闭邻域理想的平方自由幂

MARIE AMALORE NAMBI 和 AYESHA ASLOOB QURESHI

Abstract. 本文刻画了其闭邻域理想的最高非零平方自由幂为分次分量线性的所有树。此外，我们研究了树的闭邻域理想的第 ν 个平方自由幂的 Castelnuovo-Mumford 正则度，并证明该数值可以任意大于理想的次数。最后，我们给出了毛毛虫图的闭邻域理想的第 ν 个平方自由幂的正则度公式。

arXiv:2603.15229v1 [math.AC] 16 Mar 2026

1. Introduction

组合交换代数的核心在于研究理想的代数性质与底层对象的组合结构之间的相互作用。特别是，无平方单项式理想天然地与单纯复形、图和 clutter 等组合对象相联系，借助相关的组合数据，可以研究它们的代数性质和同调性质。线性分解的存在性一直是研究最广泛的同调不变量之一。回顾一下，线性分解 是指一种最小自由分解，其中每个微分映射都由一个矩阵表示，且矩阵的元素属于线性形式集合。这类理想性质良好，与大多数其他理想相比，处理起来计算更简单。这方面的一个重要结果归功于 Fr¨oberg [4]，他证明了图的边理想具有线性分解，当且仅当该图是余弦图。

Herzog 和 Hibi [7]提出了分量线性理想这一概念；在具有线性分解的理想之后，它们是最优的一类理想。设 $I \subseteq S = K[x_1, \ldots, x_n]$ 为一个分次理想。回顾一下，若对每个度数 k，由 I 中所有度数为 k 的齐次元素生成的理想都具有线性分解，则称 I 为分量线性。据 [7]所知，Stanley-Reisner 理想 I 是序贯 Cohen-Macaulay 的，当且仅当其 Alexander 对偶是分量线性理想。关于分支线性的更多细节，请参阅综述文章[6]。在此背景下，我们研究树的闭邻域理想的最高非零平方自由幂的分支线性性质，这一点尤为重要。

Sharifan 和 Moradi [17] 引入了有限简单图 G 的闭邻域理想 $NI(G)$。这类平方自由单项式理想由与 G各顶点的闭邻域对应的单项式生成。该理想可视为 G的邻点邻域复形 $\mathcal{N}(G)$的面理想。从 Stanley–Reisner 复形的角度看，其 Alexander 对偶可识别为支配复形。近年来，关于

2020 *Mathematics Subject Classification.* 13D02, 05E40, 05E45, 05C70.*Key words and phrases.*平方自由幂、闭邻域理想、匹配、分量线性、Castelnuovo-Mumford 正则度。作者获得土耳其科学技术研究理事会资助，资助项目编号为 T ¨UB˙ITAK 124F113，并感谢 T ¨UB˙ITAK 提供的支持。1

闭邻域理想的若干代数性质，如正则性、投射维数、Cohen–Macaulay性、极小不可约分解、正规无挠性质和持久性，已在 [3, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18]中得到研究。据我们所知，这是文献中首篇聚焦于这些理想的平方自由幂的研究。

设 I 是一个单项式理想。 I 的第 k 个平方自由幂，记作 $I^{[k]}$，是由属于 I^k 的所有平方自由单项式生成的理想。从组合视角来看， I 的平方自由幂与单纯复形或 clutter 的匹配理论密切相关。具体而言， $I^{[k]}$ 的极小生成元是相应单纯复形的 k-匹配。理想的平方自由幂包含其普通幂的重要信息。特别地，如果 $I^{[k]}$ 不是分次分量线性的，那么 I^k 也不是分次分量线性的（见 $[8,$ 引理 4.4$]$）。Bigdeli、Herzog 和 Zaare-Nahandi 在 $[2,$ 定理 5.1$]$ 中证明，图的边理想的最高非零平方自由幂具有线性商。Kamberi、Navarra 以及本文第二作者在 $[13]$ 中证明，具有交性质的单纯树的面理想的最高非零平方自由幂具有线性商。然而，他们进一步证明，这一结论对一般的单纯树并不成立。在此背景下，一个自然的问题是：

问题 1.1. 树的闭邻域理想的最高非零平方自由幂是否为按连通分支线性的?

然而，正如例 2.6 所示，问题 1.1 通常并不成立。受此启发，我们给出了其最高非零平方自由幂为按连通分支线性的树的组合刻画（见定理 4.1、4.2 和 4.13）。

本文的第二部分致力于研究图的闭邻域理想的最高非零平方自由幂的 Castelnuovo-Mumford 正则度（正则性）。Sharifan 和 Moradi 在 $[17]$中研究了若干类图的闭邻域理想的正则性。特别地，他们得到了路径图、广义星图、完全 r-部图和 m-书图的闭邻域理想正则性的精确公式。此外，对于森林，他们以匹配数为参数，得到了闭邻域理想正则性的一个下界。Chakraborty 等人在 $[3]$ 中以匹配数为参数，得到了森林的闭邻域理想正则性的精确公式。此外，他们还证明，对于任意图 G， G的匹配数给出了 $\mathrm{reg}(S/NI(G))$ 的一个下界。一个自然的问题是，图的闭邻域理想的最高非零平方自由幂的正则性与理想的次数之差是否可以任意大。更确切地说，我们可以提出以下问题。

问题 1.2. 给定一个整数 m。是否存在一个连通图，使得 $\mathrm{reg}(S/(NI(G)^{[\nu]}))-\deg(NI(G)^{[\nu]}) = m$?

我们对问题 1.2 给出了肯定的回答（见定理 5.2 和 5.4）。这表明，确定任意树的闭邻域理想的最高非零平方自由幂的正则性是一个困难的问题。因此，最后我们将重点放在一类特殊的树上，即毛毛虫图（见定理 5.5）。

2. 所需的工具

我们首先回顾图论和交换代数中的一些基本定义、记号和结果，这些内容将在后续各节中使用。

图论。设 G 是一个有限简单图，其顶点集为 $V(G)$，边集为 $E(G)$。对于子集 $U \subseteq V(G)$，G 在 U 上的导出子图记为 $G[U]$，它是顶点集为 U、边集为 $E(G[U]) = \{e \in E(G): \ e \subseteq U\}$ 的图。

若顶点序列 $v_1, \ldots, v_k$ 属于 G，且对所有 $1 \leq i \leq k-1$ 都有 $\{v_i, v_{i+1}\} \in E(G)$，则称其为长度为 $k-1$ 的路径。给定任意 $u, v \in V(G)$，我们将连接 u 和 v 的最短路径长度记为 $d(u, v)$。此外，若顶点序列 $v_1, \ldots, v_k$ 属于 G，且对所有满足 $v_1 = v_{k+1}$ 的 $1 \leq i \leq k$ 都有 $\{v_i, v_{i+1}\} \in E(G)$，则称其为长度为$k$ 的圈。若图 G 不包含作为导出子图的圈，则称其为森林。树是连通森林。

对于顶点 $u \in V(G)$，令 $G \backslash u$ 表示 G 在顶点集 $V(G) \backslash \{u\}$ 上的导出子图。对于顶点 $u \in V(G)$，u 的邻点集记作 $N_G(u)$，即集合 $\{v \in V(G) : \{u, v\} \in E(G)\}$。顶点 u 在 G 中的度是 $N_G(u)$ 的基数，记作 $\deg_G(u)$。u 的闭邻点集记作 $N_G[u]$，即集合 $N_G(u) \cup \{u\}$。

邻域复形。顶点集 $V(\Delta) = [n]$ 上的单纯复形 Δ 是 $V(\Delta)$ 的非空子集族，并且若 $F \in \Delta$ 和 $G \subseteq F$，则 $G \in \Delta$。Δ 的元素称为面。对于任意 $F \in \Delta$，F 的维数比 F 的基数小一。Δ 关于包含关系的极大面称为面，Δ 的所有面的集合记作 $\mathcal{F}(\Delta)$。单纯复形 Δ 的子集族若其极大单形集是 Δ 的极大单形集的子集，则该子集族也是一个单纯复形。

单纯复形 Δ 的面 F 称为叶子，如果 F 是 Δ 的唯一面，或者存在一个面 $G \in \Delta$，使得对于 Δ 的所有面 $H \neq F$，都有 $G \neq F$ 和 $F \cap G \supseteq F \cap H$。如果单纯复形 Δ 的每个非空子集族 Δ 都含有一个叶子，则称其为 单纯森林 。连通的单纯森林称为 单纯树。

图 G 的闭邻域复形记为 $\mathcal{N}(G)$，它是定义在顶点集 $V(G)$ 上的单纯复形，定义为

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(G) =&\{F \subseteq V(G): \text{存在顶点 } u, \text{使得 } F \subseteq N_G[u] \text{ 和 } N_G[v] \not\subseteq F \\ &\text{for all } v \in V(G) \setminus u\}.\end{aligned}$$

令 $[n] = \{1, \ldots, n\}$。下面给出一个图的闭邻域复形的例子。

例 2.1。设 G 是一个以 $[10]$ 为顶点集、边集为

$$E(G) = \{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{4,5\},\{5,6\},\{6,7\},\{7,8\},\{8,9\},\{5,10\}\}.$$

那么，闭邻域复形 $\mathcal{N}(G)$ 的面为

$$\mathcal{F}(\mathcal{N}(G)) = \{\{1,2\},\{5,10\},\{8,9\},\{2,3,4\},\{3,4,5\},\{5,6,7\},\{6,7,8\}\}.$$

如 $[1]$，所示，下面的注释回顾了树的闭邻域复形是一个单纯森林。

注 2.2. [1, 第 5 章，例 3，第 174] [9, 页定理 3.2]设 G 是一棵树。那么闭邻域复形 $\mathcal{N}(G)$ 是完全平衡的。等价地，$\mathcal{N}(G)$ 是一个单纯森林。

平方自由幂与匹配。 设 $S = K[x_1, \ldots, x_n]$ 是域 K 上由 n 个变量构成的多项式环。设 I 是 S 的一个单项式理想。令 $\mathcal{G}(I)$ 表示单项式理想 I 的极小单项式生成集。

我们用 $I^{[a]}$ 表示由属于 I^a的无平方单项式生成的理想，用 $I_{\langle a \rangle}$表示由属于 I且度为 a 的所有齐次元素生成的理想，并用 $\deg(I)$ 表示 I的极小生成元中的最大度。

对于子集 $A \subseteq [n]$，我们关联一个无平方单项式 $\mathbf{x}_A := \prod_{u \in A} x_u \in S$，集合 A 称为 $\mathbf{x}_A$的支集，记作 $\operatorname{supp}(\mathbf{x}_A)$。设 Δ 为一个单纯复形。 Δ 的面理想定义为 $I(\Delta) = (\mathbf{x}_F : F \in \mathcal{F}(\Delta)) \subset S$。图 G 的闭邻域复形的面理想称为 G的闭邻域理想，记作 $NI(G)$。

例 2.3. 设 G 为例 2.1 中的图， $\mathcal{N}(G)$ 为其闭邻域复形。则 G 的闭邻域理想为

$$NI(G) = (x_1x_2, x_5x_{10}, x_8x_9, x_2x_3x_4, x_3x_4x_5, x_5x_6x_7, x_6x_7x_8) \subset S = K[x_1, \ldots, x_{10}].$$

Δ 的匹配 是 Δ的一组两两不交的面。对于 Δ的匹配 M，我们定义

$$V_M = \{u \in V(\Delta) : u \in F \text{ and } F \in M\}.$$

由 k 个面组成的匹配称为 k-匹配。若 Δ 不含任何 $(k+1)$-匹配，则称 k-匹配为极大匹配。 Δ 的匹配数 是 Δ 的极大匹配的大小，记作 $\nu(\Delta)$。设 G 是一个图， M 是 $\mathcal{N}(G)$的一个 k-匹配。对于 G的子图 H，我们用

$$M_H = \{F \in M : F \subseteq V(H)\},$$

M 中顶点集包含于 $V(H)$的面的子集族。

我们通过下面的例子说明上述定义。

例 2.4. 设 G 是例 2.1 中描述的图， $\mathcal{N}(G)$表示其闭邻域复形。则 $M = \{\{1,2\}, \{5,10\}, \{8,9\}\}$ 是 $\mathcal{N}(G)$的一个极大匹配，因此 $\nu(\mathcal{N}(G)) = 3$。设 $H = G \setminus \{5\}$ 是 G的导出子图。则 $M_H = \{\{1,2\}, \{8,9\}\}$。

2.1. 分支线性与线性关系。 设 $S = K[x_1, \ldots, x_n]$ 是域 K 上的多项式环， I 是 S的一个齐次理想。设$\mathbf{F}_\bullet$ 是 I的一个最小分次 S-自由分解:

$$\mathbf{F}_\bullet : \oplus_{j \in \mathbb{Z}} S(-j)^{\beta_{p,j}(I)} \xrightarrow{\phi_p} \oplus_{j \in \mathbb{Z}} S(-j)^{\beta_{p-1,j}(I)} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \oplus_{j \in \mathbb{Z}} S(-j)^{\beta_{0,j}(I)} \xrightarrow{\phi_0} I \longrightarrow 0,$$

其中 $p \leq n$。数值$\beta_{i,j}(I)$称为 I的第 (i,j) 个分次贝蒂数。 I 在 S上的*Castelnuovo-Mumford* 正则度，或简称正则性，记作 $\operatorname{reg}(I)$，定义为

$$\operatorname{reg}(I) := \max\{j : \beta_{i,i+j}(I) \neq 0, \text{ for some } i\}.$$

此外，对于所有 $i \geq 0$ 和 $j \in \mathbb{Z}$，我们有$\beta_{i,j}(I) = \beta_{i+1,j}(S/I)$。

下面的引理是一个关键要素，将在第5节中反复使用。

引理 2.5. [11,引理 3.1] 设 I 是 S 的一个齐次理想，且 f 是 S 的一个 d 度单项式。考虑 $0 \to S/(I : f)(-d) \to S/(I) \to S/(I+f) \to 0$短正合列。则有

$$\operatorname{reg}(S/(I+f)) \leq \max\{\operatorname{reg}(S/(I:f)) + d - 1, \operatorname{reg}(S/I)\}.$$

当且仅当 $\operatorname{reg}(S/(I:\ f))+d\neq\operatorname{reg}(S/I)$ 时，等式成立。

若齐次理想 $I\subset S$ 满足对所有 $i\geq 0$ 且对 $j\neq i+d$，都有 d 线性分解 $\beta_{i,j}(I)=0$，则称其具有 d-线性分解。若齐次理想 $I\subset S$ 存在一组极小齐次生成元 $u_1,u_2,\ldots,u_n$，使得对每个 $i=2,\ldots,n$，冒号理想 $(u_1,\ldots,u_{i-1}):u_i$ 都由线性形式生成，则称其具有线性商。由 [10, 命题 8.2.1], 可知，若 I 具有线性商且由度为 d 的元素生成，则 I 具有 d-线性分解。若齐次理想 $I\subset S$ 对所有 j 都具有线性分解 $I_{\langle j\rangle}$，则称其为分次分量线性。由 [10, 定理 8.2.15], 可知，若 I 具有线性商，则 I 是分次分量线性的。若理想 $I\subset S$ 由度为 d 的齐次元素生成，且对所有 $j\neq 1+d$ 都有 $\beta_{1,j}(I)=0$，则称其为线性相关。特别地，若 I 不线性相关，则 I 不是分次分量线性的。

由 [2, 定理 5.1] 可知，图的边理想的第 ν个平方自由幂具有线性商，因此是分次分量线性的。然而，这一结果对单项式理想一般并不成立。在下面的例子中，我们将展示，图的闭邻域理想的第 ν个平方自由幂不一定是分次分量线性的。

例 2.6. 设 G 为例 2.1 中给出的图，并令 $\mathcal{N}(G)$表示它的闭邻域复形。则 $\nu(\mathcal{N}(G))=3$。Macaulay2 [5] 计算表明，$(NI(G)^{[3]})_{\langle 7\rangle}$ 不具有线性分解，因此理想 $NI(G)^{[3]}$ 不是分次分量线性的。

下面，我们回顾 [2] 中的一个有用工具，以研究单项式理想的线性相关性质。

设 I 是一个由度为 d的单项式生成的理想。在 [2], 中，作者如下为 I关联了一个图 G_I：$V(G_I)=\mathcal{G}(I)$，并且当且仅当 $\deg(\operatorname{lcm}(u,v))=d+1$时，$\{u,v\}\in E(G_I)$。此外，对于所有 $u,v\in\mathcal{G}(I)$，G_I在顶点集 $\{w\in V(G_I):\ w\text{整除}\operatorname{lcm}(u,v)\}$上诱导的子图记为 $G_I^{(u,v)}$。

