arXiv:2603.15264v1 [math.MG] 16 Mar 2026

粗中位数与通用拟测地锥

Robert Tang

2026年3月16日

摘要

我们证明，任何一致粗中位数空间的泛拟测地锥都具有规范粗中值结构。作为应用，我们重新得到了 Bowditch 的一个结果：任何层级双曲空间都具有一种粗中位数结构，且该结构与到双曲因子空间的投影相容。

*2020*年数学主题分类：51F30, 20F65关键词：粗中位数、泛拟测地锥、层级双曲空间

1 引言

粗中位数空间和群由 Bowditch 引入 [Bow13a], ，它们配备了一个三元算子，能够捕捉非正曲率的有用特征。这一概念推广了 Gromov 双曲空间和 CAT(0) 立方复形，并以映射类群、Teichmüller 空间和几何有限 Kleinian 群为例 [Bow16]。粗中位数的视角富有成效，为研究 Dehn 函数、渐近锥 [Bow13a], 拟等距刚性 [Bow18], 自同构 [Fio24], 以及解析性质 [Zei16、SW17]提供了统一框架。

映射类群上的一种自然粗中位数源自 Behrstock–Minsky 质心构造：对子曲面进行曲线图投影，可在每个双曲因子中得到质心 [MM99、MM00]；随后将这些质心组合起来，得到一个全局质心，其投影与各因子上的质心粗略一致 [BM11]。在 [Bow18], 中，Bowditch 将这一方法推广到由 Behrstock–Hagen–Sisto 发展的层级双曲空间（HHS） [BHS17a、BHS19], ，并证明一致双曲的双曲因子空间上的粗中位数会在总空间上诱导出一个粗中位数，且它与投影数据一致兼容。

在本文中，我们从泛拟测地锥的视角重新审视这些“拉回”构造。作者近期的一篇论文 [Tan] 首次引入了这一概念。非正式地说，对于由度量空间构成、且空间之间配备了一致受控映射的图表，这些锥充当通用拟测地线接收器（精确定义见第2 节）。我们证明，如果各因子空间具有一致粗中位数，且给定映射一致地保持粗中位数，那么这些映射便会在泛拟测地锥上诱导出一个相容的粗中位数；精确表述见定理4.4 。

定理 1.1。 设 D 是由一致粗中位数空间组成的一致受控图表$(X_i,\ \mu_i)$ 其映射均一致地保持粗中位数。那么，D 上任意泛拟测地的一致受控锥 X 都存在一个规范的（在接近性意义下唯一的）粗中位数 μ，使得所有腿 $(X、\ \mu) \to (X_i,\ \mu_i)$ 均一致地保持粗中位数。

Tan 的一项主要结果是 [Tan] 证明了，任意层次双曲空间都能实现一个泛拟测地锥，该锥取自其双曲因子空间图表以及通常的成对约束空间。定理 1.1 适用于这类图表，因此我们得到了 Bowditch 关于层次双曲空间的粗中位数定理（见第5节）。更一般地，该定理适用于配备成对约束的一族一致粗中位数空间，其中成对约束要么不施加约束，要么满足有界粗区间像性质。定理1.1 还说明，在给定层次双曲空间数据且与之相容的条件下，层次双曲空间上的粗中位数是唯一的（在接近性意义下）。值得指出的是，若不指定层次双曲空间数据，一个层次双曲空间可能具有（甚至不可数多个）彼此不同的粗中位数 [Man], ，不过在某些情形下唯一性仍然成立 [FS]。

定理 1.1 的证明是构造性的：根据我们先前的工作 [Tan], ，利用与给定数据相关的显式 Rips 元组空间，可以实现一个通用拟测地线锥；随后通过乘积中值诱导出所需的粗中位数。这凸显了这些工具在将各因子上的结构以构造性方式提升为整体结构方面的作用。

致谢

作者感谢 Mark Hagen、Robert Kropholler、Harry Petyt、Alessandro Sisto、Davide Spriano 和 Jing Tao 的精彩交流。作者感谢以下项目提供的支持：国家自然科学基金（NSFC12101503）；苏州市科技发展计划项目（ZXL2022473）；以及西交利物浦大学科研发展基金（RDF-23-01-121）。

2 粗几何

设 X 和 Y 为（广义）度量空间。映射 $f : X \to Y$ 的上控制函数是一个适当的递增函数 $\rho\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$，满足：若 $d_X(x,x') \leqslant t$，则 $d_Y(fx,fx') \leqslant \rho(t)$，对所有 $x,x' \in X$ 和 $t \geqslant 0$ 均成立。若 f 存在上控制函数，则称 f 为受控映射；若存在仿射上控制函数，则称 f 为粗利普希茨映射。对于任意子集 $U \subseteq Y$，令 $\mathcal{N}_r(U)$ 表示其在 Y 中的闭度量 r 邻域。若存在 $r \geqslant 0$使得 $\mathcal{N}_r f(X) = Y$，则称 f 为粗满射。对于 $\kappa \geqslant 0$ 以及点 $y, y' \in Y$，记 $y \approx_\kappa y'$ 表示 $d_Y(y,y') \leqslant \kappa$。若对所有 $x \in X$ 都有 $f(x) \approx_\kappa g(x)$，则称映射 $f, g : X \to Y$ 为 κ接近，记作 $f \approx_\kappa g$。若存在某个 $\kappa \geqslant 0$使得 $f \approx_\kappa g$，则称 f, g 接近，并记作 $f \approx g$。注意，接近性只取决于陪域度量。受控映射 $f : X \to Y$ 是粗等价，如果存在受控映射 $g : Y \to X$，使得 $gf \approx 1_X$ 且 $fg \approx 1_Y$；这样的映射 g 称为 f 的粗逆，且在接近意义下唯一。若此外 f 和 g 均为粗利普希茨映射，则称 f 为拟等距。

2.1 一致受控锥

我们回顾 [Tan] 中一致受控图表和锥的概念。令 **Coarse** 为以扩展度量空间为对象、以受控映射为态射的范畴。令J 为一个有向多重图，其顶点集为 Obj(J)，边集为 Mor(J)。一个一致受控（*u.c.*）图表 $D : J \rightsquigarrow$ **Coarse**（形状为J）包括：

- 对于每个 $j \in \mathrm{Obj}(J)$，有一个度量空间 D_j，以及
- 对于 Mor(J) 中的每个箭头 $\phi\colon i \to j$，有一个受控映射 $D_\phi : D_i \to D_j$，

使得所有D_ϕ 都具有共同上控制。

“波浪箭头”记号旨在提示它与通常范畴意义下的图表之间的类比，但其中还涉及一致控制和误差。我们不要求 u.c. 图表中存在复合，也不要求其满足粗交换性。

设 W 是一个度量空间。一个以顶点 W为顶点、定义在D 上的一致受控锥 $\lambda\colon W \rightsquigarrow D$，由一族一致受控的腿 $\lambda_j\colon W \to D_j$组成，其中$j \in \mathrm{Obj}(\mathsf{J})$，并满足

$$\begin{array}{ccc} W & & \\ {\scriptstyle \lambda_i}\downarrow & \searrow^{\lambda_j} & \\ D_i & \xrightarrow[D_\phi]{} & D_j \end{array}$$

