arXiv:2603.15303v1 [math.DG] 16 Mar 2026

可构造函数与广义赋值上的运算

ANDREAS BERNIG 和 VADIM LEBOVICI

ABSTRACT. Alesker 的广义赋值理论统一了实解析流形上的光滑测度与可构造函数，并扩展了函数和测度上的经典运算。Alesker 证明，在严格的假设下，这些运算与可构造函数上的层论运算一致，但一些关键方面仍停留在猜想层面。本文通过证明，在较弱的横截性假设下，这两种方法在可构造函数上的结果确实一致，从而弥合了这一差距。我们的证明基于与特征循环上相应运算的比较。作为应用，我们将加性运动学公式从凸体推广到欧几里得空间中的紧半解析集，并在三维球面上推导出新的运动学公式。

CONTENTS

1. 引言 1
2. 预备知识 7
3. 亚解析流的波前集 18
4. 外积 19
5. 拉回与乘积 23
6. 推前与卷积 28
7. 加法与乘法运动学公式 33
参考文献 45

1. INTRODUCTION

1.1. **背景**。 赋值是在某个固定环境空间的足够规则的子集上定义的有限可加测度。赋值理论源于 Dehn 对希尔伯特第三问题的解答，该问题探讨多面体的剪刀全等问题 [31]，并由 Hadwiger 首次加以形式化并系统研究 [41]，研究对象为欧几里得空间中的紧凸子集。在一系列论文中，Alesker [3, 4, 6, 13] 将赋值理论推广至流形，建立了一套流形上的赋值理论，作为凸几何经典赋值理论的推广。这些光滑赋值涵盖了积分几何中的经典工具，例如光滑测度、欧拉示性数以及内在

VL 的部分研究得到 FSMP 的资助，另一部分得到 EPSRC EP/R018472/1 的资助。AB 得到 DFG 资助项目 BE 2484/10-1 的支持。

体积。从形式上说，它们可以用一对微分形式来描述：流形上的一个n-形式，以及其余球丛上的一个 $(n-1)$-形式 [15]。

Alesker 和 Fu 的一项重要突破 [13] 是发现了光滑赋值空间上的乘积结构；该结构与 [6], 中引入的积分泛函相结合，给出了一个完美的双线性配对。这种所谓的$Alesker\text{-}Poincar\acute{e}$ 对偶尤其意味着，光滑流形 X 上光滑赋值的空间 $\mathcal{V}^{\infty}(X)$ 稠密嵌入于紧支撑光滑赋值空间的对偶空间 $\mathcal{V}^{-\infty}(X)$ 中，因此可以合理地将该对偶空间的元素称为广义赋值 [6]。 [16]中已证明，广义赋值可以描述为一对流：流形上的一个 n-流，以及其余球丛上的一个 $(n-1)$-流。

虽然目前尚不清楚光滑赋值可取值的最一般集合族，但 Alesker 在 [6] 中证明，当流形 X 为实解析流形时，该集合族包含次解析集。次解析集具有良好的驯性：它们可以分层（甚至满足 Whitney条件），具有局部有限个连通分支，等等，参见 [42, 46]。

Alesker 构造了一个像序列稠密的嵌入 [9]:

$$[-] : \mathrm{CF}(X) \otimes \mathbb{C} \hookrightarrow \mathcal{V}^{-\infty}(X),$$

其中，$\mathrm{CF}(X)$ 是 X上的可构造函数群，即由满足以下条件的函数 $\varphi : X \to \mathbb{Z}$ 构成的群：对所有 $m \in \mathbb{Z}$，集合 $\varphi^{-1}(m)$ 都是次解析的，并且族 $\{\varphi^{-1}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}}$ 局部有限。该嵌入是利用可构造函数的特征循环 [34, 46] 这一概念构造的；特征循环是流形余切丛上的一个 n-流，很容易将其转化为一对定义广义赋值的流。

实解析流形上的特征循环群和可构造函数群都与该流形上可构造层的 Grothendieck 群同构，Kashiwara [45, 46] 已证明这一点。此外，Schapira 在 [58] 中证明，这种群同构将层上的基本运算（外积、拉回、推前、Poincar´e-Verdier 对偶）转化为可构造函数上的丰富拓扑运算。值得注意的是，通过实解析映射推前可构造函数，相当于按照欧拉示性数对映射的纤维上的可构造函数积分。这些运算在数学的各个领域都有重要应用，从代数几何中将 Akbulut-King数推广到实半代数集 [47], ，到引入满足强有力单射定理 [30, 36, 51, 57]的拓扑积分变换，并将其用于应用几何中的形状描述 [29]。

Alesker 在 [6] 中为光滑赋值和广义赋值定义了 Poincar´e-Verdier 对偶，并在后续论文 [7] 中定义了外积、拉回和推前。这些运算推广了测度论中的一些著名运算，例如光滑测度的经典推前。

此外，这些运算可以结合起来，在广义赋值上诱导出丰富的代数结构。具体而言，广义赋值的乘积 [11] 可以定义为外积经对角嵌入的拉回，而卷积 [12] （例如，在欧几里得空间上）则定义为外积经加法映射的推前。Fu 和第一作者在 [19]中证明，这些运算与积分几何中著名的运动学公式互为对偶 [28], ，这一结果是他们在复空间上建立显式运动学公式的关键 [20, 21]。

正如本引言的结构所示，广义赋值上的运算是基于这样的预期发展起来的：它们也能推广层论中可构造函数上的运算。Alesker 证明了这一点适用于 Poincar´e–Verdier 对偶、外积，以及在下文详述的相当严格的假设下的拉回和推前 [7]。

1.2. 贡献。 本文表明，在温和的横截性假设下，广义赋值上的运算限制到可构造函数时，等同于层论所给出的运算。我们在下文陈述结果，并将精确定义留待相关章节给出。

由于与可构造函数相关联的广义赋值是借助特征循环定义的，要证明我们的结果，只需将特征循环上的运算——将其视为 Borel-Moore 同调类，并以微局部层论的术语在 [46]中描述——转化为几何测度论中作用于表示广义赋值的流的经典运算。为此，我们采用 Schmid 和 Vilonen [59]对闭流运算的描述，该描述以 Borel-Moore 同调类上的经典运算为基础。关键在于，特征循环既可自然地视为 Borel-Moore 同调类，也可视为流；而在温和的横截性假设下，同调类上的经典运算可以转化为流上的经典运算。

拉回与乘积。 我们的第一个结果涉及通过实解析映射 f 对广义赋值 f^* 的拉回。对于淹没，以及满足某些横截性假设 [7] 的浸入，该拉回有定义。对于可构造函数，拉回不过是预复合。我们在可构造函数满足横截性假设的条件下证明这一结果；该假设保证拉回在广义赋值的意义下有定义。

定理 1。 设 $f : X \to Y$ 是实解析流形之间的实解析映射，并设 $\psi \in \mathrm{CF}(Y)$。若

(i) f 是淹没，或 *(ii)* f 是浸入，且与 Y 上一个惠特尼分层的各分层横截；在该分层上， ψ 为常值，

那么，拉回 $f^*[\psi] \in \mathcal{V}^{-\infty}(X)$ 是良定义的，且 $f^*[\psi] = [f^*\psi]$。

这一结果在 [7, 命题 3.3.4 和 3.5.12] 中，在带角紧子流形的示性函数这一情形下得到了证明。带角子流形未必是次解析的，但它们具有任意次解析子集所不具备的正则性。具体而言，Alesker 在带角子流形情形下证明定理1 时，关键依赖于带角子流形横截交的局部平凡性。对于次解析集而言，这一性质显然并不成立，解析族中存在非微分同胚奇点便是明证；参见 [37, 第二章，例 2。1]我们利用 Schmid 和 Vilonen 对特征闭流上的运算的描述给出的证明，绕开了这一障碍。

结合 Alesker 关于外积的限制的结果 [7, 断言 2.1。11], 我们关于拉回的结果意味着，对 [11]中定义的广义赋值乘积的限制也有类似结果。该结果适用于横截意义下的可构造函数：存在流形的两个惠特尼分层，其分层彼此横截，且可构造函数分别在其上为常数；参见第 5.3节。

推论 2。 若 φ、$\psi \in \mathrm{CF}(X)$ 横截，则 $[\varphi]\cdot[\psi] = [\varphi\cdot\psi]$。

该结果将与次解析集相关的广义赋值上的乘积，与此类集合的交联系起来。这是带角子流形已知结果的一个类似结论 [11, 定理 5]；该定理的证明与拉回的情形一样，依赖于此类子流形横截交的局部平凡性。

推前与卷积。广义赋值的推前 f_* 在以下情形下有定义：实解析映射 f 是 f 浸入，或者 f是淹没，在 φ的支集上为真映射，且其微分相对于 φ的法循环的波前集满足横截性假设；参见 [7]。为证明关于推前的结果，我们首先需要假设 f 的微分与定义法循环的分层横截。然而，与拉回不同，仅有这一条件并不能保证推前在广义赋值的意义下有定义。因此，我们还要求法循环的分层是角分层，即法循环的波前集包含于各分层的余法丛之并中；参见定理3.3 和定理6.2。我们在第3 节利用消奇异化证明，次解析流总存在角分层。

定理 3. 设 $f\colon X \to Y$ 是实解析流形之间的实解析映射，且 $\varphi \in \mathrm{CF}(X)$。若

(i) f 是浸入，或 *(ii)* f 是淹没，在 φ 的支集上为真，且其微分横截于定义 φ的法循环的角 *Whitney* 分层，

那么，$f_*\varphi \in \mathrm{CF}(Y)$ 和 $f_*[\varphi] \in \mathcal{V}^{-\infty}(Y)$ 是良定义的，并且 $f_*[\varphi] = [f_*\varphi]$。

为了证明我们的结果，我们首先对 [7] 关于浸入所诱导的广义赋值推前表达式的一个公式作出修正。在这种情形下，推前是零延拓，证明并无太大困难。有趣的情形是淹没，此时可构造函数的推前是一个非平凡操作，即关于欧拉示性数沿纤维积分。在 [7],Alesker 证明了定理3 ，但附加了严格限制：映射 f是欧几里得空间之间的线性投影，且函数 φ是某个紧凸子集的示性函数，该子集具有光滑边界和严格为正的高斯曲率。其证明基于一个逼近过程，而该过程关键依赖于对子集所作的严格假设。相比之下，我们运用 Schmid 和 Vilonen 对特征循环上运算的描述，再次绕过了这一障碍。

利用推前，可得到 [12] 中定义的广义赋值卷积的类似结果。回顾李群理论（例如参见 [62, 第二部分，第四章， 5]节）可知，若 G 是一个在光滑流形 X 上传递作用的李群，则 G 和 X 自然具有唯一的实解析结构，且 G 在 X 上的作用是实解析的。在这种情况下，可以将卷积（可构造函数或广义赋值的卷积）定义为外积经作用 $-*-$ 的推前。注意，由于传递性，该作用是一个淹没。结合 Alesker 关于外积的结果，定理 3 推出：

推论 4. 设 G 是一个在光滑流形 X 上传递作用的李群。对于 $\varphi \in \mathrm{CF}(G)$ 和 $\psi \in \mathrm{CF}(X)$，有：

$$[\varphi] * [\psi] = [\varphi * \psi],$$

只要作用 $a:\ G \times X \to X$ 和 $\varphi \boxtimes \psi$ 满足定理 3的假设。　　*(ii)*

这一结果将广义赋值的卷积与可构造函数的卷积联系起来，而后者似乎是闵可夫斯基和这一概念的恰当替代。

加法与乘法运动学公式。 设 V 是一个 n 维欧几里得向量空间， G 是 O(n) 的一个闭子群，且在单位球面上传递作用。我们在 G 上赋予 Haar 概率测度，并在 $G := G \ltimes V$上赋予 Haar 概率测度与勒贝格测度的乘积。

凸体上连续、平移不变且 G不变的赋值空间记作 Val^G，它是有限维的 [2]。设 $\mu_1, \ldots, \mu_N$ 是该空间的一组基。那么，对于任意凸体 K， $L \subset \mathbb{R}^n$ 都有加性运动学公式：

$$\int_G \mu_i(K + gL)dg = \sum_{k,l} c^i_{k,l} \mu_k(K)\mu_l(L),$$

其中常数为 $c^i_{k,\ l}$ 这些常数可通过模板方法或代数积分几何来确定（至少在一些重要情形下如此）。事实证明，在关于 G 的假设下，Val^G 中的元素都是光滑赋值，并且可以在紧支撑可构造函数上求值。正如上文所述，凸体的闵可夫斯基和的正确替代是可构造函数的卷积积。此外，我们可以利用关于卷积的结果，证明可构造函数的加性运动学公式：

定理 5。若 $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{CF}(V)$ 具有紧支撑，则使用与上文相同的常数 $c^i_{k,l}$，我们有：

$$\int_G \mu_i(\varphi_1 * g_*\varphi_2)dg = \sum_{k,l} c^i_{k,l}\mu_k(\varphi_1)\mu_l(\varphi_2).$$

该定理的证明使用了一个从紧支撑广义赋值空间到平移不变广义赋值空间的映射；此前，在光滑赋值 [12] 以及多胞体 [17]这两种特殊情形中都曾考察过该映射。一个难点是证明，对于几乎所有 $g \in G$，与 φ_1 和 $g_*\varphi_2$ 相关的广义赋值都是横截的，因此它们的卷积积存在。

我们注意到，也许可以采用一种更经典的方法来证明该定理，即利用不变赋值的 Hadwiger 型刻画。在可构造函数的背景下，针对 $G = \mathrm{SO}(n)$ [14, Lemma 12], 确实有人提出了这样一种 Hadwiger 型定理，但对于运动学积分而言，余法连续性这一概念可能很难验证。此外，我们的方法还具有适用于其他传递群的优点，也适用于李群 S^3 和 SO(3)。这两个群是仅有的维数为 ≥ 2 且双不变光滑赋值空间为有限维的紧致连通李群 [18, Thm. B]。

我们给出 S^3 的公式，SO(3) 的情形与此类似。SO(4) 不变光滑赋值空间的一个自然基由克罗夫顿赋值组成，ν_i 对 $i \in \{0,1,2,3\}$ 定义如下：

$$\nu_i(X) = \int_{\mathrm{Geod}_{3-i}(S^3)} \chi(X \cap E)dE,$$

其中，$\mathrm{Geod}_{3-i}(S^3)$ 是由 SO(4) 不变概率测度赋予的、S^3 中维数为 $(3-i)$ 的全测地子流形构成的流形。

定理 6. 存在常数 $d^i_{k,\ l}$ 使得对于 $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{CF}(S^3)$，以下乘性交运动学公式成立：

$$\int_{\mathrm{SO}(4)} \nu_i(\varphi_1 * g_*\varphi_2)dg = \sum_{k,l} d^i_{k,l}\nu_k(\varphi_1)\nu_l(\varphi_2).$$

令 $m(\nu_i) = \sum d^i_{k,\ l}\nu_k \otimes \nu_l$，我们得到以下显式公式

$$
\begin{aligned}
m(\nu_0) &= \nu_0 \otimes \nu_0, \\
m(\nu_1) &= \nu_0 \otimes \nu_1 + \nu_1 \otimes \nu_0 - (\nu_1 \otimes \nu_2 + \nu_2 \otimes \nu_1) + 2(\nu_2 \otimes \nu_3 + \nu_3 \otimes \nu_2), \\
m(\nu_2) &= \nu_0 \otimes \nu_2 + \nu_2 \otimes \nu_0 + \frac{\pi^2}{8}\nu_1 \otimes \nu_1 - \frac{\pi^2}{4}(\nu_1 \otimes \nu_3 + \nu_3 \otimes \nu_1) \\
&\quad - 2\nu_2 \otimes \nu_2 + \frac{\pi^2}{2}\nu_3 \otimes \nu_3, \\
m(\nu_3) &= \nu_0 \otimes \nu_3 + \nu_3 \otimes \nu_0 + \frac{1}{2}(\nu_1 \otimes \nu_2 + \nu_2 \otimes \nu_1) - (\nu_2 \otimes \nu_3 + \nu_3 \otimes \nu_2).
\end{aligned}
$$

1.3. **论文结构**。 第 2 节介绍本文所用的符号，并回顾 Borel-Moore 同调、流、可构造函数、特征闭流和广义赋值的一些预备知识。第 3 节定义亚解析流的角分层，并证明其存在性。为求完整，我们在第 4 节证明广义赋值的外积限制为可构造函数的外积 [7,命题 2.1。11]。第 5 节回顾广义赋值拉回的定义，并证明定理1 和定理 2。第 6 节回顾广义赋值推前的定义，并证明定理 3和定理 4。第 7 节证明平坦空间上可构造函数的加性运动学公式，以及可构造函数的乘性交运动学公式 S^3。

致谢。 第一位署名作者感谢高等科学研究所于2024年在其访学期间提供友好且富有成效的氛围，本研究的大部分工作正是在此期间完成的。他还要感谢 Dan Abramovich、Semyon Alesker 和 Thomas Wannerer 进行的有益讨论。第二位署名作者感谢 Andre Belotto da Silva、Antoine Commaret、Jean-Marc Delort、Pierre Schapira 和 Shu Shen 进行的有益讨论。

2. Preliminaries

本节将介绍本文所用的符号，并回顾全文中使用的已知定义和结果。

2.1. **记号**。 除非另有明确说明，流形均为光滑且无边界。我们采用以下约定。

- 若 V是一个向量空间，且 V^* 是其对偶空间，则对于所有 $\alpha \in V^*$和 $x \in V$，我们将自然配对记为 $\langle \alpha,\ x\rangle = \langle x,\ \alpha\rangle = \alpha(x)$。
- X^n 对于一个 X 维的光滑流形 n。
- 若 X 是一个光滑流形，且 Y 是 X的子流形，我们将 Y的余法丛记为 $T^*_Y X \subset T^*X$。

•若 $f:\ X \to Y$ 是光滑流形之间的光滑映射，我们考虑如下经典图表：

$$T^*X \xleftarrow{df} X \times_Y T^*Y \xrightarrow{\tau} T^*Y\ . \tag{2.1}$$

• 给定流形 X上的实向量丛 E，我们将其零截面记为 0_X，或简记为 0。此外，我们将 $\mathbb{P}_+(E)$ 记为 E 的定向射影化，即商空间 $(E\setminus 0_X)/\mathbb{R}_{>0}$，其中 $\mathbb{R}_{>0}$ 是作用于纤维上的正实数乘法群，也就是说，对于任意 $\lambda\in\mathbb{R}_{>0}$，有 $(p,\ \xi)\mapsto(p,\ \lambda\xi)$，且 $(p,\ \xi)\in E\setminus 0_X$。我们将 $(p,\ [\xi])$ 记为 $(p,\ \xi)$ 的等价类。

• 当 E 是光滑流形 X 的余切丛 T^*X 时，我们将 X 的余球丛记为 $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_+(T^*X)$，并将典范映射 $\mathbb{P}_X \to X$ 记为 π_X。

• X 上的复值微分 k形式空间记作 $\Omega^k(X)$。

• 子集 $S\subset X$ 的示性函数记作 $\mathbf{1}_S$。
• X 中 S 的内部记作 $\mathrm{Int}(S)$。
• 对于实解析流形，我们总是假设其分层是次解析的。

2.2. 定向。 为使记号尽可能简洁，我们假设流形均已定向。若不选择定向，则 X和 $\mathbb{P}_X$ 上的法循环、特征循环及微分形式都必须用 X的定向丛的一个截面进行扭曲。经过这一修正，所有公式和陈述在非定向情形下仍然成立。

如 [7, 11], 中所述，我们采用以下关于定向的约定。

边界。 若 X 是一个带边界的定向流形，则其边界 ∂X 带有斯托克斯定向 [39, 第 3 节2]。

商。 设 G 是一个定向李群，它在定向流形 X上光滑、自由且适当地作用。进一步假设 G 在 X上的作用保持定向。那么，商流形 X/G 是可定向的。我们在 X/G 上赋予如下定向。对任意 $p\in X$，都有一个典范同构 $T_pX \cong T_p(G\cdot p)\oplus T_{\pi(p)}(X/G)$。我们将此作为 X/G的约定，即 $\mathrm{or}(T_p(G\cdot p))\wedge \mathrm{or}(T_{\pi(p)}(X/G)) = \mathrm{or}(T_pX)$。例如，单位球面可以定向为单位球的边界，也可以定向为去掉原点后的欧几里得空间除以正实数乘法群的作用。按照上述约定，这两种定向一致。

交。 设 X 和 Y 是定向流形 Z中的定向子流形。若交 $X\cap Y$横截，则按照第 3.2]节的约定，通过嵌入 $Y\hookrightarrow Z$ 将其定向为 X 的原像。关于定向的这一约定与

[25, 例 11.12] 中的约定一致。为清楚起见，我们在此重述。设 $z \in X \cap Y$。选取 $T_z(X \cap Y)$的一组基。将这组基补充为 $T_z Y$的一组正基。然后，添加 $T_z X$ 中的向量，使得 $T_z(X \cap Y)$所选基后接这些向量构成 $T_z X$的一组正基。根据横截性，由此得到的切向量组是 $T_z Z$的一组基。若其定向为正，则赋予 $X \cap Y$ 以最初选取的基所确定的定向；否则，赋予其相反的定向。