定理 2.7. [2, 推论 2.2] 设 I 是一个由度为 d 的单项式生成的理想。那么，当且仅当对于所有 $u,v\in\mathcal{G}(I)$，$G_I^{(u,v)}$ 中存在一条连接 u 和 v的路径时，I 是线性相关的。

3. Some lemmas on matching of simplicial trees

本节将建立单纯树的 k-匹配的若干组合性质，这些性质将在下一节中使用。

构造 3.1. 设 Δ 是一个单纯复形，M和 N 是 Δ的两个不同的 k-匹配。那么，存在 $\hat{}\,M\subset M$ 和 $\hat{}\,N\subset N$，使得 $\hat{}\,M\cap\hat{}N=\emptyset$ 且 $M\setminus\hat{}M=N\setminus\hat{}N$。也就是说，$\hat{}\,\hat{}\,\hat{}\,M$ 和 N 是通过从 M 和 N中移除共有元素得到的。于是，M 和 N 构成 Δ的一个 $\hat{}\,\hat{}\,\hat{}k$-匹配，且满足 $k\leq k$。设 $M=\{F_1,\ldots,F_{\hat{k}}\}$ 和 $N=\{G_1,\ldots,G_{\hat{k}}\}$。我们构造二分图 $B_{(M,N)}$，其顶点集为 $\hat{}M\sqcup\hat{}N$，边集为 $\{\{F_i,G_j\}:\ F_i\cap G_j\neq\emptyset\}$。

下面的注记可由上述构造推出。

注 3.2. 沿用构造 3.1 中的记号，若 $F_i\subset V_{\hat{}N}=\bigcup_{j=1}^{k}G_j$，则 F_i 在 $B_{(M,N)}$ 中的度至少为 2。

接下来我们证明，与单纯树的两个 k-匹配相关联的图 $B_{(M,N)}$ 具有特别简单的结构。

引理 3.3. 设 Δ 是一棵单纯树，且 M 和 N 是 Δ 的两个不同的 k-匹配。那么在构造 *3.1* 中定义的二分图 $B_{(M,N)}$ 是无环的。

证明。 反设 $B_{(M,N)}$ 有一个圈

$$\mathcal{C} = F_1, G_1, F_2, \ldots, F_q, G_q, F_1$$

长度最短 $q \geq 4$，必要时重新排列顶点。考虑子复形$\Delta' = \langle F_1, \ldots\ldots, F_q, G_1, \ldots\ldots, G_q \rangle \subseteq \Delta$。那么 Δ'也是一个带有叶子的单纯森林，设叶子为 G_1。由 $B_{(M,N)}$ 的构造可知， $G_1 \cap F_1$ 和 $G_1 \cap F_2$ 非空；根据 q的极小性，对所有 $3 \leq i \leq q$都有 $G_1 \cap F_i = \emptyset$ 。由于 M 是一个匹配，F_1 和 F_2 不相交，因此 $G_1 \cap F_1$ 和 $G_1 \cap F_2$ 也不相交。这意味着 G_1 不是 Δ'的一片叶子，这与 Δ 是单纯树相矛盾。□

命题 3.4. 设 Δ 是一棵单纯树， M 和 N 是 Δ 的两个 k-匹配。假设 $V_M \subseteq V_N$。则 $M = N$。

证明. 按照构造 3.1，考虑二分图 $B_{(M,N)}$。由于 $V_M \subseteq V_N$，根据 M 和 N 的构造可知 $V_M \subseteq V_N$。特别地，对每个 $F_i \in M$，都有 $F_i \subseteq V_N$。接着，根据注 3.2，对所有 $1 \leq i \leq k$，F_i 的度至少为 2。因此， $B_{(M,N)}$ 的边数至少为 $2k$。

另一方面，由于根据引理 3.3， $B_{(M,N)}$ 是无环的，因此一个有 $2k$ 个顶点的无环图至多有 $2k-1$ 条边。这就产生了矛盾。因此 $M = N$，证毕。□

由此可立即得到 $\mathcal{G}(NI(\mathcal{T})^{[\nu]})$ 中元素的如下描述，其中 $\mathcal{T}$ 是一棵树。

推论 3.5. 设 $\mathcal{T}$ 是一棵树，并设 $\mathcal{N}(\mathcal{T})$ 是闭邻域复形，其中 $\mathcal{F}(\mathcal{N}(\mathcal{T})) = \{F_1, \ldots, F_n\}$。那么每个 $u \in \mathcal{G}(NI(\mathcal{T})^{[k]})$ 都可唯一地写成

$$u = \mathbf{x}_{F_{i_1}} \cdots \mathbf{x}_{F_{i_k}},$$

其中 $M = \{F_{i_1}, \ldots, F_{i_k}\}$ 是 $\mathcal{N}(\mathcal{T})$ 的一个 k-匹配。

我们回顾一个来自 [13] 的有用结果，该结果与单纯树的匹配有关。

定理 3.6. [13, 引理 3.5] 设 Δ 是一棵单纯树。此外，设 $M = \{F_1, \ldots, F_k\}$ 和 $N = \{G_1, \ldots, G_k\}$ 是 Δ 的两个 k-匹配。那么存在 i、$j \in \{1, \ldots, k\}$，使得对所有 $s \neq j$，都有 $F_i \cap G_s = \emptyset$ 。

注 3.7. 此外，通过从定理 3.6 中的 M 和 N 移除公共面，可以得出存在 i， $j \in \{1, \ldots, k\}$，使得 $F_i \neq G_j$，并且对所有 $s \neq j$ 都有 $F_i \cap G_s = \emptyset$。此外，如果 k 是 Δ 的匹配数，那么 $F_i \cap G_j \neq \emptyset$。

以下引理描述了 $\mathcal{N}$（$\mathcal{T}$）的两个 ν-匹配的组合性质，并且它们在定理 4.13 的证明中发挥关键作用。具体而言，我们比较 $\mathcal{T} \setminus \{u\}$ 的各连通分量中所含面的数量。

引理 3.8。 设 $\mathcal{T}$ 为一棵树， u 为 $\mathcal{T}$ 的一个顶点。设 $\mathcal{T}_1$、...、$\mathcal{T}_d$ 为图 $\mathcal{T} \setminus \{u\}$ 的连通分支。假设 M 和 N 是 $\mathcal{N}$（$\mathcal{T}$） 的两个 ν-匹配。则对于每个 $i = 1$、...、d，有

$$|M_{\mathcal{T}_i}| - 1 \leq |N_{\mathcal{T}_i}| \leq |M_{\mathcal{T}_i}| + 1.$$

证明。 由对称性，只需证明关于 $i=1$ 的不等式。首先，假设 $a=|N_{\mathcal{T}_1}| \lhd M_{\mathcal{T}_1}|-1$。集合 $M_{\mathcal{T}_1} \cup \bigcup_{i=2}^{d} N_{\mathcal{T}_i}$ 构成了 $\mathcal{N}(\mathcal{T})$ 的一个匹配，因为其中所有的面都包含在两两不相交的 $\mathcal{T} \setminus \{u\}$ 的连通分支中。此外，$\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[u]$ 是 $\mathcal{N}(\mathcal{T})$ 中唯一与 $\mathcal{T} \setminus \{u\}$ 的多个连通分支相交的面。因此，在 N 的各个面中，至多有一个与多个连通分支相交，所以 $\sum_{i=2}^{d}|N_{\mathcal{T}_i}| \geq \nu-(a+1)$。由此可得

$$\Big|M_{\mathcal{T}_1} \cup \bigcup_{i=2}^{d} N_{\mathcal{T}_i}\Big| = |M_{\mathcal{T}_1}| + \nu - a - 1 > \nu,$$

这与 ν 是 $\mathcal{N}(\mathcal{T})$的匹配数这一事实相矛盾。因此， $|N_{\mathcal{T}_1}| \geq |M_{\mathcal{T}_1}|-1$.类似地，通过互换 M 和 N 的角色，我们得到 $|M_{\mathcal{T}_1}| \geq |N_{\mathcal{T}_1}|-1$ ，从而得到 $|M_{\mathcal{T}_1}|+1 \geq |N_{\mathcal{T}_1}|$. □

引理 3.9. 在引理 *3.8* 的假设下，进一步设$\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[u] \in M$。则有如下结论。

(i) 若对于某个 i，$\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[u]$ 不与 $N_{\mathcal{T}_i}$ 的任何面相交，则 $|M_{\mathcal{T}_i}| = |N_{\mathcal{T}_i}|$。(ii) 若$\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[u] \notin N$ 且 $u \in V_N$，则要么对所有 i都有 $|M_{\mathcal{T}_i}| = |N_{\mathcal{T}_i}|$ ，要么存在不同的指标i、 j，使得 $|N_{\mathcal{T}_i}| = |M_{\mathcal{T}_i}|+1$、 $|N_{\mathcal{T}_j}| = |M_{\mathcal{T}_j}|-1$，且对所有 $k \neq i$、 j都有 $|N_{\mathcal{T}_k}| = |M_{\mathcal{T}_k}|$。(iii) 若 $u \notin V_N$，则存在一个指标 i ，使得 $N_{\mathcal{T}_i}$ 包含一个面，该面包含 u的一个邻点，并且

$$|N_{\mathcal{T}_i}| = |M_{\mathcal{T}_i}| + 1,$$

当 $|N_{\mathcal{T}_j}| = |M_{\mathcal{T}_j}|$ 对所有 $j \neq i$成立时。

Proof. 由于 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[u] \in M$ ，且 M 的其他每个面都恰好属于一个 $M_{\mathcal{T}_i}$，因此我们有 e

$$M = \{\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[u]\} \sqcup M_{\mathcal{T}_1} \sqcup \cdots \sqcup M_{\mathcal{T}_d}, \qquad \nu = 1 + |M_{\mathcal{T}_1}| + \cdots + |M_{\mathcal{T}_d}|. \tag{1}$$

(i) 固定 i。若 $N_{\mathcal{T}_i}$没有任何面与 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[u]$相交，则 $(M \setminus M_{\mathcal{T}_i}) \cup N_{\mathcal{T}_i}$ 是 $\mathcal{N}(\mathcal{T})$的一个匹配，因此其基数至多为 ν。由于 $|M \setminus M_{\mathcal{T}_i}| = \nu - |M_{\mathcal{T}_i}|$，这就得到 $|N_{\mathcal{T}_i}| \leq |M_{\mathcal{T}_i}|$。类似地，$(N \setminus N_{\mathcal{T}_i}) \cup M_{\mathcal{T}_i}$ 是一个匹配，所以 $|M_{\mathcal{T}_i}| \leq |N_{\mathcal{T}_i}|$。因此 $|M_{\mathcal{T}_i}| = |N_{\mathcal{T}_i}|$。

(ii) 若 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[u] \notin N$且 $u \in V_N$，则存在一个顶点 v，它与 u相邻，且满足 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[v] \in N$，并且

$$N = \{\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[v]\} \sqcup N_{\mathcal{T}_1} \sqcup \cdots \sqcup N_{\mathcal{T}_d}, \qquad \nu = 1 + |N_{\mathcal{T}_1}| + \cdots + |N_{\mathcal{T}_d}|. \tag{2}$$

我们可以假设 $v \in V(\mathcal{T}_1)$。对于每个 $i=2,\ldots,d$， $M_{\mathcal{T}_i}$中的面都与 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[v]$不相交。因此，若对某个 $i \neq 1$有 $|N_{\mathcal{T}_i}| = |M_{\mathcal{T}_i}|-1$ ，则将 N 中属于 $N_{\mathcal{T}_i}$ 的面替换为 $M_{\mathcal{T}_i}$ 中的面，会得到一个大小为 $\nu+1$的 $\mathcal{N}(\mathcal{T})$匹配，矛盾。另一方面，若$|N_{\mathcal{T}_1}| = |M_{\mathcal{T}_1}|+1$，则将 M 中属于 $M_{\mathcal{T}_1}$ 的面替换为 $N_{\mathcal{T}_1}$ 中的面，会得到一个大小为 $\nu+1$的匹配，因为 $N_{\mathcal{T}_1}$ 的所有面都与 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[u]$不相交，这又导出矛盾。因此，由引理 3.8,

$$|M_{\mathcal{T}_1}|-1 \leq |N_{\mathcal{T}_1}| \leq |M_{\mathcal{T}_1}|, \qquad |M_{\mathcal{T}_i}| \leq |N_{\mathcal{T}_i}| \leq |M_{\mathcal{T}_i}|+1 \text{ for } i=2,\ldots,d.$$

利用 **(1)** 和 **(2)**，这意味着要么对于所有 i，都有 $|N_{\mathcal{T}_i}| = |M_{\mathcal{T}_i}|$ ；要么存在某个 $j>1$，使得 $|N_{\mathcal{T}_1}| = |M_{\mathcal{T}_1}|-1$,$|N_{\mathcal{T}_j}| = |M_{\mathcal{T}_j}|+1$，并且对于所有 $k \neq 1, j$，都有 $|N_{\mathcal{T}_k}| = |M_{\mathcal{T}_k}|$。此外，由 **(i)** 可知， $N_{\mathcal{T}_j}$ 与 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[u]$ 相交。

(iii) 若 $u \notin V_N$，则

$$N = N_{\mathcal{T}_1} \sqcup \cdots \sqcup N_{\mathcal{T}_d}, \qquad \nu = |N_{\mathcal{T}_1}| + \cdots + |N_{\mathcal{T}_d}|. \tag{3}$$

假设对于某个 i，有 $|N_{\mathcal{T}_i}| = |M_{\mathcal{T}_i}| - 1$。将 $N_{\mathcal{T}_i}$ 在 N 中的面替换为 $M_{\mathcal{T}_i}$ 的面，就得到一个大小为 $\nu + 1$ 的 $\mathcal{N}(\mathcal{T})$ 匹配，这又导出了矛盾。因此，根据引理 3.8，对于所有 i，都有 $|M_{\mathcal{T}_i}| \leq |N_{\mathcal{T}_i}| \leq |M_{\mathcal{T}_i}| + 1$。最后，利用 (1) 和 (3)，可知恰好存在一个指标 i 使得 $|N_{\mathcal{T}_i}| = |M_{\mathcal{T}_i}| + 1$；而由 (i) 可知，$N_{\mathcal{T}_i}$ 与 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[u]$ 相交。□

引理 3.10. 设 $\mathcal{T}$ 是一棵树，且 M 和 N 是 $\mathcal{N}(\mathcal{T})$ 的两个 ν-匹配。设 $F \in M$，并假设

$$|\{G \in N : F \cap G \neq \emptyset\}| = s > 2.$$

则存在一个 $\mathcal{N}(\mathcal{T})$ 的 ν-匹配 W，它不同于 M 和 N，且满足 $W \subset M \cup N$，其中

$$|\{H \in W : F \cap H \neq \emptyset\}| = 2.$$

证明。设 $F = \mathrm{N}_{\mathcal{T}}[u] \in M$。则 $\deg_{\mathcal{T}}(u) = d \geq s$。由于 $s > 3$，我们有 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[u] \notin N$。令$\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_d$ 为 $\mathcal{T} \setminus \{u\}$ 的连通分支。

根据引理 3.9(i)–(iii)，不等式 $|N_{\mathcal{T}_i}| \neq |M_{\mathcal{T}_i}|$ 至多对两个指标 i 成立，且仅当 i 满足 $N_{\mathcal{T}_i}$ 含有一个与 F 相交的面时才成立。由于 $s > 2$，至少存在两个指标 $i \neq j$，使得 $N_{\mathcal{T}_i}$ 和 $N_{\mathcal{T}_j}$ 各自都含有一个与 F 相交的面。重新标记后，我们可以假设 F 与 $N_{\mathcal{T}_1}$ 和 $N_{\mathcal{T}_2}$ 中各自的一个面相交，并且对所有$i = 3, \ldots, d$，$|N_{\mathcal{T}_i}| = |M_{\mathcal{T}_i}|$。

定义

$$W = N_{\mathcal{T}_1} \sqcup N_{\mathcal{T}_2} \sqcup M_{\mathcal{T}_3} \sqcup \cdots \sqcup M_{\mathcal{T}_d}.$$

由于涉及的所有面都位于 $\mathcal{T}\setminus\{u\}$ 的两两不相交的连通分支中，因此集合 W 是$\mathcal{N}(\mathcal{T})$的 ν-匹配。此外，F与$M_{\mathcal{T}_3}$、.....、$M_{\mathcal{T}_d}$的任何面都不相交，因此 $|\{H \in W:\ F \cap H \neq \emptyset\}| = 2$，如所需。□