对所有箭头 $\phi\colon i \to j$. 都一致地粗交换。换言之，存在 $\kappa \geqslant 0$使得 $\lambda_j \approx_\kappa D_\phi \lambda_i$对所有箭头 ϕ均成立。两个 u.c. 锥 $\lambda, \lambda'\colon W \rightsquigarrow D$若其各条腿一致接近，则称它们接近，记作$\lambda \approx \lambda'$。如果对于任意 u.c. 锥 $\zeta\colon Z \rightsquigarrow D$，都存在唯一的（在接近意义下）受控映射 $f\colon Z \to W$，使得 $\zeta \approx \lambda f$，则称 $\lambda\colon W \rightsquigarrow D$ 是D上的一个一致受控极限锥 。换言之，图表

$$\begin{array}{ccc} Z & \overset{f}{\dashrightarrow} & W \\ & {\scriptstyle \zeta_j}\searrow & \downarrow{\scriptstyle \lambda_j} \\ & & D_j \end{array}$$

对所有腿都一致地粗交换。若D上的一致受控极限锥存在，则它在粗等价意义下唯一（在接近意义下唯一）；我们将其记为 $\varprojlim \mathsf{J} D$。

对于 $\kappa \geqslant 0$，κ–一致元组空间 D是

$$\mathrm{Tuple}^\kappa(D) := \left\{ (x_j)_j \in \prod_j D_j : \ x_j \approx_\kappa D_\phi x_j \text{ for all arrows } \phi \right\} \subseteq \prod_j D_j$$

赋予由此诱导的 ℓ^∞–度量。1–Lipschitz 投影 $\pi^\kappa{}_j\colon \mathrm{Tuple}^\kappa D \to D_j$构成 u.c. 锥 $\pi^\kappa\colon \mathrm{Tuple}^\kappa(D) \rightsquigarrow D$的腿。以下结论显然成立。

引理 2.1。 设 $\zeta\colon Z \rightsquigarrow D$ 是一个 *u.c.* 锥。那么对于所有足够大的 κ，ζ 可分解为 $\zeta = \pi^\kappa f^\kappa$，其中 $f^\kappa\colon Z \to \mathrm{Tuple}^\kappa D \subseteq \prod_j D_j$ 由 $\prod_j \zeta_j$诱导。 □

对于所有 $\kappa \leqslant \kappa'$，包含映射 $\mathrm{Tuple}^\kappa(D) \hookrightarrow \mathrm{Tuple}^{\kappa'}(D)$ 都是等距嵌入；它们由此构成一个滤过 $\mathrm{Tuple}^*(D)$。如果对于所有足够大的 $\kappa \leqslant \kappa'$，这些包含映射都是粗满射，就称 $\mathrm{Tuple}^*(D)$ 稳定。

命题 2.2 (稳定元组空间 [Tan，命题 5。17]**)**。 设 $D\colon \mathsf{J} \rightsquigarrow$ **粗几何范畴**是一个 *u.c.* 图表。那么，D 存在 *u.c.* 极限锥，当且仅当$\mathrm{Tuple}^*(D)$稳定。在此情况下，$\pi^\kappa\colon \mathrm{Tuple}^\kappa(D) \rightsquigarrow D$ 对于足够大的 κ 实现了 D的 *u.c.* 极限锥。 □

2.2 通用拟测地锥

现在我们将注意力转向拟测地线 u.c. 锥，也就是说，顶点是拟测地线的情形。回忆一下，如果一个度量空间与赋予标准图（即组合）度量的图拟等距（分别粗等价），则称其为拟测地线 （分别粗测地）；这等价于通常以拟测地线（分别粗测地线）

测地线 [Tan，命题 3。20]。任何定义域为拟测地线定义域的受控映射必然是粗利普希茨映射。特别地，任意拟测地线 u.c. 锥的腿都是一致粗利普希茨的。称 $\lambda\colon W D$ 是 普适拟测地线 *u.c.* 锥，如果每个拟测地线 u.c. 锥 $\zeta\colon \mathcal{Z} D$ 都（在接近性意义下）通过 λ 经由唯一的（在接近性意义下）粗利普希茨映射进行分解。任何这样的锥在拟等距意义下都是唯一的。

为了计算普适拟测地线 u.c. 锥，我们采用 Rips 滤过。给定度量空间 X，尺度为 $\sigma \geqslant 0$ 的 *Rips* 图 $\mathrm{Rips}_\sigma X$是一个顶点集为 X的图，当且仅当 x、$x' \in X$中的点满足 $d_X(x,x') \leqslant \sigma$ 时，二者相邻。我们将 $\mathrm{Rips}_\sigma X$视为底集为 X的度量空间，其度量是标准图度量的限制。X上的恒等映射诱导出一个

- 利普希茨映射 $\xi_\sigma\colon \mathrm{Rips}_\sigma X \to X$，对所有 $\sigma \geqslant 0$ 均成立，并且
- 一个 1-Lipschitz 映射 $\mathrm{Rips}_\sigma X \to \mathrm{Rips}_\tau X$，对所有 $\sigma \leqslant \tau$ 均成立。

考虑所有尺度下的 Rips 图，我们得到*(度量) Rips* 滤过 $\mathrm{Rips}_* X$。如果对于所有充分大的 $\sigma \leqslant \tau$，映射 $\mathrm{Rips}_\sigma X \to \mathrm{Rips}_\tau X$都是粗等价（或者等价地，拟等距），则称 $\mathrm{Rips}_* X$稳定。接下来的两个结果是标准结论。

引理 2.3 ([Tan，引理 3.22])。 度量空间 X 是粗测地的，当且仅当 $\mathrm{Rips}_* X$ 稳定；此时 $\xi_\sigma\colon \mathrm{Rips}_\sigma X \to X$ 在 σ 足够大时是粗等价。 □

命题 2.4 ([Tan，引理 3.3 和命题 3.20])。 设 X 是拟测地空间，且 $f\colon X \to Y$ 是受控映射。那么当 $\sigma \geqslant 0$ 足够大时，由 f 诱导的映射 $f_\sigma\colon X \to \mathrm{Rips}_\sigma Y$ 是受控的，因此是粗利普希茨的。 □

将 Rips 滤过应用于粗组配空间，我们得到了一种计算普适拟测地线 u.c. 锥的显式方法。

定理 2.5 (Rips–组配方 [Tan，定理 5.19])。 设 $D\colon \mathsf{J} \rightsquigarrow$ **粗几何范畴** 是一个 *u.c.* 图表。以下条件等价。

1. D 具有一个普适拟测地线 *u.c.* 锥，
2. $\pi^\kappa \xi_\sigma\colon \mathrm{Rips}_\sigma \mathrm{Tuple}^\kappa D \to D$ 是某个 σ，$\kappa \geqslant 0$ 的泛拟测地锥，
3. $\mathrm{Tuple}_* D$ 稳定为一个粗测地空间。 □

