arXiv:2603.15314v1 [math.GR] 16 Mar 2026

可收缩映射到其抛物子群的阿廷群分类

B.A. Cisneros de la Cruz*, M. Cumplido†, I. Foniqi‡, L. Paris§

摘要

我们对能够收缩映射到其所有抛物子群的阿廷群进行分类。我们的方法依赖于对三角子群的细致分析，其中一个关键要素是对二面体 Artin 群之间将一个标准生成元映射为标准生成元的同态进行分类。由此，我们证明，只要一个阿廷群存在到抛物子群的收缩映射，它也存在普通收缩映射——也就是说，这种收缩映射将每个标准生成元映射为某个标准生成元或恒等元。

美国数学学会主题分类（2020年）： 20F36。

关键词： 阿廷群，抛物子群，收缩映射。

1 引言

收缩映射为理解大型代数结构如何与其自然子结构相关联提供了一种基本机制。在群论中，收缩映射是从一个群到其子群上的同态，并且在该子群上的限制是恒等元；更准确地说，若 G 是一个群，$H \leq G$ 是一个子群，那么从 G 到 H 的收缩映射 是一个群同态

$$\varphi : G \longrightarrow H$$

满足 $\varphi|_H = \mathrm{id}_H$。这类映射的存在使我们能够通过群的较小组成部分来研究其整体结构。本文研究阿廷群到某些特殊子群（称为抛物子群）的收缩映射。

设 S 为一个有限集。S 上的考克斯特矩阵是一个方阵 $M = (m_{s,\ t})_{s,\ t\in S}$ 其行列由 S 中的元素索引，系数属于 $\mathbb{N}\cup\{\infty\}$，并且满足 $m_{s,\ s} = 1$ 对每个 $s \in S$均成立，

*SECIHTI - UNAM，UNAM 数学研究所瓦哈卡分部，Le´on No. 2，瓦哈卡州华雷斯城，瓦哈卡，墨西哥。68000。电子邮件：bruno@im.unam.mx

†塞维利亚大学数学研究所（IMUS）和塞维利亚大学数学学院代数系。电子邮件：cumplido@us.es

‡柏林工业大学，数学研究所，Straße des 17. Juni 136, 10623 柏林，德国。电子邮件：foniqi@math.tu-berlin.de§勃艮第欧洲大学，法国国家科学研究中心，IMB，UMR 5584，21000 第戎，法国。电子邮件：lparis@u- bourgogne.fr

并且 $m_{s,\ t} = m_{t,\ s} \geq 2$ 对每个 $s,\ t \in S,\ s \neq t$ 均成立。我们用 $\Pi(s,\ t,\ m)$ 表示长度为 m 的交替词 $sts\cdots$。与 M 相关联的阿廷群是由以下表示定义的群 $A = A_S$。

$$A_S = \langle S \mid \Pi(s,t,m_{s,t}) = \Pi(t,s,m_{s,t}),\ \text{for } s,t \in S,\ s \neq t,\ m_{s,t} \neq \infty \rangle\,.$$

这些群由雅克·蒂茨于（Tits，1966年）引入。

标准抛物子群（也称为特殊子群） A_X 在 A_S 中是由 $X \subseteq S$ 生成的子群。它与 M 的子矩阵所对应的阿廷群一致，该子矩阵由选取以 X 为指标的行和列得到（Van der Lek，1983年）。标准抛物子群的任意共轭元称为抛物子群。这些子群保留了环境群的大量组合与几何信息，在阿廷群的结构理论中发挥着关键作用。例如，它们在构造用于研究阿廷群的复形时扮演重要角色，例如 Salvetti 复形（Paris，2014年，Salvetti，1994年）、Deligne复形（Charney and Davis，1995年），或不可约抛物子群复形（Cumplido, Gebhardt, Gonz´alez-Meneses, andWiest，2019年）。

W我们称 A_S 存在一个收缩映射 到 A_X，如果存在一个同态

$$\varphi : A_S \to A_X \quad \text{such that} \quad \varphi|_{A_X} = \mathrm{id}_{A_X}\,.$$

我们称 A_S 是抛物可缩的，如果它到每个标准抛物子群都有一个收缩映射。如果 A_S 是抛物可缩的，那么 A_S 到所有抛物子群都有收缩映射；事实上，设 $\alpha A_X \alpha^{-1}$ 是某个 $\alpha \in A_S$ 对应的抛物子群，并设 ρ_X：$A_S \to A_X$是一个收缩映射。那么映射

$$\rho_X^{\alpha} \colon A_S \to \alpha A_X \alpha^{-1}, \qquad \rho_X^{\alpha}(g) = \alpha\, \rho_X(\alpha^{-1} g \alpha)\, \alpha^{-1},$$

也是一个定义良好的收缩映射。事实上，对于 $g \in A_S$，我们有 $\rho_X(\alpha^{-1}g\alpha) \in A_X$，因此 e定的收缩映射。

$$\rho_X^{\alpha}(g) = \alpha\rho_X(\alpha^{-1}g\alpha)\alpha^{-1} \in \alpha A_X \alpha^{-1}\,.$$

此外，对于 $g \in \alpha A_X \alpha^{-1}$，我们有 $\alpha^{-1}g\alpha \in A_X$，因此

$$\rho_X^{\alpha}(g) = \alpha\rho_X(\alpha^{-1}g\alpha)\alpha^{-1} = \alpha\alpha^{-1}g\alpha\alpha^{-1} = g\,.$$

收缩映射的存在往往会带来重要的结构性结果。例如，它们曾被用于研究抛物子群的交，并在直角阿廷群（Antol´ín 和 Minasyan，2015年）、偶 Artin 群（Antol´ín 和 Foniqi，2022年、2025年）以及 FC型阿廷群（Cisneros de la Cruz、Cumplido 和 Foniqi，2026年）中建立各种结果。在偶数情形下，A_S 总是抛物可缩的：对于任意 $X \subseteq S$，都有一个显然的收缩映射 ρ：$A_S \to A_X$，定义为：若 $s \notin X$，则 $\rho(s) = 1$；否则 $\rho(s) = s$（Antol´ín 和 Minasyan，2015年）。一般而言，这一结论并不成立。除偶数情形外，关于抛物可缩阿廷群的分类此前仅在 FC型情形下已知。

本工作的目标是推进对阿廷群中收缩映射的系统研究。我们对抛物可收缩的阿廷群进行分类，并建立以其定义的考克斯特矩阵表示的判据

。我们的方法将问题归结为研究二面体 Artin 群之间的同态，并以此作为分析三角子群的基础。这一归约使我们得以拓展并推广关于右角阿廷群和偶 Artin 群的已有结果，并探讨收缩映射如何影响阿廷群整体结构这一更广泛的问题。正如我们将要展示的，抛物可收缩群的分类将阿廷群的代数性质与其考克斯特矩阵上的组合条件联系起来。下面陈述我们的主要结果。

