\omega) = \{u\}$;
- 如果 (v, c) 在算法 (N5) 的步骤 4.1中抛硬币失败，我们令 $R_c(\omega) = \{(v, c)\}$。

为了完成 Z 是 $(1, 1)$-可观测的证明，我们必须证明以下内容：

- 对于每个 $\omega \in \Omega \setminus \Omega^*$ 和 $u \in V(G)$，至多有一个 $c \in L_i(v)$ 的值使得 $u \in R_c(\omega)$，并且
- 对于每个 $\omega \in \Omega \setminus \Omega^*$ 和 $c' \in L_i(v)$，至多有一个 $c \in L_i(v)$ 的值使得 $(v, c') \in R_c(\omega)$。

为此，固定 $\omega \in \Omega \setminus \Omega^*$。现在固定 $u \in V(G)$。由于 u 在 ω 下至多被分配一种颜色，因此，对于至多一种颜色 $c \in L_i(v)$，u 属于 $R_c(\omega)$。现在固定 $c' \in L_i(v)$。根据 $R_c(\omega)$ 的定义，显然仅当 $c = c'$ 时，$(v, c') \in R_c(\omega)$。因此，至多有一个 $c \in L_i(v)$ 的值使得 $(v, c') \in R_c(\omega)$。这就完成了 Z 是 $(1, 1)$- 可观测的证明。

我们旨在应用引理 2.11 与 $r = d = 1$ 和 $\tau = \text{保持}_i\, L_i \text{对数}^2\, \Delta$。我们有 $\mathbb{E}[Z] \le L_i$。此外，保持$_i > \exp(-K)$ 根据引理 4.3 (i)，因此 $\tau = \omega(\sqrt{L_i})$，这意味着(1) 成立。因此，由于 $\tau < L_i$ 且 $L_i > \Delta^{\varepsilon/2}$ 根据引理 4.3 (iii)，我们有

$$\begin{aligned}
\Pr(|Z - \mathbb{E}[Z]| > \tau) &\le 4 \exp\left(-\frac{\tau^2}{8(2)(1)(4\mathbb{E}[Z] + \tau)}\right) \\
&\le 4 \exp\left(-\frac{L_i}{80 \log^{20} \Delta}\right) \\
&< \exp\left(-\log^2 \Delta\right),
\end{aligned}$$

如所需。 ■

引理 4.7 (ii) 的证明：$t_{i+1}(v, c)$ 的集中性。根据性质 $P(i)$，$t_i(v, c) \le T_i$。由于$T_{i+1}(v, c) \subseteq T_i(v, c)$，当 $t_i(v, c) \le T_{i+1}$ 时无须证明。因此，我们可以假设 $t_i(v, c) > T_{i+1} > \frac{1}{2} T_i$，其中最后一个不等式由引理 4.6 得出。

我们应用推论 4.10 于 $S = T_i(v, c)$，于是 $|S| \le T_i$ 且 $t_{i+1}(v, c) = |S'|$。由引理 4.3的条目 (vi) 和 (viii)，可得

$$\frac{|S|}{X_i} \ge \frac{T_i}{2X_i} = \frac{1}{2} \cdot \frac{T_i}{Q_i} \cdot \frac{Q_i}{X_i} > \Delta^{(1-\gamma)\varepsilon/3}.$$

因此，$t_{i+1}(v, c)$ 根据推论 4.10从上方集中。

引理 4.7 (iii) 和 (iv) 的证明：$q_{i+1}(u, v, c)$ 的集中性。根据性质 $P(i)$，$q_i(u, v, c) \le Q_i$。由于 $Q_{i+1}(u, v, c) \subseteq Q_i(u, v, c)$，在 $q_i(u, v, c) \le Q_{i+1}$ 的情况下无需证明。因此，我们可以假设 $q_i(u, v, c) > Q_{i+1} > \frac{1}{2} Q_i$，其中最后一个不等式由引理 4.6 得出。

我们应用推论 4.10 于 $S = Q_i(u, v, c)$，于是 $|S| \le Q_i < T_i$ 由引理 4.3 (vi) 和$q_{i+1}(u, v, c) = |S'|$。由引理 4.3 (viii)，可得

$$\frac{|S|}{X_i} \ge \frac{Q_i}{2X_i} > \frac{1}{2} \Delta^{(1-\gamma)\varepsilon/3}.$$

因此，$q_{i+1}(u, v, c)$ 由推论 4.10从上方集中。

引理 4.7 (iv)的证明与上述证明相同，*mutatis mutandis* (将 Q_i 替换为 Q_i^X等)，因此我们省略细节。

引理的证明 4.7 (v)：的集中性 $|X_{i+1}(c)|$。由于 $X_{i+1}(c) \subseteq X_i(c)$，当 $|X_i(c)| \le X_{i+1}$ 时无需证明。因此，我们可以假设 $|X_i(c)| > X_{i+1} > \frac{1}{2}X_i$，其中最后一个不等式由引理 4.6 得出。

我们旨在应用引理 4.8，取 $S = X_i(c)$ 和 $R = B_i^X(v,c)$。注意，由引理 $|S| > \frac{1}{2}X_i = \Delta^{\Omega(1)}$4.3 (iv) 可知。根据性质 $P(i)$，注意到对每个 $v \in X_i(c)$，都有

$$T_i - t_i(v,c) + |N_R(v,c)| = T_i - t_i(v,c) + b_i^X(v,c) \ge B_i.$$

此外，由引理 4.3 的条目 (iv) 和 (v)，可得 $B_i \gg \log^{18}\Delta$。因此，我们可以取$\alpha = B_i$。对于每一对 u, $v \in X_i(c)$，若 u和 v是朋友，则性质 $P(i)$ (P4) 蕴含

$$|N_R(u,c) \cap N_R(v,c)| = |B_i^X(u,c) \cap B_i^X(v,c)| = |Q_i^X(u,v,c)| \le Q_i;$$

否则，如果 u 和 v 是陌生点，则性质 $P(i)$意味着

$$|N_R(u,c) \cap N_R(v,c)| \le |N(u,c) \cap N(v,c)| = |Q_i(u,v,c)| \le Q_i.$$

由引理 4.3(vii)，$Q_i \le \frac{B_i}{\log^{18}\Delta}$，$|N_R(u,c) \cap N_R(v,c)| < \frac{\alpha}{\log^{18}\Delta}$。

令 S' 按照引理 4.8中的定义，至少以 $1 - \exp(-\log^3\Delta)$的概率，我们有

$$|S'| < (1-\eta L_i^{-1})^{B_i}(1-\eta\,\mathrm{Keep}_i)|S| + \frac{|S|}{2\log^2\Delta}.$$

