arXiv:2603.15215v1 [stat.OT] 16 Mar 2026

排名上的最深投票

Jean-Baptiste Aubin[1],Antoine Rolland[2], Ioana Gavra[3], Ir`ene Gannaz[4], 和 Jacques Anderson Kouassi[4]

[1]里昂大学、里昂国立应用科学学院、让·莫内大学、克洛德·贝尔纳里昂第一大学、里昂中央理工学院、ICJ、UMR5208，法国维勒班 69621[2]里昂第二大学、克洛德·贝尔纳里昂第一大学、ERIC，法国里昂 69007[3]雷恩第二大学、IRMAR - CNRS第6625联合研究单位，法国雷恩 F-35000，[4] 格勒诺布尔阿尔卑斯大学、法国国家科学研究中心、格勒诺布尔国立综合理工学院、G-SCOP，法国格勒诺布尔 38000

2026年2月

摘要

本文旨在提出一个统一框架，运用排列上的深度函数来构建基于排名的投票规则，作为Aubin等人 [2022]所引入的评价上的最深投票规则的对应形式。本文介绍了连续集合和排列集合中的深度函数概念，后者采用 Fr´echet 均值的概念。随后，本文对最深投票程序作出形式化定义，并利用排列集合上的多种距离，将一些经典投票规则表述为最深投票程序。本文还阐明了深度函数的数学性质与投票规则的某些特性之间的联系，例如中立性、匿名性、普遍性、孔多塞胜者／败者性质等。

1 引言

投票程序（或社会选择函数）是一种将个人判断汇总为集体结果的过程。在单名选举中，结果应是在有限候选人集合中选出唯一获胜者。传统上，投票理论一直由基于偏好（序数）的方式主导：每位选民都被视为按照偏好对候选人进行排名，社会选择函数则据此选出获胜者或确定社会排序。经典例子包括相对多数投票和波达计数法，它们将选民排名视为集体偏好的体现，并满足多数支持或单调性等规范性标准。社会选择理论对这些模型进行了严格的形式化研究，探讨其性质与局限；最著名的例子是阿罗不可能性定理，以及与之相关的策略性问题，例如关于序数规则可操纵性的吉巴德–萨特思韦特定理。

另一种框架同样可行，涉及基于评价的（基数）投票程序。选民需要为每个选项赋予分数或等级，从而提供比排名更丰富的信息

关于支撑强度。基数方法（如分数投票或范围投票）更便于捕捉选民偏好的细微差异，从而应能改善集体福利结果。

在基于评价的投票规则这一背景下，Aubin等人 [2022] 提出了一种统一的社会选择函数模型，该模型基于深度函数这一概念。深度函数用于衡量散点图中一个点的“中心性”。因此，最深点就是散点图中最居中的点。当然，不同的深度函数有很多种，它们可能会得出不同的最深点。例如，在一维空间中，可以将与其他点的绝对差之和或平方差之和视为深度函数（严格来说，是深度函数的倒数），由此分别得到中位数和均值作为最深点。

粗略来说，Aubin等人 [2022] 提出了最深投票规则：将选民视为候选人空间中的点，并试图找出选民集合中“最居中”的选民。因此，这位特定选民被视为最能代表集体评价，而选择其选票则被视为集体选择。选择特定的深度函数，就可以定义相应的投票规则，其中包括范围投票或多数判断等知名的基于评价的投票规则。

本文旨在将最深投票方法推广到基于排名的投票。Aubin等人 [2022] 仅考虑基于评价的设置。本文提出通过在被视为排列的排名上定义深度函数，对基于排名的投票规则进行形式化。我们采用 p–Fr´échet均值的概念，将深度函数的概念推广到排列。我们证明，一些常见程序（即巴克林、博尔达、凯梅尼、相对多数制、反相对多数制）可以表述为最深投票过程。我们还分析了若干经典投票规则性质，考察它们是否满足基于排名的最深投票规则。

投票规则的距离合理化也是一种公理化方法，它利用排名之间的距离来确定投票过程的结果，例如参见Meskanen和Nurmi[2008], Elkind等人 [2009] 以及Elkind等人 [2010]。然而，这一框架有所不同。投票规则的合理化基于这样一种思路：将整体投票概况与距离最近的无歧义投票概况进行比较（例如，Nitzan [1981]早期研究中的一致投票概况），从而得到一个无歧义的选举获胜者。例如，道奇森投票规则是相对于肯德尔距离对孔多塞胜者进行合理化：要达到孔多塞胜者，需要对观察到的选举概况作出多大程度的改变？与此相反，最深投票只衡量选民之间的内部距离，以找出最居中的选民，即最能代表选举概况的选民。

最近，Level r Consensus 方法由 Mahajne 等人 [2015] 提出，研究的是选举概况中偏好关系之间的距离，而非最深投票规则中的选民之间的距离。

形式上，我们考虑一个包含 n 名选民的框架，$\mathrm{V} = \{1, \ldots\ldots n\}$，以及 m 名候选人 $\mathrm{C} = \{1, \ldots\ldots m\}$。在一个投票情境中，每位选民 v 对候选人 c给出一个意见，记作 e_{cv}。这些意见 $(e_{cv})_{c \in C}$ 取值于 E。在偏好排序投票中，集合 E 就是偏好集合。也就是说，$\mathrm{E} = \mathfrak{S}_m$，其中 $\mathfrak{S}_m$ 是 $\{1, \ldots\ldots, m\}$ 的排列集合。基于评价的框架的理念

是将意见集合改为评价，而非排名。在这种情况下，$\mathrm{E} = \Lambda^m$，其中 Λ 是某位选民对每位候选人的评价集合。经典选择包括 $\Lambda = \{1, \ldots\ldots, K\}$（离散评价）和 $\Lambda = [0, M]$（连续评价）。接下来，我们将假设，选民对某位候选人的偏好越高，对该候选人的评价就越低。也就是说，如果选民 v 偏好候选人 c_1 胜过候选人 c_2，那么 $e_{c_1 v} < e_{c_2 v}$。这种排序与排名中的排序相同，因此可以进行类比。

因此，投票框架由选票 $\Phi = (e_{cv})_{v \in \mathcal{V},\ c \in C}$ 构成。对于每位选民 v，其意见 $(e_{cv})_{c \in C}$ 可视为一个 m 维多元随机变量 E 的实现，其中 E 取值于 E。这种统计学视角提供了一个有趣的观察角度，使我们能够运用统计工具描述选票集合。具体而言，通过应用统计深度函数，我们可以找到分布的中心。

引用 Zuo 和 Serfling [2000]: “对于给定的分布 F，定义在 $\mathbb{R}^m$ 上的深度函数旨在提供一种基于 F 的由中心向外的排序 [.....]，对 $\mathbb{R}^m$ 中的点 x 进行排序。高深度对应于中心性，低深度则对应于离群性。”换言之，深度函数在散点图中心取较高的（正）值，在散点图之外则趋于零。第 2 节将给出正式定义。定义在 E 上的深度函数 D 是定义在 $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$ 上的函数，其中 F 是 E 上所有概率分布的集合。其取值属于 $[0, \infty)$，且构造方式使得对于 E 上任意分布 F，函数 $D(., F)$ 在一个可视为该分布中心的点 F 处达到最大值。应用于观测到的投票情形时，$\Phi \in \mathrm{E}^n$，$D(., \Phi)$ 在一个可视为与 Φ 相关的经验分布中心的点处达到最大值。这种方法不仅能够找回均值或中位数等经典分布中心，还能定义具有有趣性质的多种中心。

将深度函数 $D()$ 应用于投票情境 $\Phi \in \mathcal{E}^n$，可得出一位（可能是虚构的）中心选民，v^* 其意见为 $E^* \in \mathcal{E}^m$, $E^* = (e_1^*, \ldots e_m^*)^\top$。该选民 v^* 最偏好的候选人就是与该深度函数相关联的选票的获胜者。Aubin等人将这一程序定义为最深投票程序。Aubin等人 [2022]。本文研究 $\mathcal{E} = \mathfrak{S}_m$ 的情形。

本文结构如下。第2节介绍连续集合 $\mathbb{R}^m$ 和排列集合 $\mathfrak{S}_m$上的深度函数定义。后者尤其基于 Fr´echet 均值的概念以及 $\mathfrak{S}_m$上的距离，本节将回顾这些内容。随后在第3节定义最深投票程序。第4节给出连续深度的一些结果，而第5节则讨论基于排列的深度。特别是，本文将一些经典投票规则表述为最深投票程序，并探讨深度函数的数学性质与投票规则某些行为之间的联系，例如中立性、匿名性或普遍性。证明见附录。

2 深度函数的定义

本节给出深度函数的正式定义。我们首先考虑定义在连续多元集合上的深度函数，这些集合是 $\mathbb{R}^m$ 的连通子集。接下来，我们介绍定义在排列集合 $\mathfrak{S}_n$ 上的深度函数。

2.1 连续情形下的深度函数

这里回顾定义在 $\mathbb{R}^m$ 上的深度函数的定义。这种深度函数可应用于任意连通集 $\mathcal{E}_D \subseteq \mathbb{R}^m$。更详细的概述请参阅 Mosler [2013], Zuo和Serfling [2000] 及其中的参考文献。

定义 1. 设映射 $D: \mathbb{R}^m \times \mathrm{F} \to \mathbb{R}^+$ 有界，且满足：

(C1) 置换稳定性。设 $E = (e_1, \ldots, e_m)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的随机向量，$x \in \mathbb{R}^m$，且 σ 是 $\{1, \ldots, m\}$ 上的一个排列。设 $E_\sigma = (e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(m)})$ 和 $x_\sigma = (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(m)})$。则 $D(x_\sigma, F_{E_\sigma}) = D(x, F_E)$。(C2) 仿射不变性。对于所有 $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^m$，以及任意随机向量 $E \in \mathbb{R}^m$，$\mathrm{argmax}_{x \in \mathbb{R}^m} D(a\,x+b, F_{a\,E+b}) = \mathrm{argmax}_{x \in \mathbb{R}^m} D(x, F_E)$，其中 F_X 表示随机变量 X 的分布。(C3) 中心处最大性。对于具有唯一确定中心 θ 的分布 $F \in \mathrm{F}$（例如，对称点），$D(\theta, F) = \sup_{x \in \mathbb{R}^m} D(x, F)$。(C4) 拟凹性。对于任意 $F \in \mathrm{F}$，$D(\cdot, F)$ 是拟凹的。也就是说，若 $\theta \in \mathrm{argmax}_{x \in \mathbb{R}^m} D(x, F)$，则对任意 $0 \le \lambda \le 1$，$D(x, F) \le D(\theta + \lambda(x - \theta), F)$。(C5) 无穷远处消失。令 k.k 表示 $\mathbb{R}^m$ 上的欧几里得范数。则对于每个 $F \in \mathrm{F}$，当 $\mathrm{k}x\mathrm{k} \to \infty$ 时，$D(x, F) \to 0$。(C6) 设 $F \in \mathrm{F}$ 是 $\mathbb{R}^m$ 上具有边缘分布 $F_1, \ldots, F_m$ 的分布。假设对于 $c \in \{1, \ldots, m\}$，F_c 的支撑集包含唯一一点 $\{\alpha\}$。那么对于所有 $x^* \in \mathrm{argsup}_{x \in \mathbb{R}^m} D(x, F)$，$x^*$ 的 c^{th} 坐标为 $x^*_c = \alpha$。