定理 1.1。 设 A_S 是任意阿廷群。那么， A_S 是抛物可缩的，当且仅当对于任意一组三个两两不同的元素 a、 b、 $c \in S$，$A_{a,\,b,\,c}$ 都可缩回到 $A_{b,\,c}$。

如果 M 的所有项都不同于 ∞ 且都是奇数，我们就称 M 为奇数 。如果 M 是奇数，并且对于任意一组三个两两不同的元素 a， b， $c \in S$，在忽略排列的情况下，$m_{a,\,b} = m_{a,\,c}$ 与 $m_{b,\,c}$ 整除 $m_{a,\,b}$，我们就称 M 为收缩相容 。秩 1 的考克斯特矩阵总是视为收缩相容。

如果存在一个划分 $S = T_1 \sqcup \cdots \sqcup T_k$，使得下列条件成立，我们就称 M 为抛物可缩回相容

1. 对所有 $i \in \{1, \ldots, k\}$， M_{T_i} 都是收缩相容的。

2. 对于每一对 i， $j \in \{1, \ldots, k\}$ 且 $i \neq j$，都存在 n_{ij}，它或者是偶数，或者是 ∞，使得对于所有 $(a,\ b) \in T_i \times T_j$， $m_{a,\,b} = n_{ij}$。

定理 1.2. 设 M 是一个考克斯特矩阵， A_S 是其关联的阿廷群。那么，A_S 是抛物可缩的，当且仅当 M 是抛物可缩回相容的。

我们称收缩映射 φ： $A_S \longrightarrow A_X$ 是 普通的，如果 $\varphi(x) = x$ 对每个 $x \in X$ 以及$\varphi(y) \in X \cup \{1\}$ 对每个 $y \in S \setminus X$都成立。也就是说，该同态将标准生成元映射为标准生成元或恒等元。下一个定理回答了（Cisneros de la Cruz、Cumplido 和 Foniqi， 2026年，注 2.8）中提出的一个未解决问题。

定理 1.3. 设 A_S 是一个抛物可缩回阿廷群，且 $X \subseteq S$。存在一个普通收缩映射 φ：$A_S \to A_X$。

我们将采用的策略基于对二面体阿廷群之间同态的分类：这类同态将一个标准生成元映射为另一个标准生成元。我们将在 第 2 节中介绍这一分类。随后，在 第 3 节中，我们将运用这一分类研究三角形上的收缩，并证明这足以分析所有可能的收缩映射。下文将给出一些例子。

致谢。 第一作者获得 SECIHTI 通过基础与前沿科学项目 CF2023G106 提供的资助。第二作者获得西班牙科学与创新部（MCIN/AEI/10.13039/501100011033/FEDER，欧盟）[项目编号 PID2022-138719NA-I00]的资助。第三作者感谢 EPSRC 奖学金项目 EP/V032003/1“无限群、幺半群和逆半群的算法、拓扑与几何方面”提供的支持。第四作者获得法国 ANR 项目“CaGeT”（ANR-25-CE40-4162）的部分资助。IMB 获得 EIPHI 研究生院（合同编号 ANR-17-EURE-0002）的支持。

例子

现在我们描述一类可递归定义的抛物可缩回阿廷群。我们按如下方式构造一个由 n 个生成元组成、其考克斯特矩阵可收缩相容的阿廷群：

1. 选取一个奇数 m_1，并对每个 $j > 1$设定 $m_{1,j} = m_1$。
2. 对每个 $i = 2, \ldots, n$，选取 m_i 使得 m_i 整除 m_{i-1}，并对每个$j > i$设定 $m_{i,j} = m_i$。

由于考克斯特矩阵是对称的，且所有对角项都等于 1，因此定义良好。还要注意，对于满足 $i < j < k$的每个三元组 $\{i, j, k\}$，都有 $m_{i,j} = m_{i,k}$，它可被 $m_{j,k}$整除；因此，该构造得到一个可收缩相容考克斯特矩阵。

我们使用考克斯特图以图形方式表示阿廷群：顶点集是群的生成集；当 $m_{a,b} \neq \infty$时，我们画一条标记为 $m_{a,b}$, $a \neq b$ 的边。上述所述族中的一个群的示例见图1。

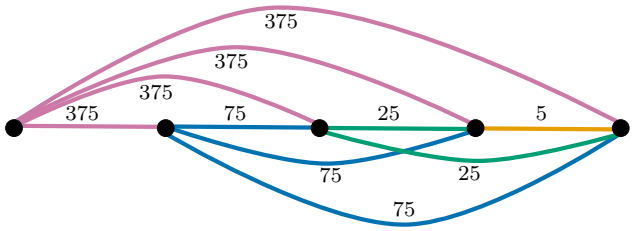


图1：具有可收缩相容考克斯特矩阵的阿廷群。

要构造一个抛物可缩阿廷群，取考克斯特图 Γ_1、Γ_2、.....，每个图都由一个收缩相容的考克斯特矩阵确定。对于每一对（i, j），其中 $i \neq j$，将 Γ_i 的所有顶点与 Γ_j 的所有顶点相连，边均标记为相同的偶数；或者不在 Γ_i 与 Γ_j之间添加任何边。抛物可缩阿廷群的一个例子见图2。

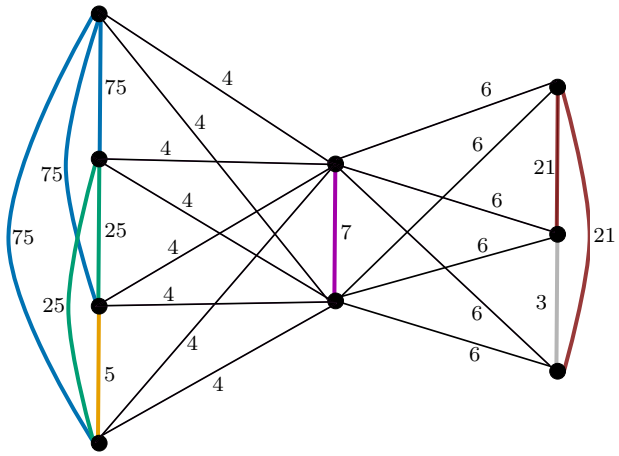


图2：一个抛物可缩回阿廷群。

请注意，这并非抛物可缩阿廷群唯一可能的构造族，因为考克斯特图中的边标号不必按整除关系排序（见图3）。

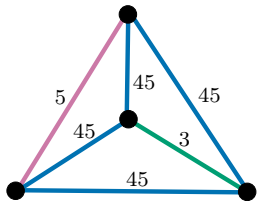


图3：另一个具有可收缩相容考克斯特矩阵的阿廷群，其标签未按整除关系排序。

2 二面体阿廷群之间同态的分类

在我们的研究中，二面体 Artin 群中的若干元素发挥着特殊作用，因此在陈述第一个主要结果之前，我们先介绍这些元素。设 A 是一个二面体 Artin 群，其表示如下：