2.3 粗中位数空间

关于粗中位数空间的背景知识可见 [Bow13a，Bow13b，Bow19]。我们将采用 Niblo–Wright–Zhang 提出的一个等价表述 [NWZ19]。

定义 2.6。若存在$X^3 \to X$上的受控映射 μ，则称其为度量空间X上的粗中位数，其中存在 $C \geqslant 0$ 使得

1.（粗对称性） $\mu(\mathrm{x}_{\tau 1}, \mathrm{x}_{\tau 2}, \mathrm{x}_{\tau 3}) \approx_C \mu(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3)$ 对所有排列 $\tau \in \mathrm{S}_3$,2均成立。
（粗局部化） $\mu(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2) \approx_C \mathrm{x}_1$。 （粗四点条件） $\mu(\mu(\mathrm{x}_1, \mathrm{w}, \mathrm{x}_2), \mathrm{w}, \mathrm{x}_3) \approx_C \mu(\mathrm{x}_1, \mathrm{w}, \mu(\mathrm{x}_2, \mathrm{w}, \mathrm{x}_3))$

对所有 $x_1, x_2, x_3, w \in X$。称 $(X$ 为 $\mu)$ 一个 粗中位数空间，其粗中位数常数为 C。

这里，我们使用 X^3 上的 ℓ^∞–度量。任何函数 $\mu' \colon X^3 \to X$，只要它与 X 上的粗中位数 μ 接近，也同样是粗中位数。若两个定义在 X 上的粗中位数 μ, μ' 作为受控映射 $\mu, \mu' \colon X^3 \to X$彼此接近，则称它们接近。令 $[\mu]$ 表示粗中位数 μ的邻近等价类。

粗中位数空间之间的受控映射$f \colon (X, \mu) \to (Y, \nu)$若是粗中位数保持 (CMP)的，则$f \mu \approx \nu \circ f^{\times 3} \colon X^3 \to Y$。换言之，存在 $\kappa \geqslant 0$ 使得$f(\mu(x, y, z)) \approx_\kappa \nu(fx, fy, fz)$ 对所有$x, y, z \in X$均成立。相关映射受控这一假设确保 CMP 性质在复合下保持不变。

引理 2.7。 设 (X, μ) 是一个粗中位数空间，并假设 $f \colon W \to X$ 是粗等价。那么 W 上存在唯一的（在接近性意义下）粗中位数 ν，使得 $f \colon (W, \nu) \to (X, \mu)$ 是 *CMP*。

证明。 设$g \colon X \to W$是f的粗逆。容易验证，三元算子 $\nu := f \circ \mu \circ g^{\times 3} \colon Y^3 \to Y$在$Y$上定义了一个粗中位数。注意

$$\nu \circ f^{\times 3} \approx f \circ \mu \circ g^{\times 3} \circ f^{\times 3} \approx f\mu \circ 1_W^{\times 3} \approx f\mu,$$

因此，$f \colon (W, \nu) \to (X, \mu)$是 CMP。为验证唯一性，假设 ν'是Y上的粗中位数，使得$f \colon (W, \nu') \to (X, \mu)$是 CMP。那么

$$\nu \approx \nu \circ f^{\times 3} \circ g^{\times 3} \approx \nu' \circ f^{\times 3} \circ g^{\times 3} \approx \nu'$$

如所需。 □

设 (X, μ) 是一个粗中位数空间，其粗中位数常数为$C \geqslant 0$，对于 μ的上控制函数为ρ。给定点$x, y \in X$以及$L \geqslant 0$，定义它们的L–粗区间 为

$$[x, y]_L := \{z \in X : \ \mu(x, y, z) \approx_L z\}.$$

引理 2.8。 设 $x, y \in X$。那么

1. 对所有 $z \in X$，$x, y \in [x, y]_{2C}$且 $\mu(x, y, z) \in [x, y]_{C+\rho C}$；*2.* 对所有 $L, r \geqslant 0$，$\mathcal{N}_r [x, y]_L \subseteq [x, y]_{L+r+\rho r}$；*3.* 若 $z \in [x, y]_L$，则 $[x, z]_L \subseteq [x, y]_{L'}$，其中 L'仅依赖于 C、L 和 ρ。

证明。 1. 粗对称性和粗局部化意味着x、$y \in [x$、$y]_{2C}$，而

$$\mu(x, y, \mu(x, y, z)) \approx_C \mu(\mu(x, y, x), y, z) \approx_{\rho C} \mu(x, y, z)$$

这由粗对称性和粗四点条件得出。

2. 设$w \approx_r z \in [x$、$y]_L$。那么 $\mu(x$、y、$w) \approx_{\rho r} \mu(x$、$y$、$z) \approx_L z \approx_r w$。

3. 令 $w \in [x, z]_L$。那么

$$\begin{aligned} w &\approx_{L+C} \mu(w, x, z) \approx_{\rho L} \mu(w, x, \mu(x, y, z)) \approx_{\rho C} \mu(w, x, \mu(z, x, y)) \\ &\approx_C \mu(\mu(w, x, z), x, y) \approx_{\rho(C+L)} \mu(w, x, y) \approx_C \mu(x, y, w). \end{aligned}$$

□

接下来，我们回顾中位数代数中五点条件的一个粗几何版本。这可由 Bowditch 对粗中位数的原始定义推出；参见 [NWZ21，第 2 节。3]。

引理 2.9。 存在一个常数 $E \geqslant 0$，它取决于 C 和 ρ，使得

$$\mu(v,w,\mu(x,y,z)) \approx_E \mu(\mu(v,w,x),\mu(v,w,y),z)$$

对所有 v，w，x，y，$z \in X$。 □

引理 2.10。 若 $O \in [x,\ y]_L \cap [y,\ z]_L \cap [z,\ x]_L$，则 $O \approx_R \mu(x,\ y,\ z)$，其中 R 取决于 ρ、L 和 C。

证明。 令 $m = \mu(x、\ y、\ z)$。由粗几何五点条件可得

$$\mu(O,m,x) \approx_{\rho L} \mu(\mu(x,y,O),\mu(x,y,z),x) \approx_E \mu(x,y,\mu(O,z,x)) \approx_{\rho(L+C)} \mu(x,y,O) \approx_L O.$$

取 $K' \geqslant \rho L + E + \rho(L+C) + L$，则可得

$$\begin{aligned} m &\approx_C \mu(m,m,O) \approx_{\rho(C+C')} \mu(\mu(y,z,x),\mu(y,z,m),O) \\ &\approx_E \mu(y,z,\mu(x,m,O)) \approx_{\rho(K'+C)} \mu(y,z,O) \approx_L O. \end{aligned}$$ □