于是，$D(\cdot, \cdot)$称为统计深度函数。

关于这些假设的讨论，请参阅Aubin等人 [2022] 。请注意，(C3) 中的对称性概念并未（有意地）精确定义；对称性可以有多种定义，按约束从强到弱依次包括中心对称、角对称和半空间对称。

在我们的语境中，我们将深度函数应用于经验分布。考虑一个有 n 位选民和 m 位候选人的投票情境，$\mathrm{C} = \{1, \ldots m\}$，其意见矩阵为 $\Phi \in \mathrm{E}^n$。令$D()$为定义在$\mathrm{E}_D \times \mathrm{F}$上的深度函数。下文中，我们将用 $D(., \Phi)$表示深度函数 $D(x, F_\Phi)$，其中 F_Φ 是E中投票者意见的经验分布，$\{\Phi(., v) = (e_{cv})_{c \in \{1,\ldots,m\}}, v = 1, \ldots, n\}$。

令 $x \in \mathbb{R}^m$ 和 $\Phi(., 1), \ldots, \Phi(., n)$ 属于 $\mathbb{R}^m$。满足 定义 1 的深度函数示例如下：

加权 L^q 深度。[Zuo, 2004, Mosler, 2013] 加权 L^q 深度定义为

$$wL^q D(x, \Phi) = \frac{1}{1 + \frac{1}{n} \sum_{v=1}^{n} \omega(\|\Phi(., v) - x\|_q)},$$

其中， $q > 0$, ω 是定义在 $[0,\infty)$ 上的非递减连续函数，且 $\omega(\infty) = \infty$ ，并且 $\|x - x'\|_q = \left(\sum_{c=1}^{m} |x_c - x'_c|^q\right)^{1/q}$。

若 $\omega: x \mapsto x^q$，则

$$L^q D(x,\Phi) := \frac{1}{1 + \frac{1}{n}\sum_{v=1}^{n}\sum_{c=1}^{m} |\Phi(c,v) - x_c|^q}$$

将称为 L^q 深度。

若 $q = \infty$，则定义可扩展为 $L^\infty D(x, \Phi) := 1/\left(1 + \frac{1}{n}\sum_{v=1}^{n} \max_{c=1,\ldots m} |\Phi(c, v) - x_c|\right)$。

半空间深度。 [Tukey, 1975] 半空间深度定义为

$$HD(x,\Phi) := \text{ minimum proportion of voters in a halfspace } H \text{ including } x.$$

投影深度 [Zuo, 2003] 投影深度定义为

$$PD(x,\Phi) := \inf_{u\in\mathbb{R}^m,\, \|u\|=1} \frac{1}{1 + |u^\top x - \mu(F_u)|/\sigma(F_u)},$$

其中 $\|\cdot\|$ 表示欧几里得范数， ， $\mu(F)$ 表示某个分布的中心统计量 F，而 $\sigma(F)$ 表示离散统计量。 F_u 是 $u^\top\Phi$ 的经验分布。通常， $\mu(\cdot)$ 是中位数， $\sigma(\cdot)$ 是中位数绝对偏差。

注意，按照 L^q-深度，可以通过定义在 $\mathbb{R}^m$ 上的距离 $d()$ 构造一个深度函数，考虑$D(x, \Phi_n) := 1/(1 + d(x_c, \Phi(c, v)))$。

2.2 排列上的深度函数

我们的目标是将基于评价的框架中由 Aubin等人 [2022], 定义的最深投票框架扩展到基于偏好排名的投票方法。对于偏好排名，意见属于集合 $\mathcal{E} = \mathfrak{S}_m$。我们可以考虑定义在 $\mathcal{E}_D = [0,m]^m$ 上的深度函数，因为 $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}_D$，但探索定义在 $\mathcal{E}_D = \mathfrak{S}_m$ 上的深度函数似乎更为合适。为实现这一目标，我们希望在排列集合上定义深度函数。

在定义深度函数之前，让我们回顾一下关于 $\mathfrak{S}_m$ 上距离的一些定义。

2.2.1 排列上的距离

文献中已定义了集合 $\mathfrak{S}_m$ 上的多种距离（参见 Deza和Huang [1997]和 Deza和Deza [2016] 的综述）。尤其是，对于 σ， $\tau \in \mathfrak{S}_m$，距离的例子包括

肯德尔距离：

$$d_K(\sigma,\tau) = \sum_{c=1}^{m-1}\sum_{c'=c+1}^{m} \mathbb{1}\{(\sigma(c) - \sigma(c'))\,(\tau(c') - \tau(c)) < 0\}.$$

汉明距离：

$$d_H(\sigma,\tau)=\sum_{c=1}^{m}\mathbb{1}\{\sigma(c)\neq\tau(c)\}.$$

凯莱度量（或换位距离）： d_C（σ， τ）是从 τ 得到 σ （参见Diaconis [1988]），

$$d_C(\sigma,\tau)=m-\#\text{cycles in}(\sigma\circ\tau^{-1}),$$

其中 $\sigma\circ s$ 表示依次应用 s 和 σ：对所有 $c\in\{1,\ldots\ldots,m\}$， $\sigma\circ s(c)=\sigma(s(c))$。

闵可夫斯基-霍尔德距离：

$$\forall q\in[1,+\infty),d_q(\sigma,\tau)=\Big(\sum_{c=1}^{m}|\sigma(c)-\tau(c)|^q\Big)^{\frac{1}{q}},$$
$$d_\infty(\sigma,\tau)=\max_{c\in\{1,\ldots,m\}}\big|\sigma(c)-\tau(c)\big|.$$

在闵可夫斯基-霍尔德距离中，有两种特殊情况，即当 $q=1$ 和 $q=2$时：

当 $q=1$ 时，闵可夫斯基-霍尔德距离称为 Spearman 足尺距离，

当 $q=2$ 时，闵可夫斯基-霍尔德距离称为斯皮尔曼 ρ 距离。

2.2.2 排列上的加权距离

在投票情境下衡量两个排名列表之间的差异时，我们可能希望考虑一些额外信息：例如排列在哪些位置上不同，或者在可用时，候选人之间的相似度量。通过引入权重来平衡距离中的信息，可以对第2.2.1节 中介绍的一些经典距离稍作修改。例如，我们可能希望相比其他候选人，给予排名第一的候选人更高的权重，因为第一位更具代表性。或者，我们可能希望构造一种距离，使两个给定排名之间差异的权重随差异增大而增加。其思路是，在距离中引入权重，这些权重取决于被比较的两个排名Kumar 和 Vassilvitskii [2010]。权重表示为 $\{w_{r,\,r'},\ \ r,\ \ r'\in\{1,\ldots\ldots,\ m\}\}$。

将此方法应用于汉明距离和 Minkowski-Holder 型距离，可得，对于 $\sigma,\ \tau\in\mathfrak{S}_m$,

- 加权汉明距离：

$$d_{wH}(\sigma,\tau)=\sum_{c=1}^{m}w_{(\sigma(c),\tau(c))}\mathbb{1}\{\sigma(c)\neq\tau(c)\},$$

- 加权闵可夫斯基-赫尔德型距离，用于 $q\in[1,+\infty)$ ：

$$d_{wq}(\sigma,\tau)=\Big(\sum_{c=1}^{m}w_{(\sigma(c),\tau(c))}(|\sigma(c)-\tau(c)|)^q\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

权重 $w_{r,\ r'} > 0$ 用于各个位置 r，$r' \in \{1, \ldots\ldots, m\}$，以平衡交换的重要性，即在排名中从位置 r 移动到位置 r' 的重要性。

虽然 $d_{w_r H}()$ 确实是 $\mathfrak{S}_m$ 上的距离，但一般而言，上文引入的函数 $d_{wH}()$ 和 $d_{wq}()$ 却不再是距离。特别是，三角不等式不一定成立。如果权重是对称的，也就是说，对于所有 r，$r' \in \{1, \ldots, m\}$，都有 $w_{r,\ r'} = w_{r',\ r}$，那么这两个差异函数就是半度量（它们满足距离的所有公理，但不满足三角不等式）。然而，所谓的 ρ-松弛三角不等式仍然成立，因此我们有

$$d_w(\sigma_1, \sigma_2) \leq \rho(d_w(\sigma_1, \sigma_3) + d_w(\sigma_3, \sigma_2)),$$

其中 $\rho = \max_{r_a,\ r_b,\ r_c} \frac{w_{r_a}}{w_{r_a}} \frac{r_b}{r_c}$，且 $d_w()$ 等于 $d_{wH}()$ 或 $d_{wp}()$。

2.2.3 与距离相关联的深度函数

设 $\mathcal{P}_m$ 表示 $\mathfrak{S}_m$ 上概率分布的集合。给定 $\mathfrak{S}_m$ 上的一个距离，Goibert 等人[2022] 提出了排列上的深度函数的如下定义。

定义2 (Goibert 等人 [2022])。设 $d()$ 是排列集合 $\mathfrak{S}_m$ 上的距离。 $D : \mathfrak{S}_m \times \mathcal{P}_m \mapsto \mathbb{R}^+$ 若满足以下性质，则称其为深度函数:

(P1) 不变性。对于所有 $s \in \mathfrak{S}_m$ 和 $\Pi \in \mathrm{P}_m$，定义 Π_s 概率分布，使得$\Pi_s(\sigma) := \Pi(\sigma \circ s^{-1})$ 对所有 $\sigma \in \mathfrak{S}_m$成立。若且唯若对于所有$\sigma$，$s \in \mathfrak{S}_m$，以及所有 $\Pi \in \mathrm{P}_m$，均有 $D(\sigma,\ \Pi) = D(\sigma \circ s,\ \Pi_s)$，则称 D 具有不变性。

(P2) 中心处最大性。对于具有对称中心（稍后定义）的分布 Π，函数 $D(., \Pi)$ 在该中心处达到最大值。

(P3) 局部单调性。设 $\Pi \in \mathrm{P}_m$，并定义 $\sigma^* = \mathrm{argmax}_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} D(\sigma,\ \Pi)$。假设最深排列 σ^* 唯一。那么，对于任意满足 $d(\sigma^*,\ \sigma \circ \tau) = d(\sigma^*,\ \sigma)+1$ 的 τ，$\sigma \in \mathfrak{S}_m$，均有 $D(\sigma \circ \tau,\ \Pi) \leq D(\sigma, \Pi)$。