纤维积。 设 $f\colon X \to Z$ 和 $g\colon Y \to Z$ 是两个定向流形之间的光滑映射，其中 X 和 Y 至多有一个带边界，且 Z 无边界。进一步假设 $f \times g$ 与 $(f \times g)|_{\partial(X\times Y)}$ 横截于对角线 $\Delta_Z \subset Z \times Z$。那么，定义为 $X \times_Z Y = (f \times g)^{-1}(\Delta_Z)$ 的纤维积 是一个可定向光滑流形，并赋有原像定向 [39, 第 3 节2]。粗略地说，我们的约定使得 $\mathrm{or}(Z) \wedge \mathrm{or}(X \times_Z Y) = \mathrm{or}(X) \wedge \mathrm{or}(Y)$。例如，这些约定与 [1, 第 7 节2]一致；在考虑连续的纤维积时，它们构成一种“结合的”定向选择。特别地，当 $g\colon Y \to Z$ 是一个纤维丛，具有定向底空间 Z、定向纤维 F，且全空间 Y 由局部乘积定向 $U \times F$ 定向，其中 $U \subset Z$ 为开集时，那么拉回丛 $X \times_Z Y$ 上诱导的定向也由 $V \times F$ 的局部乘积定向给出，其中 $V \subset X$ 为开集。

法丛。 如果 Y 是定向流形 X的子流形，则余法丛 $T^*_Y X$ 可通过将其视为 Y 在 X中的任意开管状邻域而获得定向。这一定义的定向是良定义的，因为诱导定向不依赖于构造管状邻域时所采用的辅助黎曼度量的选择。

如果 Y是定向的，则我们对 $T^*_Y X$ 的定向选择以及关于纤维丛定向的约定，会为 $T^*_Y X$的纤维诱导出一个定向。这些纤维带有 $\mathbb{R}_{>0}$ 的作用，并且该作用保持定向，从而为 $\mathbb{P}_+(T^*_Y X)$的纤维以及全空间 $\mathbb{P}_+(T^*_Y X)$赋予定向。

定向爆破。 在上述情形下，沿 Y 对 X 进行定向爆破 $\widetilde{X}$ 的定义见 [7, 第1节2]。与文献同处一样，我们赋予 $\widetilde{X}$以满足典范嵌入 $X \setminus Y \hookrightarrow X$ 保持定向的定向。

2.3. 流。 设 X 是一个 n 维流形（可能带边界）。 X 上光滑且紧支撑的 k-形式空间 $\Omega^k_c(X)$ 具有自然拓扑，其对偶空间是 X 上 k-流的空间 $\mathcal{D}_k(X)$。若 $T \in \mathcal{D}_k(X)$ 且 $\omega \in \Omega^k_c(X)$，则记 $\langle T, \omega\rangle$ 或 $\int_T \omega$ 表示自然配对。后一种记法的由来是：定向的 k 维闭子流形 $Y \subset X$ 通过 $\omega \mapsto \int_Y \omega$ 定义一个流 $[\![Y]\!]$。流 T 的边界 ∂T 定义为 $\int_{\partial T} \omega = \int_T d\omega$。显然 $\partial[\![Y]\!] =$

$[\![\partial Y]\!]$ 由斯托克斯定理可得。若流 T 满足 $\partial T = 0$，则称其为闭流。流的支集按显然的方式定义。

流的拉回和推前分别与微分形式的推前和拉回互为对偶，只要后两者有定义。特别地，我们可以定义流沿映射 $f: X \to Y$ 的推前，其中该映射在流的支集上是真映射；还可以定义沿任意纤维丛映射 $f: X^n \to Y^m$的拉回。更确切地，若 $\omega \in \Omega^k_c(X)$，则称为 推前 $f_*\omega \in \Omega^{k+m-n}_c(Y)$，也称为 沿纤维积分 [24], ，并由下式唯一确定：

$$\int_Y \alpha \wedge f_*\omega = \int_X f^*\alpha \wedge \omega, \quad \alpha \in \Omega^{n-k}(Y).$$

在这种情况下，流 $T \in \mathcal{D}_k(Y)$ 的拉回由 $\langle f^*T, \omega\rangle = \langle T, f_*\omega\rangle$ 给出，其中任意 $\omega \in \Omega^{k+n-m}_c(X)$。

更一般地，流 T 沿光滑映射的拉回，需要满足与 T 相关的闭锥形子集 $\mathrm{WF}(T) \subset T^*X \setminus 0_X$的一些条件，该子集称为其波前集 [44, 55, 56]。这里我们不回顾波前集的定义，而只介绍本文中所使用的几个关键结果，更多细节请参阅 [44, 第 8]章和 [17, 第 2.2] 节。如果 $\Gamma \subset T^*X \setminus 0_X$ 是一个闭锥形子集，我们用 $\mathcal{D}_{k,\Gamma}(X)$ 表示满足 $\mathrm{WF}(T) \subset \Gamma$的、位于 X 上的 k-流空间。回顾（2.1），并类似地记 $df|_{\partial X}: (\partial X) \times_Y T^*Y \to T^*(\partial X)$。

命题 2.1 ([44, 定理 8.2。4])。 设 $f\colon X^n \to Y^m$ 是定向光滑流形之间的光滑映射，其中 X 可能带边界，而 Y无边界。设 $\Gamma \subset T^*Y \setminus 0_X$ 是一个闭锥形子集，满足：

(i) 对所有带有 $\tau(x,\eta) \in \Gamma$的$(x,\eta) \in X \times_Y T^*Y$，均有 $df^*\eta \neq 0$;

(ii) 对所有带有 $\tau(x,\eta) \in \Gamma$的$(x,\eta) \in \partial X \times_Y T^*Y$，均有 $(df|_{\partial X})^* \eta \neq 0$。

于是，记 $f^*\Gamma := df\left(\tau^{-1}(\Gamma)\right)$和 $\Gamma' = (f^*\Gamma + T^*_{\partial X}X) \setminus 0_X$，则存在唯一的序列连续映射

$$f^*\colon \mathcal{D}_{k,\Gamma}(Y) \to \mathcal{D}_{k+n-m,\Gamma'}(X)$$

将光滑形式的拉回推广到流，这称为流的拉回。

两个流 S 和 T 在 X 上的交 $S \cap T$，定义为通过对角嵌入 δ 将 X 上的两个流的外积拉回所得的结果 $X \hookrightarrow X \times X$，只要该操作有定义。

我们称定向光滑流形的图表为：

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{h'} & Y \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ X & \xrightarrow{f} & Z \end{array} \tag{2.2}$$

当 $W \cong X \times_Z Y$ 为定向流形时，这是一个 笛卡尔方块 。在这种情况下，我们有以下基变换公式：

引理 2.2 ([33, 引理 1。10])。 设 $g\colon\ Y \to Z$ 为一个纤维丛，并考虑 (2.2)中的一个笛卡尔方块。若 f 在 $T \in \mathcal{D}_k(X)$的支集上为真，则 $g^* f_* T = h'_* h^* T$。

2.4. Borel-Moore 同调。若 X^n 是光滑流形，我们用 $H_k^{\mathrm{BM}}(X)$ 表示其 k 阶 Borel-Moore 同调 $\mathbb{C}$ 向量空间，可利用该流形的对偶化复形 [46, Def. 3.1.16] 或复系数局部有限奇异链的链复形 [26, Cor. V.12.21] 来定义。我们用 $C_k^{\mathrm{BM}}(X)$ 表示复系数局部有限奇异 k链的向量空间，并用 ∂_k : $C_k^{\mathrm{BM}}(X) \to C_{k-1}^{\mathrm{BM}}(X)$ 表示相应的边界算子。因此有 $H_k^{\mathrm{BM}}(X) :=\ker\partial_k/\mathrm{im}\ \partial_{k+1}$。

若 $f : X \to Y$ 是光滑映射，且在 $C \in H_k^{\mathrm{BM}}(X)$ 的支集上为真映射，则推前 $f_* C \in H_k^{\mathrm{BM}}(Y)$ 可按显然的方式定义为由 f 将定义 C 的奇异链映射所得。

Borel-Moore 同调类的拉回通过庞加莱对偶性定义；参见 [25, 第 VI 节11], [59]。设 X 定向，并令 $Z \subset X$ 为一个闭子集。我们用 $H_Z^k(X) = H^k(X,\ X \setminus Z)$ 表示 X 上支集在 Z中的k次上同调类群；例如参见 [35, 第 B 节2]。于是存在一个庞加莱对偶同构 [46, 命题 3.36]:

$$\mathrm{PD} : H_Z^k(X) \to H_{n-k}^{\mathrm{BM}}(Z).$$

若仅假设 Z 局部闭，则 $H_Z^k(X)$ 定义为 $H_Z^k(X) = H^k(U,\ U \setminus Z)$，其中 U 是 X 的一个开子集，包含作为闭子集的 Z；参见 [46, 定义 2.38]。

设 Y^m 为定向光滑流形， $Z' \subset Y$为一个闭子集。若 $f\colon\ X \to Y$是一个光滑映射，我们用 $f^*\colon\ H_{Z'}^k(Y) \to H_{f^{-1}(Z')}^k(X)$ 表示上同调类的经典拉回。于是， Z' 上的 Borel-Moore 同调类的拉回 定义为以下复合:

$$f^* : H_k^{\mathrm{BM}}(Z') \xrightarrow{\mathrm{PD}^{-1}} H_{Z'}^{m-k}(Y) \xrightarrow{f^*} H_{f^{-1}(Z')}^{m-k}(X) \xrightarrow{\mathrm{PD}} H_{k+n-m}^{\mathrm{BM}}(f^{-1}(Z')).$$

以下引理由层的基变换公式 [46,命题 3.1.9] 得出。

引理 2.3. 若有以下定向光滑流形的图表:

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{h'} & Y \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ X & \xrightarrow{f} & Z \end{array},$$

是一个笛卡尔方块，并且如果 f 在 $C \in H_k^{\mathrm{BM}}(X)$的支集上是真映射，则 $g^* f_* C = h'_* h^* C$。

2.5. **次解析流与 Borel-Moore 同调**。 在实解析流形的背景下，我们将讨论次解析流。关于这一主题的更多信息，请参阅[42] ；关于次解析集的更多细节，请参阅 [46, 第 8] 章。

设 X 为实解析流形（可能带有边界）。若 k-流 T在 X 上满足以下条件，则称其为 次解析 流：存在 X 的一个局部有限分层 $\{S_\alpha\}_{\alpha\in A}$，以及一个复重数 m_α ，并为每个 k维分层 S_α 选定一个定向，使得 $T = \sum_{\alpha\in A_k} m_\alpha [\![S_\alpha]\!]$，其中 A_k 为维数为 k的分层的指标集。在这种情况下，称分层 $\{S_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 为 定义 T。我们用 $\mathcal{D}_k^{\mathrm{sub}}(X)$表示 X 上的次解析 k-流空间；若 $S \subset X$ 是闭亚解析子集，则用 $\mathcal{D}_k^{\mathrm{sub}}(S)$表示支集包含于 S的流所构成的子空间。

Hardt 的三角剖分定理（[43], [46, 命题 8.2.5]）给出了亚解析流链复形与带复系数的局部有限奇异链链复形之间的一个同构；参见 [42] 或 [46, 定理 9.2.10]。此外，正如下述 Hardt 提出的两个引理所示，在适当的条件下，这个同构与推前和拉回相容 [42]；另见 [50, 附录 B]。下文中，我们用 T 表示与亚解析闭流 T相关联的 Borel-Moore 同调类。

引理 2.4。 设 $T \in \mathcal{D}_k^{\mathrm{sub}}(X)$ 是一个闭流，且 $f\colon X \to Y$ 是定向实解析流形之间的实解析映射，并且在 $S = \mathrm{supp}(T)$上为真映射。那么，推前 f_*T 是一个支集位于 $f(S)$上的亚解析 k-流，并且 $f_*T = f_*T$属于 $H_k^{\mathrm{BM}}(f(S))$。

关于拉回，文献 [42] 证明，在适当的横截性假设下，亚解析流与嵌入子流形上的积分流之交是良定义的，并且对应于 Borel-Morel 同调类上的经典交截理论。这种亚解析流的交截理论是借助切片理论定义的，但容易验证，按照定理 2.1，切片与纤维嵌入所诱导的拉回相同。因此，我们有：

引理 2.5。 设 $f\colon X^n \hookrightarrow Y^m$ 是定向实解析流形之间的闭嵌入，且 $T \in \mathcal{D}_k^{\mathrm{sub}}(Y)$ 是支集为 $S = \mathrm{supp}(T)$的闭流。假设映射 f 与 Y的惠特尼分层横截，该分层定义了 T。那么，流 T的拉回 f^*T是良定义的，并且 $f^*T = f^*T$属于 $H_{k+n-m}^{\mathrm{BM}}(f^{-1}(S))$。

注意，这条引理的最后一个假设比 [42], 中所述的略强，但足以满足我们的目的。

2.6. **可构造函数**。 正如我们在引言中所述，可构造函数定义为实解析流形 X 上取整数值的函数，并且在 X 的局部有限分层上分片常值。如果 $\varphi\colon X \to \mathbb{Z}$ 是可构造的，那么次解析集分层理论（ [46, 定理 8.3.20, 习题 VIII.12]）保证存在一个

由局部闭且相对紧的次解析子流形 $S_i \subset X$ 对 X 作成的惠特尼分层 $i \in I$，使得 φ 在每个 S_i 上为常值；也就是说，存在 $m_i \in \mathbb{Z}$ 使得：

$$\varphi = \sum_{i \in I} m_i \mathbf{1}_{S_i}. \tag{2.3}$$

由次解析集的基本性质可知，可构造函数在逐点加法和乘法下构成交换环 $\mathrm{CF}(X)$（参见 [46, 第 8 节。2]）。我们还用 $\mathrm{CF_c}(X)$ 表示紧支撑可构造函数构成的子环；对于该子环，和式（2.3）可以取为有限和，且只涉及紧次解析子集。

本文重点讨论可构造函数上的运算，这些运算在复情形中由 [64] 发展，在实解析情形中由 [58] 发展。首先，考虑另一个实解析流形 Y，并令 $\varphi \in \mathrm{CF}(X)$ 和 $\psi \in \mathrm{CF}(Y)$。外积 $\varphi \boxtimes \psi \in \mathrm{CF}(X \times Y)$ 是由 $(\varphi \boxtimes \psi)(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$ 定义的可构造函数，其中任意 $(x, y) \in X \times Y$。此外，若 $f\colon X \to Y$ 是一个实解析映射，则拉回 $f^*\psi \in \mathrm{CF}(X)$ 只需定义为 $f^*\psi = \psi \circ f$。这两种运算都将可构造函数映为可构造函数，这一点同样可由次解析集的众所周知的性质推出。此外，X 上的两个可构造函数的逐点乘积，显然与它们的外积经对角嵌入 $\delta\colon X \hookrightarrow X \times X$拉回后的结果一致。

更复杂的一种运算，是通过实解析映射对可构造函数进行推前。首先，若 $S \subset X$ 是 X中的局部闭相对紧亚解析子集，则记 $\chi(S)$ 为其紧支撑欧拉示性数；参见 [46, 第 9]章。特别地，当 S 是紧集时，$\chi(S)$ 就是通常的欧拉示性数。接下来，紧支撑函数 的积分，若可写成（ $\varphi \in \mathrm{CF_c}(X)$ 的形式（2.3），则为整数：

$$\int_X \varphi \, \mathrm{d}\chi = \sum_{i \in I} m_i \cdot \chi(S_i).$$

最后，若 $f\colon X \to Y$是一个在 $\varphi \in \mathrm{CF}(X)$ 的支集上为真的实解析映射，则对任意 $y \in Y$，定义推前 $f_*\varphi \in \mathrm{CF}(Y)$ 为：

$$f_*\varphi(y) = \int_X \mathbf{1}_{f^{-1}(y)} \varphi \, \mathrm{d}\chi.$$

函数 $f_*\varphi$ 是可构造函数这一事实已在 [46, 第9节7] 中借助层论得到证明，也可视为全局次解析集的 o-极小结构中的细胞分解定理的一个推论 [63, 第4章，(2.10)]。利用这一运算，可以自然地定义可构造函数的卷积。为此，设 G 是一个作用于 X的李群，使得该作用 $a\colon G \times X \to X$ 是实解析的。则卷积，即 $\varphi \in \mathrm{CF}(G)$ 与 $\psi \in \mathrm{CF}(X)$ 的卷积，定义为 $\varphi * \psi = a_*(\varphi \boxtimes \psi)$，只要映射 a 在 $\varphi \boxtimes \psi$的支集上是真映射。

2.7. **特征循环**。设 X^n 为一个定向实解析流形。记 $\mathcal{CL}(X)$为 X的拉格朗日链群，即由锥状局部闭拉格朗日次解析子流形生成的 $C_n^{\mathrm{BM}}(T^*X)$ 的子群。拉格朗日循环群是 $H_n^{\mathrm{BM}}(T^*X)$ 的子群 $\mathcal{L}(X)$，它由满足 $\partial_n C = 0$ 的拉格朗日链 $C \in \mathcal{CL}(X)$ 生成。

构造。对于任意可构造函数 $\varphi \in \mathrm{CF}(X)$，都可以与之对应一个拉格朗日循环 $\mathrm{CC}(\varphi) \in \mathcal{L}(X)$，称为 特征循环，属于 φ；参见 [46,第 9] 章和 [34]。态射 $\mathrm{CC} : \mathrm{CF}(X) \to \mathcal{L}(X)$ 在可构造函数与拉格朗日循环之间诱导出一个同构，并且有显式的逆映射；参见 [45, 定理 8。3], [46, 定理 9.7。11]。这里我们简要回顾其构造。记 $\mathcal{S}$ 为 X 的一个惠特尼分层，使得 φ在每个分层上为常数。记：

$$\Lambda = \bigcup_{S \in \mathcal{S}} T^*_S X.$$

那么，子集

$$\Lambda^\circ = \bigcup_{S \in \mathcal{S}} \left(T^*_S X \setminus \bigcup_{S' \supsetneq S} \overline{T^*_{S'} X} \right)$$

是 T^*X 的一个光滑次解析子集，在 Λ 中开且稠密。记 $\{\Lambda_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 为 Λ° 的连通分支集合。注意，对于每个连通分支 Λ_α，都存在 $S_\alpha \in \mathcal{S}$ 使得 $\Lambda_\alpha \subset T^*_{S_\alpha} X$。 φ的特征循环定义如下：

$$\mathrm{CC}(\varphi) = \sum_{\alpha \in A} m_\alpha [\Lambda_\alpha], \tag{2.4}$$

其中 $[\Lambda_\alpha] \in C_n^{\mathrm{BM}}(\Lambda)$ 和 $m_\alpha \in \mathbb{Z}$ 是某些整数重数，可利用分层莫尔斯理论 [38]在局部定义；参见 [59]。

运算。特征循环上的推前与拉回运算已在 [46]中定义。我们回顾 [59]中介绍的描述。经典图表（2.1）中的映射使我们能够描述可构造函数的推前对其特征循环的影响。

引理 2.6 ([46, 命题 9.4。2], [59, (2.17)])。设 $f\colon X^n \to Y^m$ 是定向实解析流形之间的实解析映射，且 $\varphi \in \mathrm{CF}(X)$ 满足 f在 $\mathrm{supp}(\varphi)$上为真映射。那么 $\tau_* df^* \mathrm{CC}(\varphi) \in H_m^{\mathrm{BM}}(T^*Y)$ 定义良好，并且：

$$\mathrm{CC}(f_*\varphi) = \tau_* df^* \mathrm{CC}(\varphi).$$

对于满足某些横截性假设 [46, 59] 的实解析映射的拉回运算，我们有类似的陈述。复情形下亦见 [54, 第 5]节及 [61, 定理 3.3] 。我们以较为简明的术语回顾 [59]的假设：

定义 2.7. 一个实解析映射 $f\colon X \to Y$ 称为对 横截于 $\psi \in \mathrm{CF}(Y)$（在 [59] 中称为通常非奇异），如果存在 Y 的一个 Whitney 分层，使得 ψ 在每个分层上为常数，且 f 与每个分层横截。

在满足此类横截性条件时，Schmid 和 Vilonen 指出：

引理 2.8 ([46, 命题 9.4。3], [59, (2.20)])。 设 $f\colon X^n \to Y^m$ 是定向实解析流形之间的实解析映射，且 $\psi \in \mathrm{CF}(Y)$ 满足 f 与 ψ 横截。则 $df_*\tau^* \mathrm{CC}(\psi) \in H_n^{\mathrm{BM}}(T^*X)$ 定义良好，并且：

$$\mathrm{CC}(f^*\psi) = df_*\tau^* \mathrm{CC}(\psi).$$

如 [59], 中所述， [46, 命题 9.4.3] 证明所依据的假设比上述横截性假设更一般，但这一结果足以满足我们的需要。

2.8. **广义赋值**。 设 X^n 是一个光滑定向流形，不一定是实解析流形。流形 $\mathbb{P}_X$ 是一个接触流形，在点 $(x,[\xi])$ 处的接触超平面为 $\ker\left(d\pi_X|_{(x,[\xi])}\right)^*\xi$。属于接触平面的向量称为水平向量。若一个微分形式在仅代入水平向量时恒为零，则称其为垂直形式。最后，勒让德循环是一个在垂直形式上取值为零的 $(n-1)$-闭流。注意，我们不假设 T 是可求长的。