$$A = \langle a_1, a_2 \mid \Pi(a_1, a_2, m_A) = \Pi(a_2, a_1, m_A) \rangle ,$$

其中 m_A 是一个整数 ≥ 3（因此 $m_A \neq \infty$且 $m_A \neq 2$）。 A的 Garside 元为$\Delta_A = \Pi$（a_1、a_2、m_A）$= \Pi$（a_2、a_1、m_A）。已知，当 m_A 为奇数时， A 的中心 Z（A）是由 $\delta_A = \Delta_A^2$ 生成的循环群；当 m_A 为偶数时，则由 $\delta_A = \Delta_A$ 生成（参见 Brieskorn 和 Saito，1972年）。我们还定义 $u_A = a_1 a_2$。注意，此定义意味着 a_1 和 a_2 是有序的，这种情形经常出现。此外，这个元素几乎总是以共轭的形式出现，并且 $a_2 a_1 = a_2 u_A a_2^{-1}$与 u_A 共轭。显然，若 m_A 为奇数，则$u_A^{m_A} = \delta_A$；若 m_A 为偶数，则$u_A^{m_A/2} = \delta_A$。

下面的定理对满足以下条件的同态进行分类 φ： $A \to B$ 二面体 Artin 群 A 与 B 之间的同态，其中 A 的一个生成元映射到 B的一个生成元。根据定义参数——标签的取值，第二个生成元可能的像会有很大差异。该分类涵盖了奇数、偶数和无限参数的所有组合，完整描述了此类同态的性质。

定理 2.1. 设 A 和 B 是具有以下表示的二面体 *Artin* 群：

$$A = \langle a_1, a_2 \mid \Pi(a_1, a_2, m_A) = \Pi(a_2, a_1, m_A) \rangle,$$
$$B = \langle b_1, b_2 \mid \Pi(b_1, b_2, m_B) = \Pi(b_2, b_1, m_B) \rangle,$$

并设 φ： $A \to B$ 是一个将 a_1 映射到 b_1的同态。那么有如下分类。

1. 若 $m_A = \infty$，则 $\varphi(a_2)$ 可以取 B中的任意值。
2. 若 m_A 是奇数，且 m_B 是偶数或 ∞，则 $\varphi(a_2) = b_1$。

3. 若 m_A 和 m_B 都是奇数，则有以下几种情况：
   - $\varphi(a_2) = b_1$，或
   - m_B 整除 m_A，并且存在 $t \in \mathbb{Z}$ 使得 $\varphi(a_2) = b_1^t b_2 b_1^{-t}$。
4. 若 m_A 是偶数且 $m_B = \infty$，则存在 $t \in \mathbb{Z}$ 使得 $\varphi(a_2) = b_1^t$。
5. 若 m_A 是偶数且 m_B 是奇数，则有以下几种情况：
   - 存在 t_1、$t_2 \in \mathbb{Z}$ 使得 $\varphi(a_2) = \delta_B^{t_1} b_1^{t_2}$，
   - m_A 能被4 整除，并且存在 $\beta \in B$ 和 $t \in \mathbb{Z}$ 使得 $\varphi(a_2) = b_1^{-1}\beta\Delta_B^t\beta^{-1}$，
   - 存在 $\beta \in B$ 和 $t \in \mathbb{Z}$，使得 $\varphi(a_2) = b_1^{-1}\beta u_B^t \beta^{-1}$；并且，若 $p =$ 最大公约数(t, m_B)且 $q = \frac{m_B}{p}$，则 q 整除 $m_A/2$。
6. 若 m_A 和 m_B 为偶数，且 $m_B \neq 2$，则有以下几种可能：
   - 存在 $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$，使得 $\varphi(a_2) = \delta_B^{t_1} b_1^{t_2}$，
   - 存在 $\beta \in B$ 和 $t \in \mathbb{Z}$，使得 $\varphi(a_2) = b_1^{-1}\beta u_B^t \beta^{-1}$；并且，若 $p =$ 最大公约数$(t, m_B/2)$且 $q = \frac{m_B}{2p}$，则 q 整除 $m_A/2$。
7. 若 m_A 为偶数且 $m_B = 2$，则 $\varphi(a_2)$ 可以是 B 中的任意元素。

显然可以验证，上述关于 $\varphi(a_2)$ 的每一种可能性都定义了一个良定义的同态 φ。我们将在第 2.3 小节中利用第 2.1 小节中关于 Bass-Serre 理论的一些结果，以及第 2.2 小节中关于二面体阿廷群中心化子的一个引理，来证明此定理。

2.1 巴斯–塞尔树

设 H 和 K 是两个群，并设 $G = H * K$。我们按如下方式定义一个图 T。对于每个满足 $g \in G$ 的 H 的左陪集 gH，在 T 中有一个顶点 $v(gH)$；对于每个满足 $g \in G$ 的 K 的左陪集gK，在 T 中有一个顶点 $v(gK)$。对于每个 $g \in G$，在 T 中有一条边 $e(g)$，连接 $v(gH)$与 $v(gK)$。根据 (Serre, 1977)， T 是一棵树，称为巴斯–塞尔树（与该自由积分解相关联），并且 G 在 T 上有如下作用：

$$g \cdot v(hH) = v(ghH), \quad g \cdot v(hK) = v(ghK), \quad g \cdot e(h) = e(gh).$$

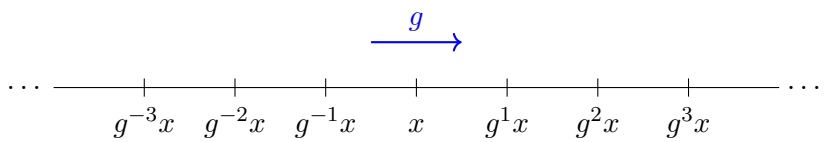
我们在 T 上赋予通常的度量，记作 d_T，其中所有边的长度均为 1。设 $g \in G$。g 的平移长度为

$$|g| = \inf\{d_T(x, g(x)) \mid x \in V(T)\}.$$

如果 $|g| = 0$，那么我们称 g 是椭圆型的；如果 $|g| \neq 0$，那么我们称 g 是双曲型的。如果$g \neq 1$ 且 g 是椭圆型的，那么存在唯一的顶点 $x \in V(T)$，使得 $g(x) = x$ （这是因为 T 中每条边的稳定子都是平凡的）。如果 g 是双曲型的，那么集合

$$\mathrm{Min}(g) = \{x \in V(T) \mid d_T(x, g(x)) = |g|\}$$

生成了 T 的一个与 A_∞同构的子图，称为 g的轴 。图 A_∞ 如下图所示。



在我们的证明中，我们将用到以下结果。

命题 2.2. 设 H, K 是两个群，并设 $G = H * K$。
(1) 设 $g \in G \setminus \{1\}$。若 g 有限阶，则 g 是椭圆型。*(2)* 设 $x_1, x_2 \in V(T)$，其中 $x_1 \neq x_2$，并设 $h_1, h_2 \in G$。假设 h_1, h_2 是椭圆型，$h_1(x_1) = x_1$，且 $h_2(x_2) = x_2$。那么 $g = h_1h_2$ 是 G 中的双曲元素，$|g| = 2d_T(x_1, x_2)$，且 x_1, x_2 位于 g 的轴上。