按照 Fioravanti [Fio24]，，子集 U $\subseteq$ X 若存在 R $\geqslant 0$ 使得 $\mu(\mathrm{U}^3) \subseteq \mathcal{N}_R(\mathrm{U})$，则称其为近似中位数子代数。对于这样的子集，定义 U 上的三元算子 $\mu|_U$：任取 $\mu|_U(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}) \in \mathrm{U}$，并选择 X 中与 $\mu(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})$ 距离不超过 R 的任意一点。忽略接近性后，$\mu|_U$ 是 U 上唯一一个与 μ 在 $\mathrm{U}^3 \subseteq \mathrm{X}^3$ 上的限制接近的粗中位数；特别地，$[\mu|_U]$ 仅取决于 $[\mu]$。我们称 $\mu|_U$ 由 μ 诱导。任何与 U 的豪斯多夫距离有限的子集 $\mathrm{U}' \subseteq \mathrm{X}$ 也是近似中位数子代数。

3 粗中位数锥

现在我们考虑粗中位数框架中的一致余极限图表和锥。粗中位数范畴 CMed 的对象是粗中位数空间，态射是 CMP 控制映射。一个一致余极限粗中位数图表 $\mathrm{M} : \mathrm{J} \rightsquigarrow \mathrm{CMed}$，是一个一致余极限图表，其对象 $\mathrm{M\,j} := (\mathrm{X\,j}, \mu_j)$ 是具有一致粗中位数常数和上控制函数的粗中位数空间，并且其粘合映射 $\mathrm{M}\phi$：$(\mathrm{X}_i, \mu_i) \to (\mathrm{X\,j}, \mu_j)$ 是一致 CMP 的。令 $\hat{}\mathrm{M} : \mathrm{J} \rightsquigarrow$ Coarse 表示忘去粗中位数后得到的底层度量空间的一致余极限图表。一个一致余极限粗中位数锥 λ：$(\mathrm{W}, \nu)\,\mathrm{M}$，是覆盖 $\hat{}\mathrm{M}$ 的一致余极限锥，其粗中位数顶点为 (W, ν)，且各条腿均为一致 CMP。若每个一致余极限粗中位数锥 ζ：$(\mathrm{Z}, \eta)\,\mathrm{M}$ 都可经由 λ 唯一地（在接近性意义下）分解为一个 CMP 控制映射，则称 λ 为泛一致余极限粗中位数锥。

为对象 $(M_j、\ \mu_j)$ 和 $c \geqslant 0$ 固定一个共同的粗中位数常数 $C \geqslant 0$ 以及上控制函数 ρ，使得对于所有箭头 ϕ：$i \to j$，都有 $\mu_j \circ (M_\phi)^{\times 3} \approx_c (M_\phi) \circ \mu_i$。一致性假设允许我们在 ℓ^∞–积 $\prod_j X_j$ 上赋予积粗中位数 $\prod_j \mu_j$；这个粗中位数空间记作 $\prod_j M_j$。

称子集 $U \subseteq \prod_j M_j$ 为 M–相容，若对于某个 $\kappa \geqslant 0$，有 $U \subset \mathrm{Tuple}^\kappa \hat{} M$。对于这样的集合 U，我们可以定义一个 u.c. 锥 $\pi|_U$：$U \hat{} M$，其中腿 $(\pi|_U)_j$ 是

到每个 M_i–因子的投影的限制。此外，若 U 是 $\prod_j M_j$ 的近似中位数子代数，则 $\pi|_U\colon (U, (\prod_j \mu_j)|_U)$ M 是一个 u.c. 粗中位数锥。（事实上，每个逐因子投影 $\pi_i\colon \prod_j M_j \to M_i$ 都是一致 CMP。）注意，若 U 是 M–相容的（分别地，是近似中位数子代数），则对于任意 $r \geqslant 0$，$\mathcal{N}_r(U)$ 也如此。

我们证明，任意 u.c. 粗中位数锥 $\lambda\colon (W, \nu)$ M 都能通过一个 M–相容的近似中位数子代数进行典范分解（相差一个有界距离）。令 $I(\lambda) \subseteq \prod_j M_j$ 表示 $\prod_j \lambda_j\colon (W, \nu) \to \prod_j M_j$ 的像。

引理 3.1. 设 $\lambda\colon (W,\nu)$ M 是一个 *u.c.* 粗中位数锥。则 $\prod_j \lambda_j$ 是 *CMP*，且 $I(\lambda)$ 是一个 M–相容的近似中位数子代数。

证明。 根据假设，存在 $r \geqslant 0$，使得对所有对象 j，都有 $\lambda_j \nu \approx_r \mu_j \lambda^{\times 3} j$，因此

$$(\prod_j \lambda_j) \circ \nu \approx_r (\prod_j \mu_j) \circ (\prod_j \lambda_j)^{\times 3}.$$

注意，$I(\lambda)^3 = (\prod_j \lambda_j)^{\times 3}(W^3)$。因此，$(\prod_j \mu_j)(I(\lambda)^3) \subseteq \mathcal{N}_r(I(\lambda))$，故 $I(\lambda)$ 是一个近似中位数子代数。根据引理 2.1，$I(\lambda)$ 是 M–相容的。 □

因此，$\lambda = \pi|_{I(\lambda)} \circ (\prod_j \lambda_j)$ 给出了所需的分解，只需在 $I(\lambda)$ 上赋予由 $\prod_j \mu_j$ 诱导的粗中位数。因此，为了刻画 M 上的泛一致余极限粗中位数锥，我们可以将注意力集中在 $\prod_j M_j$ 的 M–相容近似中位数子代数上。在子集 U、$U' \subseteq \prod_j M_j$ 上定义序关系：当且仅当存在某个 $r \geqslant 0$ 使得 $U \prec U'$ 时，规定 $U' \subseteq \prod_j M_j$ 成立。

命题 3.2. 一个一致余极限粗中位数图表 $M : \mathsf{J} \rightsquigarrow \mathbf{CMed}$ 存在泛一致余极限粗中位数锥，当且仅当存在 $\prec$–最大的 M–相容近似中位数子代数 U *of* $\prod_j M_j$。此时，泛一致余极限粗中位数锥由 $\pi|_U$ 实现。

证明。 假设 $\lambda\colon (W, \nu)$ M 是一个泛一致余极限粗中位数锥。由引理 3.1，$I(\lambda)$ 是 $\prod_j M_j$ 的 M–相容近似中位数子代数。令 $U \subseteq \prod_j M_j$ 为任意 M–相容近似中位数子代数。于是，$\pi|_U\colon (U, (\prod_j \mu_j)|_U)$ M 是一个一致余极限粗中位数锥。根据泛性质，$\pi|_U$ 在接近性意义下可经由 λ 分解，因此 $I(\pi|_U) = U$ 位于 $I(\lambda)$ 的某个有界邻域内，从而 $U \prec I(\lambda)$。