（P4）全局单调性。令 $\Pi \in \mathrm{P}_m$，并定义 $\sigma^* = \mathrm{argmax}_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} D(\sigma,\ \Pi)$。假设最深排列 σ^*是唯一的。则有 $d(\sigma^*,\ \sigma) \leq d(\sigma^*,\ \tau) \Rightarrow D(\tau,\ \Pi) \leq D(\sigma,\ \Pi)$。

这些性质与定义 1非常相似。首先，（C2）不适用于排列的情形。事实上，仿射变换在集合 $\mathfrak{S}_m$ 上未定义。此外，由于该集合是可数的，（C5）也不适用。接下来，（P1）与（C1）相似，而（P3）和（P4）分别对应于（C4）。

最后，（P2）与（C3）在连续情形中的表述一样，指出深度函数在某个自然中心（若存在这样的中心）处达到最大值。Goibert 等人 [2022] 定义了一个 H-中心（见命题 11），它对应于半空间对称性。作者还基于距离 d（）在 $\mathfrak{S}_m$上定义了一个 M-中心（见定义6）。关于精确定义和讨论，请参阅后文。

这些性质使得深度函数确实能在排列样本的中心处达到最大值，其表现也类似于定义在 $\mathbb{R}^m$ 上的深度函数。

定义2中的深度函数与弗雷歇均值´密切相关。弗雷歇´引入了 [1948] 阶典型位置的概念 p， $p \geq 1$ 该概念适用于一般度量空间上的分布，是对 p 欧几里得空间上的分布所对应的 p阶弗雷歇´均值这一经典矩的推广。对于排列，与p阶弗雷歇´均值相关联的函数可视为度量空间$(\mathfrak{S}_m, d)$ 上的深度函数，如下所示。

定义3. 设 $(\mathfrak{S}_m, d)$ 是一个赋有概率测度 Π 的度量空间。对于 $p \geq 1$，相对于 Π，$(\mathfrak{S}_m, d)$ 上的 p-Fr´echet 均值定义为

$$\underset{\sigma \in \mathfrak{S}_m}{\operatorname{argmin}} U_{d,\Pi,p}(\sigma), \ with \ U_{d,\Pi,p}(\sigma) = \mathbb{E}_{S\sim\Pi}\left[d^p(\sigma, S)\right].$$

基于这一概念，Goibert 等人 [2022] 定义了一些与 $\mathfrak{S}_m$上的度量相关联的排序深度函数。

定义 4 (Goibert 等人 [2022]). 设 $\mathfrak{S}_m$ 为$\{1, \ldots, m\}$上的排列集合。设 $d()$ 为 $\mathfrak{S}_m$ 上的一个距离，且 $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$ 为给定参数。与(d, p) 相关联的深度函数定义如下： $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_m$，对所有 $\Pi \in \mathcal{P}_m$,

$$D(\sigma, \Pi) = \|d^p\|_\infty - \mathbb{E}_{S\sim\Pi}[d^p(\sigma, S)] = \|d^p\|_\infty - U_{d,\Pi,p}(\sigma),$$

其中 $\|d^p\|_\infty = \max_{\sigma,\tau\in\mathfrak{S}_m} d^p(\sigma, \tau)$, S是一个服从 Π分布的随机变量，且 $U()$在定义3中定义。

作者证明，在分布 Π满足充分条件时，上述定义中给出的、与肯德尔距离相关联的深度函数（见（2.2.1））对任意 $p \geq 1$均满足定义2 的性质。他们还证明，采用 Spearman 足尺距离或斯皮尔曼 ρ-距离（（2.2.1）分别取 $q = 1$ 和 $q = 2$）时，(P1) 和 (P2) 成立。

最深点可以定义为使深度函数最大化的排列。Goibert 等人[2022] 引入了共识排序和重心排序，它们分别对应于在 $p = 1$ 和在 $p = 2$ 中根据定义 4获得的最深点。下文将重点讨论这两种情况。它们与 p-Fr´échet 均值的关系如下。

定义 5 (Goibert 等人 [2022])。设$(\mathfrak{S}_m, d)$ 是赋有概率测度 Π的度量空间。记 $D_1()$ 和 $D_2()$ 分别为与$(d, 1)$ 和$(d, 2)$ 相关的深度函数，其定义见定义 4。则，

(i) 共识排序 $\sigma^* \in \mathfrak{S}_m$ 是满足以下条件的排列：

$$D_1(\sigma^*, \Pi) = \max_{\sigma\in\mathfrak{S}_m} D_1(\sigma, \Pi) = \|d\|_\infty - \min_{\sigma\in\mathfrak{S}_m} U_{d,\Pi,1}(\sigma);$$

(ii) 重心排序 $\sigma^* \in \mathfrak{S}_m$ 是满足以下条件的排列：

$$D_2(\sigma^*, \Pi) = \max_{\sigma\in\mathfrak{S}_m} D_2(\sigma, \Pi) = \|d^2\|_\infty - \min_{\sigma\in\mathfrak{S}_m} U_{d,\Pi,2}(\sigma).$$

注释 1。请注意， $\mathbb{E}_\Pi[d(\sigma, S)] = U_{d,\Pi,1}(\sigma)$ 表示，对于任意距离 $d()$ 和定义在 $\mathfrak{S}_m$ 上的任意概率分布 Π，通过最大化深度函数 $D_1(\sigma, \Pi)$ 得到的排名，可以通过最小化同一空间上与 1-Fr´echet 均值相关的泛函来求得。具体而言，

由深度函数 $D_1(\sigma,\ \Pi)$ 得到的共识排序，是 $(\mathfrak{S}_m,\ d,\ \Pi)$ 上的 1-Fr´echet 均值，也可视为 $\mathfrak{S}_m$ 上的中位数排名。

注释 2. 使用 Zuo和Serfling [2000], $U_{d,\ \Pi,\ p}$ 对应于B型深度函数的逆函数。

与连续情形类似，我们将在投票意见的经验分布上应用深度函数。考虑一个包含 n 名选民和 m 名候选人的投票情境，其意见矩阵为 $\Phi \in \mathrm{E}^n$。如果意见是排名，则 Φ 写作 $\Phi = (\sigma_v)_{v=1,\ \ldots,\ n}$，且$\mathrm{E} = \mathfrak{S}_m$。设 $D()$为定义在$\mathrm{E}_D \times \mathrm{P}_m$上的深度函数。下文中，我们将用 $D(.,\ \Phi)$表示深度函数$D(x,\ F_\Phi)$，其中 F_Φ 是$\mathrm{E} = \mathfrak{S}_m$中投票者意见的经验分布，$\{\Phi(.,\ v) = (e_{cv})_{c\in\{1,\ldots,m\}},\ v = 1,\ \ldots,\ n\}$。

3 最深投票

深度函数定义完毕后，可以按如下方式构建最深投票程序。

定义6（最深投票）。考虑一个包含 n 选民和 m 候选人的投票情境，$\mathrm{C} = \{1,\ \ldots\ldots\ m\}$，其意见矩阵为 $\Phi \in \mathrm{E}^n$。设 $D(.,.)$是定义在 $\mathrm{E}_D \times \mathrm{F}$ 上的深度函数，其中 $\mathrm{E} \subseteq \mathrm{E}_D \subseteq \mathbb{R}^m$，F 是 E_D上的概率分布集合。记

$$\mathcal{E}_D^* := \{E \in \mathbb{R}^m : D(E,\Phi) = \sup(D(.,\Phi))\}$$

关于 Φ的最深点（意见）集合。

Let

$$c_D^* := \underset{c\in C}{\operatorname{argmin}}\{e_{D,c}^*,\ E_D^* = (e_{D,1}^*,\ldots,e_{D,m}^*)^\top \in \mathcal{E}_D^*\}.$$

关于深度 $D()$的最深投票过程定义为一个函数，它将 $\{\Phi(c,\ v),\ c = 1,\ \ldots\ldots,\ m,\ v = 1,\ \ldots\ldots,\ n\}$映射到 $c_D^* \subseteq \mathrm{C}$。

如果 c_D^* 是唯一的，那么选举的获胜者就是候选人 c_D^*。如果 c_D^* 不是唯一的，那么选举就没有唯一的获胜者。

Aubin等人 [2022] 考虑了评价框架。在这种情况下，意见集合$\mathcal{E}$ 满足 $\mathcal{E} = \Lambda^m$，其中 $\Lambda = \{0,\ \ldots\ldots,\ K\}$ 或 $\Lambda = [0, M]$。在这些情况下，作者考虑了定义在 $\mathcal{E}_D = \mathbb{R}^m$上的深度函数。在这类空间中，统计深度函数定义良好；这些空间对应于 m-元连续分布，正如 第2.1节中所回顾的。该框架中的一些结果见 第4节。文中将展示常见投票程序与给定深度函数之间的关系。请注意，在离散情形下，也可以考虑定义在$\mathcal{E}_D = \mathbb{N}^m$ 上的深度函数，但据我们所知，文献中尚未定义此类深度函数。

最常见的投票方法基于偏好排名。这包括多数投票制，以及基于孔多塞或博尔达原则的投票方法等。有关这些投票方法的综述可见于 Felsenthal 和 Nurmi [2019]。在这种情况下，意见集合 $\mathcal{E}$ 满足 $\mathcal{E} = \mathfrak{S}_m$，其中 $\mathfrak{S}_m$ 表示 $\{1,\ \ldots\ldots,\ m\}$的排列集合。第一种可能性是

考虑定义在 $\mathcal{E}_D = [0,m]^m$上的深度函数，这确实包括 $\mathcal{E} = \mathfrak{S}_m$。随后可以使用基于评价的框架中常用的深度函数。另一种方法是考虑定义在 $\mathcal{E}_D = \mathcal{E} = \mathfrak{S}_m$上的深度函数，如 第2.2节所定义。这种选择更符合数据的性质。 第5节 表明，一些常用的程序可以写成排列最深投票。第 第 5.2 节研究了投票程序与排列深度函数之间的关系。

4 连续最深投票

我们先考虑基于评价的投票。回想一下，在这种情况下，选民以评价的形式表达对候选人的意见，也就是说，对于每位选民 v 和候选人 c，意见为$e_{cv} \in \Lambda$，其中 $\Lambda = \{1,\dots,K\}$ 或 $\Lambda = [0,M]$。因此，每位选民都有一个属于 $\mathrm{E} = \Lambda^m$ 的意见向量。对于 n 位选民和 m 位候选人，意见矩阵记作 Φ，属于 E^n。在这种情况下，我们考虑定义在 $\mathbb{R}^m$ 上且满足定义 1 所列性质的深度函数。对于给定的深度函数 $D()$，通过最大化 $D(., \Phi)$，即可得到相应的最深投票规则，如定义6所述。

在此背景下，Aubin等人 [2022] 确立了深度函数条件与投票程序常见公理之间的平行关系。作者证明，采用定义6中所定义的深度函数的投票程序满足中立性、普遍性和一致性。他们还研究了给定深度函数下的单调性，并提出了使深度函数满足无关选项独立性的条件。