4. Componentwise linearity of highest non-vanishing squarefree power for trees

本节将建立树的闭邻域理想的最高非零平方自由幂具有分支线性的必要且充分条件。

我们在树 $\mathcal{T}$ 上引入以下两个条件：

(C1) $\mathcal{T}$ 不包含一条路径 r_1、r、s、t、t_1，满足 $\deg_{\mathcal{T}}(s) \geq 3$，且存在两个不同的 ν-匹配

$$\{\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[r]\} \cup Y \quad \text{and} \quad \{\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[t]\} \cup Y$$

存在，其中 Y 是 $\mathcal{N}(\mathcal{T})$ 的一个 $(\nu - 1)$-匹配。

(C2) $\mathcal{T}$ 不包含路径 $p_1 = r$，p_2，$\ldots$，$p_{3n-1} = s$，其中 $n \geq 1$，满足 $\deg_{\mathcal{T}}(r) \geq 3$ 且 $\deg_{\mathcal{T}}(s) \geq 3$，使得这些集合

$$\{\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[p_1], \mathrm{N}_{\mathcal{T}}[p_4], \ldots, \mathrm{N}_{\mathcal{T}}[p_{3n-2}]\} \cup Y$$

and

$$\{\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[p_2], \mathrm{N}_{\mathcal{T}}[p_5], \ldots, \mathrm{N}_{\mathcal{T}}[p_{3n-1}]\} \cup Y$$

每个都构成 $\mathcal{N}(\mathcal{T})$ 的一个 ν-匹配，其中 Y 是 $\mathcal{N}(\mathcal{T})$ 的一个 $(\nu - n)$-匹配。

以下定理表明，条件（C1）和（C2）是树的闭邻域理想的 ν次平方自由幂成为分次分量线性所必需的。

定理 4.1. 设 $\mathcal{T}$ 是一棵不满足条件 (C1) 的树，且 $J = NI(\mathcal{T})$。则 $J^{[\nu]}$ 不是分次分量线性的。

证明。 假设 $\mathcal{T}$包含一条路径，其边为 $\{r_1, r\}, \{r, s\}, \{s, t\}, \{t, t_1\}$，且 $\deg_{\mathcal{T}}(s) \geq 3$，且这些单项式

$$\mathbf{x}_{\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[r]} Y \quad \text{and} \quad \mathbf{x}_{\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[t]} Y$$

属于 $\mathcal{G}(J^{[\nu]})$，其中 $Y \in \mathcal{G}(J^{[\nu-1]})$。因此， $\mathcal{T}$不满足条件（C1）。记 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[r] = \{r, s, r_1, r_2, \ldots, r_d\}$ 和 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[t] = \{t, s, t_1, t_2, \ldots, t_{d'}\}$，其中 $d, d' \geq 1$。令

$$u = \mathbf{x}_A(\mathbf{x}_{\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[r]} Y) \quad \text{and} \quad v = \mathbf{x}_B(\mathbf{x}_{\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[t]} Y),$$

其中 $A = \{t_2, \ldots, t_{d'}\}$ 和 $B = \{r_2, \ldots, r_d\}$，使得 $\deg(u) = \deg(v) = a$。令 $I := J^{[\nu]}$。则$u, v \in I_{\langle a \rangle}$。根据定理 2.7，只需证明 u 和 v 在图 $G^{(u,v)}_{I_{\langle a \rangle}}$ 中不连通。令 $U = \{F, F_2 \ldots, F_\nu\}$ 和 $U' = \{G, F_2 \ldots, F_\nu\}$ 分别为与 u 和 v 对应的 ν-匹配，其中 $F = \mathrm{N}_{\mathcal{T}}[r], G = \mathrm{N}_{\mathcal{T}}[t]$ 且 $\operatorname{supp}(Y) = \bigcup_{i=2}^{\nu} F_i$。由 u 和v 的构造可得

$$\operatorname{supp}(v) \setminus \operatorname{supp}(u) = \{t, t_1\} \text{ and } \operatorname{supp}(u) \setminus \operatorname{supp}(v) = \{r, r_1\},$$

因此

$$\operatorname{supp}(\operatorname{lcm}(u, v)) = \operatorname{supp}(u) \cup \{t, t_1\} = \operatorname{supp}(v) \cup \{r, r_1\} = V_U \cup \mathrm{N}_{\mathcal{T}}[t] = V_{U'} \cup \mathrm{N}_{\mathcal{T}}[r] \tag{4}$$

令 $w \in G^{(u,v)}_{I_{\langle a \rangle}}$和 $W = \{H_1, \ldots, H_\nu\}$为与 w对应的 ν-匹配。从 $\mathcal{T}$中移除边 $\{s, t\}$ 后，得到两个连通分支 $\mathcal{T}_1$ 和 $\mathcal{T}_2$，其中 $\mathcal{T}_1$ 包含 s，而 $\mathcal{T}_2$包含 t。注意，$\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[s]$ 和 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[t]$ 是 $\mathcal{N}(\mathcal{T})$ 中唯一不完全包含于 $V(\mathcal{T}_1)$ 或 $V(\mathcal{T}_2)$ 中的面。因此，

$$\text{if} \quad \mathrm{N}_{\mathcal{T}}[s], \mathrm{N}_{\mathcal{T}}[t] \notin W, \quad \text{then} \quad |U_{\mathcal{T}_1}| = |W_{\mathcal{T}_1}| \quad \text{and} \quad |U_{\mathcal{T}_2}| = |W_{\mathcal{T}_2}|. \tag{5}$$

断言。我们有 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[s] \notin W$。
断言的证明： 假设 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[s] \in W$。那么 $k = |U_{\mathcal{T}_1}| = |W_{\mathcal{T}_1} \cup \{\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[s]\}|$，也就是说， $U_{\mathcal{T}_1}$ 和 $W' = W_{\mathcal{T}_1} \cup \{\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[s]\}$ 给出了 $\mathcal{T}$的一个 k-匹配。

我们有 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[r] \in U_{\mathcal{T}_1}$。根据构造 3.1，考虑定义在 $2k'$ 个顶点上的二分图 $B_{(U_{\mathcal{T}_1}, W_{\mathcal{T}_1})}$，其中 $2k' = 2k - 2t$，且 $t = |U_{\mathcal{T}_1} \cap W_{\mathcal{T}_1}|$。那么，由于 $s \in \mathrm{N}_{\mathcal{T}}[r] \cap \mathrm{N}_{\mathcal{T}}[s]$， $\{\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[r], \mathrm{N}_{\mathcal{T}}[s]\}$ 在 $B_{(U_{\mathcal{T}_1}, W_{\mathcal{T}_1})}$ 中构成一条边。根据我们的假设，$\deg_{\mathcal{T}}(s) \geq 3$，因此存在$z \in \mathrm{N}_{\mathcal{T}}[s] \setminus \{r, s, t\} \subset V_W$。由于根据 (4) 有 $V_{W'} \subset V_{U_{\mathcal{T}_1}} \cup \{t\}$，可知 $z \in V_{U_{\mathcal{T}_1}}$，并且存在一个面 $F \in U_{\mathcal{T}_1}$，满足 $F \neq \mathrm{N}_{\mathcal{T}_1}[r]$，且 $z \in F$。因此，$\mathrm{N}_{\mathcal{T}_1}[s]$ 在 $B_{(U_{\mathcal{T}_1}, W_{\mathcal{T}_1})}$中的度至少为 2。此外，由于 $V_{W_{\mathcal{T}_1}} \setminus \mathrm{N}_{\mathcal{T}_1}[s] \subset V_{U_{\mathcal{T}_1}}$，根据注 3.2，$B_{(U_{\mathcal{T}_1}, W_{\mathcal{T}_1})}$ 的分割集 $W_{\mathcal{T}_1}$ 中每个顶点的度也至少为 2。这表明$B_{(U_{\mathcal{T}_1}, W_{\mathcal{T}_1})}$ 有多于 $2k'$ 条边，因此它不是树，这与引理 3.3 矛盾。这就证明了我们的断言。

由于 $\deg(\operatorname{lcm}(u, v)) = a + 2$，因此 $\{u, v\}$不是 $G^{(u,v)}_{I_{\langle a \rangle}}$中的一条边。事实上，给定任意 $w \in G^{(u,v)}_{I_{\langle a \rangle}}$，若 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[r] \subset \operatorname{supp}(w)$，则 w 与 v不相邻。因此，要证明 u 和 v 在 $G^{(u,v)}_{I_{\langle a \rangle}}$ 中不连通，只需证明：若单项式 $w \in G^{(u,v)}_{I_{\langle a \rangle}}$ 与 u相连，则 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[r] \in W$。我们通过对 $d(u, w)$应用归纳法来证明这一点，即在 $G^{(u,v)}_{I_{\langle a \rangle}}$ 中连接 u 和 v的最短路径的长度。注意，当 $d(u, w) = 0$ 时，该断言显然成立，因为此时 $u = w$。现在假设对所有满足 $k \geq 1$的 $d(u, w) \leq k - 1$，该断言均成立。现在，取满足 $d(u, w) = k$的 $w \in G^{(u,v)}_{I_{\langle a \rangle}}$。

由于 $w \in G^{(u,v)}_{I_{\langle a\rangle}}$，我们有 deg(lcm($u$, w)) $\leq a+2$。首先考虑 deg(lcm(u, w)) $= a+1$的情形。此时， u 和 w 恰好相差一个变量；也就是说，存在某个$x \in$ supp(u)，使得 $w = (u/x)y$，其中 $y \in \{t, t_1\}$，这是由 (4) 得出的。这表明 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[t] \not\subset$ supp(w)，因为 t 或 t_1 不在 supp(w) 中。特别地，$\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[t] \notin W$，由 (5) 可得$|U_{\mathcal{T}_1}| = |W_{\mathcal{T}_1}|$。另一方面，由 (4) 可知 $V_{W_{\mathcal{T}_1}} \subset V_{U_{\mathcal{T}_1}}$。于是根据命题 3.4，我们得到 $U_{\mathcal{T}_1} = W_{\mathcal{T}_1}$，因此 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}_1}[r] \in W$ 且 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}_1}[r] \subset$supp($w$)，如所需。这也表明 x是 $\mathcal{T}_2$的一个顶点。

现在，令 deg(lcm(u, w)) $= a+2$。那么 u 和 w 恰好相差两个变量，也就是说，存在某个 x, $z \in$ supp(u)，使得 $w = (u/xz)tt_1$，这是由 (4) 得出的。由于 w 与 u 相连，存在一个单项式 $w' \in G^{(u,v)}_{I_{\langle a\rangle}}$，使得 w 与 w' 相邻，且 $d(u, w') = k-1$。根据归纳假设，$\mathrm{N}_{\mathcal{T}_1}[r]$ 包含在与 w' 对应的匹配中，并且 $w' =(u/x')y$，其中 $y \in \{t, t_1\}$ 和 x' 属于 $\mathcal{T}_2$。

若 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[t] \notin W$，则如上所述，我们再次得到所需结论。为了完成证明，只需排除 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[t] \in W$ 这种情况。假设 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[t] \in W$。如果 x 和 z 都属于 $\mathcal{T}_1$，那么 deg(lcm(v, w')) $= a+2$，且 w 不可能与 w' 相邻。因此，至少有一个顶点属于 T_2，不妨设为 x。由于 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[t] \in U'$，我们得到 $|U'_{\mathcal{T}_2}| = |W_{\mathcal{T}_2}|$。由于 $W_{\mathcal{T}_2} \subseteq U'_{\mathcal{T}_2}$，由 (4) 可知，根据命题 3.4，我们得出$U'_{\mathcal{T}_2} = W_{\mathcal{T}_2}$。但是，$x \in V_{U'_{\mathcal{T}_2}}$，这与 $x \notin$supp(w) 矛盾。□

定理 4.2. 设 $\mathcal{T}$ 是一棵不满足条件 （C2） 的树，并设 $J = NI(\mathcal{T})$。那么 $J^{[\nu]}$ 不是分次分量线性的。

证明。设 r 和 s 是 $\mathcal{T}$ 的两个顶点，且 deg(r) $\geq$deg(s) ≥ 3。假设 P: $p_1, \ldots, p_{3n-1}$是一条由 r 连接 s、包含 $3n-1$ 个顶点的路径，也就是说， $p_1 = r$ 和 $p_{3n-1} = s$。此外，假设存在单项式 $u' = \mathbf{x}^{\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[p_1]}\mathbf{x}^{\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[p_4]}\cdots\mathbf{x}_{\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[p_{3n-2}]}Y$ 和 $v' = \mathbf{x}^{\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[p_2]}\mathbf{x}^{\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[p_5]}\cdots\mathbf{x}_{\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[p_{3n-1}]}Y$ 属于 $\mathcal{G}(J^{[\nu]})$，其中 $Y \in J^{[\nu-n]}$。因此 $\mathcal{T}$ 不满足条件（C2）。

设 P 是满足上述条件的一条最短路径。首先，我们断言，若 $n \geq 2$，则对于所有满足 $i \in \{2, \ldots, 3n-2\}\}$ 且 $i \equiv 1$, 2 (mod 3) 的情形，都有 deg$_{\mathcal{T}}$(p_i) $= 2$。反设，对于某个满足 $i \equiv 2$ (mod 3) 的 $i \in \{2, \ldots, 3n-2\}$，有 deg$_{\mathcal{T}}$($p_i$) ≥ 3。在这种情况下，我们有

$$u_1 = \mathbf{x}_{\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[p_1]}\mathbf{x}_{\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[p_4]}\cdots\mathbf{x}_{\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[p_{i-1}]}Z \text{ and } v_1 = \mathbf{x}_{\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[p_2]}\mathbf{x}_{\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[p_5]}\cdots\mathbf{x}_{\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[p_i]}Z$$

属于 $\mathcal{G}(J^{[\nu]})$，其中 $Z \in J^{[\nu-m]}$。这与我们的假设矛盾： P 是满足该假设的一条最短路径。同理，对于某个满足 $i \equiv 1$ (mod 3) 的 $i \in \{2, \ldots, 3n-2\}$，deg$_{\mathcal{T}}$($p_i$) ≥ 3 的情形也不可能。因此，断言得证。

设 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[r] = \{r, r_1, \ldots, r_d\}$ 和 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[s] = \{s, s_1, \ldots, s_{d'}\}$。若 $n = 1$，令 $r_1 = s$ 和 $s_1 = r$；若$n \geq 2$，则选择 r_1, $s_1 \in V_P$，即 $r_1 = p_1$ 和 $s_1 = p_{3n-2}$。令

$$u = \mathbf{x}_A(\mathbf{x}_{\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[r]}Y) \quad \text{and} \quad v = \mathbf{x}_B(\mathbf{x}_{\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[t]}Y),$$

其中 $A = \{s_4, \ldots, s_{d'}\}$ 和 $B = \{r_4, \ldots, r_d\}$，因此 deg(u) $=$deg(v) $= a$。令 $I := J^{[\nu]}$。于是u, $v \in I_{\langle a\rangle}$。根据定理 2.7，只需证明 u 和 v 在图 $G^{(u,v)}_{I_{\langle a\rangle}}$ 中是不连通的。

令 U 和 U' 为对应于 u 和 v的 ν-匹配。根据 u 和 v的构造，我们有 supp(v) $\setminus$ supp(u) $= \{s_2, s_3\}$ 且 supp(u) $\setminus$ supp(v) $= \{r_2, r_3\}$，因此

$$\mathrm{supp}(\mathrm{lcm}(u,v)) = \mathrm{supp}(u) \cup \{s_2, s_3\} = \mathrm{supp}(v) \cup \{r_2, r_3\} = V_U \cup \mathrm{N}_{\mathcal{T}}[s] = V_{U'} \cup \mathrm{N}_{\mathcal{T}}[r]. \quad (6)$$

令 $\mathcal{T}_1$、$\mathcal{T}_2$、.....、$\mathcal{T}_{d'}$为 $\mathcal{T} \setminus \{s\}$ 的连通分支，使得对于每个 $i = 1$、.....、 d'， s_i 都属于 T_i。令 $w \in G^{(u,v)}_{I_{\langle a\rangle}}$ 和 $W = \{H_1, \ldots, H_\nu\}$ 为与 w 对应的 ν-匹配。

由于 U 和 W 是 $\mathcal{T}$的极大匹配，我们注意到

$$\text{if} \quad \mathrm{N}_{\mathcal{T}}[s], \mathrm{N}_{\mathcal{T}}[s_i] \notin W, \quad \text{then} \quad |U_{T_1 \cup \{s\}}| = |W_{T_1 \cup \{s\}}| \tag{7}$$

断言：对于所有 $i = 2$、4、5、.....、d'，$\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[s_i] \notin W$。