回顾一下，若 a，b 是两个字母且 $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$，我们用 $\Pi(a, b, m)$ 表示长度为 m 的交替乘积 $aba\ldots$。在下面的引理中，我们将说明定义整数的奇偶性如何影响二面体 Artin 群的代数结构，为后续使用其中心和商群做好铺垫。

引理 2.3。 设 $C = \langle c_1, c_2 \mid \Pi(c_1, c_2, m_C) = \Pi(c_2, c_1, m_C) \rangle$ 是一个二面体 *Artin* 群 .
(1) 假设 m_C 是奇数。那么 C 的表示为 $C = \langle \Delta_C, u_C \mid \Delta_C^2 = u_C^{m_C} \rangle$，且商群 $C/Z(C)$ 是自由积 $C[2] * C[m_C]$，其中 $C[2]$ 是一个阶为 2 的循环群，由类 Δ_C 生成；$C[m_C]$ 是一个阶为 m_C 的循环群，由类 u_C 生成。

(2) 假设 m_C 是偶数且 $m_C \neq 2$。那么 C 的表示为 $C = \langle c_1, u_C \mid c_1 u_C^{m_C/2} = u_C^{m_C/2} c_1 \rangle$，且商群 $C/Z(C)$ 是自由积 $C[\infty] * C[m_C/2]$，其中 $C[\infty]$ 是由类 c_1 生成的无限循环群；$C[m_C/2]$ 是一个阶为 $m_C/2$ 的循环群，由类 u_C 生成。

2.2 引理

以下结果将在定理 2.1的证明中反复使用。据我们所知，该结果并未在文献中明确陈述，但它是（Paris1997年，定理 5.2）的直接推论。

引理 2.4. 设

$$A = \langle a_1, a_2 \mid \Pi(a_1, a_2, m_A) = \Pi(a_2, a_1, m_A) \rangle$$

是一个二面体 *Artin* 群，其中 $m_A < \infty$。设 k_1、$k_2 \in \mathbb{Z}$，且 $k_2 \neq 0$。那么，$\delta_A^{k_1} a_1^{k_2}$ 在 A 中的中心化子是由 δ_A 和 a_1 生成的自由阿贝尔群。

证明。令 Z 为 A中 $\delta_A^{k_1} a_1^{k_2}$的中心化子。显然，δ_A 和 a_1 属于 Z，且显然 δ_A 和 a_1 生成一个秩 2 的自由阿贝尔群。因此，只需证明 $Z \subseteq \langle \delta_A, a_1 \rangle$。

由于 A 的中心是由 δ_A生成的循环群，因此 Z 也是 A中 $a_1^{k_2}$的中心化子。令 $\beta \in Z$。

情况 1： m_A **是偶数。** 令 $\mu_A = \Delta_A a_1^{-1} = \delta_A a_1^{-1}$。根据（Paris，1997年，定理 5.2），存在t_1、$t_2 \geq 0$ 和 $t_3 \in \mathbb{Z}$ 使得

$$\beta = \Delta_A^{-2t_1} \mu_A^{t_2} a_1^{t_3}.$$

因此

$$\beta = \delta_A^{-2t_1+t_2} a_1^{t_3-t_2} \in \langle \delta_A, a_1 \rangle.$$

情况 2： m_A **是奇数。** 令 $\mu_{1,A} = \Delta_A a_1^{-1}$和 $\mu_{2,A} = \Delta_A a_2^{-1}$。注意到

$$\mu_{2,A}\mu_{1,A} = \Delta_A^2 a_1^{-2} = \delta_A a_1^{-2}.$$

根据（Paris，1997年，定理 5.2），存在 t_1、$t_2 \geq 0$ 和 $t_3 \in \mathbb{Z}$ 使得

$$\beta = \Delta_A^{-2t_1} (\mu_{2,A}\mu_{1,A})^{t_2} a_1^{t_3}.$$

因此

$$\beta = \delta_A^{-t_1+t_2} a_1^{t_3-2t_2} \in \langle \delta_A, a_1 \rangle.$$

因此 $Z \subseteq \langle \delta_A, a_1 \rangle$，证明完毕。 □

2.3 情形分析 - 定理 2.1 的证明

我们考虑两个二面体型 Artin 群：

$$A = \langle a_1, a_2 \mid \Pi(a_1, a_2, m_A) = \Pi(a_2, a_1, m_A) \rangle,$$
$$B = \langle b_1, b_2 \mid \Pi(b_1, b_2, m_B) = \Pi(b_2, b_1, m_B) \rangle,$$

以及一个同态 $\varphi\colon A \to B$，它将 a_1 映射到 b_1。我们将根据 m_A 和 m_B的取值，研究这类同态的可能情况。

情况 1： $m_A = \infty$。那么 $\varphi(a_2)$ 可以取 B中的任意值。

Pr证明。在这种情况下，A 是一个秩为 2 的自由群，由 $\{a_1, a_2\}$自由生成。 □

情形 2.1： m_A 是奇数且 $m_B = \infty$。那么 $\varphi(a_2) = b_1$。

证明。 回顾一下，A 的中心是由 $\delta_A = u_A^{m_A} = \Delta_A^2$生成的无限循环群。元素 δ_A 与 a_1可交换，因此 $\varphi(\delta_A)$与 $\varphi(a_1) = b_1$可交换。由于 B 是由 $\{b_1, b_2\}$自由生成的自由群，b_1 在 B 中的中心化子是 $\langle b_1 \rangle$，因此存在 $k \in \mathbb{Z}$使得 $\varphi(\delta_A) = b_1^k$。首先假设 $k = 0$。我们有

$$\varphi(a_1a_2)^{m_A} = \varphi((a_1a_2)^{m_A}) = \varphi(\delta_A) = 1.$$

由于 B 是无挠的，因此 $\varphi(a_1a_2) = 1$，故 $\varphi(a_2) = \varphi(a_1)^{-1} = b_1^{-1}$。将$\varphi$ 应用于恒等式 $\Pi(a_1, a_2, m_A) = \Pi(a_2, a_1, m_A)$，得到 $\Pi(b_1, b_1^{-1}, m_A) = \Pi(b_1^{-1}, b_1, m_A)$。由于 m_A 是奇数，这意味着 $b_1 = b_1^{-1}$，矛盾。

因此， $k \neq 0$。 $\varphi(\delta_A) = b_1^k$ 的中心化子是 $\langle b_1 \rangle$， 且 $\varphi(a_2)$与 $\varphi(\delta_A)$可交换，因此存在 $\ell \in \mathbb{Z}$ 使得 $\varphi(a_2) = b_1^\ell$。将 φ 应用于恒等式 $\Pi(a_1, a_2, m_A) = \Pi(a_2, a_1, m_A)$，得到 $\Pi(b_1, b_1^\ell, m_A) = \Pi(b_1^\ell, b_1, m_A)$。由于 m_A 是奇数，这意味着 $b_1 = b_1^\ell$，因此$\ell = 1$，证毕。 □

Case 2.2： 假设 m_A 是奇数， m_B 是偶数，且 $m_B \neq 2$。那么 $\varphi(a_2) = b_1$.