反过来，假设 $\mathrm{U} \subseteq \prod \mathrm{j}\ \mathrm{M}\ \mathrm{j}$ 是所有 M–相容的近似中位数子代数中 $\prec$ 最大的。对于任意 u.c. 粗中位数锥 $\zeta\colon (\mathrm{Z}, \nu)\,\mathrm{M}$，集合 $\mathrm{I}(\zeta)$ 依据引理 3.1 是一个 M –相容的近似中位数子代数，因此对于某个 $\mathrm{r} \geqslant 0$，有 $\mathrm{I}(\zeta) \subseteq \mathcal{N}_r(\mathrm{U})$。令 h 为包含映射 $\mathrm{U} \hookrightarrow \mathcal{N}_r(\mathrm{U})$ 的粗逆。注意，相对于诱导的粗中位数，h 是 CMP 映射。于是 ζ 可分解为

$$\zeta = \pi|_{\mathcal{N}_r(U)} \circ \prod_j \zeta_j \approx \pi|_U \circ h \circ \prod_j \zeta_j.$$

为验证唯一性（相差接近性），假设对于某些 CMP 控制映射 $h' \approx_s \pi|_U \circ h''$ $h, h''\colon (Z, \nu) \to (U, (\prod_j \mu_j)|_U)$ 和 $s \geqslant 0$，有 $\pi|_U \circ h' \approx_s \pi|_U \circ h''$。于是

$$h'z = (\pi_j h' z)_j = ((\pi|_U)_j h' z)_j \approx_s ((\pi|_U)_j h'' z)_j = (\pi_j h'' z)_j = h'' z$$

对所有 $z \in Z$，因此 $h' \approx h''$。因此，$\pi|_U$ 是一个泛一致余极限粗中位数锥。 □

现在我们证明，M 在其一致受控极限锥上诱导出一个粗中位数（如果该锥存在）。

定理 3.3。 设 $M\colon \mathrm{J} \rightsquigarrow \mathbf{CMed}$ 是一个一致余极限粗中位数图表，且$\lim\leftsquigarrow \mathrm{J}\ \hat{}M$ 存在。那么$\mathrm{Tuple}^{\kappa}\ \hat{}M$ 是 $\prec$–最大的 M–相容近似中位数子代数，包含于$\prod j\, Mj$，其中 κ 充分大。因此，M 上的泛一致余极限粗中位数锥由$\mathrm{Tuple}^{\kappa}\ \hat{}M$ 配备由 $\prod j\ \mu_j$ 诱导的粗中位数来实现，其中 κ 充分大。

证明。 由命题 2.2，$\mathrm{Tuple}^{*}\ \hat{}M$ 在某个阈值 $\kappa_0 \geqslant 0$处稳定，因此

$$\mathrm{Tuple}^{\kappa}(\hat{M}) \prec \mathrm{Tuple}^{\kappa'}(\hat{M}) \prec \mathrm{Tuple}^{\kappa_0}(\hat{M}) \prec \mathrm{Tuple}^{\kappa}(\hat{M})$$

对所有 $\kappa' \geqslant \kappa \geqslant \kappa_0$ 均成立。我们断言，$\mathrm{Tuple}^{\kappa}(\ \hat{}M)$ 是$\prod_j M_j$的近似中位数子代数，其中 $\kappa \geqslant \kappa_0$。设$x$、$y$、$z \in \mathrm{Tuple}^{\kappa}(\ \hat{}M)$。那么

$$M_\phi \mu_i(x_i, y_i, z_i) \approx_C \mu_j(M_\phi x_i, M_\phi y_i, M_\phi z_i) \approx_{\rho\kappa} \mu_j(x_j, y_j, z_j)$$

对所有箭头 $\phi\colon \mathrm{i} \to \mathrm{j}$ 均成立。因此$(\prod \mathrm{j}\ \mu_j)(\mathrm{x}、\mathrm{y}、\mathrm{z}) \in \mathrm{Tuple}^{C+\rho\kappa}(\hat{}\mathrm{M}) \prec \mathrm{Tuple}^{\kappa}(\hat{}\mathrm{M})$，从而得到所述结论。注意，任何 M–相容集合 U 都满足 $\mathrm{U} \prec \mathrm{Tuple}^{\kappa}(\hat{}\mathrm{M}\ )$，其中 $\kappa \geqslant \kappa_0$。由此可知，$\mathrm{Tuple}^{\kappa}(\ \hat{}\mathrm{M})$ 满足所需的 $\prec$–最大条件，因此根据命题 3.2，可得到 M 上的泛一致余极限粗中位数锥。 □

4 拟测地粗中位数锥

现在我们转而关注拟测地一致连续粗中位数锥，也就是说，顶点是拟测地的。若每个拟测地一致连续粗中位数锥 $\zeta\colon (Z, \nu)\, M$都通过唯一的（在接近性意义下）CMP 控制映射经由 λ 分解，则称 $\lambda\colon (W, \mu)\, M$为一个泛拟测地一致连续粗中位数锥。我们将考察粗中位数与 Rips 过滤之间的相互作用。

给定X上的一个粗中位数 μ，令 $\psi_\sigma\colon (\mathrm{Rips}_\sigma X)^3 \to \mathrm{Rips}_\sigma X$为与底层集合上的 μ相一致的三元算子。

引理 4.1. 假设 μ 具有上控制函数 ρ。那么，与底层集合上的 μ 相一致的函数 $(\mathrm{Rips}_\sigma X)^3 \to \mathrm{Rips}^{\rho\sigma} X$ 对所有 $\sigma \geqslant 0$ 都是 *1-Lipschitz*。

证明。注意，通过底层恒等映射，$(\mathrm{Rips}_\sigma \mathrm{X})^3$ 与 $\mathrm{Rips}_\sigma \mathrm{X}^3$ 等距。设 $(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}), (\mathrm{x1}, \mathrm{y1}, \mathrm{z}') \in \mathrm{X}^3$ 在 $\mathrm{Rips}_\sigma \mathrm{X}^3$中相邻。那么 $\mathrm{d}_{X^3}((\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}), (\mathrm{x1}, \mathrm{y1}, \mathrm{z}')) \leqslant \sigma$，因此 $\mathrm{d}_X(\mu(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}), \mu(\mathrm{x1}, \mathrm{y1}, \mathrm{z}')) \leqslant \rho\sigma$。结论由此得出。 □

引理 4.2. 设 (X, μ) 是粗测地粗中值空间。那么当 $\sigma \geqslant 0$ 充分大时，ψ_σ是 $\mathrm{Rips}_\sigma X$ 上的粗中位数。此外，$\xi_\sigma\colon (\mathrm{Rips}_\sigma X, \psi_\sigma) \to (X, \mu)$ 是 *CMP*。