断言的证明：假设对于 $i = 2$，有 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[s_i] \in W$。同样的论证适用于 i的任何其他选择。令 $F = \mathrm{N}_{\mathcal{T}}[s_1]$ 且 $G = \mathrm{N}_{\mathcal{T}}[s_2]$。

令 $M = U_{\mathcal{T}_1} \cup U_{\mathcal{T}_2} \cup \{F\} \subseteq U$和 $M' = W_{\mathcal{T}_1} \cup W_{\mathcal{T}_2} \cup \{G\} \subseteq W$。那么 $|M| = |M'|$，因为 U 和 W 是 $\mathcal{T}$的极大匹配。按照构造 3.1，考虑二分图 $B_{(M,M')}$，其顶点集为 $2k'$，其中 $2k' = 2|M| - 2k$满足 $k = |M \cap M'|$。那么 $\{F, G\}$在 $B_{(M,M')}$中构成一条边，因为 $s \in F \cap G$。由于 $G \in M'$，存在 $z \in G \setminus \{s, s_2\} \subset V_N$。由于$V_{M'} \setminus A \subset V_M \cup \{s_2\}$，可得 $z \in V_M$，并且存在一个面 $F' \in M$，满足 $F' \neq F$且 $z \in F'$。因此， G在 $B_{(M,M')}$中的度至少为 2。此外，由于 $V_{M'} \setminus \{G\} \subseteq V_M$，根据注 3.2 可知，在 $B_{(M,M')}$ 中，每个 $G' \in M'$ 的度也至少为 2。这表明 $B_{(M,M')}$ 有多于 $2k'$ 条边，且它不是树，这与引理 3.3 矛盾。由此证明了我们的断言。

我们按照定理 4.1 的证明进行。由于 $\deg(\mathrm{lcm}(u, v)) = a + 2$，因此$\{u, v\}$ 不是 $G_{I_{\langle a \rangle}}^{(u,v)}$ 中的一条边。事实上，对于任意 $w \in G_{I_{\langle a \rangle}}^{(u,v)}$，如果 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[r] \subset \mathrm{supp}(w)$，那么 w 与 v不相邻。于是，要证明 u 和 v 在 $G_{I_{\langle a \rangle}}^{(u,v)}$ 中不连通，只需证明：如果单项式 $w \in G_{I_{\langle a \rangle}}^{(u,v)}$ 与 u连通，那么 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[r] \subset W$，即与$w$对应的匹配。我们通过对 $d(u, w)$应用归纳法来证明这一点。注意，对于$d(u, w) = 0$，该断言显然成立，因为此时 $u = w$。现在假设该断言对所有满足 $k \geq 1$ 的 $d(u, w) \leq k - 1$均成立。现在，取满足 $d(u, w) = k$的 $w \in G_{I_{\langle a \rangle}}^{(u,v)}$。

由于 $w \in G_{I_{\langle a \rangle}}^{(u,v)}$，我们有 $\deg(\mathrm{lcm}(u, w)) \leq a + 2$。首先，考虑 $\deg(\mathrm{lcm}(u, w)) = a + 1$ 的情形。于是，存在某个 $x \in \mathrm{supp}(u)$，使得 $w = (u/x)y$，其中$y \in \{s_2, s_3\}$，这是由 (6) 得出的。这表明 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[s] \not\subset \mathrm{supp}(w)$，因为 s_2 或 s_3 不在 $\mathrm{supp}(w)$ 中。特别地，$\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[s] \notin W$，由 (7) 可得 $|U_{\mathcal{T}_1 \cup \{s\}}| = |W_{\mathcal{T}_1 \cup \{s\}}|$。另一方面，由 (6) 可知 $V_{W_{\mathcal{T}_1}} \subset V_{U_{\mathcal{T}_1}}$。于是根据命题 3.4，我们得到 $U_{\mathcal{T}_1 \cup \{s\}} = W_{\mathcal{T}_1 \cup \{s\}}$，从而 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}_1}[r] \in W$，如所需。这也表明 x 是 $\mathcal{T}_2$ 的一个顶点。

现在，设 $\deg(\mathrm{lcm}(u, w)) = a + 2$。那么， u 和 w 恰好在两个变量上不同，也就是说，根据（6），存在某个 $x, z \in \mathrm{supp}(u)$，使得 $w = (u/xz)s_2s_3$。由于 w 与 u相连，存在一个单项式 $w' \in G_{I_{\langle a \rangle}}^{(u,v)}$，使得 w 与 w' 相邻，并且 $d(u, w') = k - 1$；根据归纳假设，$\mathrm{N}_{\mathcal{T}_1}[r]$ 包含于与 w'对应的匹配中，且 $w' = (u/x')y$，其中 $y \in \{s_2, s_3\}$ 和 x' 属于 $\mathcal{T}_2$。

如果 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[s] \notin W$，那么同样地，如上所述，我们得到所需结论。为完成证明，只需排除 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[s] \in W$ 的情形。假设 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[s] \in W$。由于 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[s] \in U'$，我们得到 $|U'_{\mathcal{T}_2}| = |W_{\mathcal{T}_2}|$。根据（6），我们还知道 $W_{\mathcal{T}_2} \subseteq U'_{\mathcal{T}_2}$；由命题 3.4 可得 $U'_{\mathcal{T}_2} = W_{\mathcal{T}_2}$。这表明 x和 z都属于 $\mathcal{T}_1$。因此 $\deg(\mathrm{lcm}(v, w')) = a + 2$，并且 w 不可能与 w'相邻，矛盾。□

接下来，我们证明 (C1) 和 (C2) 是最高非零平方自由幂 $NI(\mathcal{T})$ 分支线性的必要条件。事实上，我们证明，若 $\mathcal{T}$ 满足 (C1) 和 (C2)，则 $NI(\mathcal{T})^{[\nu]}$ 具有线性商。为此，我们现在在 $\mathcal{N}(\mathcal{T})$ 的 ν-匹配上定义两个全序，分别记为 $>_{\mathrm{lex}}$ 和 $>_{\ell}$。

记号 4.3. 设 $\mathcal{T}$ 是一棵树，x 是 $\mathcal{T}$ 的一个悬挂顶点。我们将 $\mathcal{T}$ 视为以 x 为根的有根树。对于顶点 $u \in V(\mathcal{T})$，我们定义 level(u) 为 x 到 u 的距离。我们对 $\mathcal{N}(\mathcal{T})$ 的面采用如下记号。对于顶点 $u \in V(\mathcal{T})$，若 $|N_{\mathcal{T}}[u]| = i$，level(u) $= j$，且 u 是 level j 上顶点的固定顺序中的第 k 个顶点（见注 4.4），则记作 $F_{i,j,k} = N_{\mathcal{T}}[u]$。

我们定义了 $\mathcal{F}(\mathcal{N}(\mathcal{T}))$ 上的全序：规定 $F_{i,\ j,\ k} > F_{i',\ j',\ k'}$，当以下任一条件成立时：

（i） $i < i'$；（ii） $i = i'$ 且 $j < j'$；（iii） $i = i'$、$j = j'$ 和 $k < k'$。

令 $M = \{F_{i_1,j_1,k_1}, \ldots, F_{i_\nu,j_\nu,k_\nu}\}$ 和 $N = \{F_{i'_1,j'_1,k'_1}, \ldots, F_{i'_\nu,j'_\nu,k'_\nu}\}$ 为 ν-匹配，其关于上述面顺序按递减顺序排列。令 $s =$ 最小值$\{\ell : F_{i_\ell,\ j_\ell,\ k_\ell} \neq F_{i'_\ell,\ j'_\ell,\ k'_\ell}\}$. 我们在 ν-匹配上定义字典序，规定 $M >_{\text{lex}} N$ 当 $F_{i_s,\ j_s,\ k_s} > F_{i'_s,\ j'_s,\ k'_s}$.

根据推论 3.5，$NI(\mathcal{T})^{[\nu]}$ 的每个生成元都唯一对应于 $\mathcal{N}(\mathcal{T})$的一个 ν-匹配，由此在极小生成集 $\mathcal{G}(NI(\mathcal{T})^{[\nu]})$上诱导出一个全序 $>_{\text{lex}}$。

注 4.4. 指标 k 仅用于对满足以下条件的面施加全序：这些面对应于层(u)值相同且邻域大小相同的顶点；k的任意固定选取均可。

例 4.5. 设 $\mathcal{T}$ 为图 1 中所示的以悬挂顶点 1 为根的树 [14]。使用记号 4.3，我们将闭邻域复形 $\mathcal{N}(\mathcal{T})$的面标记如下：

$$
\begin{aligned}
&F_{2,0,1} = N_G[1] = \{1,2\}, && F_{2,6,1} = N_G[14] = \{13,14\}, && F_{2,10,1} = N_G[11] = \{10,11\},\\
&F_{3,2,1} = N_G[3] = \{2,3,4\}, && F_{3,4,1} = N_G[12] = \{4,12,13\}, && F_{3,4,2} = N_G[5] = \{4,5,6\},\\
&F_{3,5,2} = N_G[6] = \{5,6,7\}, && F_{3,6,2} = N_G[7] = \{6,7,8\}, && F_{3,7,1} = N_G[8] = \{7,8,9\},\\
&F_{3,8,1} = N_G[9] = \{8,9,10\}, && F_{4,3,1} = N_G[4] = \{3,4,5,12\}.
\end{aligned}
$$

根据记号 4.3 中定义的面上的全序，我们得到

$$F_{2,0,1} > F_{2,6,1} > F_{2,10,1} > F_{3,2,1} > F_{3,4,1} > F_{3,4,2} > F_{3,5,2} > F_{3,6,2} > F_{3,7,1} > F_{3,8,1} > F_{4,3,1}.$$

$\mathcal{N}(\mathcal{T})$的 5-匹配为

$$
\begin{aligned}
M_1 &= \{F_{2,0,1}, F_{2,6,1}, F_{2,10,1}, F_{3,4,2}, F_{3,7,1}\},\\
M_2 &= \{F_{2,0,1}, F_{2,6,1}, F_{2,10,1}, F_{3,6,2}, F_{4,3,1}\},\\
M_3 &= \{F_{2,0,1}, F_{2,6,1}, F_{2,10,1}, F_{3,7,1}, F_{4,3,1}\}.
\end{aligned}
$$

关于记号 4.3 中引入的 ν-匹配上的字典序，我们有

$$M_1 >_{\text{lex}} M_2 >_{\text{lex}} M_3.$$

令 U 为关于 $>_{\text{lex}}$ 极大的唯一 ν-匹配（记号 4.3）。对于 $\mathcal{N}(\mathcal{T})$ 的任意 ν-匹配 M，我们定义 M 相对于 U 的层，记作 level$_U(M)$，如下：

$$\text{level}_U(M) := \nu - |U \cap M|.$$

此外，对于 ν-匹配 M，我们记

$$\beta(M) := \big|\{F \in M : |F| = 2\}\big|$$

M 的二元面数。

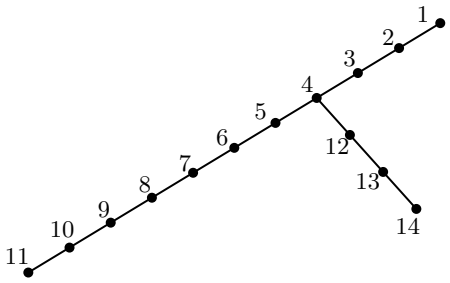

FIGURE 1. 树 $\mathcal{T}$。

记号 4.6。 我们在 $\mathcal{N}(\mathcal{T})$ 的 ν-匹配集合上定义一个全序 $>_\ell$，如下所示。对于两个 ν-匹配 M 和 N，若满足以下条件之一，则令 $M >_\ell N$：

(i) $\beta(M) > \beta(N)$; (ii) $\beta(M) = \beta(N)$ 以及层$_U(M) <$层$_U(N)$; (iii) $\beta(M) = \beta(N)$、层 $_U(M) =$ 层 $_U(N)$，以及 $M >_{\text{lex}} N$(参见记号 4.3)。

通过 $\mathcal{N}(\mathcal{T})$ 的 ν-匹配与 $NI(\mathcal{T})^{[\nu]}$ 的极小生成元之间的双射（推论 3.5），该次序在 $\mathcal{G}(NI(\mathcal{T})^{[\nu]})$ 上诱导出一个全序，我们也将其记为 $>_\ell$。

例 4.7。 令 $\mathcal{T}$ 为例 4.5 中的树，并令 M_1, M_2, M_3 为其中描述的 $\mathcal{N}(\mathcal{T})$ 的 ν-匹配。则 M_1 是关于 $>_{\text{lex}}$ 的极大匹配，并且我们有层$_U(M_3) = 1$ 以及层$_U(M_2) = 2$.

关于记号 4.6 中定义的全序 $>_\ell$，我们得到

$$M_1 >_\ell M_3 >_\ell M_2.$$

另一方面，关于字典序 $>_{\text{lex}}$（见例 4.5），我们有

$$M_1 >_{\text{lex}} M_2 >_{\text{lex}} M_3.$$

这个例子说明，序 $>_\ell$ 通过同时纳入二元面的数量以及与 U 的公共面的数量，对字典序进行了细化。

在接下来的结果中，我们将描述满足 (C1) 和 (C2) 的 $\mathcal{N}(\mathcal{T})$ 的 ν-匹配的结构性质。

注记 4.8。 设 $\mathcal{T}$ 是一棵满足 (C1) 的树。设 M 和 N 是 $\mathcal{N}(\mathcal{T})$ 的两个 ν-匹配。假设 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[r] \in M$ 和 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[t] \in N$ 满足 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[r] \cap \mathrm{N}_{\mathcal{T}}[t] = \{s\}$ 且 $\deg_{\mathcal{T}}(r),\ \deg_{\mathcal{T}}(t) \geq 2$。

(1) 设 $\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_d$ 是 $\mathcal{T} \setminus \{r\}$ 的连通分支，并假设 $t \in \mathcal{T}_1$。若 $|N_{\mathcal{T}_1}| = |M_{\mathcal{T}_1}| + 1$，则定义

$$Y = \big(M \setminus M_{\mathcal{T}_1}\big) \cup \big(N_{\mathcal{T}_1} \setminus \{\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[t]\}\big).$$

那么 Y是 $\mathcal{N}(\mathcal{T})$ 的 $(\nu - 1)$-匹配，并且 $\{\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[r]\} \cup Y$和 $\{\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[t]\} \cup Y$都是 $\mathcal{N}(\mathcal{T})$ 的 ν-匹配。因此，由 (C1) 可得 $\deg_{\mathcal{T}}(s) = 2$。

(2) 如果 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[r]$ 不与 N的任何其他面相交。那么 $Y = (N \setminus \mathrm{N}_{\mathcal{T}}[t])$ 是 $\mathcal{N}(\mathcal{T})$ 的 $(\nu - 1)$-匹配，并且 $\{\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[r]\} \cup Y$和 $\{\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[t]\} \cup Y = N$都是 $\mathcal{N}(\mathcal{T})$ 的 ν-匹配。因此，由 (C1) 可得 $\deg_{\mathcal{T}}(s) = 2$。

命题 4.9。 设 $\mathcal{T}$ 是一棵满足 (C1) 和 (C2) 的树。设 U 是关于 $>_{\text{lex}}$ 极大的唯一 ν-匹配（记号 *4.3*）。则每个满足 $|F| \geq 4$ 的面 $F \in U$ 都属于 $\mathcal{N}$ 的每个 ν-匹配 N（$\mathcal{T}$）。

证明。设 $F = \mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_1] \in U$，其中 $\deg_{\mathcal{T}}(i_1) = d \geq 3$。设 $\mathcal{T}_1$，……，$\mathcal{T}_d$ 是 $\mathcal{T} \setminus \{i_1\}$ 的连通分支。反设存在一个 ν-匹配 N，使得 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_1] \notin N$。我们分两种情况讨论：(1) $i_1 \notin V_N$，(2) $i_1 \in V_N$。

情形 *I.* 假设 $i_1 \notin V_N$。由引理 3.9，存在 $j \in [d]$，记作 $j = 1$，使得 $|N_{\mathcal{T}_1}| = |U_{\mathcal{T}_1}| + 1$，并且有一个面 $G \in N_{\mathcal{T}_1}$，满足 $G \cap \mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_1] \neq \emptyset$。记 $G = \mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_3]$，并假设 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_1] \cap G = \{i_2\}$，其中 i_1，i_2，i_3 在 $\mathcal{T}$ 中构成一条路径。由注记 4.8(1)，我们有 $\deg_{\mathcal{T}}(i_2) = 2$。