证明。 元素 $\varphi(\delta_A)$ 与 $\varphi(a_1) = b_1$可交换，而 b_1 在 B 中的中心化子由 δ_B 和 b_1 生成（见引理 2.4）。因此存在 k_1， $k_2 \in \mathbb{Z}$ 使得

$$\varphi(\delta_A) = \delta_B^{k_1} b_1^{k_2}.$$

假设 $k_2 \neq 0$。元素 $\varphi(a_2)$ 与 $\varphi(\delta_A) = \delta_B^{k_1} b_1^{k_2}$可交换，而 $\delta_B^{k_1} b_1^{k_2}$在 B 中的中心化子由 δ_B 和 b_1 生成。根据引理 2.4，存在 ℓ_1、 $\ell_2 \in \mathbb{Z}$ 使得 $\varphi(a_2) = \delta_B^{\ell_1} b_1^{\ell_2}$。将 φ 应用于恒等式 $\Pi(a_1, a_2, m_A) = \Pi(a_2, a_1, m_A)$，得到 $\Pi(b_1, \delta_B^{\ell_1} b_1^{\ell_2}, m_A) = \Pi(\delta_B^{\ell_1} b_1^{\ell_2}, b_1, m_A)$。由于 m_A 是奇数，且 b_1 与 $\delta_B^{\ell_1} b_1^{\ell_2}$ 可交换，因此可推出 $b_1 = \delta_B^{\ell_1} b_1^{\ell_2}$。由此得到 $\ell_1 = 0$ 和 $\ell_2 = 1$，所以 $\varphi(a_2) = b_1$。

因此，我们可以假设 $k_2 = 0$。在这种情况下，

$$\varphi(\delta_A) = \delta_B^{k_1} \in Z(B),$$

因此， φ 诱导出一个同态

$$\bar{\varphi} : A/Z(A) \cong A[2] * A[m_A] \longrightarrow B/Z(B) \cong B[\infty] * B[m_B/2].$$

我们计算得

$$\bar{\varphi}(\overline{u_A})^{m_A} = \bar{\varphi}(\overline{u_A}^{m_A}) = 1,$$

并且由 命题 2.2 可知， $\bar{\varphi}(u_A)$ 属于 $B[m_B/2]$ 在 $B/Z(B)$ 中的某个共轭元。因此，存在 $\beta \in B$ 和 t_1， $t_2 \in \mathbb{Z}$ 使得

$$\varphi(u_A) = \beta u_B^{t_1} \beta^{-1} \delta_B^{t_2} = \beta u_B^{t_1 + t_2 m_B/2} \beta^{-1}.$$

令 z_B： $B \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ 为由 $z_B(b_1) = (1, 0)$ 和 $z_B(b_2) = (0, 1)$ 定义的同态。由于 $\varphi(a_1) = b_1$，我们有 $z_B(\varphi(a_1)) = (1, 0)$。此外，因为 a_2 在 A 中与 a_1 共轭，$\varphi(a_2)$ 在 B 中与 b_1 共轭，因此 $z_B(\varphi(a_2)) = (1, 0)$ 也成立。因此

$$z_B(\varphi(u_A)) = z_B(\varphi(a_1)) + z_B(\varphi(a_2)) = (2, 0).$$

另一方面，

$$z_B\left(\beta u_B^{t_1 + t_2 m_B/2} \beta^{-1}\right) = (\, t_1 + t_2 m_B/2,\, t_1 + t_2 m_B/2\,),$$

它永远不等于 (2,0)。这与等式 $\varphi(u_A) = \beta u_B^{t_1 + t_2 m_B/2} \beta^{-1}$ 矛盾。因此，假设 $k_2 = 0$ 不成立。 □

情形 2.3： 假设 m_A 是奇数且 $m_B = 2$。那么 $\varphi(a_2) = b_1$。

证明。 将 φ应用于定义关系

$$\Pi(a_1, a_2, m_A) \;=\; \Pi(a_2, a_1, m_A)$$

推出

$$\Pi(b_1, \varphi(a_2), m_A) \;=\; \Pi(\varphi(a_2), b_1, m_A).$$

由于 B 是阿贝尔的，且 m_A 是奇数，这个等式迫使 $\varphi(a_2) = b_1$。 □

情况 3： m_A 和 m_B 都是奇数。存在以下几种可能：

- $\varphi(a_2) = b_1$,
- 或者 m_B 整除 m_A，并且存在 $t \in \mathbb{Z}$ 使得 $\varphi(a_2) = b_1^t b_2 b_1^{-t}$。

证明。 元素 $\varphi(\delta_A)$ 与 $\varphi(a_1) = b_1$交换，而 b_1 在 B 中的中心化子由 b_1 和 δ_B生成，因此存在 $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ 使得 $\varphi(\delta_A) = \delta_B^{k_1} b_1^{k_2}$。接下来，证明分为两种情形，取决于 $k_2 \neq 0$ 还是 $k_2 = 0$。

假设 $k_2 \neq 0$。这种情形类似于情况 2.2 中的情形 $k_2 \neq 0$ 。

元素 $\varphi(a_2)$ 与 $\varphi(\delta_A) = \delta_B^{k_1} b_1^{k_2}$ 交换，而 $\delta_B^{k_1} b_1^{k_2}$ 在 B 中的中心化子由 δ_B 和 b_1 生成，因此存在 ℓ_1、$\ell_2 \in \mathbb{Z}$ 使得 $\varphi(a_2) = \delta_B^{\ell_1} b_1^{\ell_2}$。将 φ 应用于恒等式 $\Pi(a_1, a_2, m_A) = \Pi(a_2, a_1, m_A)$，得到 $\Pi(b_1, \delta_B^{\ell_1} b_1^{\ell_2}, m_A) = \Pi(\delta_B^{\ell_1} b_1^{\ell_2}, b_1, m_A)$。由于 m_A 是奇数且 b_1 与 $\delta_B^{\ell_1} b_1^{\ell_2}$ 交换，因此可得 $b_1 = \delta_B^{\ell_1} b_1^{\ell_2}$。由此得到 $\ell_1 = 0$ 和 $\ell_2 = 1$，所以$\varphi(a_2) = b_1$。