接下来，Aubin等人 [2022] 证明，经典的基于评价的投票规则可以表示为具有 L^q 深度 $q \geq 1$的最深投票程序。如果评价等级取值为 $\Lambda = \{0,1\}$，如Dort及其合作者 [2025], 所示，对于所有 $q \geq 1$， L^q 深度投票等价于认可投票制[（Brams和Fishburn， 2007]）。如果评价等级取值为 $\Lambda = [0,1]$，那么 L^q 具有 $q = 1$和 $q = 2$ 的最深投票分别得出多数判断 [（Balinski和Laraki, 2007] ）和范围投票[（Smith， 2000]）。这些结果汇总于表1中。

深度	关于 [0,1]的投票过程
L^1	投票给中位数最高者（多数判断）
L^2	投票给均值最高者（范围投票）

深度	{0,1}上的投票过程
L^q、 $q \geq 1$	认可投票制

深度	$\mathfrak{S}_m$上的投票过程
L^1	巴克林投票
L^2	博尔达投票

表1：（连续） L^q 最深投票规则。

考虑基于排序的程序时，我们也可以将一些程序表述为连续最深投票过程。事实上，我们来考虑这样一个框架：对于每位选民 v，其对

候选人的意见是一个向量 $(e_{cv})_{c=1,\dots,m}$，它是 $\{1,\dots,m\}$ 的一个排列。意见属于 $\mathrm{E} = \mathfrak{S}_m$，即 $\{1,\dots,m\}$ 的排列集合，该集合包含于 $\{1,\dots,m\}^m$ 中。因此，我们可以将排名视为评价，并应用定义在 $\mathbb{R}^m$ 上的深度函数。由此可以复现已有的投票规则。

特别地，考虑博尔达计数法和巴克林程序。McCabe-Dansted 和 Slinko[2006] 将巴克林投票规则（也称为多数妥协）的获胜者定义为中位排名最低的候选人。我们可以证明，这些社会选择函数分别与 L^2 和 L^1 最深投票相关。

命题1。考虑 n 名选民和 m 名候选人。设 e_{cv} 为选民 v 给予候选人 c的、属于{1，……， m}的排名，并将所得排名记为 $\Phi = (e_{cv})_{v,\ c} \in \mathfrak{S}_m$ 则

(i) 博尔达计数法是在 Φ上应用的（连续） L^2-最深投票；

(ii) 巴克林获胜者包含于在上的（连续） L^1-最深投票集合中 Φ， c_D^* 其定义见定义6。当获胜者唯一时，巴克林获胜者与 L^1最深投票的获胜者一致。

证明很直接，因而省略。注意，使用 L^1 程序时，我们要区分集合 c_D^* 是否为单元素集合。事实上，考虑有3名候选人和4名选民的情形，其中 Φ 等于

	v_1	v_2	v_3	v_4
c_1	2	2	1	1
c_2	1	1	3	3
c_3	3	3	2	2

在此配置中，巴克林获胜者是候选人 c_1。但是，所有满足 $a_1 \in [1,2]$、$a_2 \in [1,3]$、 $a_3 \in [2,3]$ 的向量（a_1， a_2， a_3）$^\top$ 都属于最深集合。因此， c_1、 c_2 和 c_3 属于 c_D^*。

5 基于排列的最深投票

现在我们讨论基于排名的投票。选民以排名的形式表达对候选人的意见，也就是说，对于每位选民，其意见向量属于$\mathcal{E} = \mathfrak{S}_m$，即{1、……、 m}的排列集合。对于 n 名选民和 m 名候选人，意见矩阵记为 Φ，属于$\mathcal{E}^n$。在这种情况下，我们考虑定义在 $\mathfrak{S}_m$上的深度函数，其性质见定义2。对于给定的深度函数 $D()$，相关的投票规则通过最大化 $D(.、\ \Phi)$获得，如定义6所述。

特别地，基于 定义 4，我们提出定义 p-Fr´echet 均值投票规则，用于排名。

定义7. 考虑一个投票情境 $\Phi \in \mathfrak{S}_m^n$，以及定义在 $\mathfrak{S}_m$ 上的距离 $d()$。对于所有 $p \geq 1$，记

$$\mathfrak{S}^*(d, \Phi, p) := \underset{\sigma \in \mathfrak{S}_m}{\operatorname{argmin}} U_{d,\Phi,p}(\sigma), \ with\ U_{d,\Phi,p}(\sigma) = \frac{1}{n} \sum_{v=1}^{n} d^p(\sigma, \Phi(., v))$$

相对于 d，($\mathfrak{S}_m$、Φ) 的 p-Fr´echet 均值集合。令

$$c^*_{p,d} := \{c \in \{1, \ldots, m\}, \ \sigma^*(c) = 1, \ \sigma^* \in \mathfrak{S}^*(d, \Phi, p)\}.$$

如果 $c^*_{p,\ d}$ 唯一，那么与 (d、p) 相关联的选举的获胜者是候选人 $c^*_{p,\ d}$。如果 $c^*_{p,\ d}$ 不唯一，那么与 (d、p) 相关联的选举没有唯一的获胜者。

至于连续最深投票，我们将证明它可以还原通常的投票规则。

5.1 作为 Fr´echet 投票的经典规则

结合排列之间的距离，对排列定义深度函数，由此可以得到大量投票规则，如定义 6 所述。其中一些规则对应于广为人知的投票规则。

5.1.1 无权距离

我们首先考虑不带权重的距离（或所有权重均等于 $1/m$）。我们可以在凯梅尼程序、博尔达计数法以及定义于 定义7 中的某个最深投票程序之间建立联系。回忆一下，肯德尔距离定义于（2.2.1）中，而斯皮尔曼ρ 距离是 q-闵可夫斯基-赫¨尔德距离（（2.2.1）），其中 $q = 2$。

命题2。与共识排序和肯德尔距离相关联的最深投票规则在$\mathfrak{S}_m$ 选举中选出凯梅尼获胜者。

命题3。与重心排序和斯皮尔曼 ρ 距离相关联的最深投票规则等价于博尔达投票法。

这些命题的证明见 附录 A。注意，命题1 表明，博尔达计数法也可以被视为连续的 L^2-最深投票。

众所周知，博尔达投票法是排序均值投票规则。它与斯皮尔曼 ρ 距离最深投票相对应，这并不令人意外。同样，众所周知，巴克林投票法是排序中位数投票规则，而斯皮尔曼足尺距离（q-闵可夫斯基-赫¨尔德距离（2.2.1）其中 $q = 1$）似乎是与之相关联的自然距离。然而，事实并非如此，正如以下命题所述。

命题4。巴克林投票规则既不对应于基于共识排序和 Spearman 足尺距离的最深投票规则，也不对应于基于重心排序、并将 Spearman 足尺距离作为排列距离的最深投票规则。

证明见附录 A。请注意，命题1 将排名视为评价，表明巴克林程序是连续最深投票的结果。

5.1.2 加权距离

现在假设距离带有权重，如第 2.2.2 节中所提出的，且权重并非均匀分布。可以使用特殊的权重集，通过加权汉明距离（2.2.2）或加权 Spearman 足尺距离（加权 q-Minkowski-H¨older 距离（2.2.2） $q = 1$）来表示多数制规则和反多数制规则。

在下文中，我们用 $DV(p, d, W)$ 表示与作为深度函数的 p- Fr´echet 均值相关联的排列投票规则，其中排列距离为 $d()$，权重为 W。回想一下，如前所述，相关联的加权距离函数并非排列集合上的真正距离。为简单起见，我们将投票规则给出的最优排列称为最深排列。

将 $W(1, (1))$ 表示为满足以下条件的权重：若 $r = 1$ 或 $r' = 1$，则 $w_{r,r'} = 1$；否则 $w_{r,r'} = 0$。再将 $W(-1, (m))$ 表示为满足以下条件的权重：若 $r = m$ 或 $r' = m$，则 $w_{r,r'} = -1$；否则 $w_{r,r'} = 0$。这些权重使我们能够将一些著名的投票方法与排列上的深度框架联系起来。

命题 5. $DV(1$，汉明，$W(1$，$(1)))$ 等价于多数制投票方法。

Proposition 6. $DV(1$，汉明，$W(-1$，$(m)))$ 等价于反多数制投票方法。

证明见附录 B。

距离	权重	p 在 p-Fr´歇特均值	投票规则
肯德尔	none	1	凯梅尼
斯皮尔曼 ρ	none	2	博尔达
汉明	$W(1,\ (1))$	1	相对多数制
汉明	$W(-1,\ (m))$	1	反相对多数制

Ta表 2：排列上的最深投票规则与经典投票规则之间的联系。

所获得的经典投票规则与最深投票规则之间的联系总结于表2。本文的目的并非全面列举常见社会选择函数与最深投票程序之间的联系，而是着重阐明这些关联。本文表明，若干社会选择函数可以与深度函数相关联，因而可以写成一个优化问题。

5.2 投票规则的性质

研究投票规则的形式性质，是选举公理化方法所关注的问题。 [Felsenthal 和 Nurmi，2018，第 2] 章对投票规则的经典性质作了很好的综述。下文将讨论其中的一些性质。Aubin等人 [2022] 将最深投票规则的某些性质与

连续深度函数的数学性质联系起来。我们将他们的结果扩展到基于排列的最深投票。

定义 8（投票规则性质）。

- 中立性。对 Φ 的行进行置换（即置换候选人）后，社会选择函数给出相同的结果。

- 匿名性。对 Φ 的列进行置换（即置换选民）后，投票程序给出相同的结果。

- 普遍性。对于所有 $\Phi \in \mathfrak{S}_m^n$，投票程序都会给出 C 的一个子集。

- 一致性。如果某个候选人在所有选民的排序中都位于第一位，那么在投票程序的结果中，该候选人也应位于第一位。

- 单调性。假设某个投票情境 Φ 的获胜者为 c^*，并且存在一位选民 $v_0 \in \{1, \ldots\ldots, n\}$，使得 $\Phi(c^*, v_0) = \alpha \neq 1$。设候选人 c_0 满足 $\Phi(c_0, v_0) =$e e e$\alpha - 1$。考虑另一个投票情境 Φ，它满足 $\Phi = \Phi$，但 $\Phi(c^*, v_0) = \alpha - 1$，且 e$\Phi(c_0, v_0) = \alpha$。那么，投票程序的获胜者仍然是 c^*。

- 对失败者的独立性。考虑一个投票情境 Φ，其中有 m 个候选人 C $= \{c_1、\ldots\ldots、c_m\}$ e 和 n 位选民，获胜者为 c^*。再考虑另一个投票情境 Φ，其中有 $m-1$ 个候选人 e 和 n 位选民，其中一位候选人 $c_0 \neq c^*$ 已被移除。假设 Φ 在缩减后的候选人集合上保持不变。也就是说，对于任意选民 $v \in \{1、\ldots\ldots、n\}$，$\{\Phi(c, v), \quad c \in$e e C $\setminus \{c_0\}\}$的排序与$\{\Phi(c, v), \quad c \in C \setminus \{c_0\}\}$相同。那么 Φ 的获胜者仍然是c^*。