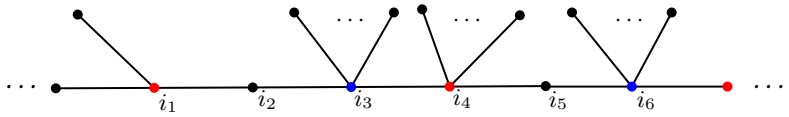

FIGURE 2. 红色顶点的邻域属于 V_U，而蓝色顶点的邻域属于 V_N。

若 $i_3 \notin V_U$，则

$$U' = (U \setminus \mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_1]) \cup \mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_2]$$

是 ν 的 $\mathcal{T}$-匹配。由于按照记号 4.3 中的次序，$\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_2] > \mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_1]$，我们得到 $U' >_{\mathrm{lex}} U$，这与 U 的极大性矛盾。因此 $i_3 \in V_U$，且存在 i_3 的一个邻点 i_4，满足 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_4] \in U$ 且 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_2] \cap \mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_4] = \{i_3\}$。此外，$i_4$ 不是 $\mathcal{T}$ 的叶子，否则 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_4] \subsetneq \mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_3]$，这与 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_3]$ 是一个面矛盾。

令 $\mathcal{S}_1$、……、$\mathcal{S}_t$ 为 $\mathcal{T} \setminus \{i_4\}$ 的连通分支，并假设 $i_3 \in \mathcal{S}_1$。由于 $|N_{\mathcal{T}_1}| = |U_{\mathcal{T}_1}| + 1$，我们有 $|N_{\mathcal{S}_1}| = |U_{\mathcal{S}_1}| - 1$。由引理 3.9(ii)，存在 $j \in [t]$，记作 $j = 2$，使得 $|N_{\mathcal{S}_2}| = |U_{\mathcal{S}_2}| + 1$。此外，由引理 3.9(i)，存在一个面 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_6] \in N_{\mathcal{S}_2}$，使得 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_4] \cap \mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_6] = \{i_5\}$（见图 2）。由注记 4.8(1)，可得 $\deg_{\mathcal{T}}(i_5) = 2$。

若 $i_6 \notin V_U$，则集合

$$U'' = \big(U \setminus \{\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_1], \mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_4]\}\big) \cup \{\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_2], \mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_5]\}$$

是 ν 的 $\mathcal{N}(\mathcal{T})$-匹配。由于 i_4 在 $\mathcal{T}$ 中位于 i_2 与 i_5 之间，且 $|\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_2]| = |\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_5]| = 3$，由记号 4.3 可知，$\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_2] > \mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_4]$ 或 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_5] > \mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_4]$。因此，$U'' >_{\mathrm{lex}} U$，这与 U 的极大性矛盾。故 $i_6 \in V_U$。

在 i_6 处重复同样的论证，我们将路径 i_1，i_2，i_3，i_4，i_5，i_6，…… 继续延伸，使其严格远离 i_1；其中每隔一个顶点的度为 2，且终端顶点属于 V_U。由于 $\mathcal{T}$ 是有限的，这一过程必然会到达一个叶子，此时构造无法继续。在这一阶段，必有另一种情形 $i_{3k} \notin V_U$，从而与 U 的极大性矛盾。因此，初始假设 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_1] \notin N$ 不成立。

情形 *II.* 假设 $i_1 \in V_N$。那么存在一个与 i_1 相邻的顶点 i_2，使得 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_2] \in N$。设 $i_2 \in V(\mathcal{T}_1)$。根据引理 3.9，以下情形之一成立：

(i) 存在 j，不妨设为 $j = 2$，使得 $|N_{\mathcal{T}_2}| = |U_{\mathcal{T}_2}| + 1$。由于 $i_2 \in V(\mathcal{T}_1)$，由引理 3.9(ii) 的证明可得 $|N_{\mathcal{T}_1}| = |U_{\mathcal{T}_1}| - 1$，且对所有 $k \neq 1$，2，$|N_{\mathcal{T}_k}| = |U_{\mathcal{T}_k}|$ 均成立。(ii) 对所有 j，$|N_{\mathcal{T}_j}| = |U_{\mathcal{T}_j}|$ 均成立。

假设 (i) 成立。那么 $M = (U \setminus \{\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_1]\}) \cup N_{\mathcal{T}_2}$ 是 ν-匹配的 $\mathcal{N}(\mathcal{T})$，因为分支基数相等。此外，$\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_1] \notin M$ 和 $i_1 \notin V_M$。由于 $|\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_1]| \geq 4$，这与情形 I 矛盾；情形 I 表明不存在这样的 ν-匹配。因此，(i) 不成立。于是，对于所有 j，都有 $|N_{\mathcal{T}_j}| = |U_{\mathcal{T}_j}|$。令

$$Y = N_{\mathcal{T}_1} \cup U_{\mathcal{T}_2} \cup \cdots \cup U_{\mathcal{T}_d}.$$

那么 Y 是 $\nu-1$-匹配的 $\mathcal{N}(\mathcal{T})$，且 $Y\cup \mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_1]$ 和 $Y\cup \mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_2]$ 都是 ν-匹配的$\mathcal{N}(\mathcal{T})$。这两个匹配不同，因为 $i_1\neq i_2$。由于 $\mathcal{T}$ 满足 (C2)，且 $\deg_{\mathcal{T}}(i_1)\geq 3$，可推出 $\deg_{\mathcal{T}}(i_2)=2$。由于 $Y\cup \mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_2]$ 满足与情形 II 中 N 相同的假设，因此在证明的其余部分中，我们可以令 $N=Y\cup \mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_2]$。

由于 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_2]>\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_1]$ 相对于记号 4.3 中的次序，U 的极大性蕴含 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_2]\cap V_{U\setminus\{\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_1]\}}\neq\emptyset$；否则，将 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_1]$ 替换为 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_2]$ 会得到一个严格大于 U的 ν-匹配，这与矛盾相悖。因此，存在一个面 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_4]\in U\setminus \mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_1]$，使得 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_2]\cap \mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_4]=\{i_3\}$。

假设 $i_4\notin V_N$。若 $\deg_{\mathcal{T}}(i_4)>2$，则在 i_4处应用情形 I 得到 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_4]\in N$，矛盾；因此 $\deg_{\mathcal{T}}(i_4)\leq 2$。若 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_4]$ 在 N的各个面中仅与 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_2]$ 相交，则将 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_2]$ 替换为 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_4]$ 并取 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_1]$，可产生一个 $(\nu+1)$-匹配，矛盾。因此，$\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_4]$必与 N的另一个面相交，从而得到 $\deg_{\mathcal{T}}(i_4)=2$。令 i_5 为不同于 i_3的 i_4的邻点，并令 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_6]\in N$ 为与 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_4]$相交的面，使得 i_4、i_5、i_6 在 $\mathcal{T}$中构成一条路径。于是，$\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_4]$ 在 $W'=$的各个面中仅与 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_6]$ 相交 $(U\setminus U_{\mathcal{T}_1})\cup N_{\mathcal{T}_1}$。由条件（C1），得到 $\deg_{\mathcal{T}}(i_5)=2$。由于 $i_4\notin V_N$，将 N 中的 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_6]$ 替换为 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_5]$，得到一个 ν-匹配 N'，其满足情形 II 中 N所满足的相同假设。因此，我们可以用 N'替换 N并继续；特别地，可以假设 $i_4\in V_N$。

现在假设 $i_4\in V_N$。那么存在一个顶点 i_5，使得 $i_4\in \mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_5]\in N$。注意，$i_5$ 不可能是 $\mathcal{T}$ 的叶子，否则 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_5]\subsetneq \mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_4]$，这与 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_4]$ 是 $\mathcal{N}$（$\mathcal{T}$）的一个面这一事实矛盾。我们根据 i_4 的度进行区分。若 $\deg_{\mathcal{T}}(i_4)\geq 3$，则应用情形 II 开头所用的相同论证（此处将配对 i_4，i_5 替换为 i_1，i_2），再结合条件（C2），可得 $\deg_{\mathcal{T}}(i_5)=2$。若 $\deg_{\mathcal{T}}(i_4)=2$，则 i_1，$\ldots$，i_5 在 $\mathcal{T}$ 中构成一条路径，而集合

$$M=N\setminus\{\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_2],\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_5]\}$$

是一个 $(\nu-2)$-匹配，使得 $M\cup\{\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_2],\ \mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_5]\}=N$ 和 $M\cup\{\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_1],\ \mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_4]\}$ 都是ν-匹配。由于 $\mathcal{T}$ 满足（C2），且 $\deg_{\mathcal{T}}(i_1)\geq 3$，再次可得 $\deg_{\mathcal{T}}(i_5)=2$。因此，在所有情形下，$\deg_{\mathcal{T}}(i_5)=2$。由于 i_4 在 $\mathcal{T}$ 中位于 i_2 和 i_5 之间，根据记号 4.3，可知 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_2]>\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_4]$ 或 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_5]>\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_4]$。因此，

$$(U\setminus\{\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_1],\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_4]\})\cup\{\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_2],\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_5]\}>_{\mathrm{lex}}U,$$

这与 U 的极大性相矛盾。

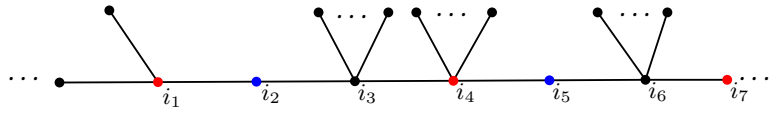

FIGURE 3. 红色顶点的邻域属于 V_U，而蓝色顶点的邻域属于 V_N。

因此 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_5]\cap V_{U\setminus\{\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_4]\}}\neq\emptyset$，所以存在一个与 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_5]$相交的面 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_7]\in U$。交替地对 N 和 U的面重复相同的论证，我们将简单路径i_1、i_2、i_3、i_4、i_5、i_6、i_7、.....延伸至离 i_1 在 $\mathcal{T}$ 中更远的位置，同时每个新产生的中间顶点的度均为 2。由于 $\mathcal{T}$ 是有限的，这一过程必定终止；在终止步骤中，另一种情况 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_{3k+2}]\cap V_{U\setminus\{\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_{3k+1}]\}}\neq\emptyset$ 不再成立。因此，必定出现互补的情形，由此与 U的极大性矛盾。因此 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_1]\in N$，这与我们的假设矛盾。□

命题 *4.10.* 设 $\mathcal{T}$ 是满足 *(C1)* 和 *(C2)* 的一棵树。设 U 是相对于 $>_{\text{lex}}$ 而言极大的唯一 ν-匹配（记号 *4.3*），并设 N 是 $\mathcal{N}(\mathcal{T})$的任意一个 ν-匹配。假设存在面 $F_{3、a、b} \in U$ 以及 $G_{3、c、d} \in N$，使得 $|F_{3、a、b} \cap G_{3、c、d}| = 1$，且 $F_{3、a、b}$与 N的每个其他面均不相交。那么 $a < c$, 等价地，$F_{3、a、b} >_{\text{lex}} G_{3、c、d}$。

证明。令 $F_{3,a,b} = \mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_1]$ 和 $G_{3,c,d} = \mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_3]$，其中 $F_{3,a,b} \cap G_{3,c,d} = \{i_2\}$，且 i_1, i_2, i_3 在 $\mathcal{T}$ 中构成一条路径。由于 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_1]$ 与 N 的所有其他面都不相交，注 4.8(2) 推出 $\deg_{\mathcal{T}}(i_2) = 2$。

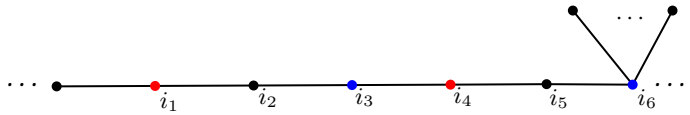

FIGURE 4. 红色顶点的邻域属于 V_U，而蓝色顶点的邻域属于 V_N。

按照记号 4.3，我们有 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_2] = F_{3,j,k}$。反设 $c < a$，则$c < j < a$，等价地，

$$\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_3] > \mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_2] > \mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_1].$$

我们首先注意到 $i_3 \in V_U$。事实上，若 $i_3 \notin V_U$，则在 U 中用 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_2]$ 替换 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_1]$，会得到一个严格大于 U 的ν-匹配，这与其极大性矛盾。因此 $i_3 \in V_U$，且存在 i_3 的一个邻点 i_4，满足 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_4] \in U$，使得 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_2] \cap \mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_4] = \{i_3\}$。

顶点 i_4 不是 $\mathcal{T}$的叶子，否则 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_4] \subsetneq \mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_3]$，这与 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_3]$ 是 $\mathcal{N}(\mathcal{T})$的一个面矛盾。此外，根据命题 4.9，我们有 $|\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_4]| \leq 3$，因此 $|\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_4]| = 3$。此外，$\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_4]$ 必须与 N的至少两个面相交；否则，用 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_1]$ 和 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_4]$ 替换 N 中的 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_3]$，便会得到一个 $(\nu+1)$-匹配，产生矛盾。因此，$\mathcal{T}$中存在一条路径i_4，i_5，i_6，使得 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_4] \cap \mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_6] = \{i_5\}$。在这种情况下，包含 i_6的连通分支中的连通分支基数相差 1，因此满足注记 4.8 的假设。于是 $\deg_{\mathcal{T}}(i_5) = 2$。

接下来我们证明 $i_6 \in V_U$。若 $i_6 \notin V_U$成立，则用 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_2]$和 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_5]$ 替换 U中的 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_1]$和 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_4]$，将得到一个相对于 $>_{\text{lex}}$严格大于 U 的 ν-匹配，这与 U的极大性矛盾。因此 $i_6 \in V_U$，于是存在一个 i_6的邻点 i_7，使得 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_7] \in U$。与 i_4的情形相同，顶点 i_7 不是 $\mathcal{T}$的叶子，由此得到 $\mathcal{T}$中的一条路径 i_6，i_7，i_8。考虑匹配

$$M = (N \setminus \{\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_3], \mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_6]\}) \cup \{\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_2], \mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_5]\}.$$

在这种情况下，包含 i_7 的连通分支中的连通分支基数再次相差 1，因此满足注记 4.8 的假设。于是 $\deg_{\mathcal{T}}(i_6) = 2$。

交替对 N 和 U 的面重复同样的论证，我们将路径 i_1，i_2，i_3，i_4,i_5，i_6，i_7，... 在 $\mathcal{T}$ 中不断延伸，使其距离 i_1 越来越远。每一步新引入的顶点的度均为 2，而终端顶点属于 V_U。由于 $\mathcal{T}$ 有限，这一过程最终必然终止。在最后一步，条件 $i_{3k} \in V_U$ 不成立，而互补情形会导致与 U 的极大性矛盾。因此 $a < c$。□

引理 4.11. 设 $\mathcal{T}$ 是一棵树。设 U 是关于 $>_{lex}$ 极大的唯一 ν-匹配。设 M 和 N 是两个 ν-匹配，满足 $F \in M \setminus U$ 和 $G \in N \setminus U$。假设$(F \setminus G) \cap V_N = \emptyset$。那么存在 $H \in U$，使得 $H \cap F \neq \emptyset$ 和 $H \cap G \neq \emptyset$。

证明。我们有 $F \cap G \neq \emptyset$，因为 M 和 N 是极大匹配。设 $F = \mathrm{N}_{\mathcal{T}}[r]$ 和 $G = \mathrm{N}_{\mathcal{T}}[t]$。反设，对于每个 $H \in U$，要么 $H \cap \mathrm{N}_{\mathcal{T}}[r] = \emptyset$，要么 $H \cap \mathrm{N}_{\mathcal{T}}[t] = \emptyset$。

情形 I：令 $|\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[r] \cap \mathrm{N}_{\mathcal{T}}[t]| = 1$，并设 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[r] \cap \mathrm{N}_{\mathcal{T}}[t] = \{s\}$。根据我们的假设，对于所有 $x \in \mathrm{N}_{\mathcal{T}}[s]$，都有 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[x] \notin U$。令 $\mathcal{T}_1, \ldots, T_d$ 为 $\mathcal{T} \setminus r$ 的连通分支。设 $s \in \mathcal{T}_1$。由引理 3.9 及假设 $(F \setminus G) \cap V_N = \emptyset$，可得

$$|N_{\mathcal{T}_1}| = |M_{\mathcal{T}_1}| + 1 \text{ and } |N_{\mathcal{T}_i}| = |M_{\mathcal{T}_i}|$$

对于所有 $i = 2, \ldots, d$。注意，若对某个 $2 \leq i \leq d$ 有 $|U_{\mathcal{T}_i}| = |M_{\mathcal{T}_i}| + 1$，则

$$U_{\mathcal{T}_i} \cup N_{\mathcal{T}_1} \cup \bigcup_{k=2, k \neq i}^{d} M_{\mathcal{T}_k}$$