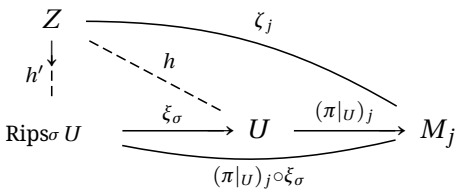
证明。设 C 是 (X 的粗中位数常数，μ) 且 ρ 是 μ的上控制函数。无妨设 ρ 满足：对所有 t $\geqslant 0$，都有 $\rho(\mathrm{t}) \geqslant \mathrm{t}$。根据引理 2.3，存在 $\sigma_0 \geqslant 0$，使得底层恒等映射 $\mathrm{Rips}^{\rho\sigma} \to \mathrm{Rips}_\sigma$ X 对所有 $\sigma \geqslant \sigma_0$都是粗等价。因此，根据引理 4.1，$\psi_\sigma$ 可通过受控映射$(\mathrm{Rips}_\sigma \mathrm{X})^3 \to \mathrm{Rips}^{\rho\sigma} \mathrm{X} \to \mathrm{Rips}_\sigma \mathrm{X}$ 分解，其中 $\sigma \geqslant \sigma_0$，因而是受控的。通过选取 $\sigma \geqslant \mathrm{C}$,

我们得到一个粗中位数空间 $(\mathrm{Rips}_\sigma X,\ \psi_\sigma)$ 其粗中位数常数为 1。注意，$\mu\xi_\sigma^{\times 3} = \xi_\sigma\psi_\sigma$ 由构造可知，因此 ξ_σ 是 CMP。 □

以下结果是命题 3.2 的部分类比

命题 4.3. 设 $M : \mathrm{J} \rightsquigarrow \mathbf{CMed}$ 是一个一致余极限粗中位数图表。假设，在 $\prod j\, M\, j$ 的粗测地 M–相容近似中位数子代数中，存在一个 $\prec$–最大元 U。那么，$\mathrm{Rips}_\sigma U$ 为 $\sigma large$ 实现了一个泛拟测地一致余极限粗中位数锥。

证明。假设 $\mathrm{U} \subseteq \prod \mathrm{j}\ \mathrm{M}i$ 满足给定的 $\prec$–最大性质。赋予 U 由 $\prod \mathrm{j}\ \mu_j$ 诱导的粗中位数结构。由于 U 是粗测地的，根据引理 2.3，对于 σ large，映射 $\xi_\sigma : \mathrm{Rips}_\sigma \mathrm{U} \to \mathrm{U}$（与底层恒等映射一致）是粗等价。我们断言，$\pi|_U \circ \xi_\sigma : \mathrm{Rips}_\sigma \mathrm{U\ M}$ 是一个泛拟测地一致余极限粗中位数锥。设 ζ：$(\mathrm{Z}, \nu)\,\mathrm{M}$ 是一个拟测地一致余极限粗中位数锥。沿用命题 3.2 证明中的相同论证，我们推得 ζ 经由一个唯一的（模接近性）CMP 控制映射 h：$(\mathrm{Z}, \nu) \to (\mathrm{U}, \mu')$分解。



由于 Z 是拟测地的，命题 2.4 断言存在一个粗利普希茨映射 $\mathrm{h}' : \mathrm{Z} \to \mathrm{Rips}_\sigma \mathrm{U}$，使得 $\mathrm{h} \approx \xi_\sigma \mathrm{h}'$。根据引理 4.2，粗等价 ξ_σ 是 CMP，因此 h' 是 CMP。于是，$\zeta \approx \pi|_U \circ \mathrm{h} \approx (\pi|_U \circ \xi_\sigma)\mathrm{h}'$ 给出了所需的分解。为验证唯一性，假设对于某个受控映射 $\mathrm{h}'' : \mathrm{Z} \to \mathrm{Rips}_\sigma \mathrm{U}$，有 $\zeta \approx (\pi|_U \circ \xi_\sigma)\mathrm{h}''$。那么 $\pi|_U \circ (\xi_\sigma \mathrm{h}'') \approx \pi|_U \circ (\xi_\sigma \mathrm{h}')$，因此，仿照命题 3.2 的证明进行论证，我们可推出 $\xi_\sigma \mathrm{h}'' \approx \xi_\sigma \mathrm{h}'$。由于 ξ_σ 是一个粗等价，故 $\mathrm{h}'' \approx \mathrm{h}'$。因此，$\pi|_U \circ \xi_\sigma$：$\mathrm{Rips}_\sigma \mathrm{U\ M}$ 是一个泛拟测地一致连续粗中位数锥。 □

我们最后证明定理1.1。

定理 4.4。 设 M: $\mathrm{J} \rightsquigarrow \mathbf{CMed}$ 是一个一致余极限粗中位数图表。假设其底层一致余极限图表 $\hat{}M$ 具有一个泛拟测地线 *u.c.* 锥 $\lambda : W\ \hat{}M$。那么 W 存在一个典范的（在接近性意义下唯一的）粗中位数 ν，使得 λ: $(W, \nu)M$ 是一个泛拟测地线一致余极限粗中位数锥。

证明。由定理 2.5，$\lim\leftarrow\rightsquigarrow \mathrm{J}\ \hat{}\mathrm{M}$ 存在且为粗测地的。此外，$\mathrm{Tuple}^*\ \hat{}\mathrm{M}$ 稳定为一个粗测地空间。取 $\kappa \geqslant 0$ 充分大并援引定理 3.3，我们推出 $\mathrm{Tuple}^\kappa\ \hat{}\mathrm{M}$ 在 $\prod \mathrm{j}\ \mathrm{M}i$ 的粗测地且与 M 相容的近似中位数子代数中是 $\prec$–最大的。因此，由命题 4.3，对于 σ充分大，我们得到一个泛拟测地一致连续粗中位数锥 ζ: $\mathrm{Rips}_\sigma\, \mathrm{Tuple}^\kappa\ \hat{}\mathrm{M\ M}$，其中各腿是底层集合上逐因子投影的限制。注意，$\zeta$ 也是一个一致受控极限锥（因为 ξ_σ 是一个粗等价），故存在唯一（在接近性意义下）的粗等价 $\mathrm{f} : \mathrm{W} \to \mathrm{Rips}_\sigma\, \mathrm{Tuple}^\kappa\ \hat{}\mathrm{M}$，使得 $\lambda \approx \zeta \mathrm{f}$。事实上，f

是一个拟等距，因为其定义域和值域都是拟测地的。由引理 2.7，我们得到 ν 在 W 上的唯一（在接近性意义下）粗中位数结构，使得 f 为 CMP。 □

5 有界粗区间像

本节中，我们应用定理4.4，重述 Bowditch 的一个定理：任意层次双曲空间都允许一种粗中位数结构，且该结构与双曲因子空间上的粗中位数相容 [Bow18]；特别是，这为映射类群导出了一个粗中位数。这里不需要层次双曲空间的定义；感兴趣的读者可参阅 [BHS17a、BHS19、Sis19] 以了解更多背景。我们的论证也适用于更一般的情形：一族一致粗中位数空间满足一些仿照层次双曲空间一致性公理建立的成对约束。我们不对所涉及的粗中位数空间作任何拟测地性（或粗测地性）假设。