由于 $X_{i+1}(c) \subseteq S'$，且根据性质 $P(i)$，$|X_i(c)| \le X_i$，这意味着至少以 $1 - \exp(-\log^3\Delta)$ 的概率，

$$|X_{i+1}(c)| \le (1-\eta L_i^{-1})^{B_i}(1-\eta\,\mathrm{Keep}_i)X_i + \frac{X_i}{2\log^2\Delta}. \tag{5}$$

还需证明（5）中的上界至多为 X_{i+1}。由于 $B_i < \gamma T_i < T_i$ 根据引理4.3 (v)，由引理 2.3 和引理 4.3 (ii) 可得

$$(1-\eta L_i^{-1})^{B_i} > 1 - \eta r_i > 1 - K > \frac{4}{5}.$$

此外，根据引理 4.3 (i)，$1-\eta$保持$_i > \frac{4}{5}$。因此

$$(1-\eta L_i^{-1})^{B_i}(1-\eta\,\mathrm{Keep}_i) \ge \frac{1}{2}.$$

特别地，式（5）中的上界至多为

$$\begin{aligned}&(1-\eta L_i^{-1})^{B_i}(1-\eta\,\mathrm{Keep}_i)\left(1+\frac{1}{\log^2\Delta}\right)X_i\\ &\quad= (1-\eta L_i^{-1})^{(\gamma-\log^{-2}\Delta)T_i}(1-\eta\,\mathrm{Keep}_i)\left(1+\frac{1}{\log^2\Delta}\right)T_i^{\gamma}.\end{aligned}$$

记作 $Z = (1-\eta/L_i)^{-T_i\,\text{对数}^{-2}\Delta}\left(1+\text{对数}^{-2}\Delta\right)^{1-\gamma}(1-\eta\,\text{保持}_i)^{1-\gamma}$，并注意到上述值至多为

$$(1-\eta L_i^{-1})^{\gamma T_i}(1-\eta\,\mathrm{Keep}_i)^{\gamma}\left(1+\frac{1}{\log^2\Delta}\right)^{\gamma}T_i^{\gamma}Z = T_{i+1}^{\gamma}Z = X_{i+1}Z. \tag{6}$$

最后，我们注意到

$$Z < \exp\left(\frac{2\eta T_i}{L_i \log^2 \Delta} + \frac{1-\gamma}{\log^2 \Delta} - \eta(1-\gamma)\,\mathrm{Keep}_i\right)$$
$$= \exp\left(\frac{2\eta r_i}{\log^2 \Delta} + \frac{1-\gamma}{\log^2 \Delta} - \eta(1-\gamma)\,\mathrm{Keep}_i\right) < 1,$$

其中，最后一个不等式成立是因为 $r_i < \log \Delta$ 根据引理 4.3 (ii)，因此 $\eta(1-\gamma)\mathrm{Keep}_i$ 在 Δ 足够大时，在指数项中占主导。结合（5）和（6），可得$|X_{i+1}(c)| < X_{i+1}$ 其概率至少为 $1 - \exp(-\log^3 \Delta)$。

引理 4.7 (vi) 的证明： $t_{i+1}(v,c) - b^X_{i+1}(v,c)$ 的集中性。注意，对于每个 $u \in B^X_i(v,c) \setminus B^X_{i+1}(v,c)$， u 要么在算法 4.1 的第 i 次迭代中被着色，要么从 $L_{i+1}(u)$ 中删除；在这两种情况下， $u \notin T_{i+1}(v,c)$。因此， $T_{i+1}(v,c) \setminus B^X_{i+1}(v,c) \subseteq T_i(v,c) \setminus B^X_i(v,c)$，这意味着 $t_{i+1}(v,c) - b^X_{i+1}(v,c) \le t_i(v,c) - b^X_i(v,c)$。因此，如果 $t_i(v,c) - b^X_i(v,c) \le T_{i+1} - B_{i+1}$，则无需证明；所以我们假设 $t_i(v,c) - b_i(v,c) > T_{i+1} - B_{i+1}$。

我们旨在应用推论 4.10，令 $S = T_i(v,c) \setminus B^X_i(v,c)$，从而使 $|S| < T_i$ 和 $|S'| = t_{i+1}(v,c) - b^X_{i+1}(v,c)$。由引理 4.6 和引理 4.3 的条件 (v)、(vi) 和 (viii)，可得

$$\frac{|S|}{X_i} > \frac{T_{i+1} - B_{i+1}}{X_i} > \frac{(1-\gamma)T_{i+1}}{X_i} > \frac{(1-\gamma)T_i}{2X_i} = \frac{(1-\gamma)}{2}\frac{T_i}{Q_i}\cdot\frac{Q_i}{X_i} \gg \Delta^{(1-\gamma)\varepsilon/3}.$$

因此， $t_i(v,\ c) - b^X_{i+1}(v,\ c)$ 由推论 4.10从上方集中。

5. Proof of Lemma 4.8

为方便读者，我们重述该引理。

引理（引理 *4.8* 的重述）。设 $R, S \subseteq V(G)$ 和 $i \in [i^* - 1]$ 满足 $P(i)$。令 $\alpha \ge 4\log^{18}\Delta$ 为一个整数。固定一种颜色 c，并对每个 $v \in S$，记 $N_R(v,c) = T_i(v,c) \cap R$。假设以下条件成立：

(C1) 对每个 $v \in S$, $c \in L_i(v)$; *(C2)* $\log^{16}\Delta \le |S| \le T_i$; *(C3)* $T_i - t_i(v,c) + |N_R(v,c)| \ge \alpha$ 对每个 $v \in S$; 对于每一对 $u, v \in S$, $|N_R(u,c) \cap N_R(v,c)| \le \alpha 4\log^{18}\Delta$。

令 $S' \subseteq S$ 为顶点集 $v \in S$，在算法 的每次迭代中，以下条件均成立：*4.1*：

- v 在步骤*(N4)*中未着色；
- 没有 $u \in N_R(v,c)$ 被激活并分配 c；并且
- (v,c) 在均衡硬币翻转中存活。

那么，

$$\Pr\left(|S'| \ge \left(1 - \eta L_i^{-1}\right)^{\alpha}(1 - \eta\,\mathrm{Keep}_i)|S| + \frac{|S|}{2\log^2\Delta}\right) < \exp(-\log^3\Delta).$$

在我们的计算中，我们使用这样一个事实：根据引理 4.3 (iii)，并且由于 Δ 足够大， L_i 也足够大。

在本章节的其余部分，我们假设 $P(i)$ 成立。我们不直接处理 S'，而是定义一个新的集合 S''，其中包含 S'，定义如下。令 $R_{high} \subseteq R$ 表示满足 $r \in R$且有 $c \in L_i(r)$ 以及至少 $h := \frac{|S|}{\log^8\Delta}$ 个邻点的顶点 S的集合。令 $S'' \subseteq S$ 表示在算法 4.1执行后满足以下条件的顶点集合：