构成 $\mathcal{N}(\mathcal{T})$ 的一个 $(\nu + 1)$-匹配，因为每个 $\mathcal{T}_i$ 的顶点集两两不相交。这与 $\mathcal{N}(\mathcal{T})$ 的匹配数矛盾。此外，由于对所有 $x \in \mathrm{N}_{\mathcal{T}}[s]$，都有 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[x] \notin U$，根据引理 3.9(i)，可得 $|U_{\mathcal{T}_1}| = |M_{\mathcal{T}_1}|$。接着由引理 3.9 可得，对所有 $i = 1, \ldots, d$，都有 $|U_{\mathcal{T}_i}| = |M_{\mathcal{T}_i}|$，并且对某个 $y \in \mathrm{N}_{\mathcal{T}}[r] \setminus \{r, s\}$，有 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[y] \in U$。于是，用 $N_{\mathcal{T}_1}$ 的面替换 U 中 $U_{\mathcal{T}_1}$ 的面，可得到一个 $(\nu + 1)$-匹配，这就产生了矛盾。这说明 $|\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[r] \cap \mathrm{N}_{\mathcal{T}}[t]| = 1$ 不成立。

情形 II。设 $|\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[r] \cap \mathrm{N}_{\mathcal{T}}[t]| = 2$，其中 $\{r, t\} \in E(\mathcal{T})$。令 $\mathcal{T}_1, \ldots, T_d$ 为 $T \setminus r$ 的连通分支。设 $t \in \mathcal{T}_1$。根据我们的假设，对于所有 $x \in V_{\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[r], \mathrm{N}_{\mathcal{T}}[t]}$，都有 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[x] \notin U$。特别地，$r \notin V_U$。由引理 3.9 和假设 $(F \setminus G) \cap V_N = \emptyset$，可得

$$|N_{\mathcal{T}_i}| = |M_{\mathcal{T}_i}|$$

对于所有 $i = 1, \ldots, d$。注意，如果某个 $2 \leq i \leq d$ 满足 $|U_{\mathcal{T}_i}| = |M_{\mathcal{T}_i}| + 1$，那么

$$U_{\mathcal{T}_i} \cup (N \setminus N_{\mathcal{T}_i})$$

构成 $\mathcal{N}(\mathcal{T})$ 的一个 $(\nu+1)$-匹配，因为 $r \notin V_U$。这与 $\mathcal{N}(\mathcal{T})$ 的匹配数矛盾。此外，由于对于所有 $x \in \mathrm{N}_{\mathcal{T}}[t]$，都有 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[x] \notin U$，根据引理 3.9(i)，我们有 $|U_{\mathcal{T}_1}| = |M_{\mathcal{T}_1}|$。接着由引理 3.9 可得，对于所有 $i = 1, \ldots, d$ 和 $r \in V_U$，都有 $|U_{\mathcal{T}_i}| = |M_{\mathcal{T}_i}|$，矛盾。□

命题 4.12。设 $\mathcal{T}$ 是满足 (C1) 和 (C2) 的树。设 U 是关于 $>_{\text{lex}}$ 极大的唯一 ν-匹配（记号 *4.3*），并设 M 和 N 是 $\mathcal{N}(\mathcal{T})$ 的两个 ν-匹配，使得：

> ***(i)*** $M >_\ell N$（记号 *4.6*）；***(ii)*** 不存在满足 $F > G$ 的面 $F \in M$ 和 $G \in N$，使得 $F \setminus G$ 是单元素集且 $F \setminus G \notin V_N$。

那么存在面 $H \in U$ 和 $G \in N$，以及一个顶点 $x \in H \setminus G$，使得 $W = (N \setminus G) \cup H$ 是一个 ν-匹配，并且 $x \in V_M \setminus V_N$。

证明。设 M 和 N 是 $\mathcal{N}(\mathcal{T})$ 的两个满足 (i) 和 (ii) 的 ν-匹配。我们首先如下规范化 M^-。假设存在 $F \in M \setminus U$ 和 $G \in N$，满足 $G > F$，使得 $M = (M \setminus F) \cup \{G\}^-$ 是一个 ν-匹配。那么 $M >_\ell N$ 仍满足 (i) 和 (ii)。因此，只需对 M 和 N 证明该陈述$^-$，因为 $V_{\overline{M}} \setminus V_N \subseteq V_M \setminus V_N$。于是我们可以假设：

关于 M 的假设：对于每个 $F \in M \setminus U$，都不存在满足 $G > F$ 的 $G \in N$，使得 $(M \setminus F) \cup \{G\}$ 是一个 ν-匹配。

注意，这一假设意味着

$$\text{all one-dimensional facets of } M \text{ and } N \text{ coincide.} \tag{8}$$

事实上，令 $F \in M$且 $|F| = 2$。那么 F与某个 $G \in N$相交，因为否则 $N \cup \{F\}$将是一个 $(\nu+1)$-匹配。若 $F > G$，则 F和 G 满足条件 (ii)，这就产生了矛盾。因此 $F < G$，从而 $|G| = 2$。此外， $F \notin U$，因为否则 $(U \setminus \{F\}) \cup \{G\} >_{\text{lex}} U$，这与 U的极大性矛盾。由于用 G 替换 F 会得到一个 ν-匹配，这一假设迫使 $F = G$。

令 $M = \{F_1, \ldots, F_\nu\}$和 $N = \{G_1, \ldots, G_\nu\}$。由注 3.7，存在 $i, j \in [\nu]$，使得$F_i \cap G_j \neq \emptyset$、$F_i \neq G_j$，且对所有 $k \neq j$都有 $F_i \cap G_k = \emptyset$。经过重新标记后，不妨设 $i = j = 1$。

若 $F_1 \in U$，则 $W = (N \setminus G_1) \cup F_1$满足结论，因此假设 $F_1 \notin U$。我们还可以假设，$M \cap U$ 的任何一个面都不能直接使用。也就是说，

$$\text{for every } F \in M \cap U, \text{ either } F \in N \text{ or } \big|\{G \in N : \ F \cap G \neq \emptyset\}\big| \geq 2. \tag{9}$$

事实上，如果 $F \in M \cap U$ 恰好与一个面 $G \in N$相交，那么 $W = (N \setminus G) \cup F$ 满足结论。

我们对 $n = |M \cap U|$ 使用递减归纳法。

步骤 *1*：令 $n = \nu - 1$。那么，除了 F_1 之外， M的所有面都属于 U。我们先证明 $G_1 \notin U$。若 $G_1 \in U$，则 $N' = (N \setminus G_1) \cup F_1$是一个 ν-匹配，并且 $M \neq N'$，因为 $M >_\ell N$。将注 3.7 应用于 M和 N'，可得 F_i，其与 N'的一个面恰好相交。由于 F_i， $G_1 \in U$，我们有 $F_i \cap G_1 = \emptyset$。因此， F_i 恰好与 N的一个面相交，这与假设 (9) 矛盾。因此$G_1 \notin U$。

由引理 4.11，存在 $H \in U$，使得 $H \cap F_1 \neq \emptyset$ 且 $H \cap G_1 \neq \emptyset$。由于 $F_1 \in M \setminus U$，我们有 $H \notin M$，因此 $U = (M \setminus F_1) \cup H$。若 H 与 N 的至少两个面相交，那么根据假设 (9)，二分图 $B_{(U,N)}$ （构造 3.1）就不是一棵树，这与引理 3.3 矛盾。因此， H 恰好与 N 的一个面相交，即 G_1。于是 $W = (N \setminus G_1) \cup H$ 是一个 ν-匹配。剩下要证明的是， $H \setminus G_1$ 在 $V_M \setminus V_N$ 中包含一个顶点。

若 $|F_1 \cap G_1| = 1$，不妨设 $F_1 \cap G_1 = \{s\}$。由于 $|F_1|$， $|G_1| \geq 3$ 是由 (8) 得出的，注 4.8(2) 蕴含 $\deg_{\mathcal{T}}(s) = 2$，因此 $H = \mathbf{N}_{\mathcal{T}}[s]$。故 $H \setminus G_1$ 是单点集，且 $H \setminus G_1 \subseteq F_1 \setminus G_1$。由于 F_1不与 N 中除 G_1之外的任何面相交，我们有 $F_1 \setminus G_1 \subseteq V_M \setminus V_N$，这就证明了该断言。

剩下要证明 $|F_1 \cap G_1| = 2$ 不可能出现。假设 $|F_1 \cap G_1| = 2$。那么在 $\mathcal{T}$ 中存在一条路径 i_1, i_2, i_3, i_4，使得 $F_1 = \mathbf{N}_{\mathcal{T}}[i_2]$ 且 $G_1 = \mathbf{N}_{\mathcal{T}}[i_3]$，并且 $H = \mathbf{N}_{\mathcal{T}}[i_1]$ 或 $H = \mathbf{N}_{\mathcal{T}}[i_4]$。首先假设 $H = \mathbf{N}_{\mathcal{T}}[i_1]$。由于 $n = \nu - 1$, F 与 U 中除 H 外的任何面都不相交，因此我们有 $i_3 \notin V_U$。因为 $\mathbf{N}_{\mathcal{T}}[i_1] \cap \mathbf{N}_{\mathcal{T}}[i_3] = \{i_2\}$，且 H 与 N 中除 $G_1 = \mathbf{N}_{\mathcal{T}}[i_3]$ 外的任何面都不相交，将注 4.8(2) 应用于 N 和 U，得到 $\deg_{\mathcal{T}}(i_2) = 2$。由于 $i_3 \notin V_U$， U 的极大性意味着 $\mathbf{N}_{\mathcal{T}}[i_1] > \mathbf{N}_{\mathcal{T}}[i_2]$，否则 $(U \setminus \mathbf{N}_{\mathcal{T}}[i_1]) \cup \mathbf{N}_{\mathcal{T}}[i_2] >_{\text{lex}} U$。因此$|\mathbf{N}_{\mathcal{T}}[i_1]| = 3$，且 i_1 在 $\mathcal{T}$ 中的层高于 i_2。所以 $\mathbf{N}_{\mathcal{T}}[i_2] > \mathbf{N}_{\mathcal{T}}[i_3]$，这与 (ii) 矛盾，因此 $H \neq \mathbf{N}_{\mathcal{T}}[i_1]$。于是 $H = \mathbf{N}_{\mathcal{T}}[i_4]$。通过对称论证可得 $\mathbf{N}_{\mathcal{T}}[i_2] < \mathbf{N}_{\mathcal{T}}[i_3]$。由于 $M \setminus \mathbf{N}_{\mathcal{T}}[i_2] \neq N \setminus \mathbf{N}_{\mathcal{T}}[i_3]$ （否则 $N >_\ell M$），将注 3.7 应用于$M' = (M \setminus \mathbf{N}_{\mathcal{T}}[i_2]) \cup \mathbf{N}_{\mathcal{T}}[i_3]$ 和 N，便与 (9) 矛盾。

假设该断言对所有满足 $k \leq \nu - 2$ 的 $n \geq k + 1$ 都成立，并考虑情形$n = k$。令

$$M = \{F_1, \ldots, F_{\nu-k}, F'_1, \ldots, F'_k\},$$

其中 $F'_p \in U$对于 $p = 1, \ldots, k$，且 $F_q \notin U$对于 $q = 1, \ldots, \nu - k$。回忆一下，根据注 3.7，F_1 恰好与 N的一个面相交，即 G_1。因此，$(N \setminus G_1) \cup F_1$是 $\mathcal{N}(\mathcal{T})$的一个 ν-匹配。

将注 3.7 应用于 M 及所得的匹配，并在可能时重复这一过程，我们得到一个 ν-匹配 N^*，使得

(a) $\big|\{F_1,\dots,F_{\nu-k}\}\cap N^*\big|=\nu-k-1$; (b) 对于每个 $F'\in M\cap U$，$F'\in N^*$ 或 $\big|\{G\in N^*:\ \ F'\cap G\neq\emptyset\}\big|\geq 2$。

再次将注 3.7 应用于 M 和 N^*，并在必要时重新标记后，我们可以假设$F_{\nu-k}\cap G_2\neq\emptyset$ 和 $F_{\nu-k}$ 均不与 N^*的任何其他面相交。

若 $G_2\in U$，则 G_2除了 $F_{\nu-k}$之外，不与 M的任何面相交。因此，$M'=(M\setminus F_{\nu-k})\cup G_2$是 $\mathcal{N}(\mathcal{T})$的一个带有 $|M'\cap U|=k+1$的 ν-匹配。由于 M'和 N满足条件 (i) 和 (ii)，由归纳假设可得所需结论，因为 $V_{M'}\setminus V_N\subseteq V_M\setminus V_N$。

现在，假设 $G_2\notin U$。由引理 4.11，存在 $H'\in U$，使得 $H'\cap F_{\nu-k}\neq\emptyset$ 且$H'\cap G_2\neq\emptyset$。我们区分以下两种情形。

情形 *1.* 假设 $|F_{\nu-k}\cap G_2|=1$。设 $F_{\nu-k}=\mathbf{N}_{\mathcal{T}}[i_1]$、$G_2=\mathbf{N}_{\mathcal{T}}[i_3]$ 和 $F_{\nu-k}\cap G_2=\{i_2\}$，其中 i_1，i_2，i_3 在 $\mathcal{T}$中构成一条路径。由于 $|F_{\nu-k}|$，根据 (8)，将注 4.8(2)应用于 M和 N^*可得 $\deg_{\mathcal{T}}(i_2)=2$。因此，$H'=\mathbf{N}_{\mathcal{T}}[i_2]=\{i_1,i_2,i_3\}\in U$，并且它与 $M\cap U$中的任何面都不相交。此外，由于 i_1，$i_2\in F_{\nu-k}$且 $i_3\in G_2$，面 $\mathbf{N}_{\mathcal{T}}[i_2]$与 $N^*\cap U$中的任何面都不相交。因此，$M''=(M\setminus F_{\nu-k})\cup H'$是一个 ν-匹配，满足 $|M''\cap U|=k+1$、$V_{M''}\setminus V_N\subseteq V_M\setminus V_N$。此外，$M''$和 N满足条件 (i) 和 (ii)。因此，由于对 n应用归纳假设，结论得证。

情形 *2.* 假设 $|F_{\nu-k}\cap G_2|=2$。令 $F_{\nu-k}=\mathbf{N}_{\mathcal{T}}[i_2]$, $G_2=\mathbf{N}_{\mathcal{T}}[i_3]$，并选取 $i_1\in F_{\nu-k}\setminus G_2$和 $i_4\in G_2\setminus F_{\nu-k}$，其中 i_1,i_2,i_3,i_4在 $\mathcal{T}$ 中构成一条路径。于是，要么 $H'=\mathbf{N}_{\mathcal{T}}[i_1]$，要么 $H'=\mathbf{N}_{\mathcal{T}}[i_4]$。由于 $\mathcal{T}$ 满足 (C2)，要么 $|\mathbf{N}_{\mathcal{T}}[i_2]|=3$，要么 $|\mathbf{N}_{\mathcal{T}}[i_3]|=3$。我们先注意到 $\mathbf{N}_{\mathcal{T}}[i_2]<\mathbf{N}_{\mathcal{T}}[i_3]$。否则，$|\mathbf{N}_{\mathcal{T}}[i_2]|=3$ 且 $\mathbf{N}_{\mathcal{T}}[i_2]\setminus\mathbf{N}_{\mathcal{T}}[i_3]=\{i_1\}$，其中 $i_1\notin V_N$，这与 (ii) 矛盾。因此，$|\mathbf{N}_{\mathcal{T}}[i_3]|=3$。

假设 $\mathbf{N}_{\mathcal{T}}[i_4]\notin U$。那么 $H'=\mathbf{N}_{\mathcal{T}}[i_1]$。令 $\mathcal{T}_1$ 和 $\mathcal{T}_2$ 为 $\mathcal{T}\setminus i_3$ 的连通分支，且满足 $i_2\in V(\mathcal{T}_1)$ 和 $i_4\in V(\mathcal{T}_2)$。由于 $\mathbf{N}_{\mathcal{T}}[i_2]$、$\mathbf{N}_{\mathcal{T}}[i_3]$、$\mathbf{N}_{\mathcal{T}}[i_4]\notin U$，我们有 $i_3\notin V_U$。我们断言 $|U_{\mathcal{T}_1}|=|N_{\mathcal{T}_1}|+1$。令 $\mathcal{S}_1,\dots,\mathcal{S}_r$ 为 $\mathcal{T}\setminus i_2$ 的连通分支，其中 $i_3\in\mathcal{S}_1$。由于$i_3\notin V_U$，引理 3.9(iii) 得出$|U_{\mathcal{S}_1}|=|M_{\mathcal{S}_1}|$。此外，$i_2\in V_{N^*}$ 和 $(\mathbf{N}_{\mathcal{T}}[i_2]\setminus\mathbf{N}_{\mathcal{T}}[i_3])\cap V_{N^*}=\emptyset$，因此引理 3.9(ii) 蕴含 $|N_{\mathcal{S}_1}|=|M_{\mathcal{S}_1}|$。于是 $|U_{\mathcal{S}_1}|=|N_{\mathcal{S}_1}|$，从而得到 $|U_{\mathcal{T}_2}|=|N_{\mathcal{T}_2}|$。现在对分解 $\mathcal{T}\setminus i_3$ 应用引理 3.9(iii)，得到$|U_{\mathcal{T}_1}|=|N_{\mathcal{T}_1}|+1$。由注记 4.8(1)，这给出 $\deg_{\mathcal{T}}(i_2)=2$，因此 $(U\setminus\mathbf{N}_{\mathcal{T}}[i_1])\cup\mathbf{N}_{\mathcal{T}}[i_2]>U$，这与 U 的极大性矛盾。因此，这种情形不可能发生。