设 $k_2 = 0$。由于 $\varphi(\delta_A) = \delta_B^{k_1} \in Z(B)$，$\varphi$将 $Z(A)$ 映射到 $Z(B)$，因此 φ 诱导出一个同态

$$\bar{\varphi} : A/Z(A) = A[2] * A[m_A] \;\longrightarrow\; B/Z(B) = B[2] * B[m_B].$$

对于 $u_A = a_1 a_2$，我们有 $\bar{\varphi}(\overline{u_A})^{m_A} = \bar{\varphi}(\overline{u_A^{m_A}}) = 1$，因此根据命题 2.2，$\bar{\varphi}(u_A)$ 是椭圆的。这意味着 $\bar{\varphi}(u_A)$ 属于 $\overline{B[2]}$ 或 $B[m_B]$的某个共轭元。但是由于 m_A 是奇数，除非 $\bar{\varphi}(u_A)$ 是平凡的，否则它不可能属于 $B[2]$ 的某个共轭元。如果 $\bar{\varphi}(u_A)$ 是平凡的，则对于某个 $t \in \mathbb{Z}$，有 $\varphi(u_A) = \delta_B^t$，从而得到 $\varphi(a_2) = \delta_B^t b_1^{-1}$。再次对恒等式 $\Pi(a_1, a_2, m_A) = \Pi(a_2, a_1, m_A)$ 应用 φ，得到 $\Pi(b_1, \delta_B^t b_1^{-1}, m_A) = \Pi(\delta_B^t b_1^{-1}, b_1, m_A)$。由于 m_A 是奇数且 b_1 与 $\delta_B^t b_1^{-1}$ 对易，这意味着 $b_1 = \delta_B^t b_1^{-1}$。这样的等式将意味着 $b_1^2 = \delta_B^t$ 的中心化子是整个群 B，这与引理 2.4 矛盾。因此，$\bar{\varphi}(u_A)$ 属于 $B[m_B]$ 的某个共轭元。于是，存在 $\beta_1 \in B$ 和 t_1、$t_2 \in \mathbb{Z}$，使得

$$\varphi(u_A) = \beta_1 u_B^{t_1} \beta_1^{-1} \delta_B^{t_2} = \beta_1 u_B^{t_1 + m_B t_2} \beta_1^{-1}.$$

令 $z_B :\; B \to \mathbb{Z}$ 为将 b_1 和 b_2 映射为 1 的同态。我们有 $z_B(\varphi(a_1)) = z_B(b_1) = 1$。由于 a_2 在 A 中与 a_1 共轭元，$\varphi(a_2)$ 在 B 中与 $\varphi(a_1)$ 共轭元，因此 $z_B(\varphi(a_2)) = 1$。由此可得

$$z_B(\varphi(u_A)) = z_B(\varphi(a_1)) + z_B(\varphi(a_2)) = 2.$$

另一方面，

$$z_B(\beta_1 u_B^{t_1 + m_B t_2} \beta_1^{-1}) = 2(t_1 + m_B t_2).$$

因此 $t_1 + m_B t_2 = 1$，这意味着 $\varphi(u_A) = \beta_1 u_B \beta_1^{-1}$。由于 u_B 的阶为 m_B，且 $\bar{\varphi}(u_A)^{m_A} = 1$，由此可知 m_B 整除 m_A。

有 $\bar{\varphi}(\Delta_A)^2 = \bar{\varphi}(\Delta_A^2) = 1$，因此根据命题 2.2，$\bar{\varphi}(\Delta_A)$ 是椭圆型。这意味着 $\bar{\varphi}(\Delta_A)$ 属于 $B[2]$ 或 $B[m_B]$ 的某个共轭元。由于 m_B 是奇数，$\bar{\varphi}(\Delta_A)$ 属于 $B[m_B]$ 的某个共轭元，当且仅当 $\bar{\varphi}(\Delta_A)$ 是平凡元；此时，对于某个整数 t，有 $\varphi(\Delta_A) = \delta_B^t = \Delta_B^{2t}$。另一方面，如果 $\bar{\varphi}(\Delta_A)$ 属于 $B[2]$ 的某个共轭元，则存在 $\beta_2 \in B$，使得对于某些整数 t_1、t_2，有 $\varphi(\Delta_A) = \beta_2 \Delta_B^{t_1+2t_2} \beta_2^{-1}$。

综合这两种情形，可得对于某个 $\beta_2 \in B$ 和某个 $t \in \mathbb{Z}$，有 $\varphi(\Delta_A) = \beta_2 \Delta_B^t \beta_2^{-1}$。利用同态 z_B，我们得到 $m_A = m_B \cdot t$，因此有 $\varphi(\Delta_A) = \beta_2 \Delta_B^{m_A/m_B} \beta_2^{-1}$。由于 m_A 和 m_B 均为奇数，$\frac{m_A}{m_B}$ 是奇数，且 $\varphi(\Delta_A) = \beta_2 \Delta_B \beta_2^{-1}$。

设 n_A 和 n_B 是满足以下条件的正整数：$m_A = 2n_A + 1$ 和 $m_B = 2n_B + 1$。考虑 $B/Z(B) = B[2] * B[m_B]$ 在其 Bass–Serre 树 T 上的作用。我们有 $b_1 = (u_B)^{-n_B} \Delta_B$，因此由命题 2.2可知，$b_1$ 是双曲型的，$|b_1| = 2$，且位于 T 的轴上的顶点集合为 b_1 是

$$\{v(b_1^t B[2]) \mid t \in \mathbb{Z}\} \cup \{v(b_1^t B[m_B]) \mid t \in \mathbb{Z}\}.$$

此外，

$$\bar{b_1} = \bar{\varphi}(\bar{a_1}) = \bar{\varphi}(\bar{u_A})^{-n_A} \bar{\varphi}(\bar{\Delta_A}) = (\bar{\beta_1}\, \bar{u_B}^{-n_A}\, \bar{\beta_1}^{-1})(\bar{\beta_2}\, \bar{\Delta_B}\, \bar{\beta_2}^{-1}),$$

因此，由命题 2.2可知，$v(\beta_1 B[m_B])$ 位于 b_1的轴上。因此存在 $t \in \mathbb{Z}$使得 $\beta_1 B[m_B] = b_1^t B[m_B]$。这意味着 β_1 具有如下形式：$\beta_1 = b_1^t u_B^{s_1} \delta_B^{s_2}$其中 s_1，$s_2 \in \mathbb{Z}$，故

$$\varphi(u_A) = \beta_1 u_B \beta_1^{-1} = b_1^t u_B b_1^{-t}.$$

由此可得

$$\varphi(a_2) = \varphi(a_1)^{-1} \varphi(u_A) = b_1^t b_2 b_1^{-t}.$$

□

情形 4.1： m_A 是 even、$m_A \neq 2$ 和 $m_B = \infty$。那么存在 $t \in \mathbb{Z}$，使得 $\varphi(a_2) = b_1^t$。