我们用 $\mathcal{P}(X)$ 表示带角紧子流形的集合，即在 $\mathbb{R}^n$ 中局部微分同胚于某个象限的紧子集。对于每个 $P \in \mathcal{P}(X)$，我们都可以关联一个法循环 $N(P)$，它是 $\mathbb{P}_X$ 中的积分勒让德循环；例如参见 [7]。

定义在 X 上的光滑赋值 是一个映射 $\mu : \mathcal{P}(X) \to \mathbb{C}$，满足存在 $\phi \in \Omega^n(X)$ 和 $\omega \in \Omega^{n-1}(\mathbb{P}_X)$，使得对所有 $P \in \mathcal{P}(X)$，都有：

$$\mu(P) = \int_P \phi + \int_{N(P)} \omega. \tag{2.5}$$

光滑赋值空间记作 $\mathcal{V}^\infty(X)$。作为空间 $\Omega^n(X) \oplus \Omega^{n-1}(\mathbb{P}_X)$ 的商空间，该空间自然带有 Fr´echet 拓扑。光滑赋值的支集按显然的方式定义，紧支撑赋值空间记作 $\mathcal{V}_c^\infty(X)$。该空间带有一种比诱导拓扑更细的局部凸拓扑，参见 [6, 第 51] 节。任意 $\mu \in \mathcal{V}_c^\infty(X)$ 都可以如式 (2.5) 所示，表示为紧支撑形式 $(\phi,\omega) \in \Omega_c^n(X) \oplus \Omega_c^{n-1}(\mathbb{P}_X)$，参见 [15, 引理 2.3]。光滑赋值的例子包括欧拉示性数、体积（若 X 是黎曼流形），以及在 $\mathbb{R}^n$ 上具有正曲率的光滑参考体所对应的混合体积。

Alesker和Fu [13], 另见 [11],取得的一项重要突破，是引入了一种交换结合乘积结构

定义在 $\mathcal{V}^\infty(X)$ 上，使欧拉示性数成为单位元。此外，它满足一种版本的 Poincar´e 对偶性，即映射

$$\mathcal{V}^\infty(X)\times\mathcal{V}_c^\infty(X)\to\mathbb{C},(\mu_1,\mu_2)\mapsto\int_X\mu_1\cdot\mu_2=(\mu_1\cdot\mu_2)(X)$$

是完美配对 [6, 定理 6.1。1]；另请参见 [15] 以了解另一种证明。因此我们得到一个单射

$$\mathrm{PD}:\mathcal{V}^\infty(X)\hookrightarrow\left(\mathcal{V}_c^\infty(X)\right)^*$$

其像稠密。这引出了以下定义：

定义 2.9 ([6, Definition7.1.1])。 A广义赋值 是拓扑对偶中的一个元素：

$$\mathcal{V}^{-\infty}(X)=\left(\mathcal{V}_c^\infty(X)\right)^*,$$

该空间自然赋有弱拓扑。

广义赋值的支集 以显然的方式定义，紧支撑广义赋值空间记作 $\mathcal{V}_c^{-\infty}(X)$。它具有自然的局部凸拓扑。根据 [6, 命题 7.3.10]，存在一个向量空间同构 $\mathcal{V}_c^{-\infty}(X)\cong\mathcal{V}^\infty(X)^*$。

Br¨ocker 与第一位署名作者 [16] 的一个结果给出了广义赋值的如下描述。

命题 2.10。存在一个闭嵌入 $\mathcal{V}^{-\infty}(X)\hookrightarrow\mathcal{D}_n(X)\oplus\mathcal{D}_{n-1}(\mathbb{P}_X)$，其像为流空间 (C,T)，满足：

(i) T 是一个勒让德循环；

(ii) $\pi_{X*}T=\partial C$。

若 (C,T) 是与 $\zeta\in\mathcal{V}^{-\infty}(X)$ 对应的一对，且 $\mu\in\mathcal{V}_c^\infty(X)$ 由形式 (ϕ,ω) 给出，则

$$\langle\zeta,\mu\rangle=C(\phi)+T(\omega).\tag{2.6}$$

ζ的波前集定义为 $\mathrm{WF}(\zeta)=(\mathrm{WF}(C),\mathrm{WF}(T))$。给定闭锥集 $\Lambda\subset T^*X\setminus 0$ 和 $\Gamma\subset T^*\mathbb{P}_X\setminus 0$，我们用 $\mathcal{V}^{-\infty}_{\Lambda,\Gamma}(X)$ 表示满足 $\mathrm{WF}(\zeta)\subset(\Lambda,\Gamma)$ 的广义赋值 ζ 所成的集合。该空间赋有 H¨ormander 拓扑，参见 [27]。

空间 $\mathcal{V}^\infty(X)$ 也嵌入这个流空间中。若 $\mu\in\mathcal{V}^\infty(X)$ 由形式 (ϕ,ω) 如 (2.5) 所示给出，则根据 [15] 有：

$$C=\pi_{X*}\omega\in C^\infty(X)\subset\mathcal{D}_n(X),\quad T=s^*(D\omega+\pi_X^*\phi)\in\Omega^n(\mathbb{P}_X)\subset\mathcal{D}_{n-1}(\mathbb{P}_X).$$

这里 $D\colon\Omega^{n-1}(\mathbb{P}_X)\to\Omega^n(\mathbb{P}_X)$ 是 Rumin 算子（参见 [53]），而 $s\colon\mathbb{P}_X\to\mathbb{P}_X$ 是对合 $(x,[\xi])\mapsto(x,[-\xi])$。

以下引理将在第 6 节中定理 3 的证明中发挥作用。

引理 2.11. 假设 X 是连通的，且令 $\psi\in\mathcal{V}^{-\infty}(X)$ 为一个广义赋值，满足 $T=0$。那么 ψ 是欧拉示性数的倍数。

证明。由于 $\partial C = \pi_{X*}T = 0$，常值定理 [32, (4.1.7)] 推出 $C = \lambda[\![X]\!]$。如上所述，紧支撑光滑赋值 μ可表示为一对紧支撑形式 (ϕ, ω)。因此，

$$\langle \psi, \mu \rangle = C(\phi) + T(\omega) = \lambda \int_X \phi = \lambda \int_X \mu = \lambda \int_X \chi \cdot \mu = \langle \mathrm{PD}(\lambda\chi), \mu \rangle.$$

□

2.9. 可构造函数作为广义赋值。在 [6], Alesker 将可构造函数群 $\mathrm{CF}(X)$ 嵌入广义赋值空间 $\hookrightarrow \mathcal{V}^{-\infty}(X)$，并将其扩展为一个嵌入 $[-] : \mathrm{CF}(X) \otimes \mathbb{C} \hookrightarrow \mathcal{V}^{-\infty}(X)$，其像在序列意义下稠密 [6,命题 8.2.2]。此嵌入的构造使用了特征循环的构造。根据定理 2.10，与 $\varphi \in \mathrm{CF}(X)$ 相关联的广义赋值 $[\varphi] \in \mathcal{V}^{-\infty}(X)$，使用法循环 $N(\varphi)$ 来描述会更加自然；后者是余球丛 $\mathbb{P}_X$ 上的亚解析 Legendrian $(n-1)$-闭流；参见 [34]。

我们回顾第 [34, 4 节7]中详述的法循环与特征循环之间的关系。根据（2.3），记 $\varphi = \sum_{i \in I} m_i \mathbf{1}_{S_i}$ 为整数 $m_i \in \mathbb{Z}$ 以及 S_i 上的局部闭次解析子集 X。由于 X 是定向的，因此可构造函数 φ 自然可视为一个流 C_φ，它在亚解析子集 n内部对紧支撑微分形式进行积分；这些子集是 S_i 维的，而且该流显然与分解方式无关；所选取的 n满足（ φ ）2.3成立。

记 $q_X : T^*X \setminus 0_X \to \mathbb{P}_X$为商映射， $j_X : T^*X \setminus 0_X \hookrightarrow T^*X$ 为包含映射，我们可以如下定义次解析流 $T \in \mathcal{D}_k(\mathbb{P}_X)$ 的锥化。若 $S \in \mathcal{D}_k^{\mathrm{sub}}(T^*X \setminus 0_X)$ 是由锥形分层定义的次解析流，则根据 [46, Prop. 8.3.8 (i)], ，这些分层在 T^*X 中也都是次解析的，因此 S 自然定义了 T^*X上的一个次解析流，记为 $j_{X*}S$。我们将次解析流 $T \in \mathcal{D}_k^{\mathrm{sub}}(\mathbb{P}_X)$ 的锥化定义为流 $\mathrm{cone}(T) = j_{X*}q_X^*T \in \mathcal{D}_{k+1}^{\mathrm{sub}}(T^*X)$。

采用这些记号，特征闭流与法循环之间的关系由下式给出：

$$\mathrm{CC}(\varphi) = C_\varphi + s_* \,\mathrm{cone}(N(\varphi)), \tag{2.7}$$

其中 s： $T^*X \to T^*X$ 表示在 T^*X 的纤维中乘以 -1。

定义 2.12。与 $\varphi \in \mathrm{CF}(X)$ 相关联的广义赋值 $[\varphi]$ 对应于流对 $(C, T) = (C_\varphi, N(\varphi)) \in \mathcal{D}_n(X) \oplus \mathcal{D}_{n-1}(\mathbb{P}_X)$。

注意，上述嵌入 $[-] : \mathrm{CF}(X) \hookrightarrow \mathcal{V}^{-\infty}$ 的定义与 [8]的符号约定相对应。(X)

例 2.13。设 $\varphi = \mathbf{1}_S$ 为某个亚解析子集 $S \subset X$。广义赋值 $[\varphi] \in \mathcal{V}^{-\infty}(X)$由以下流对表示：$([\![\mathrm{Int}(S)]\!], N(S))$，其中 $\mathrm{Int}(S)$ 表示 S在 X中的内部（当 $\dim(S) < n$时为空）。此外，若 S 是一个紧致带角子流形，那么对于每个 $\mu \in \mathcal{V}_c^\infty(X)$，我们有 $\langle [\varphi], \mu \rangle = \mu(S)$。这启发我们

对于 $\varphi \in \mathrm{CF}(X)$，将 $\langle [\varphi], \mu \rangle$ 记作 $\mu(\varphi)$。具体来说：紧支撑光滑赋值可以作用于可构造函数。

3. Wave front set of subanalytic currents

在考虑亚解析流的拉回时，我们将使用两种横截性概念。一种以实解析映射与定义该流的分层之间的几何横截性来表述，另一种则以波前集来表述。本节中，我们将说明，利用消奇异化，总能对亚解析流的支集进行分层，使其波前集包含于各分层的余法丛之并中。对于这样的分层，第一种横截性概念蕴含第二种。

定义 3.1. 设 T 是 X上的一个亚解析流。若 X 的一个局部有限分层 $\{S_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 定义了 T，并且满足以下条件，则称其为角性的：

$$\mathrm{WF}(T) \subset \bigcup_{\alpha\in A} T^*_{S_\alpha} X \setminus \underline{0}_{S_\alpha}.$$

注意，若给定的分层具有角性，则其任意细化也具有角性。特别地，总可以将一个具有角性的分层细化，使其同时满足 Whitney条件。还需注意，角性在微分同胚下保持不变。

引理 3.2. 若 T_1 是 X_1 上的亚解析流，具有角分层 $\{S^1_\alpha\}_{\alpha\in A}$，且 T_2 是 X_2 上的亚解析流，具有角分层 $\{S^2_\beta\}_{\beta\in B}$，那么乘积分层$\{S^1_\alpha \times S^2_\beta\}_{\alpha\in A,\beta\in B}$ 是 $X_1 \times X_2$上亚解析流 $T_1 \boxtimes T_2$ 的角分层。

证明。 这显然可由包含映射

$$\mathrm{WF}(T_1 \boxtimes T_2) \subset (\mathrm{WF}(T_1) \times \mathrm{WF}(T_2)) \cup (\mathrm{WF}(T_1) \times \underline{0}_{X_2}) \cup (\underline{0}_{X_1} \times \mathrm{WF}(T_2)),$$

见 [44, 定理 8.2。9]。 □

定义 3.3。 若存在 Y 的一个角向惠特尼分层，该分层定义 T，且 f 与每个分层均横截，则称实解析映射 $f\colon X \to Y$ 与亚解析流 $T \in \mathcal{D}^{\mathrm{sub}}_k(Y)$角向横截 。

若 f 与亚解析流 T角向横截，则 f 和 $\Gamma = \mathrm{WF}(T)$满足定理 2.1的假设。现在我们证明角分层总是存在的。

命题 3.4。 任意亚解析流都存在角分层。

我们不知道，假设 f 与某个分层的分层片具有横截性，是否意味着存在具有相同性质的角分层。

定理3.4的证明结合了函子性（定理 3.5）以及 Bierstone 和 Parusi´nski 证明的次解析集全局光滑化（定理3.6）。

引理 3.5。 如果一个次解析流具有角分层，那么它在真实解析映射下的推前也具有角分层。

证明。设 $f\colon X \to Y$ 是实解析流形之间的一个真解析映射，且 T 是 X上的一个次解析流。记 $\mathcal{S} =(S_\alpha)_{\alpha\in A}$ 为定义 T的 X 的一个角分层。必要时对 $\mathcal{S}$ 作细化后，可以考虑 Y 的一个分层 $\mathcal{R} = (R_\beta)^{\beta\in B}$，使得每个 $f^{-1}(R_\beta)$都是 $\mathcal{S}$ 中若干分层的并，且每个限制 $f_{|S_\alpha} : S_\alpha \to R_\beta$ 都是解析淹没；参见例如 [38, 第一部分，第 1.7]节。根据 [40, 第六章，命题 3.9]，有：

$$\mathrm{WF}(f_*T) \subset f_* \mathrm{WF}(T) := \tau\left(df^{-1}\left(\mathrm{WF}\left(T\right) \cup \underline{0}_X\right)\right) \setminus \underline{0}_Y. \tag{3.1}$$

由 $\mathcal{S}$ 是角的这一事实以及 $f_{|S_\alpha} : S_\alpha \to R_\beta$ 是淹没可直接推出，右端在任意 $y \in R_\beta$ 上方的纤维都包含于 $(T^*_{R_\beta}Y)_y$。□

我们只陈述 Bierstone 和 Parusi´nski 结果的一个特例，这已足以满足我们的目的。

定理 3.6 ([22, 定理 1.2])。 设 X 是一个维数为 n 的实解析流形， S 是 X 中维数为 k的闭亚解析子集。那么，~存在一个维数为 n的实解析流形 X，以及一个真实解析~映射 $\varphi : X \to X$，使得 φ 将~个 k维带角子流形的相对内部的不交并同构地映到一个开亚解析子集 $U \subset S$ 上，并且 维$(S \setminus U)$ $< k$。

定理 3.4 的证明。设 T 是 X上的一个亚解析 k-流。我们不妨设 T 是对维数为 k的闭亚解析子集 $S \subset X$ 进行积分所得的流。注意，在此证明中我们不关心定向，因为所证明的结果在改变~符号后保持不变。我们用 U 表示由定理 3.6 给出的 X 的 k维~带角次解析子流形的相对内部的不交并，并沿用~ ~该定理中的记号。对 U进行积分所得的流 T 是对带角子流形进行积分所得的流之和，因此显然~具有角分层。此外，我们断言 $T = \varphi_*T$。事实上，对于任意紧支撑光滑的 k-微分形式 $\omega \in \Omega^k_c(M)$，我们有：

$$\left\langle \varphi_*\widetilde{T}, \omega \right\rangle = \left\langle \widetilde{T}, \varphi^*\omega \right\rangle = \int_{\widetilde{U}} \varphi^*\omega = \int_U \omega = \int_S \omega = \langle T, \omega \rangle .$$

因此，根据定理 T，存在一个角分层3.5。 □

4. Exterior product

在本节中，我们证明广义 Val 的外积限制为可构造函数的外积，正如 [7, 断言 2.111]中所述。

我们沿用 [7, 11]中的记号。设 X_1 和 X_2 为两个实解析流形，并记 $X = X_1 \times X_2$。投影记为 $\widetilde{p}_i\colon X_1 \times X_2 \to X_i$ 对于 $i = 1, 2$。

设 $\mathcal{M}_1 = \{(x_1, x_2, [\xi_1\colon 0])\} \subset \mathbb{P}_X$ 和 $\mathcal{M}_2 = \{(x_1, x_2, [0\colon \xi_2])\} \subset \mathbb{P}_X$.^考虑沿 $\mathcal{M} := \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$ 的定向爆破 $F\colon \mathbb{P}_X \to \mathbb{P}_X$。空间 $\mathbb{P}_X$ 是集合 $\{(x_1, x_2, [\xi_1 \colon\sim \xi_2], [\xi_1], [\xi_2])\}$ 在 $\mathbb{P}_X \times_X (\mathbb{P}_{X_1} \times \mathbb{P}_{X_2})$ 中的闭包。那么，$\mathbb{P}_X$ 是一个维数为 $2(\dim X_1 + \dim X_2) - 1$、带边界的流形，其边界由 $\mathcal{N} := \mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2$ 给出，其中：

$$\mathcal{N}_1 = \{(x_1, x_2, [\xi_1 : 0], [\xi_1], [\eta_2]\},$$
$$\mathcal{N}_2 = \{(x_1, x_2, [0 : \xi_2], [\eta_1], [\xi_2]\}.$$

^映射 $F\colon \mathbb{P}_X \twoheadrightarrow \mathbb{P}_X$ 定义如下：

$$F(x_1, x_2, [\xi_1 : \xi_2], [\eta_1], [\eta_2]) := (x_1, x_2, [\xi_1 : \xi_2]).$$

^此外，我们有一个映射 $\Phi : \mathbb{P}_X \twoheadrightarrow \mathbb{P}_{X_1} \times \mathbb{P}_{X_2}$，定义如下：

$$\Phi(x_1, x_2, [\xi_1 : \xi_2], [\eta_1], [\eta_2]) := (x_1, [\eta_1], x_2, [\eta_2]).$$

最后，我们有显然的映射：

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{P}_{X_1} \times X_2 & \xhookrightarrow{i_1} & \mathbb{P}_X & \xhookleftarrow{i_2} & X_1 \times \mathbb{P}_{X_2} \\ \downarrow{\scriptstyle p_1} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_X} & & \downarrow{\scriptstyle p_2} \\ \mathbb{P}_{X_1} & & X & & \mathbb{P}_{X_2} \end{array}$$

运算 $\boxtimes\colon \mathcal{V}^{-\infty}(X_1) \times \mathcal{V}^{-\infty}(X_2) \to \mathcal{V}^{-\infty}(X)$ 定义如下。

定义 4.1 ([7, 第 2] 节)**.** 对于任意一对广义赋值 $(\zeta_1, \zeta_2) \in \mathcal{V}^{-\infty}(X_1) \times \mathcal{V}^{-\infty}(X_2)$，它们分别由流对 (C_1, T_1) 和 (C_2, T_2) 描述，其外积 $\zeta_1 \boxtimes \zeta_2 \in \mathcal{V}^{-\infty}(X)$ 定义为以下流对：

$$C = C_1 \boxtimes C_2,$$
$$T = F_*\Phi^*(T_1 \boxtimes T_2) + (\widetilde{p}_1 \circ \pi_X)^* C_1 \cap i_{2*} p_2^* T_2 + i_{1*} p_1^* T_1 \cap (\widetilde{p}_2 \circ \pi_X)^* C_2.$$

We can now prove the main result of this section:

命题 4.2 ([7, 断言 2.1.11])**.** 设 $\varphi_1 \in \mathrm{CF}(X_1)$ 和 $\varphi_2 \in \mathrm{CF}(X_2)$是实解析流形上的可构造函数。我们有：

$$[\varphi_1] \boxtimes [\varphi_2] = [\varphi_1 \boxtimes \varphi_2]\,.$$

证明。根据定理 2.12，记作 $(C_i, T_i) = (C_{\varphi_i}, N(\varphi_i))$，其中 $i = 1, 2$。我们必须证明：

$$C_{\varphi_1 \boxtimes \varphi_2} = C_1 \boxtimes C_2, \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned} N(\varphi_1 \boxtimes \varphi_2) = F_*\Phi^*(T_1 \boxtimes T_2) + (\widetilde{p}_1 \circ \pi_X)^* C_1 \cap i_{2*} p_2^* T_2 \\ + i_{1*} p_1^* T_1 \cap (\widetilde{p}_2 \circ \pi_X)^* C_2. \end{aligned} \tag{4.2}$$

第一个等式 (4.1) 很容易由 $C_{\varphi_1\boxtimes\varphi_2}$ 的定义得出。对于 (4.2)，回想一下，特征循环与外积 [34, 定理 4.5], [46,(9.4.1)]:

$$\mathrm{CC}(\varphi_1\boxtimes\varphi_2)=\mathrm{CC}(\varphi_1)\boxtimes\mathrm{CC}(\varphi_2).$$

根据特征闭流与法循环之间的关系公式（2.7），并再次记 $s\colon\ T^*X\to T^*X$ 为纤维中乘以 -1 的映射，我们有:

$$s_*\,\mathrm{CC}(\varphi_1\boxtimes\varphi_2)=C_1\boxtimes C_2+C_1\boxtimes\mathrm{cone}(T_2)+\mathrm{cone}(T_1)\boxtimes C_2+\mathrm{cone}(T_1)\boxtimes\mathrm{cone}(T_2),$$