- 孔多塞胜者。如果候选人 $c_0 \in C$ 对所有候选人 $c \in C\backslash\{c_0\}$都满足：认为 $\Phi(c_0, v)$ 排在 $< \Phi(c, v)$之前的选民 v 人数，严格多于认为 $\Phi(c_0, v)$ 排在 $> \Phi(c, v)$之前的选民v 人数，那么候选人 $c_0 \in C$ 就是孔多塞胜者。如果存在孔多塞胜者，且某投票规则选出了该候选人，则该规则满足孔多塞获胜者性质。

- 孔多塞失败者。若对于所有候选人 $c \in C \setminus \{c_0\}$，满足条件 v 的选民人数严格少于满足条件 v 的选民人数，则候选人 $c_0 \in C$ 是孔多塞失败者。若孔多塞失败者存在，投票规则在任何情况下都不会选出该候选人，则该规则满足孔多塞失败者性质。

本节旨在研究上述性质是否适用于最深投票规则。如前所述，Aubin等人 [2022] 已取得一些结果，本节将重点讨论基于排列的最深投票。

本节的证明见附录 C。

首先，无论采用何种深度函数，中立性、匿名性和普遍性都成立。至于一致性，我们可以证明，对于一大类基于排列的深度函数，最深投票规则满足一致性。

命题 7. 任何最深投票过程都满足中立性、匿名性和普遍性。

命题 8. 考虑排列上的一种距离，它可以是汉明距离、肯德尔距离或排列上的 q- Minkowski-H ¨older 距离，其中 $q \in [1, +\infty[$。那么，对于所有 $p \geq 1$，相应的p-Fr ´echet 均值投票满足一致性。

当获胜者唯一时， $q = \infty$, p-Fr ´echet 均值投票满足一致性；否则可能不满足一致性（即最深集合中至少有两个排列的排名第一的候选人不同）。

如下两个命题所述，某些最深投票程序满足孔多塞获胜者性质和单调性。

命题 9。

1. 对于 $p = 1$，基于肯德尔距离的共识排序满足孔多塞获胜者性质。 2. 对于 $p > 1$，基于肯德尔距离的 p-Fr ´echet 均值不满足孔多塞获胜者性质。 3. 对于所有 $p \geq 1$，基于凯莱距离和汉明距离的投票规则均不满足孔多塞获胜者性质。 4. 对于 $p = 1$ 以及所有 $q \geq 1$, q-Minkowski-H ¨older 距离的投票规则，均不满足孔多塞获胜者性质。

命题10。

1. 与 Spearman 足尺距离（1-Minkowski-H ¨older）相关联的共识排序（$p = 1$）满足单调性性质。2. 与汉明距离相关联的共识排序（$p = 1$）不满足单调性性质。

最后，许多类别的基于排列的投票规则都不满足败者独立性。

命题 11。基于汉明、凯莱、肯德尔和 Minkowski-H ¨older 距离的共识（$p = 1$）最深投票规则不满足败者独立性。

表3 总结了本节的结果。

距离	中立性	匿名性	一致性	单调性	独立落选者	孔多塞胜者
汉明	✓	✓	✓	$p = 1$ 的 N	$p = 1$ 的 N	N
肯德尔	✓	✓	✓	.	N	仅适用于 $p = 1$ 的 ✓
凯莱	✓	✓	.	.	N	N
闵可夫斯基-赫尔德						
q=1	✓	✓	✓	✓ 个 $p = 1$	N	$p = 1$ 个 N
$q > 1$	✓	✓	✓	.	N	$p = 1$ 个 N

表3：本表汇总了与若干深度函数相关的最深投票程序是否具备定义 8中给出的性质。最深投票规则是 p-Fr ´echet 均值，其采用不同的排列上的距离。 ✓ 表示已验证的性质，N 表示未验证的性质，. 表示尚未得出结果的情况。如果结果仅针对某个特定的 p值成立，则会在相应条目中注明。

6 结论

本文通过引入定义在排列空间上的深度函数，将最深投票框架扩展到了基于排名的投票规则。这进一步加强了社会选择理论与统计深度之间的联系。该方法为若干经典社会选择程序提供了统一的统计学解释，将其视为基于排名间距离的优化问题的解。

请注意，本研究聚焦于基于距离的深度函数。还可以使用其他深度函数，例如半空间深度或投影深度，它们更多地依赖数据的几何性质。未来的研究可以对此进行探讨。

我们证明，凯梅尼、博尔达、相对多数制和反相对多数制等知名规则，可以表示为与适当的（加权）距离和 Fr´echet 均值相关联的最深投票程序。此外，我们还分析了最深投票程序的关键公理性质（普遍性、单调性等）。

除了这些联系之外，所提出的框架还为设计新的投票规则开辟了道路，这些规则基于排名之间的加权距离或针对具体问题的距离。未来的工作将聚焦于更深入的公理分析或计算方面。

7 致谢

本研究得到法国2030国家研究署通过 PEPR Maths-Vives Condorcet 项目 ANR-24-EXMA-0001 的资助。

参考文献

J.-B. Aubin、I. Gannaz、S. Leoni 和 A. Rolland。最深投票：一种新的选举方式。数理社会科学，116：1–16，2022。M. Balinski 和 R. Laraki。测量、选举与排序理论。美国国家科学院院刊，104(21)：8720–8725，2007。S. Brams 和 P. C. Fishburn。认可投票制。Springer，2007。M. Deza 和 E. Deza。距离百科全书。Springer Berlin Heidelberg，2016年。ISBN 9783662528440。URLhttps://books.google.fr/books?id=KQHdDAAAQBAJ。M. Deza 和 T. Huang。排列上的度量：综述。*J. Comb. Inf. Sys. Sci.*，23，1997年02月。P. Diaconis。概率与统计中的群表示。*Lecture Notes-Monograph Series*，11：i–192，1988。ISSN 07492170。URL http://www.jstor.org/stable/4355560。L. Dort及其合作者。认可投票制。待撰写，2025。

E. Elkind、P. Faliszewski 和 A. Slinko。关于某些投票规则的距离理性化。在第12届理性与知识理论方面会议论文集，TARK '09，第108–117页，美国纽约州纽约市，2009。计算机协会。

E. Elkind、P. Faliszewski 和 A. M. Slinko。论距离在定义投票规则中的作用。载于 自适应智能体与多智能体系统，2010 年。网址：https://api.semanticscholar.org/CorpusID:11697212。

D. S. Felsenthal 和 H. Nurmi。单一候选人选举投票程序。施普林格经济学简明丛书。Springer，2018 年。doi：10.1007/978-3-319-74033-1 3。

D. S. Felsenthal 和 H. Nurmi。旨在选出单一候选人的20种投票程序，第 5–16 页。施普林格国际出版公司，查姆，2019 年。ISBN 978-3-030-12627-8。doi：10.1007/ 978-3-030-12627-8 2。

M. Fr´echet. 任意性质空间中的随机元。Annales de l'institut Henri Poincar´e, 10(4):215–310, 1948年。URL http://www.numdam.org/item/AIHP_1948__10_4_215_0/. M. Goibert、S. Clemencon、E. Irurozki 和 P. Mozharovskyi。排序分布的统计深度函数：定义、统计学习与应用。载于《国际人工智能与统计会议》，第 10376–10406 页。PMLR，2022。R. Kumar 和 S. Vassilvitskii。排名之间的广义距离。载于第 19 届《国际万维网会议》论文集，WWW '10，第 571–580 页，美国纽约州纽约市，2010年。计算机协会。ISBN 9781605587998。doi：10.1145/1772690. 1772749。URL https://doi.org/10.1145/1772690.1772749。M. Mahajne、S. Nitzan 和 O. Volij。等级 \(r\) 共识与稳定社会选择。《社会选择与福利》，45(4):805–817，2015年。J. McCabe-Dansted 和 A. Slinko。社会选择规则相似性的探索性分析。《群体决策与协商》，15:77–107，2006年12月。T. Meskanen 和 H. Nurmi。社会选择中的接近性至关重要，第 289–306 页。Springer Berlin Heidelberg，柏林、海德堡，2008年。K. Mosler。深度统计。载于《稳健性与复杂数据结构：献给 Ursula Gather 的纪念文集》，第 17–34 页，2013。S. Nitzan。接近一致性的若干度量及其影响。《理论与决策》，13(2):129–138，1981年。W. D. Smith。范围投票。http://rangevoting.org/RangeVoting.html，2000年。访问日期：2014-10-12。J. W. Tukey。数学与数据图示。载于《国际数学家大会》论文集，温哥华，1975年，第 2 卷，第 523–531 页，1975年。H. P. Young 和 A. Levenglick。孔多塞选举原则的一致性扩展。《SIAM应用数学杂志》，35(2):285–300，1978年。

Y. Zuo。基于投影的深度函数及其相关中位数。《统计年鉴》，31(5):1460–1490，2003年。

Y. Zuo。加权 L^p–深度和 L^p–中位数的稳健性。《普通统计档案》，88 (2):215–234，2004。

Y. Zuo 和 R. Serfling。统计深度函数的一般概念。《统计年鉴》，第461–482页，2000。

A 无权距离的证明

本节给出了第5.1.1节的证明，该节讨论排列上的无权最深投票。

命题命题2的证明

引自Felsenthal 和 Nurmi [2019], 第26页，

> 凯梅尼社会选择程序也可以理解为寻找最有可能的（或预测效果最佳的，或最理想的折中）真实社会偏好排序，称为中位偏好排序；也就是说，该社会偏好排序 S 能使所有选民 i所给出的排序与 S 和 i^{th} 选民所给出的排序相反的候选人对数之和最小。

It 正是采用肯德尔距离的共识排名最深投票规则的定义 e.