- v 在步骤(N4)期间未着色；

- 没有 $u \in N_R(v,\ c) \setminus R_{high}$ 被激活并被分配 c；并且
- $(v,\ c)$ 在第 (N5) 步的均衡硬币翻转中存活。

显然，$S' \subseteq S''$ 因此 $\Pr(S' \geq t) \leq \Pr(S'' \geq t)$。特别地，只需证明

$$\Pr\left(|S''| \geq \left(1-\eta L_i^{-1}\right)^{\alpha}(1-\eta\,\mathrm{Keep}_i)|S| + \frac{|S|}{2\log^2\Delta}\right) < \exp(-\log^3\Delta), \tag{7}$$

这正是本节余下部分的重点。我们的证明遵循一个引理序列。首先，我们证明R_{high} 所含的顶点数不会太多。

引理 5.1. $|R_{high}| \leq \dfrac{\alpha}{\log^2\Delta}$。

证明。定义一个辅助二分图 H，其部集为 A 和 B，如下所示。对于每个顶点$r \in R_{high}$，向 A中添加一个顶点 a_r。对于每个顶点 $s \in S$，添加一条边 b_s 到 B。如果 $r \in R_{high}$ 和$s \in S$ 具有关系 $r \in T_i$（s, c），则添加边 $a_r b_s$ 到 H。由于每个顶点 $r \in R_{high}$ 在 S中至少有 h 个邻点，因此每个对应的 $a_r \in A$ 在 B中至少有 h 个邻点。因此$|E(H)| \geq |A|h = |R_{high}|h$。此外，根据引理 4.8 中的条件（C4），~~对于每一对~~ $b, b' \in B$，b和 b' 在 A中至多有$4^{\alpha}\log^{18}\Delta$ 个公共邻居。因此，应用~~引理 2.4~~，取 $s = 2$、$t = 4^{\alpha}\log^{18}\Delta$、$n = |B| = |S|$和 $m = |A| = |R_{high}|$，可得

$$|R_{high}|h \leq |E(H)| < \sqrt{t}|S||R_{high}|^{1/2} + |R_{high}|.$$

若 $|R_{high}| > \sqrt{t}|S||R_{high}|$，则 $\frac{|S|}{\log^8\Delta} = h < 2$，这与 $|S| \geq \log^{16}\Delta$ 矛盾。因此，

$$|R_{high}|h < 2\sqrt{t}|S||R_{high}|^{1/2} \implies |R_{high}| < 4t(|S|^2/h^2) = 4t\log^{16}\Delta = \frac{\alpha}{\log^2\Delta},$$

如所需。 ■

记 $\alpha' = \alpha\left(1 - \frac{1}{\log^2\Delta}\right)$，并注意到对每个 $v \in S$，都有

$$T_i - t_i(v,c) + |N_R(v,c) \setminus R_{high}| \geq \alpha' \tag{8}$$

根据引理5.1 以及引理 (C3) 4.8 的条件。接下来，我们计算 $|S''|$的期望值上界。

引理 5.2。 $\mathbb{E}[|S''|] \leq |S|(1-\eta L_i^{-1})^{\alpha}(1-\eta\,\mathrm{Keep}_i) + \frac{|S|}{4^{\alpha}\log^2\Delta}$。

证明。对于每个 $v \in S$，我们估计 $v \in S''$ 的概率。为此，我们固定 $v \in S$。根据 v 在算法 (N1)的步骤 4.1中的激活状态，我们分两种情况进行讨论。

首先，我们以事件 v 未被激活为条件。在这种情况下，当且仅当以下事件发生时，$v \in S''$：

- $\mathcal{F}_1$：对于每个顶点 $u \in N_R(v,\ c) \setminus R_{high}$，$c$ 未被分配给 u，并且
- $\mathcal{F}_2$：$(v,\ c)$ 在均衡硬币翻转中存活。

我们注意到，事件 $\mathcal{F}_1$ 和 $\mathcal{F}_2$ 相互独立。我们有

$$\Pr(\mathcal{F}_1) = \left(1-\eta L_i^{-1}\right)^{|N_R(v,c)\setminus R_{high}|}$$

and

$$\Pr(\mathcal{F}_2) = \mathrm{Eq}_i(v,c) = \left(1-\eta L_i^{-1}\right)^{T_i - t_i(v,c)}.$$

因此，$v \in S''$ 是.....的条件概率

$$\Pr(\mathcal{F}_1)\Pr(\mathcal{F}_2) = \left(1-\eta L_i^{-1}\right)^{|N_R(v,c)\setminus R_{high}| + T_i - t_i(v,c)}.$$

由（8），可得

$$\left(1-\eta L_i^{-1}\right)^{|N_R(v,c)\setminus R_{high}|+T_i-t_i(v,c)} \le \left(1-\eta L_i^{-1}\right)^{\alpha'}. \tag{9}$$

因此，写作 $Y=\left(1-\eta L_i^{-1}\right)^{\alpha'}$，我们有

$$\Pr(\mathcal{F}_1)\Pr(\mathcal{F}_2) \le Y. \tag{10}$$

接下来，我们以事件 v 已激活为条件。在这种情况下，$v \in S''$ 当且仅当以下事件在算法4.1中发生时：

- $\mathcal{E}_1$：v 被分配了某种颜色 $d \in L_i(v)$；
- $\mathcal{E}_2$：顶点 $w \in T_i(v,\ d)$ 已激活并被分配了相同的颜色 d；
- $\mathcal{E}_3$：没有顶点 $u \in N_R(v,\ c) \setminus R_{high}$ 被分配颜色 c；
- $\mathcal{E}_4$：$(v,\ c)$ 在均衡硬币翻转中幸存。

我们旨在估计 $\Pr(\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 \cap \mathcal{E}_3 \cap \mathcal{E}_4)$。为此，我们将 $\mathcal{E}_1$ 划分为互不相交的事件集合 $\{\mathcal{A}_d : d \in L_i(v)\}$，其中 $\mathcal{A}_d$ 是 v 被分配颜色 d 的事件。根据此划分，我们将概率简化为

$$\Pr(\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 \cap \mathcal{E}_3 \cap \mathcal{E}_4) = \sum_{d \in L_i(v)} \Pr(\mathcal{A}_d \cap \mathcal{E}_2 \cap \mathcal{E}_3 \cap \mathcal{E}_4).$$

固定一个颜色 $d \in L_i(v)$。我们旨在估计

$$\Pr(\mathcal{A}_d \cap \mathcal{E}_2 \cap \mathcal{E}_3 \cap \mathcal{E}_4) = \Pr(\mathcal{A}_d)\Pr(\mathcal{E}_2 \cap \mathcal{E}_3 \mid \mathcal{A}_d)\Pr(\mathcal{E}_4), \tag{11}$$