且最后三项之和为锥($N(\varphi_1\boxtimes\varphi_2)$)。因此，（4.2）将由以下结论推出:

$$\mathrm{cone}(T_1)\boxtimes\mathrm{cone}(T_2)=\mathrm{cone}\left(F_*\Phi^*(T_1\boxtimes T_2)\right),\tag{4.3}$$
$$C_1\boxtimes\mathrm{cone}(T_2)=\mathrm{cone}\left((\widetilde{p}_1\circ\pi_X)^*C_1\cap i_{2*}p_2^*T_2\right),\tag{4.4}$$
$$\mathrm{cone}(T_1)\boxtimes C_2=\mathrm{cone}\left(i_{1*}p_1^*T_1\cap(\widetilde{p}_2\circ\pi_X)^*C_2\right).\tag{4.5}$$

为证明（4.3），记 $\widehat{\pi}\colon\ T^*X\to\mathbb{P}_X$ 为纤维丛 $q_X\colon T^*X\setminus 0_X\to\mathbb{P}_X$ 在光滑映射 $F\colon\ \mathbb{P}_X\to\mathbb{P}_X$ 下的拉回。更明确地说，这个拉回丛可描述如下。全空间 T^*X 是一个维数为 $2\dim(X_1)+2\dim(X_2)$ 的带边界流形，满足:

$$\mathrm{Int}(\widehat{T^*X})=\left\{(x_1,x_2,\xi_1,\xi_2)\in T^*X\colon\xi_1\neq 0\text{ and }\xi_2\neq 0\right\},$$
$$\partial\widehat{T^*X}=\left(T^*X_1\setminus\underline{0}_{X_1}\right)\times\mathbb{P}_{X_2}\ \cup\ \mathbb{P}_{X_1}\times\left(T^*X_2\setminus\underline{0}_{X_2}\right),$$

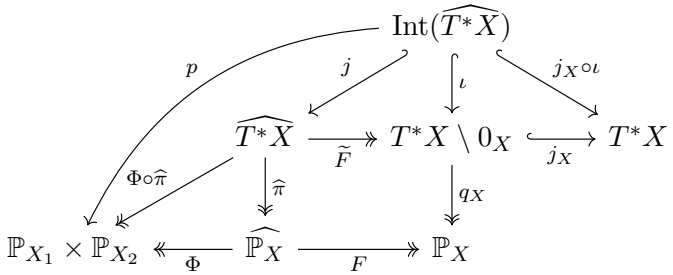
映射 $\widehat{\pi}\colon T^*X\to\mathbb{P}_X$ 定义如下:

$$\begin{aligned}
\widehat{\pi}(x_1,x_2,\xi_1,\xi_2)&=(x_1,x_2,[\xi_1:\xi_2],[\xi_1],[\xi_2])\ \text{ on }\ \mathrm{Int}(\widehat{T^*X}),\\
\widehat{\pi}(x_1,x_2,\xi_1,[\eta_2])&=(x_1,x_2,[\xi_1:0],[\xi_1],[\eta_2])\ \text{ on }\ (T^*X_1\setminus\underline{0}_{X_1})\times\mathbb{P}_{X_2},\\
\widehat{\pi}(x_1,x_2,[\eta_1],\xi_2)&=(x_1,x_2,[0:\xi_2],[\eta_1],[\xi_2])\ \text{ on }\ \mathbb{P}_{X_1}\times(T^*X_2\setminus\underline{0}_{X_2}).
\end{aligned}$$

此外，纤维丛 T^*X 自然地带有一个映射 $\widetilde{F}\colon T^*X\to T^*X\setminus 0_X$，其定义如下:

$$\begin{aligned}
\widetilde{F}(x_1,x_2,\xi_1,\xi_2)&=(x_1,x_2,\xi_1,\xi_2)\ \text{ on }\ \mathrm{Int}(\widehat{T^*X}),\\
\widetilde{F}(x_1,x_2,\xi_1,[\eta_2])&=(x_1,x_2,\xi_1,0)\ \text{ on }\ (T^*X_1\setminus\underline{0}_{X_1})\times\mathbb{P}_{X_2},\\
\widetilde{F}(x_1,x_2,[\eta_1],\xi_2)&=(x_1,x_2,0,\xi_2)\ \text{ on }\ \mathbb{P}_{X_1}\times(T^*X_2\setminus\underline{0}_{X_2}).
\end{aligned}$$

这些映射和丛组成如下交换图，其中底部的方块是笛卡尔的：



(4.6)

其中 j、j_X 和 ι 表示典范嵌入，且 $p := \Phi\circ\widehat{\pi}\circ j$。另请注意，我们有典范同一 $\mathrm{Int}(T^*X) = (T^*X_1\setminus 0_{X_1})\times(T^*X_2\setminus 0_{X_2})$，

$$p = q_{X_1}\times q_{X_2} : (T^*X_1\setminus \underline{0}_{X_1})\times(T^*X_2\setminus \underline{0}_{X_2})\to \mathbb{P}_{X_1}\times\mathbb{P}_{X_2},$$
$$j_X\circ\iota = j_{X_1}\times j_{X_2} : (T^*X_1\setminus \underline{0}_{X_1})\times(T^*X_2\setminus \underline{0}_{X_2})\to T^*X,$$

由此可得：

$$\mathrm{cone}(T_1)\boxtimes\mathrm{cone}(T_2) = j_{X*}\iota_* p^*(T_1\boxtimes T_2) = j_{X*}\widetilde{F}_* j_* p^*(T_1\boxtimes T_2).$$

此外，映射 $j_*p^* = (\Phi\circ\widehat{\pi})^*$ 相等，其定义域为上流的空间，值域为 T^*X 上流的空间。事实上，对于 T^*X 上的任意紧支撑光滑微分形式 ω，有 $(\Phi\circ\widehat{\pi})_*\omega = p_* j^*\omega$。最后这个等式可由以下事实直接推出：$\Phi\circ\widehat{\pi}$ 的纤维是 p 的纤维在 T^*X 中的闭包，因此，对光滑形式 ω 沿 $\Phi\circ\widehat{\pi}$ 的纤维积分，与对 ω 在 T^*X 内部的限制 $j^*\omega$ 沿 p 的纤维积分相同。

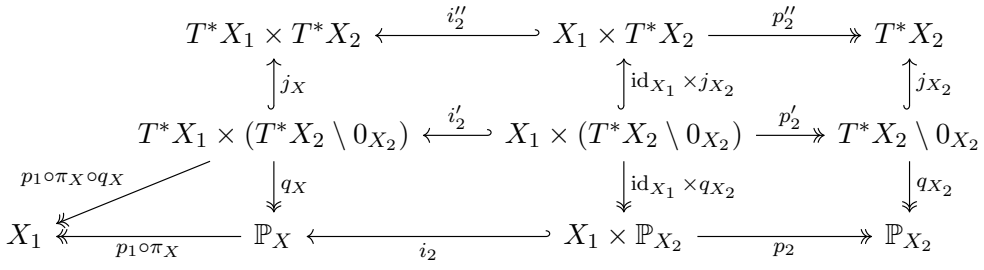
由于（4.6）中的底部方块是笛卡尔的，因此有

$$q_X^* F_*\Phi^*(T_1\boxtimes T_2) = \widetilde{F}_*(\Phi\circ\widehat{\pi})^*(T_1\boxtimes T_2),$$

由此我们证明了：

$$\begin{aligned}\mathrm{cone}(T_1)\boxtimes\mathrm{cone}(T_2) &= j_{X*}\widetilde{F}_*(\Phi\circ\widehat{\pi})^*(T_1\boxtimes T_2)\\ &= j_{X*}q_X^* F_*\Phi^*(T_1\boxtimes T_2)\\ &= \mathrm{cone}(F_*\Phi^*(T_1\boxtimes T_2)).\end{aligned}$$

为证明（4.4）（对称地也可证明（4.5），考虑以下交换图表：



其中 j_{X_2}、i_2' 和 i_2'' 是典范嵌入，p_2'、p_2'' 和 q_{X_2} 是典范浸没。上述图表左下方和右上方的交换方形都是笛卡尔方形。因此，我们有：

$$j_{X*}q_X^*i_{2*}p_2^*T_2 = j_{X*}i_{2*}'(\mathrm{id}_{X_1}\times q_{X_2})^*p_2^*T_2 = i_{2*}''(p_2'')^*\operatorname{cone}(T_2).$$

此外，根据这些运算的定义可得

$$i_{2*}''(p_2'')^*\operatorname{cone}(T_2) = [\![\underline{0}_{X_1}]\!]\boxtimes\operatorname{cone}(T_2),$$

并记 $\widetilde{\pi}_{X_1}$： $T^*X_1\to X_1$ 为典范淹没，则有：

$$j_{X*}q_X^*(\widetilde{p}_1\circ\pi_X)^*C_1 = (\widetilde{\pi}_{X_1})^*C_1\boxtimes[\![T^*X_2]\!].$$

因此，有：

$$\begin{aligned} j_{X*}q_X^*\big((\widetilde{p}_1\circ\pi_X)^*C_1\cap i_{2*}p_2^*T_2\big) &= j_{X*}q_X^*\big((\widetilde{p}_1\circ\pi_X)^*C_1\big)\ \cap\ j_{X*}q_X^*\big(i_{2*}p_2^*T_2\big)\\ &= (\widetilde{\pi}_{X_1})^*C_1\boxtimes[\![T^*X_2]\!]\ \cap\ [\![\underline{0}_{X_1}]\!]\boxtimes\operatorname{cone}(T_2)\\ &= C_1\boxtimes\operatorname{cone}(T_2). \end{aligned}$$

□

5. Pullback and product

本节回顾 [7] 中广义赋值的拉回运算定义，并证明在适度的横截性假设下，该运算限制在可构造函数上时，就是通常的复合拉回。由此可推得可构造函数的乘积也有类似结果。

5.1. 定义。 我们基本遵循 [7]中的论述和记号。设 X 和 Y 是两个定向实解析流形，$f: X\to Y$ 是一个实解析映射，并设 $\zeta\in\mathcal{V}^{-\infty}(Y)$由流对（$C$, T）表示。

浸没。 在 [7], 中，浸没诱导的广义赋值拉回被定义为紧支撑光滑赋值推前的伴随运算。将拉回明确表示为对表示该广义赋值的流对所作运算的表达式，已在 [7,命题3.3中证明。3]为与广义赋值其他运算的定义更加一致，我们将采用这一明确表达式作为拉回的定义。考虑如下典范映射图表：

$$\mathbb{P}_X \xleftarrow{\overline{df}} X\times_Y\mathbb{P}_Y \xrightarrow{\overline{\tau}} \mathbb{P}_Y. \tag{5.1}$$

定义 5.1 ([7, 命题 3.3.3])。 假设 f 是一个淹没。 ζ 经 f 的拉回 是广义赋值 $f^*\zeta\in\mathcal{V}^{-\infty}(X)$，由以下流对表示：

$$(C',T') = \big(f^*C, \overline{df}_*\overline{\tau}^*T\big).$$

浸入。 在以下横截性假设下，定义广义赋值经浸入的拉回：

定义 5.2 ([7, 定义 3.5。2])。 记 $\mathrm{WF}(\zeta) = (\Lambda, \Gamma)$。

(i) 闭嵌入 $f\colon X \to Y$ 与 ζ 横截，当且仅当：

$$\Lambda \cap T^*_X Y = \emptyset,$$
$$\Gamma \cap T^*_{X\times_Y \mathbb{P}_Y}\mathbb{P}_Y = \emptyset,$$
$$\Gamma \cap T^*_{\mathbb{P}_+(T^*_X Y)}\mathbb{P}_Y = \emptyset.$$

(ii) 浸入 $f\colon X \to Y$ 与 ζ 横截，当且仅当对每个 $x \in X$，都存在 X 中 x 的一个开邻域 U，以及 Y 中 $f(x)$ 的一个开邻域 V，使得 $f|_U$: $U \to V$ 是一个与 $\zeta|_V \in \mathcal{V}^{-\infty}(V)$ 横截的闭嵌入。

考虑沿子流形 $\mathbb{P}_+(T^*_X Y)$ 对 $X \times_Y \mathbb{P}_Y$ 作定向爆破 $X \times_Y \mathbb{P}_Y$。此爆破的全空间是一个维数为 $\dim(X) + \dim(Y) - 1$ 的带边界流形，并且满足：

$$\mathrm{Int}\left(\widetilde{X \times_Y \mathbb{P}_Y}\right) = \Big\{(x,[\xi],[\xi']) \in (X \times_Y \mathbb{P}_Y) \times_X \mathbb{P}_X : df^*\xi \neq 0\ ;\ [df^*\xi] = [\xi']\Big\}, \tag{5.2}$$
$$\partial\left(\widetilde{X \times_Y \mathbb{P}_Y}\right) = \mathbb{P}_+\left(T^*_X Y\right) \times_X \mathbb{P}_X.$$

我们将 $\alpha\colon X \times_Y \mathbb{P}_Y \to X \times_Y \mathbb{P}_Y \hookrightarrow \mathbb{P}_Y$ 记为爆破映射与典范包含的复合，并将 $\beta\colon X \times_Y \mathbb{P}_Y \to \mathbb{P}_X$ 记为由 df 诱导的映射。这些映射构成一个图表：

$$\mathbb{P}_X \xleftarrow{\beta} \widetilde{X \times_Y \mathbb{P}_Y} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{P}_Y. \tag{5.3}$$

定义 5.3 ([7, 断言 3.5.4])。设 f 是一个与 ζ横截的浸入。 ζ 沿 f 的拉回是由以下流对表示的广义赋值 $f^*\zeta \in \mathcal{V}^{-\infty}(X)$：

$$(C', T') = (f^*C, \beta_*\alpha^*T).$$

5.2. **限制到可构造函数**。 对于与可构造函数相关联的广义赋值，流 (C, T) 都是次解析的。在这种情况下，只要 f 和 α 分别与定义 C_ψ 和 $N(\psi$的惠特尼分层的分层横截，定理 5.3 中的运算便都有定义，无需满足定理 5.2 中的条件。此外，根据法循环与特征循环的构造（第 2.7节），显然，当 f 按照定理 2.7的意义与 ψ横截时，这些横截性假设便成立。

定理 5.4 (见定理 1)。 设 $f : X \to Y$ 是实解析流形之间的实解析映射，并设 $\psi \in \mathrm{CF}(Y)$。若满足以下两个条件之一：

(i) f 是淹没，或 *(ii)* f 是浸入，且与 ψ横截，

那么拉回 $f^*[\psi] \in \mathcal{V}^{-\infty}(X)$ 是良定义的，且 $f^*[\psi] = [f^*\psi]$。

证明。 (i) 首先假设 f 是淹没。在这种情况下，拉回总是良定义的。根据 [7, 命题 3.3。3], 我们必须证明：

$$C_{f^*\psi} = f^* C_\psi, \tag{5.4}$$

$$N(f^*\psi) = \overline{df}_* \overline{\tau}^* N(\psi). \tag{5.5}$$

可以将问题归结为在点 $x \in X$ 的开邻域 U 上进行局部计算。利用淹没的（实解析）标准形，可以将问题归结为证明 $X = \mathbb{R}^{m+n}$、$Y = \mathbb{R}^n$ 和 f 的情形：$\mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n$ 对末尾坐标的投影。在这种情况下，拉回具有简单形式 $f^*\psi = \mathbf{1}_{\mathbb{R}^m} \boxtimes \psi$。

在这些局部坐标中，等式（5.4）显而易见。对于（5.5），注意到 $N(\mathbf{1}_{\mathbb{R}^m}) = 0$，因此关于外积的结果（定理 4.2）保证：

$$N(f^*\psi) = (\widetilde{p}_1 \circ \pi_X)^* [\![\mathbb{R}^m]\!] \cap i_{2*} p_2^* N(\psi) = [\![\mathbb{P}_{\mathbb{R}^{m+n}}]\!] \cap i_{2*} p_2^* N(\psi) = i_{2*} p_2^* N(\psi).$$

纤维积 $X \times_Y \mathbb{P}_Y$ 与 $\mathbb{R}^m \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}^n}$ 同构，在此同一识别下，图表

$$\mathbb{P}_X \xleftarrow{\overline{df}} X \times_Y \mathbb{P}_Y \xrightarrow{\overline{\tau}} \mathbb{P}_Y$$

拉回定义中涉及的图表与

$$\mathbb{P}_{\mathbb{R}^{m+n}} \xleftarrow{i_2} \mathbb{R}^m \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}^n} \xrightarrow{p_2} \mathbb{P}_{\mathbb{R}^n}$$

外积公式中涉及的图表相同，因此结论成立。

(ii) 现在假设 f 是与 ψ 横截的浸入。我们必须证明 $f^* C_\psi = C_{f^*\psi}$ 和 $N(f^*\psi) = \beta_* \alpha^* N(\psi)$。由于所有问题都是局部的，我们不妨假设 f 是与 ψ 横截的闭嵌入。

为此，我们使用 Schmid 和 Vilonen 对特征循环拉回运算的描述，该描述保证 $\mathrm{CC}(f^*\psi) = df_* \tau^* \mathrm{CC}(\psi)$ 作为 Borel-Moore 同调类成立；见定理 2.8。同样，特征循环的构造以及我们关于 f到 ψ 的横截性的假设，意味着 τ 与定义 $\mathrm{CC}(\psi)$ 的 T^*Y 的某个次解析 Whitney 分层横截。因此，定理 2.4 和 2.5 保证 $\mathrm{CC}(f^*\psi) = df_* \tau^* \mathrm{CC}(\psi)$ 作为亚解析流成立。由这一等式以及特征循环与法循环之间的关系，我们推出 $C_{f^*\psi} = df_* \tau^* C_\psi$和 $\mathrm{cone}(N(f^*\psi)) = df_* \tau^* \mathrm{cone}(N(\psi))$。接下来即可由下式得到结论：

$$df_* \tau^* C_\psi = f^* C_\psi,$$
$$df_* \tau^* \operatorname{cone}(N(\psi)) = \operatorname{cone}\left(\beta_* \alpha^* N(\psi)\right).$$

第一个等式显然。我们将分两步证明第二个等式。为此，记 $\widetilde{q}\colon (X\times_Y T^*Y)\setminus T^*_XY \to X\times_Y \mathbb{P}_Y$为映射 $(x,\ \xi)\mapsto (x,\ [\xi],\ [df(\xi)])$，并记 $j\colon (X\times_Y T^*Y)\setminus T^*_XY \hookrightarrow X\times_Y T^*Y$ 为典范包含。再记典范映射 $q_X\colon T^*X\backslash 0 \twoheadrightarrow \mathbb{P}_X$和 $j_X\colon T^*X\backslash 0\hookrightarrow T^*X$，$q_Y$和 j_Y也类似。这些映射构成如下交换图：

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{P}_Y & \longleftarrow & & \xleftarrow{\ \alpha\ } & \widetilde{X\times_Y \mathbb{P}_Y} \\
{\scriptstyle q_Y}\uparrow & & & & \uparrow{\scriptstyle \widetilde{q}} \\
T^*Y\setminus \underline{0} & \xleftarrow[\tau']{} & (X\times_Y T^*Y)\setminus \underline{0} & \xleftarrow[\tau'']{} & (X\times_Y T^*Y)\setminus T^*_XY \\
{\scriptstyle j_Y}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \widetilde{j}'} & \swarrow{\scriptstyle \widetilde{j}} & \\
T^*Y & \xleftarrow[\tau]{} & X\times_Y T^*Y & &
\end{array} \tag{5.6}$$

其中 τ'，τ''，j'是典范嵌入。第一步将证明记 $T=N(\psi)$ 时，我们有 $\tau^*\text{锥}(T)=j_*\widetilde{q}^*\alpha^*T$。（5.6）的交换性意味着：

$$\widetilde{j}_*\widetilde{q}^*\alpha^*T=\widetilde{j}'_*\tau''_*(\tau'\circ\tau'')^*q_Y^*T.$$

根据我们的横截性假设，有 $\operatorname{supp}(\tau'^*q_Y^*T)\subset (X\times_Y T^*Y)\setminus T^*_XY$，因此：

$$\tau''_*(\tau'\circ\tau'')^*q_Y^*T=\tau'^*q_Y^*T.$$

因此，利用（5.6）左下方方块是笛卡尔方块这一事实，我们得到：

$$\widetilde{j}_*\widetilde{q}^*\alpha^*T=\widetilde{j}'_*\tau'^*q_Y^*T=\tau^*j_{Y*}q_Y^*T=\tau^*\operatorname{cone}(T).$$

第二步将证明 $df_*j_*\widetilde{q}^*\alpha^*T=\text{锥}(\beta_*\alpha^*T)$。为此，考虑以下笛卡尔方块：

$$\begin{array}{ccc}
\widetilde{\widetilde{X\times_Y \mathbb{P}_Y}} & \xrightarrow{\pi'} & \widetilde{X\times_Y \mathbb{P}_Y} \\
\downarrow{\scriptstyle \pi''} & & \downarrow{\scriptstyle \beta} \\
T^*X\setminus \underline{0} & \xrightarrow{q_X} & \mathbb{P}_X
\end{array}$$

其中全空间 $\widetilde{X\times_Y \mathbb{P}_Y}$ 是一个维数为 $\dim(X)+\dim(Y)$ 的带边光滑流形，其定义如下：

$$\operatorname{Int}\left(\widetilde{\widetilde{X\times_Y \mathbb{P}_Y}}\right)=\Big\{(x,[\xi],\xi')\in (X\times_Y \mathbb{P}_Y)\times (T^*X\setminus \underline{0}):\ df(\xi)\neq 0\ ;\ [df(\xi)]=[\xi']\Big\},$$

$$\partial\left(\widetilde{\widetilde{X\times_Y \mathbb{P}_Y}}\right)=\mathbb{P}_+\left(T^*_XY\right)\times_X\left(T^*X\setminus \underline{0}\right),$$