考虑一族一致的粗中位数空间 $\{(\mathcal{C}U,\mu_U)\}_{U\in\mathcal{S}}$，其指标集为 $\mathcal{S}$。这里假设所有 $(\mathcal{C}U,\mu_U)$ 都具有共同的粗中位数常数 C和上控制函数 ρ。集合 $\mathcal{S}$上赋有一个对称、非自反的二元关系 $\perp$，定义在 $\mathcal{S}$上，称为正交性，我们将用它对这族空间施加成对约束。对于满足$U\perp V$的 $\mathcal{C}U$和 $\mathcal{C}V$，我们不施加任何约束；而对于满足$U\pitchfork V$且彼此不同的情形，我们施加以下约束：

有界粗区间像。存在常数 $\mathrm{B}\geqslant \mathrm{C}+\rho\mathrm{C}$，使得对于任意不同的 $\mathrm{U}\pitchfork\mathrm{V}$，（交换 U 和 V 后）存在一个函数 $\theta^V\mathrm{U}\colon \mathcal{C}\mathrm{V}\to\mathcal{C}\mathrm{U}$ 以及一点 $\mathrm{O}^U\mathrm{V}\in\mathcal{C}\mathrm{V}$，使得对所有 x_V、$\mathrm{y}_V\in\mathcal{C}\mathrm{V}$，都有 $\mathrm{O}^U\mathrm{V}\in[\mathrm{x}_V,\mathrm{y}_V]_B$ or $\theta^V\mathrm{U}\,\mathrm{x}_V\approx_B\theta^V\mathrm{U}\,\mathrm{y}_V$。

此条件仿照的是有界测地像性质，适用于$\theta^V{}_U\colon \mathcal{C}V\to\mathcal{C}U$是曲线图之间的子曲面投影 [MM00]的情形。在这种情况下，$\mathcal{C}V$ 是格罗莫夫双曲的，因此该条件相当于说：如果$O^U{}_V$ 不靠近连接x_V 和y_V 且位于 $\mathcal{C}V$ 中的任何一条测地线，那么x_V 和y_V 在 $\theta^V{}_U$ 下的像在 $\mathcal{C}U$中彼此一致有界地接近。

现在，我们在族 $\{(\mathcal{C}U,\mu_U)\}_{U\in\mathcal{S}}$ 上定义成对约束。固定 $K\geqslant B$。每当$U\perp V$时，令 $\mathcal{R}_{UV}:=\mathcal{C}U\times\mathcal{C}V$。对于 $U\pitchfork V$，令

$$\mathcal{R}_{UV}:=\left\{(x_U,x_V)\in\mathcal{C}U\times\mathcal{C}V:\ x_U\approx_K\theta^V_U x_V\ \text{ or }\ x_V\approx_K O^U_V\right\}.$$

在这两种情况下，我们都赋予 $\mathcal{R}_{UV}$ 由 ℓ^∞诱导的度量。这些约束同时刻画了层次双曲空间公理中的有界测地线像性质和 Behrstock 不等式（令 $\theta^V{}_U$ 为常数）所产生的一致性条件。下面验证这些 $\mathcal{R}_{UV}\subseteq\mathcal{C}U\times\mathcal{C}V$是统一的近似中位数子代数。

引理 5.1。存在一个常数 $R\geqslant 0$，它仅依赖于 C、B、K 和 ρ，使得对所有不同的 $U,V\in\mathcal{S}$，都有 $(\mu_U\times\mu_V)(\mathcal{R}^3UV)\subseteq\mathcal{N}_R(\mathcal{R}_{UV})$。

证明。$\mathrm{U}\perp\mathrm{V}$ 的情形显然，因此不妨设 $\mathrm{U}\pitchfork\mathrm{V}$。取 $(\mathrm{x}_U,\mathrm{x}_V)$, $(\mathrm{y}_U,\mathrm{y}_V)$,$(\mathrm{z}_U,\mathrm{z}_V)\in\mathcal{R}_{UV}$，并令 $\mathrm{m}_U=\mu_U(\mathrm{x}_U,\mathrm{y}_U,\mathrm{z}_U)$, $\mathrm{m}_V=\mu_V(\mathrm{x}_V,\mathrm{y}_V,\mathrm{z}_V)$。由引理 2.8，推出 $\mathrm{m}_V\in[\mathrm{x}_V,\mathrm{y}_V]_{C+\rho C}\subseteq[\mathrm{x}_V,\mathrm{y}_V]_B$，因此对某个 $\mathrm{L}=\mathrm{L}(\mathrm{C},\mathrm{B},\rho)$，有 $[\mathrm{x}_V,\mathrm{m}_V]_B\subseteq[\mathrm{x}_V,\mathrm{y}_V]_L$。若 $\mathrm{O}^U\mathrm{V}\in[\mathrm{x}_V,\mathrm{y}_V]_L\cap[\mathrm{y}_V,\mathrm{z}_V]_L\cap[\mathrm{z}_V,\mathrm{x}_V]_L$，则由引理 2.10，推出对某个依赖于 L、C 和 ρ 的 $\mathrm{R}\geqslant 0$，有 $\mathrm{O}^U\mathrm{V}\approx_R\mathrm{m}_V$，因此 $(\mathrm{m}_U,\mathrm{m}_V)\approx_R(\mathrm{m}_U,\mathrm{O}^U\mathrm{V})\in\mathcal{R}_{UV}$。于是，不妨设 $\mathrm{O}^U\mathrm{V}\notin[\mathrm{x}_V,\mathrm{y}_V]_L\supseteq[\mathrm{x}_V,\mathrm{m}_V]_B$（对 x_V, y_V, z_V 作循环置换即可）。由

有界粗区间像假设，推出 $\theta^V \mathrm{U}\, \mathrm{m}_V \approx_B \theta^V \mathrm{U}\, \mathrm{x}_V \approx_B \theta^V \mathrm{U}\, \mathrm{y}_V$。由于 $(\mathrm{x}_U, \mathrm{x}_V), (\mathrm{y}_U, \mathrm{y}_V)$ 属于 $\mathscr{R}_{UV}$，可知 $\mathrm{x}_U \approx_K \theta^V \mathrm{U}\, \mathrm{x}_V \approx_B \theta^V \mathrm{U}\, \mathrm{y}_V \approx_K \mathrm{y}_U$，因此 $\mathrm{m}_U \approx_{\rho(2K+\mathrm{B})} \mathrm{x}_U$。于是，对 $\mathrm{R} \geqslant \rho(2\mathrm{K} + \mathrm{B}) + \mathrm{K} + \mathrm{B}$，有 $\mathrm{m}_U \approx_R \theta^V \mathrm{U}\, \mathrm{m}_V$。因此 $(\mathrm{m}_U, \mathrm{m}_V) \approx_R (\theta^V \mathrm{U}\, \mathrm{m}_V, \mathrm{m}_V) \in \mathscr{R}_{UV}$。 □