命题的证明 命题3。

这里假设博尔达投票规则选出唯一一名候选人。

假设 c^* 是根据博尔达投票规则选出的。这意味着

$$\forall c \in C,\ c \neq c^*,\ \sum_{v=1}^{n} \sigma_v(c^*) < \sum_{v=1}^{n} \sigma_v(c),$$

其中 $\sigma_v(c) = e_{cv}$ 表示选民 v 赋予候选人 c的排名。于是 $\{\sigma_v)_c\}$ 是一个基数为 $n \geq 2$的有限族。记 Π_n 为其经验分布。

令 $\sigma^* \in \mathfrak{S}_m$ 为一个排列，且 $c^* \in \{1, \ldots, m\}$ 满足 $\sigma^*(c^*) = 1$。

Let $c_0 \in \mathsf{C}$, $c_0 \neq c^*$。注意， $\tau = (c^*, c_0)$ 是交换 c^* 和 c_0 的对换。我们来证明 σ^*

的 2-弗雷歇均值低于 $\sigma^* \circ \tau$。也就是说，我们要证明

$$\mathbb{E}[d^2(\sigma^*, \Pi_n)] < \mathbb{E}[d^2(\sigma^* \circ \tau, \Pi_n)],$$

其中 $d()$ 是针对 $q = 2$ 的 q-闵可夫斯基-赫尔德距离。

依次使用 Π_n 的定义和距离 $d()$ 的定义，我们得到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[d^2(\sigma^*, \Pi_n)] - \mathbb{E}[d^2(\sigma^* \circ \tau, \Pi_n)] &= \frac{1}{n}\sum_{v=1}^{n} d^2(\sigma^*, \sigma_v) - \frac{1}{n}\sum_{v=1}^{n} d^2(\sigma^* \circ \tau, \sigma_v) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{v=1}^{n}\sum_{c=1}^{m}(\sigma^*(c) - \sigma_v(c))^2 - \frac{1}{n}\sum_{v=1}^{n}\sum_{c=1}^{m}(\sigma^* \circ \tau(c) - \sigma_v(c))^2.\end{aligned}$$

τ 的定义给出

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[d^2(\sigma^*, \Pi_n)] - \mathbb{E}[d^2(\sigma^* \circ \tau, \Pi_n)] \\ &= \frac{1}{n}\sum_{v=1}^{n}\left[(\sigma^*(c^*) - \sigma_v(c^*))^2 + (\sigma^*(c_0) - \sigma_v(c_0))^2 - (\sigma^*(c_0) - \sigma_v(c^*))^2 - (\sigma^*(c^*) - \sigma_v(c_0))^2\right] \\ &= \frac{2}{n}\sum_{v=1}^{n}(\sigma^*(c^*) - \sigma^*(c_0))(\sigma_v(c_0) - \sigma_v(c^*)) \\ &= \frac{2}{n}(\sigma^*(c^*) - \sigma^*(c_0))\Big(\sum_{v=1}^{n}\sigma_v(c_0) - \sum_{v=1}^{n}\sigma_v(c^*)\Big).\end{aligned}$$

利用方程（A）以及 σ^* 的定义方式为 $\sigma^*(c^*) - \sigma^*(c_0) < 0$，我们推知右侧严格为负。因此，最深排列满足 $\sigma^*(c^*) = 1$，所以最深投票规则选出波达计数法的获胜者。

命题4的证明

考虑一个有5名选民和4名候选人的情形，其投票表如下方的表4 所示。在此情形下，中位排名为（3,2,3,4），因此 c_2 是巴克林投票法的获胜者

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
c_1	1	1	4	4	3
c_2	2	2	2	2	2
c_3	3	3	3	3	1
c_4	4	4	1	1	4

表4：矩阵 Φ 命题证明所用的命题4的投票情境。

因为它的中位数排名最小。然而，采用 Spearman 足尺距离计算的 p-Fr´echet 均值的最优解是 $(1, 2, 3, 4)^\top$，这两种情况 $p = 1$ 和 $p = 2$均如此。因此， c_1 是DV(1，Spearman 足尺距离)和 DV(2，Spearman 足尺距离)的获胜者。证明至此完成。

B 加权距离的证明

关于基于加权排列距离的深度结果的证明，详见第 5.1.2 节，本节将予以展示。

命题的证明 命题 5

权重为 $W(1, (1))$ 的加权汉明距离写作

$$\text{for all } \sigma, \tau \in \mathfrak{S}_m,\ d(\sigma, \tau) = \begin{cases} 2 & \text{if } \sigma^{-1}(1) \neq \tau^{-1}(1), \\ 0 & \text{if } \sigma^{-1}(1) = \tau^{-1}(1). \end{cases}$$

因此，当满足以下条件时，$\sigma^* \in \mathfrak{S}_m$ 使 $\sum_{v=1}^{n} d(\sigma, \sigma_v)$ 最小

$$\sigma^{*-1}(1) = \underset{c=1,\ldots,m}{\operatorname{argmax}} \sum_{v=1}^{n} \mathbb{1}(\sigma_v^{-1}(1) = c).$$

由此得证，因为这恰好是相对多数制投票规则的定义。

命题的证明 命题 6

权重为 $W(-1, (m))$ 的加权汉明距离记作

$$\text{for all } \sigma, \tau \in \mathfrak{S}_m,\ d(\sigma, \tau) = \begin{cases} -1 & \text{if } \sigma^{-1}(m) \neq \tau^{-1}(m), \\ 0 & \text{if } \sigma^{-1}(m) = \tau^{-1}(m). \end{cases}$$

因此，如果满足以下条件，$\sigma^* \in \mathfrak{S}_m$ 使 $\sum_{v=1}^{n} d(\sigma^*, \sigma_v)$ 最小：

$$\sigma^{*-1}(m) = \underset{c=1,\ldots,m}{\operatorname{argmin}} \sum_{v=1}^{n} \mathbb{1}((\sigma_v^{-1}(c) = m)).$$

这就完成了证明，因为这恰好是反多数投票规则的定义。

第5节的证明第 5.2 节

本节给出了关于最深投票程序性质的证明，这些性质陈述于第 5.2 节。这些性质定义于定义 8。

命题 7 的证明

匿名性。对于连续深度函数，该性质已由 [Aubin等人在2022年的命题 1] 中证明。考虑一个排列上的深度，其定义见定义 4。对于任意投票情境 Φ，其经验分布为 Π_n，最深投票仅取决于将排列 $\sigma \in \mathfrak{S}_m$ 映射到$U_{d,\ \Pi_n,\ p}(\sigma) = \frac{1}{n}\acute{I}_{v=1}^{n} d^p(\sigma,\ \Phi(.,\ v))$ 的函数。显然，$U_{d,\ \Pi_n,\ p}()$ 不会因对 Φ 的列进行排列（即对选民进行排列）而改变，因此最深投票程序保持不变。

中立性。对于连续深度函数，这一性质已在 [Aubin等人，2022，命题 1]中得到证明。考虑定义于排列上的深度，如定义 4所述。同样，对于任意投票情境 Φ及其经验分布 Π_n，最深投票仅取决于将排列 $\sigma \in \mathfrak{S}_m$ 映射到$U_{d,\ \Pi_n,\ p}(\sigma) = \frac{1}{n}\acute{I}_{v=1}^{n} d^p(\sigma,\ \Phi(.,\ v))$ 的函数。通过排列 τ对 Φ 的行进行置换（即置换候选人），$d(\tau \circ \sigma,\ \Phi(\tau(.),\ v)) = d(\sigma,\ \Phi(.,\ v))$。因此，最深投票程序给出的最大值点集合相同（至多相差排列 τ），所以胜出的候选人也相同。

普遍性 普遍性显然成立，因为深度函数的定义域 E_D 是 m 维的。

命题 8 的证明

回顾一下，一致性是指：如果存在 $c^* \in \{1,\ \ldots\ldots,\ m\}$，使得 $\forall v \in \{1,\ \ldots\ldots\ n\}$，且 $\Phi(c^*,\ v) = 1$，那么 $\sigma^*(c^*) = 1$，其中 σ^* 为最深排列。

假设所有选民都同意同一个最佳候选人，即假设 $\exists c^* \in \{1,\ldots, m\}$ 满足 $\forall v \in \{1,\ldots n\}$，$\Phi(c^*, v) = 1$。

设 $\sigma \in \mathfrak{S}_m$ 使得 $\sigma(c^*) \neq 1$。不失一般性，考虑 $c^* = 1$ 和 $\sigma(2) = 1$。考虑τ 排列，使得 $\tau(1) = 1$、$\tau(2) = \sigma(1)$，并且如果 $c = 3,\ldots, m$，则 $\tau(c) = \sigma(c)$。我们来证明，此时 τ 具有比 σ更小的 p-Fr´echet 均值。

记

$$\Delta := \frac{1}{n}\sum_{v=1}^{n}\Big(d^p(\sigma, \sigma_v) - d^p(\tau, \sigma_v)\Big)$$

p-Fr´echet 均值 σ 与 τ之差。我们来证明 $\Delta \geq 0$。更准确地说，我们将证明，对于所有 $v \in \{1,\ldots, n\}$，都有 $d(\sigma, \sigma_v) > d(\tau, \sigma_v)$。

让我们根据距离进行区分。

For 汉明距离。设 $v \in \{1,\ \ldots\ldots,\ n\}$。由于 $\sigma(1) \neq \sigma_v(1)$、$\sigma_2 \neq \sigma_v(2)$ 和 $\tau(1) \neq$

$\sigma_v(1)$，我们有

$$d(\sigma,\sigma_v)=2+\sum_{c=3}^{m}\mathbb{1}\{\sigma(c)\neq\sigma_v(c)\},$$

$$d(\tau,\sigma_v)=\mathbb{1}\{\sigma(1)\neq\sigma_v(2)\}+\sum_{c=3}^{m}\mathbb{1}\{\sigma(c)\neq\sigma_v(c)\}.$$

由这些等式可直接得到 $d(\tau,\ \sigma_v)<d(\sigma,\ \sigma_v)$。

对于肯德尔距离。令 $v\in\{1,\ \ldots,\ n\}$。根据肯德尔距离的定义，

$$d(\sigma,\sigma_v)=\sum_{c=1}^{m-1}\sum_{c'=c+1}^{m}\mathbb{1}\{(\sigma(c)-\sigma(c'))\,(\sigma_v(c)-\sigma_v(c'))<0\}.$$

利用 σ 和 τ 的性质，并根据候选人 $c=1$、候选人 $c=2$ 以及候选人 $c\geq 3$ 对候选人集合上的和进行分解，

$$\begin{aligned}d(\sigma,\sigma_v)=&\sum_{c'=2}^{m}\mathbb{1}\{(\sigma(1)-\sigma(c'))>0\}+\sum_{c'=3}^{m}\mathbb{1}\{(\sigma_v(2)-\sigma_v(c'))>0\}\\&+\sum_{c=3}^{m-1}\sum_{c'=c+1}^{m}\mathbb{1}\{(\sigma(c)-\sigma(c'))\,(\sigma_v(c)-\sigma_v(c'))<0\},\\d(\tau,\sigma_v)=&\sum_{c'=3}^{m}\mathbb{1}\{(\sigma(1)-\sigma(c'))(\sigma_v(2)-\sigma_v(c'))<0\}\\&+\sum_{c=3}^{m-1}\sum_{c'=c+1}^{m}\mathbb{1}\{(\sigma(c)-\sigma(c'))\,(\sigma_v(c)-\sigma_v(c'))<0\}.\end{aligned}$$

因此 $d(\sigma,\ \sigma_v)-d(\tau,\ \sigma_v)=\sum_{c'=2}^{m}\mathbb{1}\{(\sigma(1)-\sigma(c'))>0\}+\delta_v$，其中

$$\begin{aligned}\delta_v=\sum_{c'=3}^{m}\Big(&\mathbb{1}\{(\sigma(1)-\sigma_v(c'))>0\}+\mathbb{1}\{(\sigma_v(2)-\sigma_v(c'))>0\}\\&-\mathbb{1}\{(\sigma(1)-\sigma(c'))(\sigma_v(2)-\sigma_v(c'))<0\}\Big).\end{aligned}$$