映射 π''是典范投影，而映射 π'是 $(x,[\xi],\xi')\mapsto (x,[\xi],[\xi'])$。注意，映射 $\iota\colon (X\times_Y T^*Y)\setminus T^*_XY\hookrightarrow X\times_Y \mathbb{P}_Y$由

$(x,\xi)\mapsto(x,[\xi],df(\xi))$ 给出，是映到一个交换图 $\widetilde{}$ 的开嵌入

$$\begin{tikzcd}
 & \widetilde{X\times\mathbb{P}_Y} \arrow[r, "\beta"] & \mathbb{P}_X \\
(X\times_Y T^*Y)\setminus T^*_XY \arrow[ur, "\widetilde{q}"] \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, hook, "\widetilde{j}"'] & \widetilde{\widetilde{X\times_Y\mathbb{P}_Y}} \arrow[u, "\pi'"] \arrow[r, "\pi''"] & T^*X\setminus\underline{0} \arrow[u, "q_X"'] \arrow[d, hook, "j_X"] \\
X\times_Y T^*Y \arrow[rr, "df"] & & T^*X
\end{tikzcd} \tag{5.7}$$

记 $T'=\alpha^*T$，我们必须证明$df_*j_*\widetilde{q}^*T'=j_{X*}q_X^*\beta_*T'$。利用（5.7）的交换性，我们得到：

$$df_*\widetilde{j}_*\widetilde{q}^*T'=j_{X*}\pi''_*\iota_*\iota^*\pi'^*T'.$$

同样，我们的横截性假设意味着 $\mathrm{supp}(\pi'^*T')\subset\mathrm{Int}(\widetilde{})$。利用（5.7）右上方的方块是笛卡尔方块这一事实，我们最终得到：

$$df_*\widetilde{j}_*\widetilde{q}^*T'=j_{X*}\pi''_*\pi'^*T'=j_{X*}q_X^*\beta_*T',$$

由此完成证明。 □

5.3. **乘积**。 本节中，我们考虑 [11] 中定义的广义赋值的乘积。

定义 5.5。 设 ζ_1、$\zeta_2\in\mathcal{V}^{-\infty}(X)$ 是两个广义赋值，且对角嵌入 $\delta: X\hookrightarrow X\times X$ 与 $\zeta_1\boxtimes\zeta_2\in\mathcal{V}^{-\infty}(X\times X)$ 按定理 5.2 的意义横截。则 乘积 ζ_1 与 ζ_2 是广义赋值 $\zeta_1\cdot\zeta_2\in\mathcal{V}^{-\infty}(X)$，其定义如下：

$$\zeta_1\cdot\zeta_2=\delta^*(\zeta_1\boxtimes\zeta_2).$$

广义赋值乘积的定义在 [11] 中是用流上的运算（C、T）来表述的。这两个定义相同，这是因为：(i) 在对角嵌入的情形下，定理5.2的横截性假设与 [11, 定理 83], 中的乘积横截性假设相同；(ii) [11, 定理 83]中定义的广义赋值乘积限制为光滑赋值的乘积；(iii) 光滑赋值的乘积定义为外积沿对角嵌入的拉回；(iv) 光滑赋值在广义赋值空间中稠密；(v) 广义赋值上的运算是序列连续的（[7,第 2],[7,命题 3.55]）。

定理的证明 *2*。 Alesker 关于广义赋值的外积在可构造函数上的限制的结果（定理4.2）以及我们关于拉回的限制的结果（定理 1）推出了乘积在可构造函数上的限制这一结果。 □

6. Pushforward and convolution

本节中，我们回顾 [7] 中引入的广义赋值的推前定义，并对浸入情形的公式作出修正。接着，我们证明，在温和的横截性假设下，广义赋值的推前限制在可构造函数上时，等同于层论中的推前。

6.1. 定义。 我们严格遵循 [7] 中的论述和记号。广义赋值的推前被定义为光滑赋值拉回的伴随，这借助于 Alesker-Poincar´e 对偶性。更确切地说，考虑一个实解析映射 $f\colon X^n \to Y^m$，其定义域和值域为定向实解流形，并且 $\zeta \in \mathcal{V}^{-\infty}(X)$ 由流对 (C,T) 表示。推前 $f_*\zeta \in \mathcal{V}^{-\infty}(Y)$ 通过以下公式定义：

$$\int_Y f_*\zeta \cdot \psi = \int_X \zeta \cdot f^*\psi, \qquad \text{for all } \psi \in \mathcal{V}_c^\infty(Y),$$

只要该公式有意义。

浸入。 设 f 是一个浸入，并且 $n < m$，否则描述将是平凡的。在这种情况下，光滑赋值 $\psi \in \mathcal{V}^\infty(Y)$ 经 f 拉回后仍然光滑，并且对于任意 $P \in \mathcal{P}(X)$，其由 $f_*\psi(P) = \psi(f(P))$ 给出。

此外，回顾以下映射：

$$\mathbb{P}_X \xleftarrow{\beta} \widetilde{X \times_Y \mathbb{P}_Y} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{P}_Y$$

由（5.3）给出，并考虑自然映射：

$$X \xleftarrow{\beta'} \mathbb{P}_+(T^*_X Y) \xrightarrow{\alpha'} \mathbb{P}_Y.$$

若 $\psi \in \mathcal{V}_c^\infty(Y)$ 由一对微分形式 $(\phi,\ \omega) \in \Omega^n(Y) \oplus \Omega^{n-1}(\mathbb{P}_Y)$ 如（2.5）所示给出，那么 [7, 命题 3.1。2] 保证拉回 $f^*\psi$ 由一对 $(\beta'_*\alpha'^*\omega,\ \beta_*\alpha^*\omega)$ 描述。因此，根据推前的定义可得：

$$\langle f_*\zeta, \psi\rangle = \langle \zeta, f^*\psi\rangle = \left\langle C, \beta'_*\alpha'^*\omega\right\rangle + \langle T, \beta_*\alpha^*\omega\rangle = \left\langle \alpha'_*\beta'^*C + \alpha_*\beta^*T, \omega\right\rangle.$$

因此，我们可以修正 [7,命题 3.4.2]中的一个公式：

命题 6.1。 若 $f\colon X^n \to Y^m$ 是一个浸入且满足 $n < m$，则广义赋值 $f_*\zeta \in \mathcal{V}^{-\infty}(Y)$ 由以下一对流表示：

$$(C', T') = \big(0, \alpha_*\beta^*T + \alpha'_*\beta'^*C\big). \tag{6.1}$$

浸没。 当 f 是一个在 ζ的支集上为真的淹没时，有两点需要说明。首先，由于光滑赋值经淹没拉回后未必仍然光滑，要使这样的定义有意义，必须验证广义赋值的乘积 $\zeta \cdot f^*\psi$是良定义的。记 $\mathrm{WF}(\zeta)$ 为 $= (\Lambda,\ \Gamma)$，当 $\Gamma \cap T^*_{X\times_Y\mathbb{P}_Y}\mathbb{P}_X = \emptyset$ 时，这一点便成立；参见 [7, 第 36] 节。其次，广义赋值的推前在上述文献中是针对真浸没或紧支撑

广义赋值定义的。然而，当映射 f 在 ζ的支集上为真时，该定义显然也有意义。

此外，记（C'，T'）为表示 $f_*\zeta$ 的流对，命题 [12,4.6] 证明了：

$$T' = \tau_* \overline{df}^* T. \tag{6.2}$$

更确切地说，文献同处证明了当 f 为真时该公式成立，但再次指出，只要 f 在 ζ 的支集上是真，便足够了。最后，我们指出，文献同处将 C' 的描述留作一个未决问题。

6.2. **限制到可构造函数**。与拉回的情形相反，通过浸没定义广义赋值的推前，即使该广义赋值来自可构造函数，也需要对波前集施加条件。这是因为，与可构造函数 $\psi \in \mathcal{V}_c^\infty(Y)$ 相关联的广义赋值 $f^*\psi$ 的流并非次解析的。因此，我们要求相对于法循环的一个角向分层满足横截性假设。

定理 6.2（见定理 3）。设 $\varphi \in \mathrm{CF}(X)$，并设 $f\colon X \to Y$ 是实解析流形之间的实解析映射。若满足以下两个条件之一：

(i) f 是浸入，或 *(ii)* f 是淹没，在 φ 的支集上为真，且满足 $df\colon X \times_Y \mathbb{P}_{Y\leftarrow} \hookrightarrow \mathbb{P}_X$ 与 $N(\varphi)$ 角向横截，

则 $f_*\varphi \in \mathrm{CF}(Y)$ 和 $f_*[\varphi] \in \mathcal{V}^{-\infty}(Y)$ 均有定义，且 $f_*[\varphi] = [f_*\varphi]$。

证明。回忆一下，(C', T') 与 $f_*[\varphi]$ 相关联，并将 $(C, T) = (C_\varphi, N(\varphi))$ 和 $(C'', T'') = (C_{f_*\varphi}, N(f_*\varphi))$ 记为。

(i) 首先假设 f 是浸入。根据可加性以及 f 在 φ 的支集上的真性，我们可以将问题归结为 f 是一个满足 $n < m$ 的闭嵌入的情形；$n = m$ 的情形显然成立。显然我们有 $C'' = 0 = C'$，因此只需证明：

$$T'' = \alpha_* \beta^* T + \alpha'_* \beta'^* C. \tag{6.3}$$

将问题化归为局部计算，并利用浸入的（实解析）标准形，可以将问题化归为 $X = \mathbb{R}^n$，$Y = \mathbb{R}^{n+p}$ 且 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+p}$ 是沿前几个坐标的包含映射 $x \mapsto (x, 0)$。在这种情况下，我们有 $f_*\varphi = \varphi \boxtimes \mathbf{1}_{\{0\}^p}$。因此，剩下要证明的是，式（6.3）可由定理4.2推出。按照第4节，考虑典范映射的图表

$$\mathbb{P}_{\mathbb{R}^{n+p}} \xleftarrow{i_2} \mathbb{R}^n \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}^p} \xrightarrow{p_2} \mathbb{P}_{\mathbb{R}^p}$$

and

$$\mathbb{P}_{\mathbb{R}^n} \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}^p} \xleftarrow{\Phi} \widehat{\mathbb{P}}_{\mathbb{R}^{n+p}} \xrightarrow{F} \mathbb{P}_{\mathbb{R}^{n+p}} \ .$$

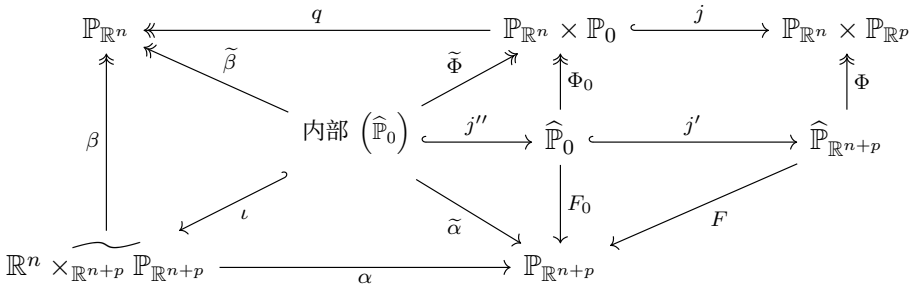
我们还考虑流形 $\mathbb{P}_0 = \mathbb{P}_+(T^*_{\{0\}^p}\mathbb{R}^p)$及嵌入 $i\colon \mathbb{P}_0 \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}^p}$、法循环 $T_0 = N(\mathbf{1}_{\{0\}^p}) = i_*[\![\mathbb{P}_0]\!]$，并用 $\widetilde{p}\colon \mathbb{P}_{\mathbb{R}^{n+p}} \to \mathbb{R}^n$ 表示典范映射的复合 $\mathbb{P}_{\mathbb{R}^{n+p}} \to \mathbb{R}^{n+p} \to \mathbb{R}^n$。于是，定理4.2保证：

$$T'' = F_*\Phi^*(T \boxtimes T_0) + \widetilde{p}^*C \cap i_{2*}p_2^*T_0.$$

于是，结论由以下等式推出：

$$F_*\Phi^*(T \boxtimes T_0) = \alpha_*\beta^*T, \tag{6.4}$$
$$\widetilde{p}^*C \cap i_{2*}p_2^*T_0 = \alpha'_*\beta'^*C. \tag{6.5}$$

为证明（6.4），考虑以下交换图：



(6.6)

其中 $j = \mathrm{id}_{\mathbb{P}_{\mathbb{R}^n}} \times i$、带边光滑流形 $\mathbb{P}_0$ 以及映射 Φ_0和 j' 被定义为纤维丛 $\Phi\colon \mathbb{P}_{\mathbb{R}^{n+p}} \twoheadrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}^n} \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}^p}$沿 j 的拉回，而所有其他映射均为典范映射。更确切地说，按照第 4 节的记号，流形 $\mathbb{P}_0$是集合 $\{(x_1, 0, [\xi_1 : \xi_2], [\xi_1], [\xi_2])\}$ 在 $\mathbb{P}_{\mathbb{R}^{n+p}} \times_{\mathbb{R}^{n+p}} (\mathbb{P}_{\mathbb{R}^n} \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}^p})$ ι中的闭包。同样地，在（5.2）的坐标中，映射 ι是显然的映射：

$$\iota(x_1, 0, [\xi_1 : \xi_2], [\xi_1], [\xi_2]) = (x_1, [\xi_1 : \xi_2], [\xi_1]),$$

而（6.6）中的其他映射由图表的交换性唯一确定。

利用（6.6）右上角的方块是笛卡尔的这一事实，我们可以计算：

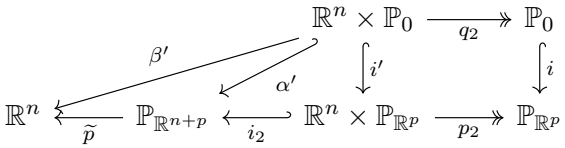
$$F_*\Phi^*(T \boxtimes T_0) = F_*\Phi^* j_* q^* T = F_* j'_* \Phi_0^* q^* T. \tag{6.7}$$

按照定理4.2的证明进行论证，我们有运算 在流 $\Phi_0^* = j''_*\Phi^*$ 和 $\beta^* = \iota_*\beta^*$ 上的相等性。事实上，对于任意紧支撑的 光滑微分形式 ω 在 $\mathbb{P}_0$ 上，该等式 $\Phi_{0*}\omega = \Phi_* j''^*\omega$ 由以下事实可得： 的纤维是 Φ_0 的纤维的闭包 Φ 在 $\mathbb{P}_0$ 中，因此对 Φ_0 的光滑形式 ω 沿其纤维积分与 沿 Φ的纤维对 $j''^*\omega$ 的 ω 到内部 $\mathrm{Int}(\mathbb{P}_0)$的限制进行积分

~重合。对 $\beta^* = \iota_*\beta^*$也有类似的证明。因此，式（6.7）推出：

$$\begin{aligned} F_*\Phi^*(T \boxtimes T_0) &= F_* j'_* j''_* \widetilde{\Phi}^* q^* T \\ &= \widetilde{\alpha}_* \widetilde{\beta}^* T \\ &= \alpha_* \iota_* \widetilde{\beta}^* T \\ &= \alpha_* \beta^* T. \end{aligned}$$

为证明（6.5），考虑下图表：



其中，除需通过 $(-1)^{n(p-1)}$ 改变定向（对应于交换两个因子）外，该方形图表是笛卡尔的。此外，有：

$$q_2^*[\![\mathbb{P}_0]\!] = (-1)^{n(p-1)}[\![\mathbb{R}^n \times \mathbb{P}_0]\!],$$

因此：

$$i_{2*}p_2^* T_0 = (-1)^{n(p-1)} i_{2*} i'_* q_2^* [\![\mathbb{P}_0]\!] = \alpha'_* \left([\![\mathbb{R}^n \times \mathbb{P}_0]\!]\right).$$

所以，我们有：

$$\begin{aligned} \widetilde{p}^* C \cap i_{2*}p_2^* T_0 &= \widetilde{p}^* C \cap \alpha'_* \left([\![\mathbb{R}^n \times \mathbb{P}_0]\!]\right) \\ &= \alpha'_* \left(\alpha'^* \widetilde{p}^* C \cap [\![\mathbb{R}^n \times \mathbb{P}_0]\!]\right) \\ &= \alpha'_* \beta'^* C. \end{aligned}$$

(ii) 假设 f 是一个淹没，且 df 与 $N(\varphi)$ 角向横截。此横截性假设保证 $f_*[\varphi]$ 由 [12, 命题 45]定义良好。由于 f 在 $\mathrm{supp}(\varphi)$ 上是真映射，推前 $f_*\varphi$ 也定义良好。同样，利用推前的可加性以及 f 在 φ的支集上的真性，我们可以归约到以下情形： φ 支集包含于某个开子集，在该子集上，淹没 f 可化为实解析标准形。因此，只需对 $X = \mathbb{R}^n$， $Y = \mathbb{R}^m$ 以及 f：$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$是关于前几个坐标的投影，证明该结论。

现在，让我们证明 $T'' = \tau_* df^{*\overline{T}}$，也就是说，证明 $N(f_*\varphi) \equiv \overline{\tau_*} df^* N(\varphi$。为此，我们使用特征闭流上的推前运算公式（定理 2.6），该公式保证 $\mathrm{CC}(f_*\varphi) = \tau_* df^* \mathrm{CC}(\varphi)$ 作为 Borel-Moore 同调类相等。利用 $X = \mathbb{R}^n$和 $Y = \mathbb{R}^m$ 上的典范度量（这相当于在 X 和 Y上选取局部实解析度量），我们可以将射影丛 $\mathbb{P}_X$ 和 $\mathbb{P}_Y$ 与单位余球丛 $S^*X \subset T^*X$和 $S^*Y \subset T^*Y$相对应，从而得到一个交换

图表：

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{P}_X & \xleftarrow{\overline{df}} & X\times_Y \mathbb{P}_Y & \xrightarrow{\overline{\tau}} & \mathbb{P}_Y \\ {\scriptstyle \iota_X}\uparrow & & {\scriptstyle \iota}\uparrow & & {\scriptstyle \iota_Y}\uparrow \\ T^*X & \xleftarrow{df} & X\times_Y T^*Y & \xrightarrow{\tau} & T^*Y \end{array} \tag{6.8}$$

注意，(6.8) 右侧的方块是笛卡尔的。因此，我们得到以下 Borel-Moore 同调类的等式：

$$\begin{aligned} \iota_Y^* \operatorname{CC}(f_*\varphi) &= \iota_Y^*\tau_* df^* \operatorname{CC}(\varphi) \\ &= \overline{\tau}_*\iota^* df^* \operatorname{CC}(\varphi) \\ &= \overline{\tau}_*\overline{df}^*\iota_X^* \operatorname{CC}(\varphi). \end{aligned}$$

注意，由于锥性，映射 ι_Y 与流 $\operatorname{CC}(f_*\varphi)$ 横截，且 ι_X 与 $\operatorname{CC}(\varphi)$ 横截。此外，横截性假设保证映射 df 与流 $\iota_X^* \operatorname{CC}(\varphi) = N(\varphi)$ 横截，因此定理 2.4和 2.5 保证我们得到 $\iota_Y^*\operatorname{CC}(f_*\varphi) = \tau_* df^* \iota_X^*\operatorname{CC}(\varphi)$ 作为次解析流，也就是说，$N(f_*\varphi) = \tau_* df^* N(\varphi)$。

因此，广义赋值 $f_*[\varphi] - [f_*\varphi] \in \mathcal{V}^{-\infty}(Y)$ 由流对 $(C' - C'', 0)$ 表示。由可加性可知，不失一般性，我们可以假设 X 连通，于是定理 2.11 保证存在某个 $\lambda \in \mathbb{C}$，使得 $f_*[\varphi] - [f_*\varphi] = \lambda\chi$。因此，我们只需证明 $\lambda = 0$。根据定义，$f_*[\varphi] - [f_*\varphi]$ 的支集包含于 $f(\operatorname{supp}(\varphi))$；例如参见 [11, Eq. (28)]。因此，若 $f(\operatorname{supp}(\varphi)) \neq Y$，则必有 $\lambda = 0$。更一般地，若 $\dim(Y) > 0$，我们可以利用 [6, Prop. 6.2.1] 将 $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ 写成满足 $f(\operatorname{supp}(\varphi_j)) \neq Y$ 的形式，其中 $j = 1, 2$。由推前运算的可加性，我们可以归约到前一种情形，并再次证明 $\lambda = 0$。若 $\dim(Y) = 0$，不失一般性，可假设 $Y = \{\mathrm{pt}\}$，从而 $f_*\varphi$ 恒等于 $\mu = \int_X \varphi \mathrm{d}\chi$，因此 $[f_*\varphi] = \mu \cdot \chi \in \mathcal{V}^{-\infty}(Y)$。类似地，由 [6, Prop. 8.3.1]，可得 $f_*[\varphi] = \mu \cdot \chi$，故再次得到 $f_*[\varphi] = [f_*\varphi]$。□