其中等号成立是因为 $\mathcal{E}_4$ 与 $\mathcal{A}_d$、$\mathcal{E}_2$以及 $\mathcal{E}_3$相互独立。我们不逐一估计（11）中的各个因子，而是利用以下事实：

$$\begin{aligned}\Pr(\mathcal{E}_3) = \Pr(\mathcal{E}_3 \mid \mathcal{A}_d) &= \Pr(\mathcal{E}_2 \cap \mathcal{E}_3 \mid \mathcal{A}_d) + \Pr(\overline{\mathcal{E}_2} \cap \mathcal{E}_3 \mid \mathcal{A}_d) \\ &= \Pr(\mathcal{E}_2 \cap \mathcal{E}_3 \mid \mathcal{A}_d) + \Pr(\overline{\mathcal{E}_2} \mid \mathcal{A}_d)\Pr(\mathcal{E}_3 \mid \mathcal{A}_d \cap \overline{\mathcal{E}_2}).\end{aligned}$$

因此，

$$\Pr(\mathcal{E}_2 \cap \mathcal{E}_3 \mid \mathcal{A}_d) = \Pr(\mathcal{E}_3) - \Pr(\mathcal{E}_3 \mid \mathcal{A}_d \cap \overline{\mathcal{E}_2})\Pr(\overline{\mathcal{E}_2} \mid \mathcal{A}_d),$$

从而

$$\Pr(\mathcal{A}_d \cap \mathcal{E}_2 \cap \mathcal{E}_3 \cap \mathcal{E}_4) = \Pr(\mathcal{A}_d)(\Pr(\mathcal{E}_3) - \Pr(\mathcal{E}_3 \mid \mathcal{A}_d \cap \overline{\mathcal{E}_2})\Pr(\overline{\mathcal{E}_2} \mid \mathcal{A}_d))\Pr(\mathcal{E}_4). \tag{12}$$

现在，我们估计（12）中的概率。首先，有

$$\Pr(\mathcal{A}_d) = \frac{1}{|L_i(v)|} = \frac{1}{L_i} \tag{13}$$

and

$$\Pr(\mathcal{E}_3) = (1-\eta L_i^{-1})^{|N_R(v,c)\setminus R_{high}|}. \tag{14}$$

接下来，我们估计 $\Pr(\mathcal{E}_3 \mid \mathcal{A}_d \cap \mathcal{E}_2)$。回顾一下，$\mathcal{E}_2$ 是指“没有 $w \in T_i(v,\ d)$ 被分配d”这一事件。我们考虑一个未着色邻居 $u \in N_R(v)$。令 B_c 表示 u 被激活并被分配 c这一事件，令 B_d 表示 u 被激活并被分配 d这一事件。因此，

$$\begin{aligned}\Pr(B_c \mid \mathcal{A}_d \cap \overline{\mathcal{E}_2}) &= \Pr(B_c \mid \mathcal{A}_d \cap \overline{B_d}) = \frac{\Pr(B_c \cap \overline{B_d} \mid \mathcal{A}_d)}{\Pr(\overline{B_d} \mid \mathcal{A}_d)} \\ &\le \frac{\Pr(B_c \mid \mathcal{A}_d)}{\Pr(\overline{B_d} \mid \mathcal{A}_d)} = \frac{\eta L_i^{-1}}{1-\eta L_i^{-1}} = \frac{\eta}{L_i-\eta}.\end{aligned} \tag{15}$$

因此，根据（15），我们有

$$\Pr(\mathcal{E}_3 \mid \mathcal{A}_d \cap \overline{\mathcal{E}_2}) \ge \left(1-\frac{\eta}{L_i-\eta}\right)^{|N_R(v,c)\setminus R_{high}|}. \tag{16}$$

接下来,

$$\Pr(\overline{\mathcal{E}_2} \mid \mathcal{A}_d) = (1-\eta L_i^{-1})^{t_i(v,d)} \geq \mathrm{Keep}_i\,. \tag{17}$$

最后,

$$\Pr(\mathcal{E}_4) = \mathrm{Eq}_i(v,c) = \left(1-\eta L_i^{-1}\right)^{T_i - t_i(v,c)} \tag{18}$$

结合（12）、（13）、（14）、（16）、（17）和（18），$\Pr(\mathcal{A}_d \cap \mathcal{E}_2 \cap \mathcal{E}_3 \cap \mathcal{E}_4)$ 至多为

$$\frac{1}{L_i}\left((1-\eta L_i^{-1})^{|N_R(v,c)\setminus R_{high}|} - \left(1-\frac{\eta}{L_i-\eta}\right)^{|N_R(v,c)\setminus R_{high}|}\mathrm{Keep}_i\right)\left(1-\eta L_i^{-1}\right)^{T_i-t_i(v,c)}. \tag{19}$$

令 $M := 1 - \frac{\eta^2}{(L_i-\eta)^2}$，使得 $1-\frac{\eta}{L_i-\eta} = M(1-\eta L_i^{-1})$。利用 $\frac{T_i}{L_i} = r_i \leq r_1$ 和 $4\eta^2 r_1 < 4\eta^2 \log\Delta = o(1)$ 由引理 4.3 (ii)可知

$$M^{|N_R(v,c)\setminus R_{high}|} \geq M^{T_i} > \exp\left(-\frac{2T_i\eta^2}{(L_i-\eta)^2}\right) > \exp\left(-\frac{4\eta^2 r_1}{L_i}\right) > 1-\frac{1}{L_i}.$$

有了上述结果，接着从（19）出发，并记 $N' = |N_R(v,c)\setminus R_{high}|$，可得

$$\begin{aligned}\Pr(\mathcal{A}_d \cap \mathcal{E}_2 \cap \mathcal{E}_3 \cap \mathcal{E}_4) &\leq \frac{1}{L_i}(1-\eta L_i^{-1})^{N'}\left(1-M^{N'}\mathrm{Keep}_i\right)\left(1-\eta L_i^{-1}\right)^{T_i-t_i(v,c)}\\ &\leq \frac{1}{L_i}\left(1-\left(1-\frac{1}{L_i}\right)\mathrm{Keep}_i\right)\left(1-\eta L_i^{-1}\right)^{N'+T_i-t_i(u,c)}.\end{aligned}$$

由于 $(1-\eta L_i^{-1})^{N'+T_i-t_i(v,c)} \leq (1-\eta L_i^{-1})^{\alpha'} = Y$ 由（9）可知

$$\Pr(\mathcal{A}_d \cap \mathcal{E}_2 \cap \mathcal{E}_3 \cap \mathcal{E}_4) \leq \frac{1}{L_i}\left(1-\left(1-\frac{1}{L_i}\right)\mathrm{Keep}_i\right)Y < \frac{1}{L_i}\left(1-\mathrm{Keep}_i+L_i^{-1}\right)Y.$$