显然，上述和式中的每一项都不可能为负（因为如果 $\mathbb{1}\{(\sigma(1)-\sigma_v(c'))>0\}+\mathbb{1}\{(\sigma_v(2)-\sigma_v(c'))>0\}=0$，那么 $\mathbb{1}\{(\sigma(1)-\sigma(c'))(\sigma_v(2)-\sigma_v(c'))<0\}=0$）。因此

$$d(\sigma,\sigma_v)-d(\tau,\sigma_v)\geq\sum_{c'=2}^{m}\mathbb{1}\{(\sigma(1)-\sigma(c'))>0\}.$$

由于 $\sigma(1)>\sigma(2)=1$，我们推断出 $d(\sigma,\ \sigma_v)>d(\tau,\ \sigma_v)$。

对于 q-Minkowski-H¨older 距离，$1\leq q<\infty$。令 $v\in\{1,\ \ldots\ldots,\ n\}$。首先注意到：

$$\begin{aligned}d_q^q(\sigma,\sigma_v)&=\sum_{c=1}^{m}|\sigma(c)-\sigma_v(c)|^q\\&=|\sigma(1)-1|^q+|1-\sigma_v(2)|^q+\sum_{c=3}^{m}|\sigma(c)-\sigma_v(c)|^q.\end{aligned}$$

类似地,

$$d_q^q(\tau, \sigma_v) = |\sigma(1) - \sigma_v(2)|^q + \sum_{c=3}^{m} |\sigma(c) - \sigma_v(c)|^q.$$

因此,

$$d_q^q(\sigma, \sigma_v) - d_q^q(\tau, \sigma_v) = |\sigma(1) - 1|^q + |1 - \sigma_v(2)|^q - |\sigma(1) - \sigma_v(2)|^q.$$

接下来,

- if $1 < \sigma(1) \leq \sigma_v(2)$, $d_q^q(\sigma, \sigma_v) - d_q^q(\tau, \sigma_v) \geq (\sigma(1) - 1)^q > 0$;
- if $1 < \sigma_v(2) \leq \sigma(1)$, $d_q^q(\sigma, \sigma_v) - d_q^q(\tau, \sigma_v) \geq (\sigma_v(2) - 1)^q > 0$.

因此, $d_q(\sigma, \sigma_v) > d_q(\tau, \sigma_v)$。证明至此完成。

q-Minkowski-H¨older 距离, $q = \infty$。

这里我们证明, 当解唯一时, p-Fr´echet 均值满足 ∞-Minkowski-H¨older 的一致性; 否则, 情况并非总是如此。

让我们回顾一下:

$$\Delta := \frac{1}{n} \sum_{v=1}^{n} \Big((\max_c |\sigma(c) - \sigma_v(c)|)^p - (\max_c |\tau(c) - \sigma_v(c)|)^p \Big).$$

Then

$$\begin{aligned} \Delta = & \frac{1}{n} \sum_{v=1}^{n} \Big((\max(\sigma(1) - \sigma_v(1), \sigma(2) - \sigma_v(1), \max_{c>2} |\sigma(c) - \sigma_v(c)|))^p \\ & - (\max(\tau(1) - \sigma_v(1), \tau(2) - \sigma_v(2), \max_{c>2} |\tau(c) - \sigma_v(c)|))^p \Big). \end{aligned}$$

由于 $\sigma(2) = 1, \forall v, \ \sigma_v(1) = 1, \tau(1) = \sigma(2) = 1$ 以及 $\tau(2) = \sigma(1) > 1$,

$$\Delta = \frac{1}{n} \sum_{v=1}^{n} \Big((\max(\sigma(1) - 1, \sigma_v(2) - 1, \max_{c>2} |\sigma(c) - \sigma_v(c)|))^p - (\max(\tau(2) - \sigma_v(2), \max_{c>2} |\tau(c) - \sigma_v(c)|))^p \Big).$$

现在, 考虑到 $\max_{c>2} |\sigma(c) - \sigma_v(c)| = \max_{c>2} |\tau(c) - \sigma_v(c)|$ 且 $\sigma(1) - 1 > \tau(2) - \sigma_v(2)$, 可知对于所有 $p \geq 1$

$$(\max(\sigma(1) - 1, \sigma_v(2) - 1, \max_{c>2} |\sigma(c) - \sigma_v(c)|))^p \geq (\max(\tau(2) - \sigma_v(2), \max_{c>2} |\tau(c) - \sigma_v(c)|)),$$

以及 $\Delta \geq 0$。请注意, 这并不意味着 $\Delta \neq 0$, 而是说, 排名中 c^* 位于首位时, 必然会使 L^∞ 距离下的 p-Fr´échet 均值最小。因此, 如果解是唯一的, 那么它就是这个排名。否则, 下面的反例表明不存在获胜者, 因此不满足一致性性质。

考虑这样一种情形: 有 5 位选民和 6 位候选人, 其投票偏好如表5所示。

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
c_1	1	1	1	1	1
c_2	4	6	4	2	6
c_3	6	4	6	4	5
c_4	3	5	3	6	4
c_5	5	2	5	5	3
c_6	2	3	2	3	2

表5：证明 p-Fr´echet 均值的 ∞-Minkowski-H¨older 距离在存在多个解时可能不满足一致性的反例。

1-Fr´échet 均值为 (1,4,6,3,5,2)、(1,5,6,3,4,2) 和 (2,5,6,3,4,1)。2-Fr´échet 均值和 3-Fr´échet 均值均为 (1,5,6,3,4,2) 和 (2,5,6,3,4,1)。因此，获胜者并非唯一，候选人 c_6 也是最深集合中的优选候选人。

命题命题 9

1. 基于肯德尔距离的 p-Fr´échet（ $p = 1$）

   令 $\Phi = (\sigma_v)_{v=1,\dots,n} \in \mathfrak{S}_m^n$ 为 n 位选民对 m 位候选人给出的排名集合。令 σ^* 为基于肯德尔距离 d_K 的 Φ 的中位排列。也就是说，我们考虑共识排序，其中 $\sigma^* \in \operatorname{argmin}_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \acute{I}_{v=1}^n d_K(\sigma, \sigma_v)$。

   假设 c_0 是此次选举的孔多塞胜者，且 c_0 在 σ^*中并未排在第一位。因此， $\sigma^*(c_0) = r \neq 1$。存在一个 $c_1 \in C$，使得 $\sigma^*(c_1) = r - 1$。令 $\tau \in \mathfrak{S}_m$满足$\tau = \sigma^*$，但 $\tau(c_0) = r - 1$ 且 $\tau(c_1) = r$。

   注意，对所有 $s \in \mathfrak{S}_m$,

   $$d_K(\sigma^*, s) = d_K(\tau, s) + \delta_s(c_0, c_1),$$

   其中，若 $s(c_0) < s(c_1)$，则 $\delta_s(c_0, c_1) = 1$；若 $s(c_0) > s(c_1)$，则 $\delta_s(c_0, c_1) = -1$。因此，

   $$\sum_{v=1}^{n} d_K(\sigma^*, \sigma_v) = \sum_{v=1}^{n} d_K(\tau, \sigma_v) + \sum_{v=1}^{n} \delta_{\sigma_v}(c_0, c_1).$$

   由于 c_0 是孔多塞胜者，集合 $\{v \in \{1, \dots n\}, \sigma_v(c_0) < \sigma_v(c_1)\}$中的元素多于集合 $\{v \in \{1, \dots n\}, \sigma_v(c_0) < \sigma_v(c_1)\}$中的元素。这意味着 $\acute{I}_{v=1}^n \delta_{\sigma_v}(c_0, c_1) > 0$，因而 $\acute{I}_{v=1}^n d_K(\sigma^*, \sigma_v) > \acute{I}_{v=1}^n d_K(\tau, \sigma_v)$。因此， σ^* 不可能是中位数。所以，反证得出， $\sigma^*(c_0) = 1$。

   因此，基于共识肯德尔距离的投票规则满足孔多塞获胜者性质。众所周知，凯梅尼投票满足孔多塞获胜者性质。

2. 基于肯德尔距离的 p-Fr´echet，适用于 $p > 1$；基于凯莱距离、汉明距离的 p-Fr´echet，适用于 $p \geq 1$；以及基于 q-Minkowski-H¨older 距离的 p-Fr´echet，适用于 $p = 1$

   - 基于肯德尔 p-弗´雷歇对 $p > 1$考虑这样一种情况：有 5 位选民和 3 位候选人，其投票偏好如表 6所示。

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
c_1	1	1	1	3	2
c_2	2	2	2	2	1
c_3	3	3	3	1	3

表 6：命题 9 第 2 点（肯德尔）证明的反例。命题 9。c_1 显然是此次选举的孔多塞胜者。于是，对于 $p \geq 1$,

$$\sum_{v=1}^{5} d_K^p((c_1, c_2, c_3), v_v) = 1 + 3^p$$
$$\sum_{v=1}^{5} d_K^p((c_1, c_3, c_2), v_v) = 3 + 2 \times 2^p$$
$$\sum_{v=1}^{5} d_K^p((c_2, c_1, c_3), v_v) = 3 + 2^p$$
$$\sum_{v=1}^{5} d_K^p((c_2, c_3, c_1), v_v) = 1 + 4 \times 2^p$$
$$\sum_{v=1}^{5} d_K^p((c_3, c_1, c_2), v_v) = 2 + 3 \times 2^p$$
$$\sum_{v=1}^{5} d_K^p((c_3, c_2, c_1), v_v) = 2^p + 3 \times 3^p$$

如果 $p = 1$, c_1 是肯德尔共识排序的获胜者。

但是 $\forall p \geq 2$, $\acute{\mathrm{I}}_{v=1}^{5} d_K((c_1, c_2, c_3), v_v)^p > \acute{\mathrm{I}}_{v=1}^{5} d_K((c_2, c_1, c_3), v_v)^p$ 接着 c_2 是采用投票规则（肯德尔，p）进行选举时的获胜者，其中 $p \geq 2$。其他计算留给读者完成。

3. 对于以下凯莱距离和汉明距离的情形，考虑一个有 7 名选民和 3 名候选人的场景，其投票偏好如表 7所示。

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
c_1	1	1	2	2	2	2	3
c_2	2	2	1	1	3	3	1
c_3	3	3	3	3	1	1	2