6.3. 卷积。 我们回顾 [12] 中引入的广义赋值卷积的定义。设 G 是作用在光滑流形 X 上的李群，且该作用具有传递性。如引言中所述，流形 G 和 X 因而具有典范的实解析结构，且作用 $a : G \times X \to X$ 是实解析的。广义赋值 $\mu \in \mathcal{V}^{-\infty}(G)$ 和 $\zeta \in \mathcal{V}^{-\infty}(X)$ 的卷积 定义为 $\mu * \zeta := a_*(\mu \boxtimes \zeta) \in \mathcal{V}^{-\infty}(X)$，前提是右侧的推前定义良好。

现在我们可以证明关于广义赋值卷积限制到可构造函数的结果。

定理 4 的证明。 可构造函数 $\varphi \in \operatorname{CF}(G)$ 与 $\psi \in \operatorname{CF}(X)$ 的卷积在作用 $a : G \times X \to X$ 在 $\varphi \boxtimes \psi$ 的支集上为真时有定义；定理 3 的 (ii) 中假设了这一条件。

因此，在此假设下，卷积 $[\varphi] * [\psi]$ 作为广义赋值是良定义的，而 $\varphi * \psi$ 作为可构造函数也是良定义的。由 Alesker 关于外积的结果（定理 4.2）以及我们关于推前的结果（定理 3），结论即可直接得出。□

7. Additive and multiplicative kinematic formulas

本节证明可构造函数的加法与乘法运动学公式。正如前文所述，可构造函数的卷积积是凸体的闵可夫斯基和的一种良好替代。我们将在两种不同情形下证明这类公式。

第一种情形是欧几里得向量空间在自身上通过加法作用。我们考虑平移不变且在正交群的某个子群作用下保持不变的赋值，该子群在单位球面上传递作用。在这种情形下，凸体的加性运动学公式早已广为人知。为了将其推广到可构造函数的情形，我们首先证明一个具有独立意义的结论（定理 7.9），它揭示了紧支撑广义赋值、平移不变广义赋值及其各自卷积积之间的联系。该结论推广了第一作者与 Alesker 在光滑情形下的结果 [12] 以及与 Faifman 在多面体情形下的结果 [17]。

第二种情况是李群 S^3 上的可构造函数。S^3 中两个测地凸子集的卷积积通常并非测地凸。因此，测地凸集不存在乘性交运动学公式，我们只能用可构造函数来表述公式。

在这两种情况下，紧支撑可构造函数的卷积都是良定义的。然而，相关广义赋值的卷积积只有在某些条件下才有定义。我们将证明，对于处于一般位置的可构造函数，这些条件均得到满足。

7.1. 紧支撑赋值与平移不变赋值。为了区分 $\mathbb{R}^n$ 及其对偶空间，采用记号 $V := \mathbb{R}^n$ 将很方便。

定义 7.1。两个紧支撑广义赋值 $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathcal{V}_c^{-\infty}(V)$ 称为横截的，若存在闭锥集 $\Lambda_i \subset T^*V \setminus 0$ 和 $\Gamma_i \subset T^*\mathbb{P}_V \setminus 0$，使得 $\mathrm{WF}(\zeta_i) \subset (\Lambda_i, \Gamma_i)$，并满足以下条件：

–
There are no $(x_i, [\xi]) \in \mathbb{P}_V, i = 1, 2$ and $\eta \in T^*_{[\xi]}\mathbb{P}_+(V^*) \subset T^*_{(x_i,[\xi])}\mathbb{P}_V$ such that $(x_1, [\xi], \eta) \in \Gamma_1$ and $(x_2, [\xi], -\eta) \in \Gamma_2$.

命题 7.2。若 ζ_1 与 ζ_2 横截，则卷积 $\zeta_1 * \zeta_2$ 有良好定义。更确切地说，将上一条定义中的 (Λ_i, Γ_i) 记作如上，紧支撑光滑赋值在 V 上的卷积可扩张为

一个联合序列连续映射

$$\mathcal{V}^{-\infty}_{c,\Lambda_1,\Gamma_1}(V)\times\mathcal{V}^{-\infty}_{c,\Lambda_2,\Gamma_2}(V)\to\mathcal{V}^{-\infty}_{c}(V).$$

证明。 根据（Λ， Γ）如 [12, 命题 4。1], 外积扩展为一个联合序列连续映射

$$\mathcal{V}^{-\infty}_{c,\Lambda_1,\Gamma_1}(V)\times\mathcal{V}^{-\infty}_{c,\Lambda_2,\Gamma_2}(V)\to\mathcal{V}^{-\infty}_{c,\Lambda,\Gamma}(V\times V).$$

此外，推前扩展为一个序列连续映射

$$\mathcal{V}^{-\infty}_{c,\Lambda,\Gamma}(V\times V)\to\mathcal{V}^{-\infty}_{c}(V),$$

条件是 Γ 与 $T^*_{(V\times V)\ \times_V\mathbb{P}_V}\mathbb{P}_{V\times V}$ [12, 命题 4.5] 不相交。为验证这一条件，注意子流形（$V\times V$） $\times_V\mathbb{P}_V$由所有点（x_1， x_2， [ξ： ξ]） $\in\mathbb{P}_{V\times V}$组成。于是，很容易验证

$$\Gamma_{(x_1,x_2,[\xi:\xi])}=\{(\rho_1,\rho_2):\rho_i\in\Gamma_i|_{(x_i,[\xi])}\},$$

这里我们使用单射

$$T^*_{(x_1,[\xi])}\mathbb{P}_V\oplus T^*_{(x_2,[\xi])}\mathbb{P}_V\hookrightarrow T^*_{(x_1,x_2,[\xi:\xi])}\mathbb{P}_{V\times V}$$

它是投影的对偶映射

$$d(\Phi\circ F^{-1}):T_{(x_1,x_2,[\xi:\xi])}\mathbb{P}_{V\times V}\twoheadrightarrow T_{(x_1,[\xi])}\mathbb{P}_V\oplus T_{(x_2,[\xi])}\mathbb{P}_V$$

来自 [12, 第 4 节.1]。

我们根据分解写作 $\rho_i=\rho_i'+\rho_i''$

$$T^*_{(x_i,[\xi])}\mathbb{P}_V=T^*_{x_i}V\oplus T^*_{[\xi]}\mathbb{P}_+(V^*).$$

那么，(ρ_1,ρ_2) 在 $T_{(x_1,x_2,[\xi:\xi])}(V\times V)\times_V\mathbb{P}_V$ 上为零，当且仅当 $\rho_1'=\rho_2'=0$ 且 $\rho_1''=-\rho_2''$。根据我们的横截性假设，当 $(\rho_1,\rho_2)\in\Gamma_{(x_1,x_2,[\xi:\xi])}$ 时，这种情况绝不会发生，因此结论成立。□

我们想比较紧支撑赋值的卷积与平移不变赋值的卷积，因此首先需要回顾一些定义。更多信息请参阅 [10, 60]。

V 中凸体的集合记为 $\mathcal{K}^n$。 V 上的赋值是一个映射 $\mu\colon\mathcal{K}^n\to\mathbb{R}$ ，满足

$$\mu(K\cup L)+\mu(K\cap L)=\mu(K)+\mu(L)$$

只要 $K,L,K\cup L\in\mathcal{K}^n$。平移不变且连续的赋值所构成的向量空间记为 Val。它有如下分解：$\mathrm{Val}=\bigoplus_{k=0}^n\mathrm{Val}_k$，其中 Val_k 表示由 k-齐次元素构成的子空间。

空间 Val 是一个巴拿赫空间，并且带有群 GL(n) 的自然作用。该作用的光滑向量构成一个稠密子空间 Val^∞ ，它具有 Fr´echet 空间拓扑学。

光滑平移不变赋值 $\mu\in\mathrm{Val}^\infty$ 可写为

$$\mu(K)=\int_K\phi+\int_{N(K)}\omega,$$

其中 $N(K)$ 是凸体 K 的法循环（例如参见 [52]），而 $\phi \in \Omega^n(V)^{tr}$ 和 $\omega \in \Omega^{n-1}(\mathbb{P}_V)^{tr}$ 是平移不变形式。将其与（2.5）比较，容易证明 $\mathrm{Val}^\infty(V) = (\mathcal{V}^\infty(V))^{tr}$，即“光滑平移不变赋值”的两种定义是一致的。

光滑平移不变赋值的卷积是在 $\mathrm{Val}^\infty \otimes \mathrm{Dens}(V^*)$ 上定义的交换且结合的乘积，其特征性质为

$$[\mathrm{vol}(\bullet + A) \otimes \mathrm{vol}^*] * [\mathrm{vol}(\bullet + B) \otimes \mathrm{vol}^*] = [\mathrm{vol}(\bullet + A + B) \otimes \mathrm{vol}^*]$$

对于所有边界光滑且具有正曲率的凸体 A, B。

Alesker 利用光滑平移不变赋值的乘积，构造了 [6,定理 6.1。1] 一个单射映射

$$\mathrm{PD} : \mathrm{Val}^\infty(V) \hookrightarrow (\mathrm{Val}^\infty(V))^* \otimes \mathrm{Dens}(V) =: \mathrm{Val}^{-\infty}(V)$$

其像稠密。右侧的元素称为平移不变广义赋值。与定理 2.10 类似，它们可以唯一地表示为一对流 (C, T)，其中 C 是定义在 V 上的平移不变 n-流（即积分流的倍数），而 T 是定义在 $\mathbb{P}_V$ 上的平移不变 Legendrian ($n-1$)-闭流。赋值的波前集定义为 T 的波前集；由于平移不变性，它可以表示为 $T^*\mathbb{P}_+(V^*) \setminus 0$ 的闭锥形子集。$\mathrm{Val}^{-\infty}(V)$ 中波前集包含于某个闭锥集 $\Gamma \subset T^*\mathbb{P}_+(V^*) \setminus 0$ 的赋值所成的子集记为 $\mathrm{Val}^{-\infty}_\Gamma(V)$。它赋有 Hörmander 拓扑。

–

定义 7.3。若存在闭锥集 $\Gamma_i \subset T^*\mathbb{P}_+(V^*) \setminus 0$，使得 $\mathrm{WF}(\mu_i) \subset \Gamma_i$，且 $\Gamma_1 \cap s(\Gamma_2) = \emptyset$，其中 $s\colon T^*\mathbb{P}_+(V^*) \to T^*\mathbb{P}_+(V^*)$ 是纤维中乘以 -1 的运算，则 $\mathrm{Val}^{-\infty}(V) \otimes \mathrm{Dens}(V^*)$ 中的两个元素 μ_1, μ_2 称为横截的。

命题 7.4 ([17, 命题 4。7])。若 μ_1，$\mu_2 \in \mathrm{Val}^{-\infty}(V) \otimes \mathrm{Dens}(V^*)$ 横截，则卷积积 $\mu_1 * \mu_2$ 有定义。更确切地说，若 Γ_1，Γ_2 满足上一条定义中的条件，则卷积可扩展为一个联合序列连续映射

$$\left(\mathrm{Val}^{-\infty}_{\Gamma_1}(V) \otimes \mathrm{Dens}(V^*)\right) \times \left(\mathrm{Val}^{-\infty}_{\Gamma_2}(V) \otimes \mathrm{Dens}(V^*)\right) \to \mathrm{Val}^{-\infty}(V) \otimes \mathrm{Dens}(V^*).$$

为说明下一个定理的动机，我们回顾两个与赋值卷积有关的结果。记 vol 为 V 上任意选取的勒贝格测度，记 vol^* 为 V^* 上的对偶勒贝格测度，使得 $\mathrm{vol} \otimes \mathrm{vol}^*$ 与这些选择无关。

定理 7.5 ([12, 定理 2])。定义一个映射

$$\widetilde{F} : \mathcal{V}^\infty_c(V) \to \mathcal{V}^\infty(V)^{tr} \otimes \mathrm{Dens}(V^*),$$
$$\zeta \mapsto \int_V \zeta(\bullet - x) d\,\mathrm{vol}(x) \otimes \mathrm{vol}^*$$

并令

$$F : \mathcal{V}_{\mathrm{c}}^{\infty}(V) \to \mathrm{Val}^{\infty}(V) \otimes \mathrm{Dens}(V^*)$$

$\widetilde{\ }$是 F与自然同构 $\mathcal{V}^{\infty}(V)^{tr} \otimes \mathrm{Dens}(V^*) \cong \mathrm{Val}^{\infty}(V) \otimes \mathrm{Dens}(V^*)$的复合。则 F是一个满射同态，并且关于两侧的卷积积保持同态。

$\widehat{\ }$多胞体代数 $\Pi(V)$ 是由所有符号 $P, \widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ \ \ }$ $\widehat{\ \ \ }$生成的代数，其中 P是一个多面体，并满足以下关系：当 $P + Q = P \cup Q + P \cap Q$ 时 $P, Q, P \cup Q$ 为多胞体，且 $P + x = P$对所有 $x \in \widehat{V}$均成立。其 $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ \ \ }$乘积在生成元上定义为 $P \cdot Q := P + Q$，参见 [48]。注意，多胞体的示性函数是一个可构造函数，因此它定义了一个广义赋值 $[\mathbf{1}_P]$。这就是我们偏离标准$\widehat{\ }$记号的原因；标准记号使用 $[P]$ 而不是 P。

定理 7.6 ([17, 定理 2。5])。 多面体上的映射

$$M(P) := [\mu \mapsto \mu(P)] \in \mathrm{Val}^{\infty}(V)^* \cong \mathrm{Val}^{-\infty}(V) \otimes \mathrm{Dens}(V^*)$$

可扩展为一个单射映射 $M\colon \Pi(V) \to \mathrm{Val}^{-\infty}(V) \otimes \mathrm{Dens}(V^*)$。此外，若 $x, y \in \Pi(V)$ 处于一般位置，则 $M(x)$ 和 $M(y)$ 横截，且 $M(x \cdot y) = M(x) * M(y)$。

下文中，我们将用 $\mu(\zeta)$ 简记 $\mu \in \mathrm{Val}^{\infty}(V) \subset \mathcal{V}^{\infty}(V)$ 与 $\zeta \in \mathcal{V}_{\mathrm{c}}^{-\infty}(V)$ 之间的自然配对。我们定义映射

$$\begin{aligned} M : \mathcal{V}_{\mathrm{c}}^{-\infty}(V) &\to \mathrm{Val}^{-\infty}(V) \otimes \mathrm{Dens}(V^*) \cong \mathrm{Val}^{\infty}(V)^*, \\ \zeta &\mapsto [\mu \mapsto \mu(\zeta), \mu \in \mathrm{Val}^{\infty}(V)]\,. \end{aligned}$$

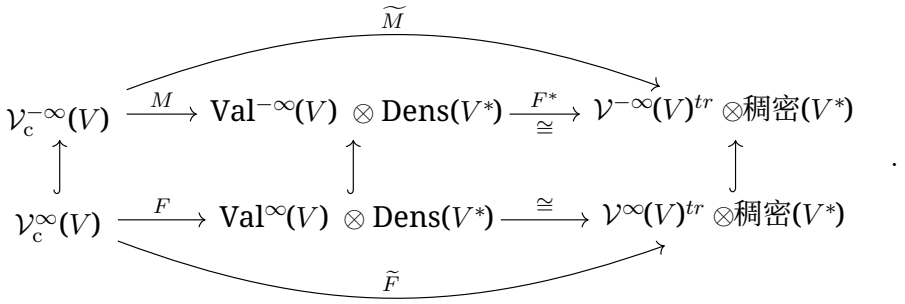
注意，对于多胞体，我们有 $M([\mathbf{1}_P]) = M(P)$，其中右侧指的是定理 7.6 中的映射，这也说明了为何使用相同的字母。

接下来，我们定义一个映射

$$\begin{aligned} \widetilde{M} : \mathcal{V}_{\mathrm{c}}^{-\infty}(V) &\to \mathcal{V}^{-\infty}(V)^{tr} \otimes \mathrm{Dens}(V^*), \\ \zeta &\mapsto \int_V \zeta(\bullet - x) d\,\mathrm{vol}(x) \otimes \mathrm{vol}^*\,. \end{aligned}$$

这里，平移 $t_x\colon V \to V$ 定义为 $(t_x)_* \zeta$ $\zeta(\bullet - x) \in \mathcal{V}_{\mathrm{c}}^{-\infty}(V)$。

引理 7.7。 映射的转置 F^* F （定理 7.5 中的）是一个同构。下图交换



证明。 关于 F^* 的论述，以及右侧方形的交换性，在 [17,命题 2 中得到了证明。5]。

我们来证明 $\widetilde{F} \circ M$。对于多胞体，这一点已在 [17,引理 3 中得到证明，2] 一般情形也可沿用同样的思路得到。设 $\zeta \in \mathcal{V}_c^{-\infty}(V)$ 且 $\beta \in \mathcal{V}_c^{\infty}(V)$。于是

$$\begin{aligned}
\langle F^* \circ M(\zeta), \beta \rangle &= \langle M(\zeta), F(\beta) \rangle \\
&= F(\beta)(\zeta) \\
&= \widetilde{F}(\beta)(\zeta) \\
&= \int_V \langle \beta(\bullet - x), \zeta \rangle \, \mathrm{dvol}(x) \otimes \mathrm{vol}^* \\
&= \int_V \langle \beta, \zeta(\bullet + x) \rangle \, \mathrm{dvol}(x) \otimes \mathrm{vol}^* \\
&= \int_V \langle \beta, \zeta(\bullet - x) \rangle \, \mathrm{dvol}(x) \otimes \mathrm{vol}^* \\
&= \langle \widetilde{M}(\zeta), \beta \rangle.
\end{aligned}$$

从定义显然可知， M 到 $\mathcal{V}_c^{\infty}(V)$ 的限制等于 F，这意味着左侧方形具有交换性。

□

引理 7.8. 令 (Λ_1, Γ_1) 满足 $\Lambda_1 \subset T^*V \setminus 0, \Gamma_1 \subset \underline{T}^*\mathbb{P}_V \setminus 0$。我们定义

$$\widehat{\Gamma} := \left\{ ([\xi], \eta'') \in T^*\mathbb{P}_+(V^*) : \exists \widetilde{x} \in V \ \textit{such that} \ (0, \eta'') \in \Gamma_1|_{(\widetilde{x}, [\xi])} \right\}.$$

那么，对于 $\zeta \in \mathcal{V}^{-\infty}{}_{c\,\Lambda_1,\Gamma_1}(V)$ 有 $\mathrm{WF}(M(\zeta)) \subset \Gamma$，且该映射

$$M : \mathcal{V}^{-\infty}_{c,\Lambda_1,\Gamma_1}(V) \to \mathrm{Val}^{-\infty}_{\widehat{\Gamma}}(V) \otimes \mathrm{Dens}(V^*)$$

是序列连续的。

证明。 为简化记号，我们在 V 上固定一个勒贝格测度，并用它将 $\mathrm{Dens}(V^*)$ 与 $\cong \mathbb{C}$ 识别。令 (C_1, T_1) 为相应的流对

ζ。特别地，我们有 $\mathrm{WF}(T_1) \subset \Gamma_1$。令 $\tau' \colon \mathbb{P}_V \times V \to \mathbb{P}_V$ 为映射 $(x,[\xi],y) \mapsto (x+y,[\xi])$，并设

$$T := (\overline{\tau}')_*(T_1 \boxtimes \mathrm{vol}).$$

固定 $(x,[\xi],y) \in \mathbb{P}_V \times V$ 和 $v \in T_{(x,[\xi])}\mathbb{P}_V$。则 $(v,0) \in T_{(x,[\xi],y)}(\mathbb{P}_V \times V)$ 且 $d\tau'(v,0) = dt_y(v)$，其中 $t_y \colon \mathbb{P}_V \to \mathbb{P}_V$ 是按 y 进行的平移。

设 ω 是 $\mathbb{P}_V$ 上的紧支撑 $(n-1)$-形式。我们可以将 $t_y^*\omega$ 视为 $\mathbb{P}_V \times V$ 上的 $(n-1)$-形式。更确切地说，它在点 $(x,[\xi],y)$ 处的值由 $(t_y^*\omega)|_{(x,[\xi])} \in \wedge^{n-1} T^*_{(x,[\xi])}\mathbb{P}_V \subset \wedge^{n-1} T^*_{(x,[\xi],y)}(\mathbb{P}_V \times V)$ 给出。

由上述结果可知，$(\tau')^*\omega|_{(x,[\xi],y)} = t_y^*\omega|_{(x,[\xi])}$ 模去由形式 dy^j 生成的理想，其中 $j = 1,\dots,n$。由于 $T_1 \boxtimes \mathrm{vol}$ 在该理想上为零，我们得到

$$\langle T, \omega \rangle = \langle T_1 \boxtimes \mathrm{vol}, (\overline{\tau}')^*\omega \rangle = \left\langle T_1, \int_V t_y^*\omega dy \right\rangle = \left\langle \int_V (t_y)_* T_1 dy, \omega \right\rangle.$$