对所有 $d \in L_i(v)$ 将上述上界求和，可得

$$\Pr(\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 \cap \mathcal{E}_3 \cap \mathcal{E}_4) \leq \left(1-\mathrm{Keep}_i+L_i^{-1}\right)Y.$$

将上述结果与（10）结合，并利用期望的线性性，可得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|S''|] &\leq |S|\left((1-\eta)Y + \eta\left(1-\mathrm{Keep}_i+L_i^{-1}\right)Y\right)\\ &\leq |S|Y(1-\eta\,\mathrm{Keep}_i+\eta L_i^{-1})\\ &\leq |S|(1-\eta L_i^{-1})^{\alpha'}(1-\eta\,\mathrm{Keep}_i) + |S|L_i^{-1},\end{aligned} \tag{20}$$

其中我们利用了这一事实：$Y,\ \eta \leq 1$。回顾引理4.3 (iii)，有 $L_i > \Delta^{\varepsilon/2} > 8\log^2\Delta$。此外，根据 α'的定义，有

$$(1-\eta L_i^{-1})^{\alpha'} = (1-\eta L_i^{-1})^{\alpha-\frac{\alpha}{\log^2\Delta}} \leq (1-\eta L_i^{-1})^{\alpha}\left(1+\frac{2\eta\alpha}{L_i\log^2\Delta}\right).$$

因此，我们可以将（20）进一步化简为

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|S''|] &\leq |S|(1-\eta L_i^{-1})^{\alpha}(1-\eta\,\mathrm{Keep}_i)\left(1+\frac{2\eta\alpha}{L_i\log^2\Delta}\right)+\frac{|S|}{8\log^2\Delta}\\ &\leq |S|(1-\eta L_i^{-1})^{\alpha}(1-\eta\,\mathrm{Keep}_i)+\frac{2\eta\alpha|S|}{L_i\log^2\Delta}+\frac{|S|}{8\log^2\Delta}\\ &\leq |S|(1-\eta L_i^{-1})^{\alpha}(1-\eta\,\mathrm{Keep}_i)+\frac{|S|}{4\log^2\Delta},\end{aligned}$$

其中，最后一步是因为

$$\frac{2\eta\alpha}{L_i} \leq \frac{2\eta T_i}{L_i} = \frac{2Kr_i}{\log\Delta} < \frac{1}{8}$$

根据引理 4.3(ii)、引理 (C2) 的条件 4.8以及 K的定义。引理 5.2的证明至此完成。 ■

接下来需要从上方集中 $|S''|$，也就是说，证明（7）。如前所述，这意味着引理 4.8的结论成立。我们注意到 $|S''| = Z_1 - Z_2$，其中 Z_1 和 Z_2 定义如下：

- Z_1 是未在步骤 $v \in S$ 中着色的顶点数，步骤为 (N4)，并且
- Z_2 是未在步骤 $v \in S$ 中着色的顶点数，步骤为 (N4)，且这些顶点满足以下情形之一：– 某个 $u \in N_R(v,c) \setminus R_{high}$ 已激活并被分配 c，或– (v,c) 未能通过抛硬币。

我们证明 Z_1 和 Z_2 都集中在各自的均值附近，由此可知 $|S''|$ 从上方集中。为此，回顾定义在第 $(\Omega\ \Sigma, \Pr)$ 页 29上的概率空间。为使 $|S''|$集中，我们计划应用引理 2.11。为此，令 $\Omega^* \subseteq \Omega$ 为例外结果的集合：在这些结果中，存在某种颜色 $c' \in \bigcup_{v\in S} L_i(v)$，使得在 $\log^4 \Delta - 1$ 中被激活并被分配的顶点超过 S c'。我们先证明 $\Pr(\Omega^*)$ 很小。

引理5.3. $\Pr(\Omega^*) \le \exp(-\frac{1}{2}\log^4 \Delta)$。

证明。 我们固定 $c' \in \bigcup_{v\in S} L_i(v)$，并对超过$\log^4 \Delta - 1$ 个顶点$v \in S$ 已激活且被分配 c'的概率进行估计。根据引理 4.3 (ii)，有$L_i > \frac{1}{8}T_i$。给定顶点 $v \in S$已激活且被分配 c'的概率至多为 $\eta L_i^{-1} < \frac{8K}{T_i \log \Delta}$。由于 $|S| \le T_i$， S中已激活且被分配 c'的顶点数的期望小于 $\frac{8K}{\log \Delta} < \frac{1}{2}\log \Delta$。利用切尔诺夫界（引理2.8），取$\mu = \frac{1}{2}\log \Delta$且 $\delta = (2-\varepsilon)\log^5 \Delta$，激活且具有颜色 c'的顶点数超过 $\lfloor \log^4 \Delta \rfloor - 1$的概率至多为$\exp(-\frac{2}{3}\log^4 \Delta)$。对所有颜色 $c' \in \bigcup_{v\in S} L(v)$应用并集界，可得

$$\Pr(\Omega^*) < |S| k \exp\left(-\frac{2}{3}\log^4 \Delta\right) < \exp\left(-\frac{1}{2}\log^4 \Delta\right),$$

如所需。 ■

有了上述结果后，我们首先来关注 Z_1。

引理 5.4. $\Pr\left(|Z_1 - \mathbb{E}[Z_1]| > \frac{|S|}{8\log^2 \Delta}\right) \le \frac{1}{2}\exp(-\log^3 \Delta)$。

证明。 回顾一下， Z_1 表示在算法 S 之后仍未着色的顶点数4.1。我们可以将 Z_1 写成二元随机变量 Y_v 之和，其中 $v \in S$，且 $Y_v = 1$ 当且仅当 v在算法4.1之后未着色。我们将通过一系列命题来关注 Z_1 。

命题5.4.a. Y_v 是2-可验证的。

命题证明。 考虑一个事件 $Y_v = 1$。对于每个满足 $Y_v(\omega) = 1$ 的结果 $\omega \in \Omega \setminus \Omega^*$，我们定义一个验证器 R_v，如下：

$$R_v(\omega) = \begin{cases} \{v\} & \text{if } \Omega_v = 0, \text{ i.e. } v \text{ is not activated;} \\ \{v, u\} & \text{if } \omega_v = \omega_u = c' \text{ for some } u \in N(v) \text{ and color } c'. \end{cases} \tag{21}$$

我们还令 $R_v(\omega) = \emptyset$，当且仅当 $Y_v(\omega) = 0$。在第二种情况下，当 v 和一个邻点 $u \in N(v)$ 均已激活并被分配 c'时， u 从所有满足 $\omega_{u'} = \omega_v$ 的顶点 $u' \in N(v)$ 中任意选取。由于算法 4.1 之后 v 未着色这一事实，可由以下任一情况证实：(1) v未激活；或 (2) 将同一种颜色 c' 分配给 v 和某个邻点 $u \in N(v)$，因此函数 $R_v(\cdot)$ 满足定义 2.9 的条件。⊣