因此 $\mathbf{N}_{\mathcal{T}}[i_4]\in U$。由于 $i_4\in G_2\in N^*$，它不属于 $F_1,\dots,F_{\nu-k-1}$，并且由于 $\mathbf{N}_{\mathcal{T}}[i_4]\cap F_{\nu-k}\neq\emptyset$，我们有 $\mathbf{N}_{\mathcal{T}}[i_4]\notin M\cap U$。因此，$i_4$不属于 $M\cap U$ 的任何面。于是，$i_4\notin V_M$，因此 $M=(M\setminus F_{\nu-k})\cup G_2$是一个 ν-匹配，其中 $F_{\nu-k}>G_2$ 和 $F_{\nu-k}\notin U$，这与我们对 M 的假设矛盾。这表明这种情况不可能发生。□

现在我们可以证明树的闭邻域理想的 ν 次平方自由幂是分次分量线性的充分条件。

定理 4.13。设 $\mathcal{T}$ 是一棵满足 (C1) 和 (C2) 的树，并令 $J=NI(\mathcal{T})$。则 $J^{[\nu]}$ 具有线性商，且是分次分量线性的。

证明。令 U 为关于 $>_{\text{lex}}$极大的唯一 ν-匹配。使用记号 4.6，我们将 $\mathcal{G}(J^{[\nu]})$ 的生成元排列为 $u_1>_\ell\cdots>_\ell u_n$。我们证明，$J^{[\nu]}$相对于此顺序具有线性商。令 M 和 N 分别为与 u_a 和 u_b对应的 ν-匹配，

其中 $M >_\ell N$。根据 [10, 推论 8.2, 4], 只需证明存在一个 ν-匹配 W，使得$W >_\ell N$，且 $V_W \setminus V_N$是单元素集，并且 $V_W \setminus V_N \subseteq V_M \setminus V_N$。

由于 $M >_\ell N$，我们有 $\beta(M) \geq \beta(N)$。如果 $\beta(M) > \beta(N)$，那么存在面 $F \in M$ 和$G \in N$，满足 $|F| = 2$和 $|G| \geq 3$，使得 F在 N的各个面中仅与 G相交。因此，$W = (N \setminus G) \cup F$是一个 ν-匹配。由于 $|F| = 2$，我们有 $\beta(W) > \beta(N)$，从而得到 $W >_\ell N$。此外， $V_W \setminus V_N$是单元素集且 $V_W \setminus V_N \subseteq V_M \setminus V_N$，正如所要求的。

因此，我们可以假设 $\beta(M) = \beta(N)$。如果存在面 $F \in M$ 和 $G \in N$，满足 $F > G$，使得 $F \setminus G$是单元素集且 $F \setminus G \notin V_N$，也就是说， F不与 N中除 G之外的任何面相交。那么 $W = (N \setminus G) \cup F$是一个 ν-匹配，并且由于 $F > G$，我们得到 $W >_\ell N$。由于 $F \setminus G$是单元素集，所要求的条件成立。

因此，我们可以假设不存在这样的面配对。由命题 4.12，存在面$H \in U$和 $G \in N$，以及一个顶点 $x \in H \setminus G$，使得 $W = (N \setminus G) \cup H$是一个 ν-匹配，且$x \in V_M \setminus V_N$。特别地，层$_U(W) = $层$_U(N) - 1$，因此 $W >_\ell N$。对于 H有两种可能：要么是 $H \in M$，要么是 $H \notin M$。

情形 *A.* 假设 $H \notin M$。如命题 4.12 的证明所示，集合 $H \setminus G$是单元素集，且 W 满足所需条件。

情形 *B.* 假设 $H \in M$。根据 $|H \cap G|$，我们区分两个子情形。

情形 *B.I.* 假设 $|H \cap G| = 2$。由命题 4.9， $|H| \leq 3$，而 $|H| = 2$ 是不可能的，因为 H和 G 是 $\mathcal{N}(\mathcal{T})$的不同面。因此 $|H| = 3$。于是 $|H \setminus G| = 1$，所以 $V_W \setminus V_N$是单元素集。由于 $H \in M$，我们有 $V_W \setminus V_N \subseteq V_M \setminus V_N$。

情形 *B.II.* 假设 $|H \cap G| = 1$。由命题 4.9，我们有 $|H| \leq 3$。若 $|H| = 2$，则$H \setminus G$是单元素集，且 $H \setminus G \notin V_N$，这与我们的假设矛盾。因此 $|H| = 3$。若 $|G| = 2$，则 $(U \setminus H) \cup G >_{\text{lex}} U$，这与 U 的极大性矛盾。因此 $|G| \geq 3$。

令 $H = \mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_1]$和 $G = \mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_3]$满足 $H \cap G = \{i_2\}$，其中 i_1， i_2， i_3在 $\mathcal{T}$中构成一条路径。由于 W和 N只相差一个面，条件（C1）蕴含 $\deg_{\mathcal{T}}(i_2) = 2$。考虑

$$W' = (N \setminus \mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_3]) \cup \mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_2].$$

由于 $H \setminus G \notin V_N$，我们得到 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_1] \cap V_{N \setminus \mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_3]} = \emptyset$。此外，$\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_2] \subset V_{\{\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_1], \mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_3]\}}$给出 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_2] \cap V_{N \setminus \mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_3]} = \emptyset$。因此 W'是 $\mathcal{N}(\mathcal{T})$的一个 ν-匹配，并且显然 $\mathrm{level}(W') = \mathrm{level}(N)$。

我们断言 $W' >_{\text{lex}} N$。一旦证明这一点，就有 $W' >_\ell N$，而由 $|\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_2] \setminus \mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_3]| = 1$可知，$V_{W'} \setminus V_N$是单元素集。由于 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_2] \setminus \mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_3] \subseteq \mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_1] \setminus \mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_3] \in V_M$，我们得到 $V_{W'} \setminus V_N \subseteq V_W \setminus V_N \subseteq V_M \setminus V_N$，这正是所需的结论。

现在我们证明这一断言。记 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_2] = F_{i,\ j,\ k}$ 以及 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_3] = F_{i',\ j',\ k'}$（见记号 4.3）。由于 $i = |\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_2]| = 3$，我们有 $i \leq i'$。若 $i < i'$，则 $\mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_2] > \mathrm{N}_{\mathcal{T}}[i_3]$，从而 $W' >_{\text{lex}} N$，这正是所需的结论。现在假设 $i = i' = 3$。根据命题 4.10， i_1 在 $\mathcal{T}$中的层严格低于 i_3的层。由于 i_2 位于 i_1与 i_3之间的路径上，我们得到 $j < j'$，从而 $W' >_{\text{lex}} N$，这正是所需的结论。□

本节最后，我们介绍一类图，其闭邻域理想的最高非零平方自由幂是分次分量线性的。

推论 4.14。 如果 G 是路径图或带胡须路径图（即通过在路径图的每个顶点上附加一根胡须而得到的图），那么理想 $NI(G)^{[\nu]}$ 是分次分量线性的。

5. Regularity of the highest squarefree power

在本节中，我们证明，如果条件（C1）或条件（C2）不满足，那么可以构造一棵树 G，使得 $\operatorname{reg}(NI(G)^{[\nu]})$ 可以任意大于 $\deg(NI(G)^{[\nu]})$。这为问题 1.2 给出了肯定的回答。我们首先定义一类不满足条件（C2）的树。

例 5.1. 设 G_1 为图 5 中定义的图，其中 $n \geq 1$。容易验证，$\mathcal{N}(G_1)$ 的匹配数为 $2(n+1)+1$。此外，

$$M_1 = \bigcup_{i=1}^{n+1} \{\mathrm{N}_{G_1}[r_i''], \mathrm{N}_{G_1}[s_i'']\} \cup \{\mathrm{N}_{G_1}[r]\}$$

and

$$M_2 = \bigcup_{i=1}^{n+1} \{\mathrm{N}_{G_1}[r_i''], \mathrm{N}_{G_1}[s_i'']\} \cup \{\mathrm{N}_{G_1}[s]\}$$

是 $\mathcal{N}(G_1)$ 的唯一 $2n+3$-匹配。此外，G_1 满足条件（C1），但不满足条件（C2）。

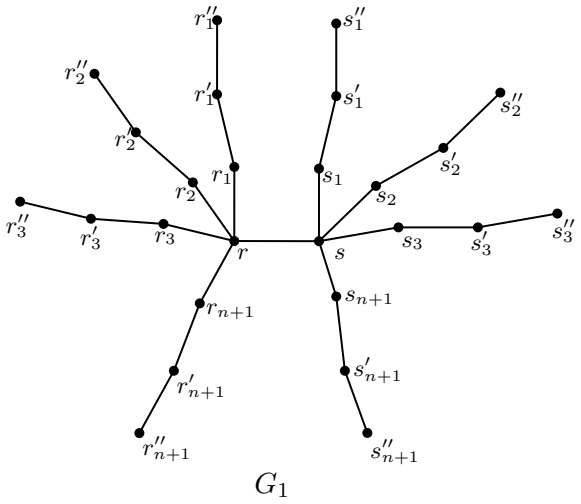

Figure 5. 图 G_1。

定理 5.2. 设 m 为正整数。则存在一棵树 G，它满足条件（C1）但不满足条件（C2），且 $\operatorname{reg}(NI(G)^{[\nu]}) - \deg(NI(G)^{[\nu]}) = m$。

证明。取正整数 m。设 G 为例 5.1 中定义的图，其中 $n = m$。由此可得 $NI(G)^{[\nu]} = (\mathbf{x}^{V_{M_1}}, \mathbf{x}^{V_{M_2}})$，其中 M_1 和 M_2 在例 5.1 中定义。显然，$\deg(NI(G)^{[\nu]}) = 5(m+1)+2$。考虑以下短正合列

$$0 \longrightarrow \frac{S}{((\mathbf{x}_{V_{M_1}}) : \mathbf{x}_{V_{M_2}})}(-(5(m+1)+2)) \longrightarrow \frac{S}{(\mathbf{x}_{V_{M_1}})} \longrightarrow \frac{S}{NI(G)^{[\nu]}} \longrightarrow 0. \tag{10}$$

注意到 $((\mathbf{x}^{V_{M_1}}) : \mathbf{x}^{V_{M_2}}) = (\mathbf{x}_A)$，其中 $A = \{r_1, \ldots, r_{m+1}\}$。容易看出 $\operatorname{reg}(S/(\mathbf{x}^{V_{M_1}})) = 5(m+1)+1$，且 $\operatorname{reg}(S/((\mathbf{x}^{V_{M_2}}) : \mathbf{x}^{V_{M_1}})) = m$。然后，将引理 2.5 应用于等式（10），得到 $\operatorname{reg}(S/NI(G)^{[\nu]}) = 5(m+1)+m+1$。因此，$\operatorname{reg}(NI(G)^{[\nu]}) - \deg(NI(G)^{[\nu]}) = m$，这正是所需。□

下面我们定义不满足条件（C1）的树类。

例 5.3。 设 G_2 是图 6 中由 $n \geq 1$ 定义的图。容易看出， $\mathcal{N}(G_2)$ 的匹配数为 $4n+1$。此外，

$$M_1 = \bigcup_{i=1}^{n} \{\mathrm{N}_{G_2}[r_i''], \mathrm{N}_{G_2}[\tilde{\tilde{r}}_i], \mathrm{N}_{G_2}[s_i''], \mathrm{N}_{G_2}[\tilde{\tilde{s}}_i]\} \cup \{\mathrm{N}_{G_2}[t_1]\},$$
$$M_2 = \bigcup_{i=1}^{n} \{\mathrm{N}_{G_2}[r_i''], \mathrm{N}_{G_2}[\tilde{\tilde{r}}_i], \mathrm{N}_{G_2}[s_i''], \mathrm{N}_{G_2}[\tilde{\tilde{s}}_i]\} \cup \{\mathrm{N}_{G_2}[r]\}, \text{ and}$$
$$M_3 = \bigcup_{i=1}^{n} \{\mathrm{N}_{G_2}[r_i''], \mathrm{N}_{G_2}[\tilde{\tilde{r}}_i], \mathrm{N}_{G_2}[s_i''], \mathrm{N}_{G_2}[\tilde{\tilde{s}}_i]\} \cup \{\mathrm{N}_{G_2}[s]\},$$

是 $\mathcal{N}(G_2)$ 的 $4n+1$-匹配。此外， G_2 满足条件（C2），但不满足条件（C1）。

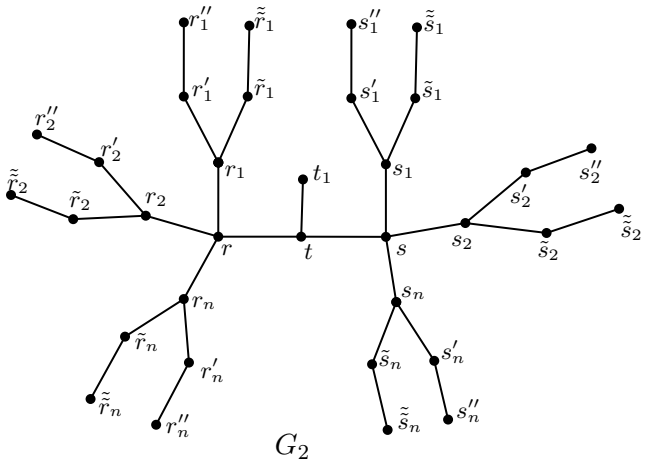

FIGURE 6. 图 G_2

定理 5.4. 设 m 为一个正整数。则存在一棵树 G，满足条件(C2) 但不满足条件 (C1)，使得 $\mathrm{reg}(NI(G)^{[\nu]}) - \deg(NI(G)^{[\nu]}) = m$。

证明。 设 m 为一个正整数。设 G 为例 5.3 中定义的图，其中 $n = m$。则可得 $NI(G)^{[\nu]} = (\mathbf{x}^{V_{M_1}}, \mathbf{x}^{V_{M_2}}, \mathbf{x}^{V_{M_3}})$，其中 M_1、 M_2和 M_3在例 5.3 中定义。由于 $((\mathbf{x}^{V_{M_1}}) : \mathbf{x}^{V_{M_2}}) = (x_{t_1})$，可知理想 $(\mathbf{x}^{V_{M_1}}, \mathbf{x}^{V_{M_2}})$ 具有线性商。因此，$\mathrm{reg}(S/(\mathbf{x}^{V_{M_1}}, \mathbf{x}^{V_{M_2}})) = 9m+1$。考虑以下短正合列

$$0 \longrightarrow \frac{S}{((\mathbf{x}_{V_{M_1}}, \mathbf{x}_{V_{M_2}}) : \mathbf{x}_{V_{M_3}})}(-(9m+2)) \longrightarrow \frac{S}{(\mathbf{x}_{V_{M_1}}, \mathbf{x}_{V_{M_2}})} \longrightarrow \frac{S}{NI(G)^{[\nu]}} \longrightarrow 0. \qquad (11)$$

注意到 $((\mathbf{x}^{V_{M_1}}, \mathbf{x}^{V_{M_2}}) : \mathbf{x}^{V_{M_3}}) = (x_{t_1}, \mathbf{x}_A)$，其中 $A = \{r, r_1, \ldots, r_m\}$。于是可得，$\mathrm{reg}(S/(\mathbf{x}^{V_{M_1}}, \mathbf{x}^{V_{M_2}}) : \mathbf{x}^{V_{M_3}})) = m$。然后，将引理 2.5 应用于方程 (11)，得到 $\mathrm{reg}(S/NI(G)^{[\nu]}) = 10m+1$。由于 $\deg(NI(G)^{[\nu]}) = 9m+2$，我们得出 $\mathrm{reg}(NI(G)^{[\nu]}) - \deg(NI(G)^{[\nu]}) = m$。证明完毕。□