证明。 元素 $\varphi(\delta_A)$ 与 $\varphi(a_1) = b_1$ 对易。由于 B 是由 $\{b_1, b_2\}$ 自由生成的自由群，B 中 b_1 的中心化子是 $\langle b_1 \rangle$。因此，存在 $k \in \mathbb{Z}$，使得$\varphi(\delta_A) = b_1^k$。若 $k = 0$，则

$$\varphi(u_A)^{m_A/2} = \varphi(u_A^{m_A/2}) = \varphi(\delta_A) = 1.$$

由于 B 是无挠的，这意味着 $\varphi(u_A) = \varphi(a_1 a_2) = 1$，因此

$$\varphi(a_2) = \varphi(a_1)^{-1} = b_1^{-1}.$$

若 $k \neq 0$，则 B 中 $\varphi(\delta_A) = b_1^k$ 的中心化子是 $\langle b_1 \rangle$，且 $\varphi(a_2)$ 与 $\varphi(\delta_A)$ 对易。因此，存在 $t \in \mathbb{Z}$，使得 $\varphi(a_2) = b_1^t$。 □

情形 4.2： $m_A = 2$ 和 $m_B = \infty$。那么存在 $t \in \mathbb{Z}$ 使得 $\varphi(a_2) = b_1^t$。

证明。 b_1 在 B 中的中心化子是 $\langle b_1 \rangle$，并且由于 $\varphi(a_2)$ 与 $\varphi(a_1) = b_1$可交换，存在 $t \in \mathbb{Z}$ 使得 $\varphi(a_2) = b_1^t$。 □

情形 5.1： m_A 是偶数，$m_A \neq 2$，而 m_B 是奇数。于是我们有以下几种可能：

- 存在 t_1、 $t_2 \in \mathbb{Z}$，使得 $\varphi(a_2) = \delta_B^{t_1} b_1^{t_2}$,
- m_A 被 4 整除，并且存在 $\beta \in B$ 和 $t \in \mathbb{Z}$，使得 $\varphi(a_2) = b_1^{-1}\beta\Delta_B^t\beta^{-1}$,
存在 $\beta \in B$ 和 $t \in \mathbb{Z}$，使得 $\varphi(a_2) = b_1^{-1}\beta u_B^t\beta^{-1}$；此外，如果 $p = \gcd(t, m_B)$ 和 $q = m_B/p$，则 q 整除 $m_A/2$。

证明。注意到，这些情形不一定互不相交。我们首先验证每种情形都定义了一个从 A 到 B的同态。

如果存在 $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$，使得 $\varphi(a_2) = \delta_B^{t_1} b_1^{t_2}$，那么 $\varphi(a_1)$ 和 $\varphi(a_2)$ 交换；由于 m_A 是偶数，有：

$$\Pi(\varphi(a_1), \varphi(a_2), m_A) = \Pi(\varphi(a_2), \varphi(a_1), m_A).$$

假设 m_A 被 4 整除，并且存在 $\beta \in B$ 和 $t \in \mathbb{Z}$，使得 $\varphi(a_2) = b_1^{-1}\beta\Delta_B^t\beta^{-1}$。令 $n_A = m_A/4$。则

$$\begin{aligned}\Pi(\varphi(a_1), \varphi(a_2), m_A) &= (\varphi(a_1)\varphi(a_2))^{2n_A} \\ &= (b_1 b_1^{-1}\beta\Delta_B^t\beta^{-1})^{2n_A} \\ &= (\beta\Delta_B^t\beta^{-1})^{2n_A} = \beta\Delta_B^{2tn_A}\beta^{-1} \\ &= \beta\delta_B^{tn_A}\beta^{-1} = \delta_B^{tn_A} \in Z(B),\end{aligned}$$

这表明它位于 B 的中心。显然这意味着：

$$\Pi(\varphi(a_2), \varphi(a_1), m_A) = \delta_B^{tn_A}.$$

设存在 $\beta \in B$ 和 $t \in \mathbb{Z}$，使得 $\varphi(a_2) = b_1^{-1}\beta u_B^t\beta^{-1}$，并且若 $p = \gcd(t, m_B)$，则 $q = m_B/p$ 整除 $m_A/2$。令 q_1, $q_2 \in \mathbb{Z}$，使得 $t = pq_1$ 且 $m_A/2 = qq_2$。则

$$\begin{aligned}\Pi(\varphi(a_1), \varphi(a_2), m_A) &= (b_1 b_1^{-1}\beta u_B^t\beta^{-1})^{m_A/2} \\ &= \beta u_B^{t(m_A/2)}\beta^{-1} = \beta u_B^{pq_1qq_2}\beta^{-1} \\ &= \beta u_B^{m_B q_1 q_2}\beta^{-1} = \beta\delta_B^{q_1q_2}\beta^{-1} = \delta_B^{q_1q_2} \in Z(B).\end{aligned}$$

如前一段所述，这意味着 $\Pi(\varphi(a_1)\ \varphi(a_2)\ m_A) = \Pi(\varphi(a_2)\ \varphi(a_1)\ m_A)$。

现在设 $\varphi: A \to B$ 是一个同态，且 $\varphi(a_1) = b_1$。元素 $\varphi(\delta_A)$ 与 b_1 可交换，而 b_1 在 B 中的中心化子由 δ_B 和 b_1 生成，因此存在 k_1, $k_2 \in \mathbb{Z}$，使得

$$\varphi(\delta_A) = \delta_B^{k_1} b_1^{k_2}.$$

若 $k_2 \neq 0$，则 $\varphi(\delta_A)$ 的中心化子同样由 δ_B 和 b_1 生成，因此存在 t_1, $t_2 \in \mathbb{Z}$，使得 $\varphi(a_2) = \delta_B^{t_1} b_1^{t_2}$。

若 $k_2 = 0$，则 $\varphi(\delta_A) = \delta_B^{k_1} \in Z(B)$，且 φ 诱导出一个同态

$$\bar{\varphi}: A/Z(A) = A[\infty] * A[m_A/2] \to B/Z(B) = B[2] * B[m_B].$$

我们有

$$\bar{\varphi}(\overline{u_A})^{m_A} = \bar{\varphi}(\overline{u_A}^{m_A}) = \bar{\varphi}(\overline{\delta_A}) = 1.$$

By 命题 2.2, $\bar{\varphi}(u_A)$属于 $B[2]$ 或 $B[m_B$的共轭元].