Claim 5.4.b. Z_1 对于验证函数 $(2,\log^4\Delta)$-可观测 R_v。

命题证明。 固定一个结果 $\omega \in \Omega \setminus \Omega^*$。首先，我们注意到，对于任意 $u \neq v$，每个顶点-颜色对 (v,c') 都不属于集合 $R_u(\omega)$。由此可知，每个顶点-颜色对至多属于一个见证集 $R_v(\omega)$。因此，要证明 $(2,\log^4\Delta)$-可观测性，只需证明以下结论：对于每个 $u \in V(G)$，至多有 $\log^4\Delta$ 个顶点 $v \in S$ 满足 $u \in R_v(\omega)$。

为此，考虑任意一个顶点 $u \in V(G)$。若 u 未被激活，则对于任意 $v \neq u$，u 都不能证明 $Y_v = 1$。因此，在这种情况下，只有当 $u = v$ 时，$u \in R_v(\omega)$ 才成立。若 u 已激活并被分配了某种颜色 c'，则 u 可能属于 $R_u(\omega)$。此外，对于每个 $v \in S \setminus \{u\}$，只有当 v 已激活并被分配 c' 时，u 才能证明 $Y_v = 1$。因此，只有当 $u = v$ 或 $\omega_v = c'$ 时，$u \in R_v(\omega)$ 才成立。由于 $\omega \in \Omega \setminus \Omega^*$，被激活且被分配 c' 的顶点 $v \in S$ 至多有 $\log^4\Delta - 1$ 个；因此，至多有 $\log^4\Delta$ 个顶点 $v \in S$ 满足 $u \in R_v(\omega)$，证毕。⊣

有了上述结论，我们旨在应用引理 2.11，其中 $\tau = \frac{|S|}{8\log^2\Delta}$、$r = 2$以及$d = \log^4\Delta$。为此，我们验证条件（1）成立。注意到 $|S| \gg d$，因此 $\sqrt{|S|d} \geq d$。于是，由于 $Z_1 \leq |S| \leq \Delta$，我们有

$$\begin{aligned} 96\sqrt{rd\mathbb{E}[Z_1]} + 128rd + 8\Pr(\Omega^*)\sup(Z_1) &= O\left(\sqrt{|S|d}\right) + 8\exp\left(-\frac{1}{2}\log^4\Delta\right)|S| \\ &= O\left(\sqrt{|S|d}\right). \end{aligned} \tag{22}$$

根据引理 (C2) 的条件 4.8，$|S| \geq \log^{16}\Delta$，因此可得 $\tau \gg \sqrt{|S|d}$。特别地，条件（1）成立，我们可以应用引理 2.11。

由于 $Z_1 \leq |S|$，我们有 $8rd(4\mathbb{E}[Z_1] + \tau) < |S|\log^8\Delta$。因此，

$$\begin{aligned} \Pr\left(|Z_1 - \mathbb{E}[Z_1]| > \frac{|S|}{8\log^2\Delta}\right) &\leq 4\exp\left(-\frac{|S|^2}{64|S|\log^{12}\Delta}\right) + 4\exp\left(-\frac{1}{2}\log^4\Delta\right) \\ &\leq \frac{1}{2}\exp\left(-\log^3\Delta\right), \end{aligned}$$

从而完成证明。 ■

我们采用类似的策略来集中处理 Z_2。

引理 5.5. $\Pr\left(|Z_2 - \mathbb{E}[Z_2]| > \frac{|S|}{8\log^2\Delta}\right) < 2\exp\left(-\log^3\Delta\right)$.

证明。 回想一下，Z_2 是 $v \in S$ 在算法4.1之后仍未着色的顶点数量，并且以下情况之一成立：

- 某个 $u \in N_R(v,c) \setminus R_{high}$ 被激活并被分配颜色 c，或者
- (v,c) 未能通过抛硬币而存活。

变量 Z_2 是二元随机变量 Y_v 之和，其中 $v \in S$，且 $Y_v = 1$ 当且仅当 v在算法4.1 之后仍未着色，且上述两个事件之一发生。我们将通过一系列断言来集中Z_2 。

断言 5.5.a. Y_v 是3-可验证的。

命题证明。对于每个 $v \in S$ 和 $\omega \in \Omega \setminus \Omega^*$ 满足 $Y_v(\omega) = 1$，我们定义 $R_v(\omega)$ 如同（21）中所示。当 $Y_v(\omega) = 1$时，我们还定义：

$$R'_v(\omega) = \begin{cases} \{(v,c)\} & \omega_{(v,c)} = 0 \\ \{u\} & \omega_{(v,c)} = 1 \text{ and } \omega_u = c \text{ for some } u \in N_R(v,c) \setminus R_{high}. \end{cases}$$

当 $Y_v(\omega) = 0$ 时，我们令 $R'_v(\omega) = \emptyset$。最后，我们定义 $R^*_v(\omega) = R_v(\omega) \cup R'_v(\omega)$。注意，每当 $Y_v(\omega) = 1$ 时， $R_v(\omega)$ 所指定的一次或多次试验都能证明 v 未着色，而 $R'_v(\omega)$ 所指定的试验则能证明以下两者之一：(1) 在算法 4.1 期间，某个 $w \in N_R(v,c) \setminus R_{high}$ 被激活并被分配 c；或 (2) (v,c) 未能通过算法 4.1 期间的均衡硬币翻转。因此，验证函数 R^*_v 满足定义 2.9 的条件，且 Y_v 是 3-可验证的。⊣

命题 5.5.b. Z_2 关于验证函数 R^*_v， Z_2 是 $d = 2^{|S|}\log^8\Delta$-可观测的$(3,d)$。

命题证明。固定一个结果 $\omega \in \Omega \setminus \Omega^*$，并统计一个给定元素可能属于多少个集合 $R^*_v(\omega)$。正如命题 5.4.b 的证明中所述，每个顶点 $u \in V(G)$ 和顶点-颜色对 (u,c') 至多属于 $\log^4\Delta$ 个集合 $R_v(\omega)$。此外，显然，顶点-颜色对 (u,c') 属于 $R'_v(\omega)$ 当且仅当 $u = v$。最后，顶点 $u \in V(G)$ 属于 $R'_v(\omega)$ 当且仅当 $u \in N_R(v,c) \setminus R_{high}$。由于每个 $u \in N_R(v,c) \setminus R_{high}$ 在 S 中至多有 $h = 2^{|S|}\log^8\Delta$ 个邻点，因此每个顶点和每个顶点-颜色对至多属于 $2^{|S|}\log^8\Delta$ 个集合 $R'_v(\omega)$，进而至多属于 $2^{|S|}\log^8\Delta + \log^4\Delta < 2^{2|S|}\log^8\Delta$ 个集合 $R^*_v(\omega)$。因此， Z_2 是 $(3,d)$-可观测的。⊣