接下来，我们研究毛毛虫图的闭邻域理想的 ν 次平方自由幂的正则性。我们首先回顾毛毛虫图的定义。

若存在一条路径 $P \subseteq G$，使得图 G 的每个顶点 G 要么位于路径 P 上，要么与路径 P 上的某个顶点相邻，则称图 G 为毛毛虫图。路径 $P \subseteq G$ 称为图 G 的中心路径。

定理 5.5. 设 G为毛毛虫图。则有

$$\operatorname{reg}\left(\frac{S}{NI(G)^{[\nu]}}\right)=\deg(NI(G)^{[\nu]})-1.$$

为了完成定理 5.5 的证明，我们需要证明几个引理。首先固定一些记号。设 I 是 S 的一个理想，且 $\mathcal{G}(I)=\{u_1,\ldots,u_m\}$ 是极小生成集。我们令 $I_j=(u_1,\ldots\ldots,u_j)$ 对应于 $j=1,2,\ldots\ldots,m$。

引理 5.6。设 G 是一个毛毛虫图。设 I 是 G 的闭邻域理想的第 ν 个平方自由幂，其中 $\mathcal{G}(I)=\{u_1,\ldots,u_m\}$。那么，在 $\mathcal{G}(I)$ 上存在一个全序，使得对于所有的 $j=2,\ldots,m$，冒号理想 $(I_{j-1}:u_j)$ 或者由变量生成，或者由变量与互不相同的二次单项式共同生成。

证明。按照记号 4.3，我们依据 $u_1>_{\mathrm{lex}}\cdots>_{\mathrm{lex}}u_m$ 对 I 的生成元排序。对于每个 i，令 M_i 表示与 u_i 关联的 ν-匹配。令

$$M_a=\{F_{i_1,j_1,k_1},\ldots,F_{i_\nu,j_\nu,k_\nu}\}\quad\text{and}\quad M_b=\{F_{i'_1,j'_1,k'_1},\ldots,F_{i'_\nu,j'_\nu,k'_\nu}\}$$

是关于 $>$ 按递减顺序写出的两个 ν-匹配。假设 $a<b$并令 $s=\min\{\ell\colon F_{i_\ell,j_\ell,k_\ell}\neq F_{i'_\ell,j'_\ell,k'_\ell}\}$。由于 $M_a>_{\mathrm{lex}}M_b$，我们有 $F_{i_s,j_s,k_s}>F_{i'_s,j'_s,k'_s}$。我们断言，$F_{i_s,j_s,k_s}$ 恰好与 M_b 的一个面相交。首先注意到存在 $t\geq s$ 使得$F_{i_s,j_s,k_s}\cap F_{i'_t,j'_t,k'_t}\neq\emptyset$，否则 $M_b\cup\{F_{i_s,j_s,k_s}\}$ 将构成 $\mathcal{N}(G)$ 的一个（$\nu+1$）-匹配，这与匹配数矛盾。注意，$\mathcal{N}(G)$ 的每个面基数至多为 3。若$|F_{i_s,j_s,k_s}|=3$，则对所有 $q\geq s$ 都有

$$F_{i_s,j_s,k_s}>F_{i'_q,j'_q,k'_q},\tag{12}$$

因此对所有 $q\geq s$都有$|F_{i'_q,j'_q,k'_q}|=3$。若 F_{i_s,j_s,k_s} 与 M_b 的两个不同的面相交，设这两个面为 $F_{i'_p,j'_p,k'_p}$和 $F_{i'_q,j'_q,k'_q}$，且 $p,q\geq s$。由于这些面包含于中心路径 P 中，因此或者 $F_{i'_p,j'_p,k'_p}>F_{i_s,j_s,k_s}$，或者 $F_{i'_q,j'_q,k'_q}>F_{i_s,j_s,k_s}$，这与 (12) 矛盾。因此，$F_{i_s,j_s,k_s}$ 恰好与 M_b 的一个面相交。若$|F_{i_s,j_s,k_s}|=2$，结论显然成立。令 t 为满足 $F_{i_s,j_s,k_s}\cap F_{i'_t,j'_t,k'_t}\neq\emptyset$ 的唯一指标。然后

$$M_c=(\{F_{i_s,j_s,k_s}\}\cup M_b)\setminus\{F_{i'_t,j'_t,k'_t}\}$$

是 ν 的 $\mathcal{N}(G)$-匹配，并且由于 $F_{i_s,\ j_s,\ k_s}>F_{i'_t,\ j'_t,\ k'_t}$，我们得到 $M_c>_{\mathrm{lex}}M_b$。

因此，对每个 $a<b$，都存在 $c<b$，使得 M_c 和 M_b 恰好相差一个面。由于 $\mathcal{N}(G)$ 的每个面至多有 3 个元素，我们有 $|V_{M_c}\setminus V_{M_b}|\leq 2$。这意味着冒号理想 $(I_{j-1}:u_j)$ 要么由变量生成，要么由变量和二次单项式共同生成。

还需证明这些二次生成元互不相同。假设 $x_{i_1}x_{i_2}$ 和 $x_{i_3}x_{i_4}$ 属于 $\mathcal{G}(I_{j-1}:u_j)$，其中 $|\{i_1,i_2\}\cap\{i_3,i_4\}|=1$。那么 $\{i_1,i_2\}$ 和 $\{i_3,i_4\}$ 是 G 的边。不失一般性，设 $i_2=i_3$，于是 $P'=\{\{i_1,i_2\},\{i_2,i_4\}\}$ 在 G 中构成一条路径，并且 P' 的每个顶点都位于 V_{M_j} 之外。

若 $\deg_G(i_2)=2$，则 $M_j\cup\mathrm{N}_G[i_2]$ 是 $\mathcal{N}(G)$ 的一个匹配，这与匹配数矛盾。若 $\deg_G(i_2)\geq 3$，则存在 $i_5\in\mathrm{N}_G[i_2]\setminus\{i_1,i_4\}$，并且 $M_j\cup\mathrm{N}_G[i_5]$ 再次构成一个匹配，得出相同的矛盾。因此 $\{i_1,i_2\}\cap\{i_3,i_4\}=\emptyset$，这证明了二次生成元互不相同。□

引理 5.7。在引理 *5.6*的假设下，设 $j\in[m]$。如果冒号理想 $(I_{j-1}:u_j)$ 由变量以及 k 个互不相同的二次单项式生成，则存在 $i>j$ 使得 $\deg(u_j)+k-1<\deg(u_i)$。

证明。设 $u_1 >_{\text{lex}} \cdots >_{\text{lex}} u_m$ 为引理 5.6的证明中引入的 $\mathcal{G}(I)$上的次序，并设 $M_i = \{F_{i_1}, \ldots, F_{i_\nu}\}$ 表示与 u_i相关联的 ν-匹配。

假设存在 $j \in [m]$，使得冒号理想 $(I_{j-1} : u_j)$ 的极小生成集恰好包含两个不同的二次单项式 $x_{i_1}x_{i_2}$ 和 $x_{i_3}x_{i_4}$，且 i_1 的层严格低于 i_3的层。由于 $x_{i_1}x_{i_2} \in \mathcal{G}(I_{j-1} : u_j)$，由引理 5.6 的证明可知，存在 $r < j$，使得 M_r 和 M_j 恰好相差一个面，并且 $(u_r : u_j) = x_{i_1}x_{i_2}$。因此，存在指标 p 和 q，使得

$$M_r \setminus \{F_{r_p}\} = M_j \setminus \{F_{j_q}\} \quad \text{and} \quad F_{r_p} \setminus F_{j_q} = \{i_1, i_2\}.$$

此外，由于冒号生成元的极小性，不存在面 $F \in \mathcal{F}(\mathcal{N}(G))$ 使得$F \setminus F_{j_q} \subset F_{r_p} \setminus F_{j_q}$。因此，沿着中心路径

$$P = \{\ldots, i_{\theta-2}, i_{\theta-1}, i_\theta, i_{\theta+1}, i_{\theta+2}, \ldots\}$$

在毛毛虫图 G 中，我们有 $F_{r_p} = \mathrm{N}_G[i_{\theta-1}]$ 和 $F_{j_q} = \mathrm{N}_G[i_{\theta+1}]$，且 $\deg_G(i_\theta) \geq 3$。注意，$\deg_G(i_{\theta-2}) = 2$且 $\deg_G(i_{\theta-3}) \geq 2$；否则，与悬挂顶点对应的面将与 V_{M_j}不相交，这与 $\mathcal{N}(G)$ 的匹配数矛盾。存在一个面$F_{j_{l'}} \in M_j$ 使得 $\mathrm{N}_G[i_{\theta-2}] \cap F_{j_{l'}} \neq \emptyset$；否则，$M_j \cup \{\mathrm{N}_G[i_{\theta-2}]\}$ 将构成 $\mathcal{N}(G)$ 的一个匹配，这与匹配数矛盾。

Set

$$N_1 = (M_j \setminus \{F_{j_{l'}}\}) \cup \mathrm{N}_G[i_{\theta-2}].$$

若 $|F_{j_{l'}}| = 2$，则设 $M_{i'} = N_1$。否则 $|F_{j_{l'}}| = 3$，在这种情况下 $F_{j_{l'}} = \mathrm{N}_G[i_{\theta-4}]$。沿着这条路径重复上述论证，我们依次构造

$$N_t = (N_{t-1} \setminus \{F_{j_l}\}) \cup \mathrm{N}_G[i_{\theta-(3t-1)}],$$

其中F_{j_l} 表示 M_j中的对应面。

当被替换的面基数为 2 时，该过程在某一步 t终止。事实上，若所有被替换的面基数均为 3，且 $i_{\theta-3(t+1)}$ 是 G的一个悬挂顶点，则 $N_t \cup\{\mathrm{N}_G[i_{\theta-3(t+1)}]\}$ 将构成一个匹配，其匹配数为 $\mathcal{N}(G)$，这再次与匹配数矛盾。令$M_{i'} = N_t$。根据构造，$|\{F \in M_j : |F| = 2\}| > |\{F \in M_{i'} : |F| = 2\}|$，因此 $M_j >_{\text{lex}} M_{i'}$。此外，$|V_{M_{i'}}| = |V_{M_j}| + 1$。

令 $A = \{\mathrm{N}_G[i_{\theta-(3k-1)}] : k = 1, \ldots, t\}$。由于 $V_A \setminus \{i_1, i_2\} \subset V_{M_j}$而 $\{i_3, i_4\} \nsubseteq V_{M_j}$，顶点 i_3 和 i_4 不属于 V_A。因此，冒号理想 $(I_{i'-1} : u_{i'})$ 包含二次单项式 $x_{i_3}x_{i_4}$，因为 i_1 的层低于 i_3的层。重复相同的论证，我们得到一个匹配 $M_{i''}$，使得

$$M_{i'} >_{\text{lex}} M_{i''} \qquad \text{and} \qquad |V_{M_{i''}}| = |V_{M_{i'}}| + 1.$$

因此，$\deg(u_{i''}) = \deg(u_j) + 2$，由此完成证明。 □

定理 *5.5* 的证明。令 I 为 G 的闭邻域理想的 ν 次平方自由幂，并令 $\mathcal{G}(I) = \{u_1, \ldots, u_m\}$。显然，$\mathrm{reg}(S/I) \geq \max_{1 \leq i \leq n}\{\deg(u_i)\} - 1$。因此，只需证明 $\mathrm{reg}(S/I) \leq \max_{1 \leq i \leq n}\{\deg(u_i)\} - 1$。根据记号 4.3，我们按照 $u_1 >_{\text{lex}} \cdots >_{\text{lex}} u_m$ 对 $\mathcal{G}(I)$ 的元素排序。令 $d_j = \deg(u_j)$，其中 $j = 1, \ldots, m$。对于 $j = 2, \ldots, m$，考虑以下短正合列

$$0 \longrightarrow \frac{S}{(I_{j-1} : u_j)}(-d_j) \longrightarrow \frac{S}{I_{j-1}} \longrightarrow \frac{S}{I_j} \longrightarrow 0. \tag{13}$$

将引理 2.5 应用于方程(13)，得到 $\operatorname{reg}(S/(I)) \leq \max\{\alpha, \operatorname{reg}(S/I_1)\}$，其中 $\alpha = \max_{2\leq j\leq m}\{\operatorname{reg}(S/(I_{j-1} : u_j)) + d_j - 1\}$。根据 [19, 定理 2.18], ，若 Δ 是一维森林，则 $\operatorname{reg}(S/I(\Delta))$ 等于 Δ 中两两不交的面的最大数目。因此，由引理 5.6，理想 $(I_{j-1} : u_j)$ 由变量和 β_j 个不同的二次单项式生成，其中 β_j 表示二次生成元的数量。因此，$\operatorname{reg}(S/(I_{j-1} : u_j)) = \beta_j$。于是 $\alpha = \max_{2\leq j\leq m}\{\beta_j + d_j - 1\}$。由引理 5.7，对每个 j，都存在 $i > j$ 使得 $\beta_j + d_j \leq d_i$。因此，$\alpha \leq \max_{2\leq j\leq m}\{d_j - 1\}$。由于 $\operatorname{reg}(S/I_1) = d_1 - 1$，我们得到 $\operatorname{reg}(S/I) \leq \max\{\max_{2\leq j\leq m}(d_j - 1)\ d_1 - 1\} = \max_{1\leq j\leq m}\{d_j - 1\}$，证毕. □

References

[1] C. Berge，《超图：有限集组合学》，数学文库45，North-Holland，1989年。[2] M. Bigdeli、J. Herzog、R. Zaare-Nahandi，边理想幂的指标，代数通讯，**46**(3)，1080-1095，2018年。[3] S. Chakraborty、A. P. J oseph、A. Roy、A. Singh，《图的闭邻域理想的Castelnuovo–Mumford正则性》，代数组合学杂志，**61**:1，2025年。[4] R. Fr¨oberg，论Stanley-Reisner环，载于《代数专题》第2部分（华沙，1988年）。Banach中心出版物**26**，PWN，华沙，1990年。[5] D. Grayson和M. Stillman，Macaulay2：用于代数几何研究的软件系统，网址：http://www2.macaulay2.com。[6] T. H. H`a、A. Van Tuyl，分量线性理想的幂：Herzog-Hibi-Ohsugi猜想及相关问题，数学科学研究，**9**，第2期，论文编号22，共26页，2022年。[7] J. Herzog、T. Hibi，分量线性理想，名古屋数学杂志，**153**，141-153，1999年。[8] J. Herzog、T. Hibi、X. Zheng，弦图的Dirac定理与Alexander对偶，欧洲组合学杂志，**25**(7)，949–960，2004年。[9] J. Herzog、T. Hibi、N. V. Trung、X. Zheng，标准分次顶点覆盖代数、圈与叶，《美国数学会会刊》，**360**(12)，6231-6249，2008年。[10] J. Herzog、T. Hibi，《单项式理想》，数学研究生教材第260卷，施普林格伦敦出版社，伦敦，2011年。[11] L. T. Hoa、N. D. Tam，关于理想混合积的一些不变量，数学文献，**94**，327–337，2010年。[12] J. Honeycutt、S. K. Sather-Wagstaff，有限简单图的闭邻域理想，La Matematica**1**，387394，2022年。[13] E. Kamberi、F. Navarra、A. A. Qureshi，关于单纯形树面理想的平方自由幂，代数杂志693，240-276页，2026年。[14] M. Nasernejad、A. A. Qureshi、S. Bandari、A. Musapa¸sao˘glu，图的支配理想与闭邻域理想，地中海数学杂志，**19**:文章编号：152，2022年。[15] M. Nasernejad、A. A. Qureshi，邻域超图及其横截超图的代数推论，代数通讯，**52**(6)，2328–2345，2024年。[16] M. Nasernejad、S. Bandari、L. G. Roberts，闭邻域理想与支配理想的正规性及伴随素理想，代数及其应用杂志，**24**(1)，论文编号2550009，共19页，2025年。[17] L. Sharifan、S. Moradi，图的闭邻域理想，落基山数学杂志**50**(3)，1097–1107，2020年。[18] L. Sharifan，图的 t闭邻域理想，Beitr¨age zur Algebra und Geometrie，**66**，927–940，2025年。[19] X. Zheng，《面理想的分解》，代数通讯，**32**(6)，2301–2324，2004年。

Sabanci University, Faculty of Engineering and Natural Sciences, Orta Mahalle, Tuzla, 34956, Istanbul, Turkey

Email address: amalore.p@gmail.com, amalore.pushparaj@sabanciuniv.edu

Email address: aqureshi@sabanciuniv.edu, ayesha.asloob@sabanciuniv.edu