因此，流 T 是与广义赋值 $M(\zeta) = \int_V t_{y*}\zeta dy$ 相对应的勒让德循环。

由于 vol 是光滑流，$\mathrm{WF}(T_1 \boxtimes \mathrm{vol})|_{(x,[\xi],y)} = \{(\kappa,0) : \kappa \in \mathrm{WF}(T_1)|_{(x,[\xi])}\}$。这意味着 $\mathrm{WF}(T)|_{(x,[\xi])} \subset \{(\kappa,0) : \kappa \in \Gamma_1|_{(x,[\xi])}\}$。我们可以写成 $\kappa = (\kappa', \kappa'')$，其中 $\kappa' \in T^*_x V$ 且 $\kappa'' \in T^*_{[\xi]}\mathbb{P}_+(V^*)$。由 [27, 命题 2.15]可得

$$\mathrm{WF}(T)|_{(x,[\xi])} \subset \Big\{ (\eta',\eta'') \in T^*_{(x,[\xi])}\mathbb{P}_V : \exists \widetilde{x} \in V, (\kappa',\kappa'') \in \Gamma_1|_{(\widetilde{x},[\xi])}, \\ (d\overline{\tau}'|_{(\widetilde{x},[\xi],x-\widetilde{x})})^*(\eta',\eta'') = (\kappa',\kappa'',0) \Big\}.$$

由于 $(d\overline{\tau}'|_{(\widetilde{x},[\xi],x-\widetilde{x})})^*(\eta', \eta'') = (\eta', \eta'', \eta')$，最后一个集合恰好是 Γ 在嵌入 $T^*\mathbb{P}_+(V^*) \setminus 0 \hookrightarrow T^*\mathbb{P}_V \setminus 0$ 下的像，因此 $M(\zeta)$ 的波前集包含于 Γ。由于流的外积和推前是关于相应 H¨ormander 拓扑的序列连续运算 [27, 命题 2.15 和 2.16]，，故 M 具有序列连续性。□

下一个定理推广了定理 7.5 和7.6。

定理 7.9。如果 ζ_1、$\zeta_2 \in \mathcal{V}_c^{-\infty}(V)$ 是横截的，那么 $M(\zeta_1)$ 和 $M(\zeta_2)$ 也彼此横截，并且

$$M(\zeta_1 * \zeta_2) = M(\zeta_1) * M(\zeta_2).$$

证明。设 $\Lambda_i \subset \underline{T}^*V \setminus 0$ 和 $\Gamma_i \subset T^*\underline{\mathbb{P}}_V \setminus 0$ 如定义 7.1中所述。设 $\Gamma_i \subset T^*\mathbb{P}_+(V^*) \setminus 0$ 为定理 7.8中定义的相应集合。显然，Γ_1 和 Γ_2 满足定义 7.3中的条件。这说明 $M(\zeta_1)$ 与 $M(\zeta_2)$ 横截。

利用 [11, 引理 8.2]，我们可以用一列光滑赋值 $\zeta_j^i \in \mathcal{V}_c^\infty(V)$ 近似 ζ_j 在 $\mathcal{V}^{-\infty}{}_{c\,\Lambda_j,\Gamma_j}(V)$ 中的情形，其中 $j = 1,2$。

由引理 7.8， $M(\zeta_j^i)$ 在 $\mathrm{Val}^{-\infty}_{\widehat{\Gamma}_j}(V) \otimes \mathrm{Dens}(V^*)$ 中收敛到 $M(\zeta_j)$，因此定理 7.4 意味着 $M(\zeta_1^i) * M(\zeta_2^i)$ 在 $\mathrm{Val}^{-\infty}(V) \otimes \mathrm{Dens}(V^*)$ 中收敛到 $M(\zeta_1) * M(\zeta_2)$。

另一方面， $\zeta_1^i * \zeta_2^i$ 收敛到 $\zeta_1 * \zeta_2$ 在 $\mathcal{V}_c^{-\infty}(V)$，由定理7.2。定理7.8 (其中 $\Gamma_1 = T^*\mathbb{P}_V \setminus 0$) 则推出 $M(\zeta_1^i * \zeta_2^i)$ 收敛到 $M(\zeta_1 * \zeta_2)$，在 $\mathrm{Val}^{-\infty}(V)$ 中 $\otimes \mathrm{Dens}(V^*)$。

由于 $M(\zeta_1^i) * M(\zeta_2^i) = F(\zeta_1^i) * F(\zeta_2^i) = F(\zeta_1^i * \zeta_2^i) = M(\zeta_1^i * \zeta_2^i)$，根据定理7.5，证明完成。□

7.2. 一般位置下的可构造函数。本小节的目的是证明以下结果。

命题 *7.10.* 设 $G \subset O(n)$ 是一个在单位球面上具有传递作用的李子群，且 $\varphi_1, \varphi_2 \in CF(\mathbb{R}^n)$ 紧支撑。那么，对于几乎所有的 $(g_1, g_2) \in G \times G$，可构造函数 $(g_1)_*\varphi_1$ 和 $(g_2)_*\varphi_2$ 都满足推论 *4* 的假设。特别地，广义赋值 $[(g_1)_*\varphi_1]$ 和 $[(g_2)_*\varphi_2]$ 按照定理 *7.1* 的意义是横截的。

证明。我们要证明，对于几乎所有的 (g_1, g_2)，$N((g_1)_*\varphi_1 \boxtimes (g_2)_*\varphi_2)$ 的法循环与加法映射的微分横截，也就是说，与集合 $X \times_Y \mathbb{P}_Y$ 横截，其中 $X = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 和 $Y = \mathbb{R}^n$。注意，$X \times_Y \mathbb{P}_Y \subset \mathbb{P}_X \setminus (\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2)$ 由所有满足 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ 且 $\eta \in T^*_{x_1+x_2}\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 的元组 $(x_1, x_2, [\eta : \eta]) \in \mathbb{P}_X$ 组成。

首先，我们构造法循环的角分层。取 $N(\varphi_1)$ 和 $N(\varphi_2)$ 的角分层。那么，$\widehat{}$法循环 $N(\varphi_1 \boxtimes \varphi_2)$ 的分层由所有形如 S 的对象构成

$$\widehat{S} := \{(x_1, x_2, [\xi_1 : \lambda\xi_2]) : (x_i, [\xi_i]) \in S_i \text{ for } i = 1, 2, \lambda \in \mathbb{R}_+\}, \tag{7.1}$$

其中， S_i 是 $N(\varphi_i)$ 的一个分层。

类似地， $N((g_1)_*\varphi_1 \boxtimes (g_2)_*\varphi_2)$ 的分层由所有形如以下形式的分层构成

$$\{(x_1, x_2, [\xi_1 : \lambda\xi_2]), (x_i, [\xi_i]) \in (g_i, g_i)S_i \text{ for } i = 1, 2, \lambda \in \mathbb{R}_+\}, \tag{7.2}$$

利用欧几里得度量，我们可以将 $\mathbb{P}_Y$ 与 $\mathbb{R}^n \times S^{n-1}$ 通过如下方式对应：将 $(x, v) \in \mathbb{R}^n \times S^{n-1}$ 映射为 $(x, [\xi])$，其中 $\xi = \langle v, \bullet \rangle$。我们可以通过将 $(x_1, x_2, v_1, v_2, \varphi)$ 映射为 $(x_1, x_2, [\cos(\varphi)\xi_1 : \sin(\varphi)\xi_2]) \in \mathbb{P}_X \setminus (\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2)$，将 $\mathbb{P}_X \setminus (\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2)$ 与 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times S^{n-1} \times S^{n-1} \times \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 对应起来，其中 $\xi_i = \langle v_i, \bullet \rangle$。

在这种识别下，我们的分层是 φ_1的角分层、 φ_2 的角分层与开区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$的显然分层的乘积，因此根据引理3.2，它是角分层。严格来说，由于该区间是开区间，我们只能得到该分层在 $\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$的任意开邻域之外是角分层，这显然足以满足我们的目的。

固定 S_1， S_2 和 $\widehat{S}$ 如上所述。我们断言该映射

$$\Xi : \widehat{S} \times G \times G \to \mathbb{P}_X$$
$$(x_1, x_2, [\xi_1 : \lambda\xi_2], g_1, g_2) \mapsto (g_1x_1, g_2x_2, [g_1\xi_1 : \lambda g_2\xi_2])$$

与 $X \times_Y \mathbb{P}_Y$ 横截。

为此，我们使用已有的识别，并考虑一点

$$p = (x_1, x_2, v_1, v_2, \varphi, g_1, g_2) \in \Xi^{-1}(X \times_Y \mathbb{P}_Y)$$

并令 $q = \Xi(p) = (g_1 x_1,\ g_2 x_2,\ v,\ v,\ \varphi)$，其中 $v = g_1 v_1 = g_2 v_2$。那么 $T_{x_1}\mathbb{R}^{n\frown}$和 $T_{x_2}\mathbb{R}^n$ 包含于 $T_q(X \times_Y \mathbb{P}_Y)$ 中。根据 S 的定义，子空间 $T_\varphi\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 属于 $d\Xi|_p$的像。根据我们对 G 的假设，映射 $g \in G \mapsto gv \in S^{n-1}$ 是一个淹没。因此，$d\Xi|_p$ 的像包含一个形如 $(*,\ 0,\ u,\ 0,\ 0)$ 的向量，以及对每个 $u \in T_v S^{n-1}$，一个形如 $(0,\ *,\ 0,\ u,\ 0)$ 的向量。这就证明了该断言。

根据 Thom 横截性定理 [39]，，对于几乎所有的 $(g_1, g_2,\ \Xi(\bullet, g_1, g_2)$ 的像与 $X \times_Y \mathbb{P}_Y$横截。这个像恰好是集合（7.2）。对所有分层都这样处理，可得对于几乎所有的 (g_1, g_2)，$N((g_1)_*\varphi_1 \boxtimes (g_2)_*\varphi_2$的所有分层都与 $X \times_Y \mathbb{P}_Y$横截。

给定这样一对 (g_1, g_2)，令 $\psi_i := (g_i)_*\varphi_i \in \mathrm{CF_c}(\mathbb{R}^n)$。那么 ψ_1和 ψ_2 满足推论4的假设。下面证明 ψ_1 和 ψ_2按照定义7.1也是横截的。

令 Γ_i 为 $N(\psi_i)$ 的波前集。假设存在 $(x_1, [\xi], \eta) \in \Gamma_1$ 和 $(x_2, [\xi], -\eta) \in \Gamma_2$，使得 $\eta \in T^*_{[\xi]}\mathbb{P}_+(V^*) \subset T^*_{(x_i,[\xi])}\mathbb{P}_V$。令 S_i 为包含 $(x_i, [\xi])$ 的 $N(\psi_i)$ 的分层。根据分层的角性，η 在 $T_{(x_i,[\xi])}S_i$ 上消失。包含 $(x_1, x_2, [\xi : \xi])$ 的 $N(\psi_1 \boxtimes \psi_2)$ 的分层为 S，由 (7.1) 可知。由于 $(\eta, -\eta)$ 在 $T_{(x_1,x_2,[\xi:\xi])}$ $X \times_Y \mathbb{P}_Y$ 上消失，且 $\frown$ 在 $T_{(x_1,x_2,[\xi:\xi])}S$ 上消失，因此这与 $X \times_Y \mathbb{P}_Y{}^{\frown}$ 和 S 的横截性矛盾。□

注记 7.11. 显然，对于所有 $x \in V$，映射 M 的核都包含 $\varphi - t_x^*\varphi$。鉴于上文提到的关于多胞体代数的结果，我们很容易猜想，M 的核由这类元素生成。这样一来，我们便可以考虑模去平移后的可构造函数代数，并将其嵌入 $\mathrm{Val}^{-\infty}(V) \otimes \mathrm{Dens}(V^*)$。

然而，下面这个简单例子表明，该猜想并不成立。取 $n = 2$，令 $\varphi_1 = 2 \cdot \mathbf{1}_{S^1}$ 为单位圆示性函数的两倍，$\varphi_2 = \mathbf{1}_{S_2^1}$ 为半径为 2 的圆的示性函数。若 μ是定义在 V上的光滑平移不变赋值，则可将其分解为齐次分量 $\mu = \mu_0 + \mu_1 + \mu_2$，其中 μ_0 是欧拉示性数的倍数，μ_2 是勒贝格测度的倍数。显然，欧拉示性数和勒贝格测度在 φ_1 和 φ_2上均为零。由于 μ_1 是 1 次齐次的，我们有 $\mu_1(\varphi_2) = 2\mu_1(S^1) = \mu_1(\varphi_1)$。因此，$\varphi_1 - \varphi_2$ 属于 M 的核。另一方面，$\varphi_1 - \varphi_2$ 不能写成有限个形如 $\varphi - t_x^*\varphi$的函数之和，因为 S^1的每段圆弧的曲率都是 1，而 S_2^1 的每段圆弧的曲率是 $1\ 2$。

–

7.3. **加性运动学公式**。本节假设 G 是 $\mathrm{O}(n)$ 的一个闭子群，且在单位球面上具有传递作用。利用 $\mathbb{R}^n$ 的勒贝格测度，我们可以将 $\mathrm{Dens}(V)$ 识别为 $\cong \mathbb{C}$。连通

在单位球面上有效且传递作用的群由 Montgomery-Samelson 和 Borel 分类：[23, 49]：

$$\mathrm{SO}(n),\ \mathrm{U}(n/2),\ \mathrm{SU}(n/2),\ \mathrm{Sp}(n/4),\ \mathrm{Sp}(n/4)\cdot\mathrm{U}(1),$$
$$\mathrm{Sp}(n/4)\cdot\mathrm{Sp}(1),\ \mathrm{G}_2,\ \mathrm{Spin}(7),\ \mathrm{Spin}(9).$$

Alesker [5] 发现，Val^G 中定义在 V 上的连续、平移不变且 G不变赋值构成有限维向量空间，并且所有这类赋值都是光滑的。

给定 Val^G的一组基 $\mu_1,\dots,\mu_N$，则有如下加性运动学公式：

$$\int_G \mu_i(K+gL)dg=\sum_{k,l} c^i_{k,l}\mu_k(K)\mu_l(L),\qquad \text{for all } K,L\in\mathcal{K}^n. \tag{7.3}$$

确定这样一组基并显式计算常数$c^i_{k,l}$ 是一个困难的问题。在 $G=\mathrm{O}(n)$ 的情形下，可以利用 Hadwiger定理和模板方法（即代入足够多不同的例子来计算这些常数）来解决。对于上文列表中的其他已知情形，特别是 $G=\mathrm{U}(n/2)$，加性运动学公式与卷积积之间的以下联系是关键。

定义映射 $a:\ \mathrm{Val}^G\to\mathrm{Val}^G\otimes\mathrm{Val}^G$，使得 $a(\mu_i)=\sum_{k,l} c^i_{k,l}\mu_k\otimes\mu_l$。容易验证，该映射与基的选取无关，因为 $a(\mu)(K,L)=\int_G\mu(K+gL)dg$。

在 [19] 中已证明，PD 在 G 不变赋值上的限制（记作 PD^G）是一个同构，且以下图表可交换：

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{Val}^G & \xrightarrow{\ a\ } & \mathrm{Val}^G\otimes\mathrm{Val}^G\\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{PD}^G} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{PD}^G\otimes\mathrm{PD}^G}\\ \mathrm{Val}^{G*} & \xrightarrow{\ c^*\ } & \mathrm{Val}^{G*}\otimes\mathrm{Val}^{G*}\end{array} \tag{7.4}$$

其中 c^* 表示卷积积 $c:\ \mathrm{Val}^G\otimes\mathrm{Val}^G\to\mathrm{Val}^G$ 的伴随。

本节旨在证明这些公式对紧支撑可构造函数成立的一个版本。注意，根据例2.13，我们可以在紧支撑可构造函数上求赋值 $\mu\in\mathrm{Val}^G$ 的值。

定理 7.12（见定理 5）。设 $G\subset\mathrm{O}(n)$ 是一个在球面上具有传递作用的闭子群。公式（7.3）对 $\varphi_1,\ \varphi_2\in\mathrm{CF_c}(\mathbb{R}^n)$ 成立，且常数相同：

$$\int_G \mu_i(\varphi_1 * g_*\varphi_2)dg=\sum_{k,l} c^i_{k,l}\mu_k(\varphi_1)\mu_l(\varphi_2).$$

证明。设 $\varphi_1,\ \varphi_2 \in \mathrm{CF_c}(\mathbb{R}^n)$ 且 $\mu_i \in \mathrm{Val}^G$。那么根据 G 对 μ_i 的不变性，

$$\begin{aligned}
\int_G \mu_i(\varphi_1 * g_*\varphi_2)dg &= \int_{G\times G} \mu_i((g_1)_*\varphi_1 * (g_2)_*\varphi_2)dg_1dg_2 \\
&= \int_{G\times G} \langle \mu_i, M((g_1)_*\varphi_1 * (g_2)_*\varphi_2)\rangle\, dg_1dg_2 \\
&= \int_{G\times G} \langle \mu_i, M((g_1)_*\varphi_1) * M((g_2)_*\varphi_2)\rangle\, dg_1dg_2 \quad \text{(Cor. 4, Thm. 7.9, Prop. 7.10)} \\
&= \left\langle \mu_i, \int_G M((g_1)_*\varphi_1)dg_1 * \int_G M((g_2)_*\varphi_2)dg_2 \right\rangle \\
&= \left\langle c^*\circ \mathrm{PD}^G(\mu_i), \int_G M((g_1)_*\varphi_1)dg_1 \otimes \int_G M((g_2)_*\varphi_2)dg_2 \right\rangle \\
&\overset{(7.4)}{=} \left\langle (\mathrm{PD}^G\otimes \mathrm{PD}^G)\circ a(\mu_i), \int_G M((g_1)_*\varphi_1)dg_1 \otimes \int_G M((g_2)_*\varphi_2)dg_2 \right\rangle \\
&= a(\mu_i)(\varphi_1\otimes\varphi_2) \quad \text{(by } (G\times G)\text{-invariance of } a(\mu_i)) \\
&= \sum_{k,l} c^i_{k,l}\mu_k(\varphi_1)\mu_l(\varphi_2).
\end{aligned}$$

□

7.4. 关于 S^3 的乘法运动学公式。本节中，我们考虑 $G = \mathrm{SO}(4)$ 在三维球面上的作用。

命题 7.13。设 $\varphi_1,\ \varphi_2 \in \mathrm{CF}(S^3)$。那么，对于几乎所有的 $(g_1,\ g_2) \in G\times G$，广义赋值 $(g_1)_*\varphi_1$ 和 $(g_2)_*\varphi_2$ 满足定理4的假设。

证明。总体策略与命题7.2中的相同，只需做一些小幅调整。

将 S^3 视为单位四元数后，三维球面 $H := S^3$ 是一个李群。我们用 $L_h,\ R_h : H \to H$ 表示由 h 给出的左乘和右乘。

记 $X = H\times H$ 和 $Y = H$，并考虑乘法映射 $X \to Y$。我们希望找到 $N((g_1)_*\varphi_1 \boxtimes (g_2)_*\varphi_2)$ 的一个角分层，使其与子流形 $X \times_Y \mathbb{P}_Y$ 横截。

由于由 H 中元素进行的左乘和右乘都是微分同胚，因此有 $X \times_Y \mathbb{P}_Y \subset \mathbb{P}_X \setminus (\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2)$，所以只需研究开集 $\mathbb{P}_X \setminus (\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2)$ 内 $N((g_1)_*\varphi_1 \boxtimes (g_2)_*\varphi_2)$ 的分层。

为此，我们首先进行一些识别。利用左平移，我们可以将 $\mathbb{P}_H$ 与 $H \times \mathbb{P}_+(\mathfrak{h}^*)$ 识别。具体而言，元素 $(h,\ [\xi]) \in \mathbb{P}_H$ 被映射为 $(h,\ [dL_h^*\xi]) \in H \times \mathbb{P}_+(\mathfrak{h}^*)$。此外，利用度量，我们可以将 $\mathbb{P}_+(\mathfrak{h}^*)$ 与单位球面 $S^2 \subset \mathfrak{h}$ 识别，方法是将向量 $v \in S^2$

映射到 $[\langle \bullet, v\rangle]$。按照惯例， H 在 $\mathfrak{h}$ 上的伴随作用记作 Ad；它保持标量积不变，因此作用于 S^2。类似地，丛 $\mathbb{P}_{H\times H}$可以与 $H\times H\times \mathbb{P}_+(\mathfrak{h}^*\oplus\mathfrak{h}^*)$ 识别，方法是将 $(h_1,\ h_2,\ [\xi_1:\ \xi_2])$ 映射为 $(h_1,\ h_2,\ [dL^*_{h_1}\xi_1:\ dL^*_{h_2}\xi_2])$。接下来， $\mathbb{P}_+(\mathfrak{h}^*\oplus\mathfrak{h}^*)$ 可以与 S^5 识别。

根据我们的对应关系，有 $\mathbb{P}_X\setminus(\mathcal{M}_1\cup\mathcal{M}_2) = H\times H\times S^5_{++}$ 其中:

$$S^5_{++} := \left\{x\in S^5 : (x_1,x_2,x_3)\neq 0, (x_4,x_5,x_6)\neq 0\right\}.$$

这个集合可以用以下微分同胚来描述，称为球面连接:

$$S^2\times S^2\times\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to S^5_{++},\quad (v_1,v_2,\psi)\mapsto(\cos\psi v_1,\sin\psi v_2).$$

那么，在开集 $H\times H\times S^5_{++}$上定义 $N(\varphi_1\boxtimes\varphi_2)$ 的分层为以下各层:

$$\widehat{S} = \left\{(h_1,h_2,\cos\psi v_1,\sin\psi v_2) : (h_i,v_i)\in S_i \text{ for } i=1,2,\psi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right\},$$