有了上述结论，我们旨在应用引理2.11，其中取 $\tau = 2^{|S|}/8\log^2\Delta$、 $r = 3$，以及 $d = 2^{2|S|}/\log^8\Delta$。由于 $|S| \gg \sqrt{|S|d}$，与(22) 中相同的论证表明， τ 满足（1）。由于$|Z_2| \le |S|$ 和 $\tau < |S|$，我们有 $8rd(4\mathbb{E}[|Z_2|] + \tau) < 2^{240|S|^2}/\log^8\Delta$。因此，

$$\begin{aligned}
\Pr\left(|Z_1 - \mathbb{E}[Z_1]| > \frac{|S|}{8\log^2\Delta}\right) &\le 4\exp\left(-\frac{|S|^2\log^8\Delta}{64\cdot 240\log^4\Delta|S|^2}\right) + 4\Pr(\Omega^*) \\
&< 4\exp\left(-\frac{\log^4\Delta}{15360}\right) + 4\exp\left(-\frac{1}{2}\log^4\Delta\right) \\
&< \frac{1}{2}\exp(-\log^3\Delta),
\end{aligned}$$

证明完成。 ■

我们已准备好完成（7）的证明，这蕴含引理4.8。由三角不等式，由于$|S''| = Z_1 - Z_2$，我们有

$$||S''| - \mathbb{E}[|S''|]| = |Z_1 - Z_2 - \mathbb{E}[Z_1] + \mathbb{E}[Z_2]| \le |Z_1 - \mathbb{E}[Z_1]| + |Z_2 - \mathbb{E}[Z_2]|.$$

因此，由引理5.4和5.5，并令 $\tau = 2^{|S|}/8\log^2\Delta$，我们有

$$\begin{aligned}
\Pr\left(|S''| > \mathbb{E}[|S''|] + \frac{|S|}{4\log^2\Delta}\right) &\le \Pr\left(Z_1 > \mathbb{E}[Z_1] + \tau\right) + \Pr\left(Z_2 < \mathbb{E}[Z_2] - \tau\right) \\
&\le \Pr\left(|Z_1 - \mathbb{E}[Z_1]| > \tau\right) + \Pr\left(|Z_2 - \mathbb{E}[Z_2]| > \tau\right) \\
&\le \exp\left(-\log^3\Delta\right).
\end{aligned}$$

由上述结果和引理5.2，可得

$$\begin{aligned}
\Pr\left(|S''| > |S|(1-\eta L_i^{-1})^{\alpha}(1-\mathrm{Keep}_i) + \frac{|S|}{2\log^2\Delta}\right) &\le \Pr\left(|S''| > \mathbb{E}[|S''|] + \frac{|S|}{4\log^2\Delta}\right) \\
&\le \exp\left(-\log^3\Delta\right),
\end{aligned}$$

证明至此完成。

致谢

我们感谢感谢 Daniel Cranston 对本手稿早期草稿提出的宝贵意见。

参考文献

[1] D. Achlioptas 和 A. Coja-Oghlan。“来自相变的算法障碍”。载于：IEEE计算机科学基础研讨会（FOCS）（2008），第 793–802 页。完整版本：https://arxiv.org/abs/0803.2122（参见第 3 页）。[2] N. Alon、M. Krivelevich 和 B. Sudakov。“利用稀疏邻域对图着色”。载于：组合理论杂志B辑 77（1999年），第 73–82 页（参见第 2、8 页）。[3] L. D. Andersen。“三次图的强色指数至多为 10”。载于：离散数学 108.1-3（1992），第 231–252 页（参见第 3 页）。[4] J. Anderson、A. Bernshteyn 和 A. Dhawan。“对禁用二部子图的图进行着色”。载于：组合学、概率与计算 32.1（2023），第 45–67 页（参见第 3、6 页）。[5] J. Anderson、A. Bernshteyn 和 A. Dhawan。“对禁用近似二部子图的图进行着色”。载于：随机结构与算法 66.4（2025），e70012（参见第 3 页）。[6] A. Bandeira、A. Perry 和 A. S. Wein。“关于计算与统计间隙的札记：利用统计物理进行预测”。载于：《葡萄牙数学》75.2（2018），第 159–186 页（参见第 3 页）。[7] A. Bernshteyn。“用于DP着色的Johansson-Molloy定理”。载于：随机结构与算法 54.4（2019），第 653–664 页。issn：1042-9832,1098-2418。doi：10.1002/rsa.20811。url：https://doi.org/10.1002/rsa.20811（参见第 3 页）。[8] B. Bollobás。“色数、围长和最大度”。载于：离散数学 24（1978），第 311–314 页（参见第 3 页）。[9] M. Bonamy、T. Perrett 和 L. Postle。“利用稀疏邻域对图着色：界与应用”。载于：《组合理论杂志 B 辑》155（2022），第 278–317 页。issn：0095-8956,1098-0902。doi：10.1016/j.jctb.2022.01.009。url：https://doi.org/10.1016/j.jctb.2022.01.009（参见第 1 页）。[10] J. A. Bondy 和 M. Simonovits。“图中的偶长度圈”。载于：组合理论杂志B辑 16.2（1974），第 97–105 页（参见第 9 页）。[11] P. Bradshaw、A. Dhawan、A. Methuku 和 M. C. Wigal。《迈向Vu猜想》。2025年。arXiv：2508.16818 [math.CO]。url：https://arxiv.org/abs/2508.16818（参见第 6、7 页）。[12] H. Bruhn 和 F. Joos。“强色指数的一个更强上界”。载于：组合学、概率与计算 27.1（2018），第 21–43 页（参见第 1 页）。[13] D. W. Cranston。“使用 22 种颜色对最大度为 4 的图进行强边着色”。载于：离散数学 306.21（2006），第 2772–2778 页（参见第 3 页）。[14] D. W. Cranston。“图的平方着色、列表着色与绘色（及其他相关问题）”。载于：《电子组合学杂志》（2023），DS25–Apr（参见第 2 页）。[15] E. Davies、R. J. Kang、F. Pirot 和 J.-S. Sereni。“通过局部占用刻画图结构”。载于：arXiv预印本 arXiv:2003.14361（2020）（参见第 2、3 页）。[16] M. Delcourt 和 L. Postle。《在超图中避开禁用子匹配以寻找近完美匹配》。2022年。arXiv：2204 . 08981 [math.CO]。url：https://arxiv.org/abs/2204.08981（参见第 9 页）。