因此，由引理 5.1，每个 $\mathscr{R}_{UV}$都可通过 $\mu_U \times \mu_V$诱导出一个粗中位数；此外，粗中位数常数和上控制函数可以一致地选取。按照 [Tan，第 6 节中，1], 我们可以如下定义一个一致余极限粗中位数图表M: J $\rightsquigarrow$ **CMed**，它来自族 $\{(\mathscr{C}U, \mu_U)\}_{U\in\mathscr{S}}$并配备成对约束 $\mathscr{R}_{UV}$。J 的每个顶点都标记为一个元素$U \in \mathscr{S}$或一个不同的（无序）二元组UV；对于每个UV，有向箭头为$U \leftarrow UV \rightarrow V$。$M$的对象是每个$U$对应的（$\mathscr{C}U$、$\mu_U$），以及每个不同的（无序）二元组$U$、$V \in \mathscr{S}$对应的（$\mathscr{R}_{UV}$、$\mu_U \times \mu_V$）；粘合映射由（1-Lipschitz）逐因子投影$\mathscr{C}U \leftarrow \mathscr{R}_{UV} \rightarrow \mathscr{C}V$给出。注意，这些粘合映射一致地满足 CMP。

现在将这一框架应用于层次双曲空间。这里给定一个拟测地空间 $\mathscr{X}$、一族 $\{\mathscr{C}\mathrm{U}\}_{U\in\mathscr{S}}$ 的 δ–双曲空间（其中 $\delta \geqslant 0$），以及一族一致粗利普希茨的投影 $\{\lambda_U\colon \mathscr{X} \rightarrow \mathscr{C}\mathrm{U}\}_{U\in\mathscr{S}}$。指标集 $\mathscr{S}$ 配备了正交关系 $\perp$。层次双曲空间公理断言，两两投影 $\lambda_U \times \lambda_V$ 在一致误差范围内可经由某种两两约束 $\mathscr{R}_{UV} \subseteq \mathscr{C}\mathrm{U} \times \mathscr{C}\mathrm{V}$ 分解：当 $\mathrm{U} \perp \mathrm{V}$ 时，不存在约束；当 $\mathrm{U} \not\perp \mathrm{V}$ 时，它们满足 Behrstock 不等式或有界测地像性质。由于空间 $\mathscr{C}\mathrm{U}$ 一致双曲，我们可以为其赋予一致粗中位数 μ_U；具体而言，令 $\mu_U(\mathrm{x}_U、\mathrm{y}_U、\mathrm{z}_U)$ 为以 x_U、y_U、$\mathrm{z}_U \in \mathscr{C}\mathrm{U}$ 为顶点的测地三角形的任意一个 δ–中心。每个 $\mathscr{R}_{UV}$ 要么等于 $\mathscr{C}\mathrm{U} \times \mathscr{C}\mathrm{V}$，要么满足一致误差下的有界粗区间条件，因此由引理 5.1，它们都具有由 $\mu_U \times \mu_V$ 诱导的一致粗中位数。由此，我们得到一个形式如上所述的一致余极限粗中位数图表 M : J $\rightsquigarrow$CMed。

推论 5.2。 设 $\mathscr{X}$ 是一个层次双曲空间，M: J $\rightsquigarrow$ **CMed** 是如上所述相应的一致余极限粗中位数图表。那么存在一个定义在 $\mathscr{X}$ 上的粗中位数 ν，在接近性意义下唯一，使得 λ: $(\mathscr{X}, \nu)M$ 是一个泛拟测地一致连续粗中位数锥。

证明。 根据 [Tan，定理 6。7], 存在一个泛拟测地线 u.c. 锥 λ: $\mathscr{X}\hat{}M$其腿由 λ_U 和 $\lambda_U \times \lambda_V$ 给出。结合定理 4.4 即得结论。 □

参考文献

[BHS17a] J. A. Behrstock, M. F. Hagen and A. Sisto, 层级双曲空间 I：立方群的曲线复形, Geom. Topol. **21** (2017), no. 3, 1731–1804; MR3650081[BHS19] J. A. Behrstock, M. F. Hagen and A. Sisto, 层级双曲空间 II：组合定理与距离公式, Pacific J. Math.**299**(2019), no. 2, 257–338;MR3956144[BM11] J. A. Behrstock and Y. N. Minsky, 映射类群中的质心与快速衰减性质, 《伦敦数学会杂志》 (2) **84** (2011), no. 3, 765–784; MR2855801

[Bow13a] B. H. Bowditch, 粗中位数空间与群, Pacific J. Math. 261 (2013), no. 1, 53–93; MR3037559[Bow13b] B. H. Bowditch, 粗中位数空间在相对双曲性下的不变性, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 154 (2013), no. 1, 85–95; MR3002585[Bow16] B. H. Bowditch, Teichmüller度量的大尺度秩与刚性, J. Topol. 9 (2016), no. 4, 985–1020; MR3620458[Bow18] B. H. Bowditch, 映射类群的大尺度刚性性质, Pacific J. Math. 293 (2018), no. 1, 1–73; MR3724237[Bow19] B. H. Bowditch, 粗中值空间札记, 收录于《超越双曲性》，3–24，London Math. Soc. Lecture Note Ser., 454, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2019; MR3966604[Fio24] E. Fioravanti, 保持粗中值结构的自同构, Geom. Topol. 28 (2024), no. 1, 161–266; MR4711836[FS] E. Fioravanti and A. Sisto, 关于粗中值结构的唯一性, 预印本，arXiv:2502.13865, 2025[Man] G. Mangioni, 短层级双曲群 I：不可数多个粗中值结构, 预印本，arXiv:2410.09232, 2024[MM99] H. A. Masur and Y. N. Minsky, 曲线复形的几何 I：双曲性, Invent. Math. 138 (1999), no. 1, 103–149; MR1714338[MM00] H. A. Masur and Y. N. Minsky, 曲线复形的几何 II：层级结构, Geom. Funct. Anal. 10 (2000), no. 4, 902–974; MR1791145[NWZ19] G. A. Niblo, N. J. Wright and J. Zhang, 粗中位数空间的四点刻画, Groups Geom. Dyn. 13 (2019), no. 3, 939–980; MR4002223[NWZ21] G. A. Niblo, N. J. Wright and J. Zhang, 粗中值代数：粗中位数空间及其区间的内在几何, Selecta Math. (N.S.) 27 (2021), no. 2, Paper No. 20, 50 pp.; MR4241161[Sis19] A. Sisto, 什么是层级双曲空间？, 收录于《超越双曲性》，117–148，London Math. Soc. Lecture Note Ser., 454, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2019; MR3966608[SW17] J. Špakula and N. J. Wright, 粗中位数与性质A, Algebr. Geom. Topol. 17 (2017), no. 4, 2481–2498; MR3842848[Tan] R. Tang, 度量Rips过滤、通用拟测地锥与层级双曲空间, 预印本，arXiv:2511.16463, 2025[Zei16] R. Zeidler, 粗中值结构与来自Kazhdan群的同态, Geom. Dedicata 180 (2016), 49–68; MR3451456

中国江苏省苏州市苏州工业园区仁爱路111号，西交利物浦大学纯数学系，邮编215123

robert.tang@xjtlu.edu.cn