其中， S_i 遍历角分层中所有分别为 $i=1$，2 定义 $N(\varphi_i)$ 的分层 $H\times S^2$ 。

为了在开集 $H\times H\times S^5_{++}$ 上得到定义 $N((g_1)_*\varphi_1\boxtimes(g_2)_*\varphi_2)$ 的分层，考虑群同态 $H\times H\to G$，它将 $(e,\ f)$ 映射到映射 $x\mapsto exf$。其核为 $\{(1,\ 1),\ (-1,\ -1)\}$，且 $H\times H$ 是 G 的双重覆盖。元素 $(e,\ f)\in H^2$ 通过 $L_eR_f\otimes \mathrm{Ad}f$ 作用于 $H\times S^2$，而识别 $\mathbb{P}_H\cong H\times\mathbb{P}_+(\mathfrak{h}^*)$ 对这一作用是 $(\overline{H}\times H)$-等变的。接着，考虑 $g_i\in G$ 的一个提升 $(e_i,\ f_i)\in H^2$，这些分层

$$\left\{\left(e_1h_1\overline{f}_1, e_2h_2\overline{f}_2, \cos\psi\,\mathrm{Ad}_{f_1}v_1, \sin\psi\,\mathrm{Ad}_{f_2}v_2\right) : (h_i,v_i)\in S_i \text{ for } i=1,2,\psi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right\} \tag{7.5}$$

在开集 $H\times H\times S^5_{++}$ 上定义 $N((g_1)_*\varphi_1\boxtimes(g_2)_*\varphi_2)$。

最后，我们声称映射 $\Xi:\ \widehat{S}\times H^4\to H\times H\times S^5_{++}$，它将

$$(h_1,h_2,(\cos\psi v_1,\sin\psi v_2),e_1,f_1,e_2,f_2)$$

to

$$(e_1h_1\overline{f}_1, e_2h_2\overline{f}_2, (\cos\psi\,\mathrm{Ad}_{f_1}v_1,\sin\psi\,\mathrm{Ad}_{f_2}v_2))$$

与 $X\times_Y\mathbb{P}_Y$ 横截。事实上，该映射是一个淹没，因为 H 对自身的左作用以及 H 在 $\mathbb{P}_+(\mathfrak{h}^*) = S^2$ 上的余伴随作用都是传递的。因此，Thom 横截性定理 [39] 保证，对于几乎所有的 $(e_1,f_1,e_2,f_2)\in H^4$，亚解析子集 $\Xi(\widehat{S},e_1,f_1,e_2,f_2)$（它等于式 (7.5) 中的集合）都与 $X\times_Y\mathbb{P}_Y$ 横截。

与定理 7.10 的证明中类似的论证表明，由式 (7.5) 给出的分层是角分层。□

由于 G在 S^3的单位球面丛上具有传递作用， G不变的 S^3 上的光滑赋值空间 $\mathcal{V}(S^3)^G$是有限维的。众所周知，它由克罗夫顿赋值 ν_0， ν_1， ν_2， ν_3张成。

设 $c\colon \mathcal{V}(S^3)^G \otimes \mathcal{V}(S^3)^G \to \mathcal{V}(S^3)^G$ 是 S^3上的卷积积。更准确地说，对于 $\zeta_1,\zeta_2 \in \mathcal{V}(S^3)^G$，外积 $\zeta_1\boxtimes\zeta_2 \in \mathcal{V}^\infty(S^3\times S^3)$经乘法映射 $S^3\times S^3 \to S^3$ 推前后，根据 [12, 定理 1] 仍是一个光滑赋值，记作 $c(\zeta_1,\zeta_2) = \zeta_1 * \zeta_2$。

我们用 PD^G 表示自然映射的复合

$$\mathcal{V}(S^3)^G \hookrightarrow \mathcal{V}^\infty(S^3) \overset{\mathrm{PD}}{\hookrightarrow} \mathcal{V}^{-\infty}(S^3) \twoheadrightarrow (\mathcal{V}(S^3)^G)^*.$$

该映射是一个向量空间同构；此外，$(\mathrm{PD}^G)^* = \mathrm{PD}^G$，参见 [21, 定义 2.14 和推论 2.18]。

命题 7.14。存在一个映射 $m\colon \mathcal{V}(S^3)^G \to \mathcal{V}(S^3)^G \otimes \mathcal{V}(S^3)^G$，使得对于 $\varphi_1,\varphi_2 \in \mathrm{CF}(S^3)$

$$m(\mu)(\varphi_1,\varphi_2) = \int_G \mu(\varphi_1 * g_*\varphi_2)dg, \tag{7.6}$$

且下图交换

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V}(S^3)^G & \xrightarrow{m} & \mathcal{V}(S^3)^G \otimes \mathcal{V}(S^3)^G \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{PD}^G} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{PD}^G\otimes\mathrm{PD}^G} \\ \mathcal{V}(S^3)^{G*} & \xrightarrow{c^*} & \mathcal{V}(S^3)^{G*} \otimes \mathcal{V}(S^3)^{G*} \end{array}. \tag{7.7}$$

证明。由于 PD^G 是一个同构，我们可以通过 m定义（7.7）。我们来验证（7.6）成立。

设 φ_1，$\varphi_2 \in \mathrm{CF}(S^3)$ 且 $\mu \in \mathcal{V}(S^3)^G$。广义赋值 $\zeta_i := \int_G [g_*\varphi_i]dg$ 是 G-不变的，因此是光滑的，即 $\zeta_i \in \mathcal{V}(S^3)^G$。由于 μ 和 ζ_i 是 G-不变的，我们有

$$\langle \mathrm{PD}^G(\mu),\zeta_i\rangle = \langle \mathrm{PD}(\mu),\zeta_i\rangle = \left\langle \mu, \int_G [g_*\varphi_i]dg \right\rangle = \int_G \mu(g_*\varphi_i)dg = \mu(\varphi_i). \tag{7.8}$$

现在我们来计算：

$$\begin{aligned} \int_G \mu(\varphi_1 * g_*\varphi_2)dg &= \int_{G\times G} \mu((g_1)_*\varphi_1 * (g_2)_*\varphi_2)dg_1dg_2 \quad (\mu \text{ is left-invariant}) \\ &= \int_{G\times G} \langle \mu, [(g_1)_*\varphi_1 * (g_2)_*\varphi_2]\rangle dg_1dg_2 \\ &= \int_{G\times G} \langle \mu, [(g_1)_*\varphi_1] * [(g_2)_*\varphi_2]\rangle dg_1dg_2 \quad (\text{Cor. } 4, \text{ Prop. } 7.13) \\ &= \left\langle \mu, \int_G [(g_1)_*\varphi_1]dg_1 * \int_G [(g_2)_*\varphi_2]dg_2 \right\rangle \\ &= \langle \mathrm{PD}^G(\mu), \zeta_1 * \zeta_2\rangle \quad (\mu \text{ and } \zeta_1*\zeta_2 \text{ are } G\text{-invariant}) \\ &= \langle c^* \circ \mathrm{PD}^G(\mu), \zeta_1 \otimes \zeta_2\rangle \\ &= \langle (\mathrm{PD}^G \otimes \mathrm{PD}^G) \circ m(\mu), \zeta_1 \otimes \zeta_2\rangle \\ &= m(\mu)(\varphi_1,\varphi_2) \quad \text{by (7.8)}, \end{aligned}$$

这就证明了（7.6）。 □

定理中给出的显式公式有两种推导方式：6。关于 S^3 上的不变赋值的卷积积代数已在 [18], 中计算得出，利用定理7.14即可将其转化为运动学公式。这里我们采用一种更直接的方法。

定理6的证明。令 $f_i(r) := \nu_i(B(1,\ r))$，其中 $B(1,\ r)$是一个半径为$r < \frac{\pi}{2}$、中心为单位元 $1 \in S^3$的闭测地球。于是 $f_i(r)$是维数为 r的全测地子流形的 $3-i$-管状邻域的归一化体积。利用该子流形周围的法坐标，可得

$$
\begin{aligned}
f_0(r) &= 1,\\
f_1(r) &= \frac{4}{\pi}\int_0^r \cos^2(t)dt = \frac{2(\cos(r)\sin(r)+r)}{\pi},\\
f_2(r) &= 2\int_0^r \sin(t)\cos(t)dt = \sin^2(r),\\
f_3(r) &= \frac{2}{\pi}\int_0^r \sin(t)^2 dt = \frac{r-\cos(r)\sin(r)}{\pi}.
\end{aligned}
$$

由定理7.14 可知，存在常数 $d^i_{k,\ l}$ 使得

$$\int_G \nu_i(\varphi_1 * g_*\varphi_2)dg = \sum d^i_{k,l}\nu_k(\varphi_1)\nu_l(\varphi_2), \quad \varphi_1,\varphi_2 \in \mathrm{CF}(S^3).$$

取 $\varphi_1 = \mathbf{1}_{B(1,r)}$，$\varphi_2 = \mathbf{1}_{B(1,s)}$，满足 $r+s < \frac{\pi}{2}$。那么对于每个 $g \in G$，都有 $\varphi_1 * g_*\varphi_2 = \mathbf{1}_{B(g,r+s)}$。因此必有

$$f_i(r+s) = \sum d^i_{k,l} f_k(r) f_l(s).$$

解这个方程组即可得到定理中给出的公式。□

References

[1] Hossein Abbaspour 和 Francois Laudenbach。莫尔斯复形与乘法结构。 *Mathematische Zeitschrift*，300(3):2637–2678，2022。[2] Semyon Alesker。关于 P. McMullen 平移不变赋值猜想。*Adv. Math.*，155(2):239–263，2000。[3] Semyon Alesker。流形上的赋值理论。I：线性空间。 *Isr. J. Math.*，156 311 339，2006 : – 。[4] Semyon Alesker。流形上的赋值理论。II。

Adv. Math. 207 1 420 454, , ( ): – 。 2006

[5] Semyon Alesker。流形上的赋值理论：综述。 *Geom. Funct. Anal.*，17 4 1321 1341，2007 ( ): – 。[6] Semyon Alesker。流形上的赋值理论。IV。乘法结构的新性质。载于 *Geometric aspects of functional analysis* 1910 *Lecture*，第卷，*Notes in Math.* 1 44 2007 页码 – 。Springer，柏林，。[7] Semyon Alesker。流形上的赋值与积分几何。 *Geom. Funct. Anal.*，20 5 1073 1143，2010 ( ): – 。

[8] Semyon Alesker。赋值的新结构及其应用。载于 *Integral geometry and valuations* 1 45 ¨ ，CRM 巴塞罗那数学高级课程，页码 – 。Birkhauser /Springer，巴塞尔，2014。[9] Semyon Alesker。关于可构造函数在赋值中的重复序贯闭包。载于 *Geometric aspects of functional analysis* 2169 *Lecture Notes in* ，第卷，页码 – *Math.* 1 14 2017 。Springer，沙姆，。[10] Semyon Alesker。 *Introduction to the theory of valuations* 126 *CBMS Reg.* ，第卷，普罗 *Conf. Ser. Math.* 2018 维登斯，罗得岛州：美国数学学会（AMS），。[11] Semyon Alesker 和 Andreas Bernig。光滑赋值与广义赋值上的乘积。 *Amer. J. Math.*，134(2):507–560，2012。[12] Semyon Alesker 和 Joseph H. G. Fu。流形上的赋值卷积。 *J. Dif-* ， ( ): – 。[13] *ferential Geom.* 107 2 203 240, 2017 Semyon Alesker 和 Joseph H. G. Fu。流形上的赋值理论。III。一般情形下的乘法结构。 *Trans. Amer. Math. Soc.*，360 1981，2008 4 1951( ): – 。[14] Y. Baryshnikov、R. Ghrist 和 M. Wright。可定义函数的 Hadwiger定理。 *Adv. Math.*，245:573–586，2013。[15] Andreas Bernig。一条四元数直线上的流形赋值乘积公式及其在积分几何中的应用。 *Comment. Math. Helv.*，84 19，2009 1 1( ): – 。[16] Andreas Bernig 和 Ludwig Br¨ocker。流形上的赋值与 Rumin 上同调。 *Journal of Differential Geometry*，75(3):433 – 457，2007。[17] Andreas Bernig 和 Dmitry Faifman。广义平移不变赋值与多胞体代数。 *Adv. Math.*，290:36–72，2016。[18] Andreas Bernig、Dmitry Faifman 和 Jan Kotrbat´y。李群上的不变赋值，2025。预印本 arxiv.org/abs/2512.01004。[19] Andreas Bernig 和 Joseph H. G. Fu。凸赋值的卷积。 *Geom. Ded-* ， : – 。[20] *icata* 123 153 169, 2006 Andreas Bernig 和 Joseph H. G. Fu。Hermitian积分几何。 *Ann. Math. (2)*，173 2 907 945，2011 ( ): – 。[21] Andreas Bernig、Joseph H. G. Fu 和 Gil Solanes。复空间形式的积分几何。 *Geom. Funct. Anal.*，24(2):403–492，2014。[22] Edward Bierstone 和 Adam Parusi ´ *Duke* nski。次解析 *Math. J.* 167 16 3115 3128, 2018 集的整体光滑化。， ( ): – 。[23] Armand Borel。关于在球面和环面上传递作用的李群的一些评述。 *Bull.* ， : – 。[24] *Amer. Math. Soc.* 55 580 587, 1949 Raoul Bott 和 Loring W. Tu。 *Differential forms in algebraic topology*，第 82 卷，属于 *Grad. Texts Math.* Springer，沙姆，1982。[25] Glen E. Bredon。 *Topology and geometry* 139 *Graduate Texts in Mathemat-* ，第卷 。 *ics* 1993 Springer-Verlag，纽约，。[26] Glen E. Bredon。 *Sheaf theory*，第 170 卷，属于 *Graduate Texts in Mathematics*。Springer-Verlag，纽约，第二版，1997。[27] Christian Brouder、Nguyen Viet Dang 和 Fr´ed´eric H´elein。具有指定波前集的广义函数基本运算的连续性（反例由 Semyon Alesker 提供）。 *Studia Math.*，232(3):201–226，2016。[28] Shiing-shen Chern。关于积分几何中的运动学公式。 *J. Math. Mech.*，16 101 118，1966 : – 。[29] Lorin Crawford、Anthea Monod、Andrew X. Chen、Sayan Mukherjee 和 Ra´ul Rabad´an。预测胶质母细胞瘤的临床结局：拓扑学与函数型数据分析的应用。 *Journal of the American Statistical Association*，115 531 1139 1150，2020 ( ): – 。

[30] Justin Curry、Sayan Mukherjee 和 Katharine Turner。多少个方向才能确定一个形状，以及关于两种拓扑变换的其他充分性结果。 *Transactions of the American Mathematical Society Series B* 9 32 1006 1043, 2022 , , ():–。

[31] M. Dehn。¨论空间体积。 *Math. Ann.*，55(3):465–478，1901。[32] Herbert Federer。 *Geometric measure theory* 153 *Die Grundlehren der* ，第 Band 卷，*mathematischen Wissenschaften* 1969 载于 。Springer-Verlag New York, Inc.，纽约，。[33] Joseph H. G. Fu。积分几何中的运动学公式。 *Indiana Univ. Math. J.*，39 4 1115 1154，1990 ():–。[34] Joseph H. G. Fu。次解析集的曲率测度。 *Amer. J. Math.*，116(4):819–880，1994。[35] William Fulton。 *Young tableaux* 35 *London Mathematical Society Student* ，第 卷，载于 。*Texts* 1997 剑桥大学出版社，剑桥，。并应用于表示论与几何学。[36] Robert Ghrist、Rachel Levanger 和 Huy Mai。持久同调与欧拉积分变换。 *J. Appl. Comput. Topol.*，2(1-2):55–60，2018。[37] Christopher G. Gibson、Klaus Wirthm¨uller、Andrew A. du Plessis 和 Eduard J. N. Looijenga。 *Topological stability of smooth mappings* 552 *Lecture Notes* ，第 Vol. 卷，*in Mathematics* 1976 载于 。Springer-Verlag，柏林—纽约，。[38] Mark Goresky 和 Robert MacPherson。 *Stratified Morse theory* 14 *Ergeb.* ，第 卷，载于 ，。*Math. Grenzgeb. 3. Folge* 1988 柏林等地：Springer-Verlag，。[39] Victor Guillemin 和 Alan Pollack。 *Differential topology*。AMS Chelsea Publishing，普罗维登斯，罗得岛州，2010。1974 年原版的重印本。[40] Victor Guillemin 和 Shlomo Sternberg。 *Geometric asymptotics*，*Mathematical Surveys*第 14 号。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，1977。[41] Hugo Hadwiger。 *Vorlesungen über Inhalt*，*Oberfläche und Isoperimetrie*，*Grundlehren Math. Wiss.* 第 93 卷。Springer，沙姆，1957。[42] Robert M. Hardt。次解析集的拓扑性质。 *Trans. Amer. Math.* , : –。[43] *Soc.* 211 57 70, 1975 Robert M. Hardt。次解析集及真次解析映射的三角剖分。*Invent. Math.*，38:207–217，1977。[44] Lars H¨ormander。 *The analysis of linear partial differential operators. I*。数学经典丛书。Springer-Verlag，柏林，2003。分布理论与傅里叶分析，1990 年第二版重印本 [Springer，柏林；MR1065993 (91m:35001a)]。[45] Masaki Kashiwara。可构造层的指标定理。第 130 号，第 193–209 页。1985。微分系统与奇点（吕米尼，1983）。[46] Masaki Kashiwara 和 Pierre Schapira。 *Sheaves on manifolds*，第 292 卷，*Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]* 1990 。

Springer-Verlag，柏林，。附有 Chris- tian Houzel 用法语撰写的一章。[47] Clint McCrory 和 Adam Parusi´nski。代数可构造函数。 *Ann. Sci.École Norm. Sup. (4)*，30(4):527–552，1997。[48] Peter McMullen。多胞体代数。 *Adv. Math.*，78(1):76–130，1989。[49] Deane Montgomery 和 Hans Samelson。球面的变换群。 *Ann. of* , : –。[50] *Math. (2)* 44 454 470, 1943 Liviu I. Nicolaescu。厄米拉格朗日空间的格拉斯曼流形上的舒伯特演算。 *Adv. Math.*，224(6):2361–2434，2010。[51] A. V. Pukhlikov 和 A. G. Khovanskij。虚多胞体的有限可加测度。 *Algebra Anal.*，4(2):161–185，1992。[52] Jan Rataj 和 Martina Z¨ahle。 *Curvature measures of singular sets*。Springer 数学专著丛书。沙姆：Springer，2019。[53] Michel Rumin。接触流形上的微分形式。（接触流形上的微分形式。） *J. Differ. Geom.*，39(2):281–330，1994。

[54] C. Sabbah。关于余法空间几何的几点评论。第 130 号，第 161–192 页。1985。微分系统与奇点（吕米尼，1983）。[55] 佐藤干夫。偏微分方程超函数解的正则性。载于 *Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970), Tome 2*，第 785–794 页。Gauthier-Villars ´出版社，巴黎，1971。[56] 佐藤干夫、河合隆裕和 Masaki Kashiwara。微函数与伪微分方程。载于 *Hyperfunctions and pseudo-differential equations (Proc.* ，第 Vol. 287 *Conf., Katata, 1971; dedicated to the memory of André Martineau)* 卷， *Lecture Notes in Math.*，第 265–529 页。Springer，柏林—纽约，1973。[57] P. Schapira。可构造函数的层析成像。载于 *Applied algebra, algebraic algorithms and error-correcting codes (Paris, 1995)* 948 *Lecture Notes in* ，第 卷，载于 ， *Comput. Sci.* 427 435 1995 第 – 页。Springer，柏林，。[58] Pierre Schapira。可构造函数上的运算。 *J. Pure Appl. Algebra*, 72 1 83 93，1991（）：–。[59] 维尔弗里德·施密德和卡里·维洛宁。可构造层的特征循环。 *Invent. Math.*，124(1-3):451–502，1996。[60] 罗尔夫·施奈德。 *Convex bodies: the Brunn-Minkowski theory* 151 *Encyclo-* ，第 卷，载于 *pedia of Mathematics and its Applications* 。剑桥大学出版社，剑桥，扩充版，2014。[61] J ¨ ¨ *Singular-* örg *ities in geometry topology foliations and dynamics* 207 231 Schurmann。奇异空间的陈类与横截性。载于 ， ， ，数学趋势丛书，第 – 页。Birkh¨ äuser/Springer，沙姆，2017。[62] 让-皮埃尔·塞尔。 *Lie algebras and Lie groups, 1964 lectures, given at Harvard Uni- versity.* 1500 *Lect. Notes Math.* 2 ，第 卷，柏林等地：Springer-Verlag，第二版，1992。[63] 卢·范登德里斯。 *Tame topology and o-minimal structures* 248 *London* ，第 卷，载于 。 *Mathematical Society Lecture Note Series* 剑桥大学出版社，剑桥，1998。[64] 奥列格·亚·维罗。基于欧拉示性数的某种积分学。载于 *Topology and geometry—Rohlin Seminar* 1346 *Lecture Notes in Math.* 127 138 ，第 卷，载于 ，第 – 页。Springer，柏林，1988。

Institut für Mathematik Goethe-Universität Frankfurt Robert-Mayer- , , „ Str. 10 60054 Frankfurt Germany
Email address: bernig@math.uni-frankfurt.de

Sorbonne Université, Université Paris Cité, CNRS, IMJ-PRG, F-75005 Paris, France*Email address*: lebovici@imj-prg.fr