[17] A. Dhawan. “局部稀疏图的独立数和色数界”. In: 组合学年刊 (2025年), pp. 1–28. doi: https://doi.org/10.1007/s00026-025- 00778-7 (引文见第 3 页).[18] P. Erdős, A. Rubin, and H. Taylor. “图的可选色性”. In: Congr. Numer 26.4 (1979), pp. 125–157 (引文见第 4 页).[19] R. J. Faudree, R. H. Schelp, A. Gyárfás, and Z. Tuza. “图的强色指数”. In: Ars Combinatoria 29 (1990), pp. 205–211 (引文见第 3 页).[20] D. Gamarnik. “重叠间隙性质：优化随机结构的拓扑障碍”. In: 美国国家科学院院刊 118.41 (2021 年) (引文见第 3 页).[21] D. Gamarnik. “ 诺贝尔奖与阿贝尔奖阴影下的图灵：两项近期奖项背后的算法故事”. In: 美国数学学会通报 72.05 (2025年) (引文见第 3 页).[22] D. Gamarnik, C. Moore, and L. Zdeborová. “无序系统对计算困难性的启示”. In: 统计力学杂志：理论与实验 2022.11 (2022年), p. 114015 (引文见第 3 页).[23] P. Haxell. “关于顶点列表着色的一则注记”. In: Comb. Probab. Comput. 10.4 (2001), pp. 345– 347 (引文见第 5 页).[24] S. Hoory, N. Linial, and A. Wigderson. “扩展图及其应用”. In: Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 43.4 (2006), pp. 439–561. issn: 0273-0979,1088-9485. doi: 10.1090/ S0273- 0979- 06- 01126- 8. url: https://doi- org.proxy2.library.illinois.edu/10. 1090/S0273-0979-06-01126-8 (引文见第 16 页).[25] P. Horák, H. Qing, and W. T. Trotter. “三次图中的诱导匹配”. In: 图论杂志 17.2 (1993), pp. 151–160 (引文见第 3 页).[26] M. Huang, M. Santana, and G. Yu. “最大度为四的图的强色指数”. In: 《电子组合学杂志》 25.3 (2018 年), pp. 3–31 (引文见第 3 页).[27] E. Hurley, R. de Joannis de Verclos, and R. J. Kang. “一种为有界局部密度图着色的改进过程”. In: Adv. Comb. (2022年), Paper No. 7, 33. issn: 2517-5599 (引文见第 1 页).[28] A. Johansson. “无三角形图的渐近选择数”. In: (1996年) (引文见第 2、3 页).[29] A. Johansson. “稀疏图的选择数”. In: (1996年) (引文见第 3 页).[30] T. Kaiser and R. J. Kang. “图的距离-t 色指标”. In: 组合学、概率与计算 23.1 (2014年), pp. 90–101 (引文见第 3、8、13 页).[31] D. Y. Kang, T. Kelly, D. Kühn, A. Methuku, and D. Osthus. “基于轻咬法的图与超图着色：综述”. In: 欧洲数学大会. 2023, pp. 771–823 (引文见第 4 页).[32] H. A. Kierstead and A. V. Kostochka. “Hajnal-Szemerédi 均衡着色定理的简短证明”. In: Comb. Probab. Comput. 17.2 (2008), pp. 265–270. issn: 0963- 5483,1469-2163. doi: 10 . 1017 / S0963548307008619. url: https : / / doi . org / 10 . 1017 / S0963548307008619 (引文见第 9 页).[33] J. H. Kim. “关于稀疏图的 Brooks 定理”. In: 组合学、概率与计算 4.2 (1995), pp. 97–132 (引文见第 3、4、7 页).

[34] P. Kővári, V. T Sós, and P. Turán. “关于 Zarankiewicz 问题”. In: Colloquium Mathe-maticum. Vol. 3. 波兰科学院. 1954年, pp. 50–57 (引文见第 9 页).[35] L. Li and L. Postle. 无三角形超图的色数. 2022年. arXiv: 2202.02839 [math.CO]. url: https://arxiv.org/abs/2202.02839 (引文见第 9、10 页).[36] M. Mahdian. “ C_4-free 图的强色指数”. In: 第九届“随机结构与算法”国际会议（波兹南，1999年）. Vol. 17. 3-4. 2000年, pp. 357–375. doi: 10.1002/1098-2418(200010/12)17:3/4<357::AID-RSA9>3.0.CO;2- Y. url: https : / / doi . org / 10 . 1002 / 1098 - 2418(200010 / 12) 17 : 3 / 4 % 3C357 :: AID - RSA9%3E3.0.CO;2-Y (引文见第 2 页).[37] M. Mitzenmacher and E. Upfal. 概率与计算. 第二版. 算法与数据分析中的随机化与概率技术. 剑桥大学出版社，剑桥，2017年, pp. xx+467. isbn: 978-1-107-15488-9 (引文见第 9 页).[38] M. Molloy. “ 小团数图的列表色数 ”. In: 《组合理论杂志 B 辑》 134 (2019 年), pp. 264–284. issn: 0095-8956. doi: 10.1016/j.jctb.2018.06.007 (引文见第 1、3 页).[39] M. Molloy and B. Reed. 图着色与概率方法. Vol. 23. 算法与组合学. 施普林格出版社，柏林，2002年, pp. xiv+326. isbn: 3-540-42139-4. doi: 10. 1007/978-3-642-04016-0. url: https://doi.org/10.1007/978-3-642-04016-0 (引文见第 1、4、5 页).[40] S. Pettie and H.-H. Su. “无三角形图的快速分布式着色算法”. In: 自动机、语言与编程国际研讨会. 施普林格. 2013年, pp. 681– 693 (引文见第 3 页).[41] F. Pirot and E. Hurley. 用一阶矩方法为局部稀疏图着色. 2021 年. arXiv: 2109.15215 [math.CO]. url: https://arxiv.org/abs/2109.15215 (引文见第 2、8 页).[42] M. Rahman and B. Virág. “独立集的局部算法是半最优的”. In: 《概率年刊》45.3 (2017年), pp. 1543–1577 (引文见第 3、4 页).[43] V. Vizing. “用指定颜色为图的顶点着色”. In: 《离散分析》 29.3 (1976年), p. 10 (引文见第 4 页).[44] V. H. Vu. “局部稀疏图列表色数的一般上界”. In: 组合学、概率与计算 11.1 (2002年), pp. 103–111 (引文见第 2 页).[45] A. S. Wein. “最大独立集的最优低次困难性”. In: 《数理统计与学习》4.3 (2022 年), pp. 221–251 (引文见第 3 页).[46] L. Zdeborová and F. Krząkała. “随机图着色中的相变”. In: 《物理评论 E》76 (2007年), p. 031131 (引文见第 3 页).

数学系 ，伊利诺伊大学厄巴纳-香槟分校
电子邮件地址：rbi3@illinois.edu

数学系，伊利诺伊大学厄巴纳-香槟分校电子邮件地址：pb38@illinois.edu

数学系 ，伊利诺伊大学厄巴纳-香槟分校
电子邮件地址：adhawan2@illinois.edu

数学系 ，伊利诺伊大学厄巴纳-香槟分校
电子邮件地址：jx6@illinois.edu