表 7：命题 9 第 2 点证明的反例命题 9。

在此情形下，孔多塞胜者是候选人 c_1，因为 4 名选民更偏好 c_1 而非 c_2，另有 4 名选民更偏好 c_1 而非 c_3。

- 基于汉明距离的 p-Fr´echet，用于 $p \geq 1$ 给定的投票偏好依据

表 7，

$$\sum_{j=1}^{7} d_H^p((1,2,3)^T, v_j) = 2^p + 2^p + 3^p + 3^p + 3^p$$
$$\sum_{j=1}^{7} d_H^p((2,1,3)^T, v_j) = 2^p + 2^p + 2^p + 2^p + 2^p$$
$$\sum_{j=1}^{7} d_H^p((2,3,1)^T, v_j) = 3^p + 3^p + 2^p + 2^p + 3^p$$
$$\sum_{j=1}^{7} d_H^p((3,1,2)^T, v_j) = 3^p + 3^p + 2^p + 2^p + 3^p + 3^p$$

其他计算留给读者完成。我们指出，(2,1,3)^T 使基于汉明距离的 p-Fr´echet 均值在 $p \geq 1$ 下达到最小，因此 c_2 是选举的获胜者。

- 基于凯莱的 p-Fr´echet 均值，适用于 $p \geq 1$

给定的投票偏好遵循 表 7，

$$\sum_{j=1}^{7} d_C^p((1,2,3)^T, v_j) = 1 + 1 + 2^p + 2^p + 2^p$$
$$\sum_{j=1}^{7} d_C^p((2,1,3)^T, v_j) = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$
$$\sum_{j=1}^{7} d_C^p((2,3,1)^T, v_j) = 2^p + 2^p + 1 + 1 + 2^p$$
$$\sum_{j=1}^{7} d_C^p((3,1,2)^T, v_j) = 2^p + 2^p + 1 + 1 + 2^p + 2^p$$

其他计算留给读者完成，我们注意到 (2、1、3)^T 使基于凯莱的 p-Fr´echet 均值最小，适用于 $p \geq 1$，随后 c_2 成为此次选举的获胜者。

4. 对于基于 p-Fr´echet 的 $p = 1$，我们来考虑前面的反例，其中 q-Minkowski-H¨older。

可以证明，对于 $q \geq 1$，以及表格 7 中表达的偏好：

$$\sum_{j=1}^{7} d_q((1,2,3)^T, v_j) = 2 \times 2^{1/q} + 3 \times (2^q + 2)^{1/q} + 0 \times 2^{(q+1)/q}$$

$$\sum_{j=1}^{7} d_q((2,1,3)^T, v_j) = 3 \times 2^{1/q} + 0 \times (2^q + 2)^{1/q} + 2 \times 2^{(q+1)/q}$$

$$\sum_{j=1}^{7} d_q((1,3,2)^T, v_j) = 4 \times 2^{1/q} + 2 \times (2^q + 2)^{1/q} + 1 \times 2^{(q+1)/q}$$

$$\sum_{j=1}^{7} d_q((3,1,2)^T, v_j) = 3 \times 2^{1/q} + 4 \times (2^q + 2)^{1/q} + 0 \times 2^{(q+1)/q}$$

$$\sum_{j=1}^{7} d_q((2,3,1)^T, v_j) = 0 \times 2^{1/q} + 3 \times (2^q + 2)^{1/q} + 2 \times 2^{(q+1)/q}$$

$$\sum_{j=1}^{7} d_q((3,2,1)^T, v_j) = 3 \times 2^{1/q} + 2 \times (2^q + 2)^{1/q} + 2 \times 2^{(q+1)/q}$$

对于所有 $q \geq 1$，当为 $(2,\ 1,\ 3)^T$ 时，该总和最小。基本考量，例如 $2^{1/q} \leq (2^q + 2)^{1/q} \leq 2^{(q+1)/q}$ 均值表明，只有 $(1,\ 2,\ 3)^T$ 和 $(2,\ 1,\ 3)^T$ 能使总和最小。最后，$(2,\ 1,\ 3)^T$ 是使总和最小的排列。

命题10的证明

1. 考虑 Φ 一个采用给定投票程序、且有获胜者 c^* 的投票情境。假设存在一位选民 v_0，使得 $\Phi(c^*,\ v_0) = \alpha \neq 1$。令 c_0，使得 $\Phi(c_0,\ v_0) = \alpha - 1$。e e e 考虑另一个投票情境 $\Phi = \Phi$，不同之处在于 $\Phi(c^*,\ v_0) = \alpha - 1$ 且 $\Phi(c_0,\ v_0) = \alpha$。˜若 Φ 的获胜者仍为 c^*，则该投票程序满足单调性。

˜ ˜记 Π_n 和 Π_n 分别为与 Φ 和 Φ 的列相关联的经验分布。不失一般性地，设交换 c^* 和 c_0 的排名的选民为选民 $v_0 = n$。记 σ_n 和 $\tilde{\sigma}_n$ 为相应的排名。考虑 $U_{d,\Pi,p}(\cdot)$，即与初始选票相关联的 p-Fr´échet 泛函，以及 $U_{d,\tilde{\Pi}_n,p}(\cdot)$，即交换后得到的泛函。设 σ^* 是初始投票设置中关于距离 $d()$ 的一个 Fr´échet 均值。我们希望证明，在新的设置中 σ^* 仍然是一个 Fr´échet 均值，即它最小化 $U_{d,\tilde{\Pi}_n,p}$。

设 $\sigma \in \mathfrak{S}_m$。我们有

$$nU_{d,\tilde{\Pi}_n,p}(\sigma^*) - nU_{d,\tilde{\Pi}_n,p}(\sigma) = nU_{d,\Pi_n,p}(\sigma^*) - nU_{d,\Pi_n,p}(\sigma) + \big(d^p(\sigma^*, \tilde{\sigma}_n) - d^p(\sigma^*, \sigma_n)\big) - \big(d^p(\sigma, \tilde{\sigma}_n) - d^p(\sigma, \sigma_n)\big).$$

我们想要证明 $nU_{d,\tilde{\Pi}_n,p}(\sigma^*) - nU_{d,\tilde{\Pi}_n,p}(\sigma) < 0$。现在根据所使用的距离以及 q 的取值进行区分。

设 $p = 1$。假设 σ^* 是与 $U_{d_1,\Pi_n,1}(\cdot)$ 相关联的 Fr´echet 均值。那么，对于所有 $\sigma \in \mathfrak{S}_m \setminus \mathfrak{S}^*_{1,d_1,\Pi_n}$，$U_{d_1,\Pi,1}(\sigma^*) < U_{d_1,\Pi_n,1}(\sigma)$。

首先注意到，由于两个排列之间的 1-Minkowski-H¨older 距离总是偶数，这尤其意味着 $nU_{d_1,\Pi_n,1}(\sigma^*) \leq nU_{d_1,\Pi_n,1}(\sigma) - 2$。

其次，由于 σ_n 和 $\tilde{\sigma}_n$ 之间只有一次交换，且两者的值相差 1，因此对于任意排列 σ，

$$|d_1(\sigma, \tilde{\sigma}_n) - d_1(\sigma, \sigma_n)| \leq 2.$$

将其代入（1）中，可得

$$nU_{d_1,\tilde{\Pi}_n,1}(\sigma^*) - nU_{d_1,\tilde{\Pi}_n,1}(\sigma) \leq d_1(\sigma^*, \tilde{\sigma}_n) - d_1(\sigma^*, \sigma_n)$$

最后，注意到 $d(\sigma^\star, \tilde{\sigma}_n) - d(\sigma^\star, \sigma_n)$ 只取决于 c^* 和 c_0 的排名。事实上，$d(\sigma^\star, \tilde{\sigma}_n) - d(\sigma^\star, \sigma_n) = -2$ 当且仅当 $\sigma^\star(c_0) \geq \alpha$，否则为 0。因此，对于所有 $\sigma \in \mathfrak{S}_m \setminus \mathfrak{S}^*_{1,d_1,\Pi}$ 以及 $\mathfrak{S}^*_{1,d_1,\Pi}$ 中的所有排列，$U_{d_1,\tilde{\Pi},1}(\sigma^\star) \leq U_{d_1,\tilde{\Pi},1}(\sigma)$ 在选票交换后也都是 Fr´echet 均值。此外，如果 $\sigma^\star(c_0) \geq \alpha$，那么不等式是严格的，这意味着 $\mathfrak{S}^*_{1,d_1,\Pi} \subseteq \mathfrak{S}^*_{1,d_1,\tilde{\Pi}}$，因此 c^* 仍是该选举的唯一获胜者。

2. 考虑以下投票偏好：$a = (A, B, C, D, E)$、$b = (D, C, A, B, E)$、$c = (E, D, C, A, B)$。假设共有 $n = 5$ 位选民，他们的投票如下：$\sigma_1 = \sigma_2 = a$、$\sigma_3 = \sigma_4 = b$ 和 $\sigma_5 = c$。可以验证，对于汉明距离，与共识排序相关的 Fr´echet 均值为 a，因此选举的获胜者是 A。现在，如果第五位选民更改其排名，将 A 和 C的位置互换，那么 $\tilde{\sigma}_5$ 变为$\tilde{}(E, D, A, C, B)$，而 b 则成为 Π 的一个 Fr´echet 均值，从而使选举产生新的获胜者 D。

命题 11 的证明

败者独立性：

1. 基于肯德尔距离的共识最深投票就是凯梅尼投票规则，众所周知，与所有孔多塞方法一样，它不满足对失败者的独立性（参见 Young和Levenglick [1978]）。

2. 我们要证明，对于所有$q \geq 1$，基于 q-闵可夫斯基-霍¨尔德距离的所有最深投票规则都不满足对失败者的独立性。

作为一个反例，假设有 2 名候选人和 7 名选民，排名如下：表8。

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
c_1	1	1	1	1	2	2	2
c_2	2	2	2	2	1	1	1

表8：用于证明基于闵可夫斯基-霍¨尔德距离的投票规则不满足对失败者的独立性的反例 er 距离。情形1：有 2 名候选人。

显然，对于所有 $q \geq 1$，最深排列为 $(1, 2)^\top$，因此，候选人c_1 是基于 q-闵可夫斯基-霍¨尔德距离的最深投票的获胜者。

引入一位候选人 c_3，使偏好变为表9中的偏好。注意，c_1 与 c_2 之间的两两比较没有变化。

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
c_1	1	1	2	2	3	3	3
c_2	2	2	3	3	1	1	1
c_3	3	3	1	1	2	2	2

表9：证明基于闵可夫斯基–霍尔德距离的投票规则不满足对失败者的独立性的反例。¨情形2，有3名候选人。前2名候选人的投票情境与表8中的情形1相似。

容易验证，对于所有 $q \geq 1$ （计算留给读者），最深排列为 $(3, 1, 2)^\top$，因此 c_2 是此次选举中最深的获胜者。引入 c_3 使获胜者从 c_1 变为 c_2，这证明对失败者的独立性不成立。

3. 为证明基于汉明距离的最深投票不满足对失败者的独立性，可以考虑证明基于闵可夫斯基–霍尔德距离的最深投票时使用的同一个反例。

4. 证明基于凯莱距离的最深投票时也可以使用同一个反例，不过在这种情况下，获胜者并不唯一。