若 $\bar{\varphi}(\overline{u_A}) = 1$, 则存在 $t_1 \in \mathbb{Z}$ 使得 $\varphi(u_A) = \delta_B^{t_1}$, 因此

$$\varphi(a_2) = \varphi(a_1)^{-1}\varphi(u_A) = \delta_B^{t_1} b_1^{-1}.$$

若 $\overline{\varphi(u_A)} \neq 1$ 且属于 $B[2]$的某个共轭元, 则存在 $\beta \in B$ 使得 $\bar{\varphi}(u_A) = \bar{\beta}\Delta_B\bar{\beta}^{-1}$。由于 $\overline{\beta\Delta_B^{m_A/2}\bar{\beta}^{-1}} = \overline{1}$ 且 Δ_B 的阶为 2, 我们得出 m_A 被 4 整除。存在 $t_1 \in \mathbb{Z}$ 使得

$$\varphi(u_A) = \beta\Delta_B\beta^{-1}\delta_B^{t_1} = \beta\Delta_B^{1+2t_1}\beta^{-1},$$

因此

$$\varphi(a_2) = b_1^{-1}\beta\Delta_B^{1+2t_1}\beta^{-1}.$$

若 $\overline{\varphi(u_A)} \neq 1$ 且属于 $B[m_B]$的某个共轭元, 则存在 $\beta \in B$ 和 $t_1 \in \mathbb{Z}$ 使得

$$\bar{\varphi}(\overline{u_A}) = \bar{\beta}\overline{u_B}^{t_1}\bar{\beta}^{-1}, \quad 1 \leq t_1 \leq m_B - 1.$$

令 $p =$ 为 t_1, m_B的最大公约数, 且 $q = m_B/p$。由于 $\bar{\varphi}(u_A)$的阶整除 $m_A/2$, q 整除 $m_A/2$。存在 $t_2 \in \mathbb{Z}$ 使得

$$\varphi(u_A) = \beta u_B^{t_1}\beta^{-1}\delta_B^{t_2} = \beta u_B^{t_1+t_2 m_B}\beta^{-1},$$

因此

$$\varphi(a_2) = b_1^{-1}\beta u_B^{t_1+t_2 m_B}\beta^{-1},$$

注意到最大公约数$(t_1 + t_2 m_B,\ m_B) = p =$最大公约数$(t_1,\ m_B)$。 □

情形 5.2: $m_A = 2$ 且 m_B 为奇数。于是存在 $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$, 使得 $\varphi(a_2) = \delta_B^{t_1} b_1^{t_2}$.

证明。 B 中 b_1 的中心化子是 $\langle\delta_B,\ b_1\rangle$。由于 $\varphi(a_2)$ 与 $\varphi(a_1) = b_1$可交换, 存在 $t_1,\ t_2 \in \mathbb{Z}$ 使得

$$\varphi(a_2) = \delta_B^{t_1} b_1^{t_2}.$$

□

情形 6.1: m_A 和 m_B 均为偶数, 且 $m_A \neq 2$ 和 $m_B \neq 2$。那么以下情况之一成立:

- 存在整数 $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$ 使得 $\varphi(a_2) = \delta_B^{t_1} b_1^{t_2}$。
- 存在 $\beta \in B$ 和 $t_1 \in \mathbb{Z}$ 使得 $\varphi(a_2) = b_1^{-1}\beta u_B^{t_1}\beta^{-1}$, 并且若令 $p =$最大公约数$(t_1, m_B/2)$ 和 $q = \frac{m_B}{2p}$, 则 q 整除 $m_A/2$。

证明。 与情形 5.1 中一样, 可以验证上述两种类型的同态均定义良好。考虑一个同态 $\varphi: A \to B$, 其中 $\varphi(a_1) = b_1$, 我们来证明它满足两个备选条件之一。

由于 $\varphi(\delta_A)$ 与 $\varphi(a_1) = b_1$ 可交换, 且 b_1 在 B 中的中心化子由 δ_B 和 b_1 生成, 因此存在整数 $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ 使得

$$\varphi(\delta_A) = \delta_B^{k_1} b_1^{k_2}.$$

若 $k_2 \neq 0$，则 $\varphi(\delta_A)$ 在 B 中的中心化子由 δ_B 和 b_1 生成。由于 $\varphi(a_2)$ 与 $\varphi(\delta_A)$ 可交换，因此存在整数 $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$ 使得

$$\varphi(a_2) = \delta_B^{t_1} b_1^{t_2}.$$

这给出了第一类同态。

现在，对于 $k_2 = 0$，有 $\varphi(\delta_A) = \delta_B^{k_1} \in Z(B)$，因此 φ 诱导出一个同态

$$\bar{\varphi} : A/Z(A) = A[\infty] * A[m_A/2] \longrightarrow B/Z(B) = B[\infty] * B[m_B/2].$$

由于

$$\bar{\varphi}(\overline{u_A})^{m_A/2} = \bar{\varphi}(\overline{u_A}^{m_A/2}) = \bar{\varphi}(\overline{\delta_A}) = 1,$$

命题 2.2 表明 $\bar{\varphi}(u_A)$ 属于 $B[m_B/2]$ 的某个共轭元中。因此，存在 $\beta \in B$和 $t_1 \in \{0, 1, \ldots, m_B/2 - 1\}$ 使得

$$\bar{\varphi}(\overline{u_A}) = \bar{\beta}\overline{u_B}^{t_1}\bar{\beta}^{-1}.$$

首先假设 $t_1 = 0$。那么 $\bar{\varphi}(u_A) = 1$，因此存在 $t_2 \in \mathbb{Z}$ 使得 $\varphi(u_A) = \varphi(a_1)\varphi(a_2) = \delta_B^{t_2}$，因此 $\varphi(a_2) = \varphi(a_1)^{-1}\delta_B^{t_2} = \delta_B^{t_2} b_1^{-1}$。

现在假设 $t_1 \neq 0$。令 $p = \gcd(t_1, m_B/2)$，且 $q = \frac{m_B}{2p}$。那么 $\bar{\varphi}(u_A)$ 的阶为 q，并且由于 $\bar{\varphi}(u_A)^{m_A/2} = 1$，可知 q 整除 $m_A/2$。

此外，存在 $t_2 \in \mathbb{Z}$ 使得

$$\varphi(u_A) = \beta u_B^{t_1}\beta^{-1}\delta_B^{t_2} = \beta u_B^{t_1 + \frac{t_2 m_B}{2}}\beta^{-1}.$$

因此，

$$\varphi(a_2) = \varphi(a_1)^{-1}\varphi(u_A) = b_1^{-1}\beta u_B^{t_1 + \frac{t_2 m_B}{2}}\beta^{-1}.$$

最后，注意到

$$\gcd\left(t_1 + \frac{t_2 m_B}{2}, \frac{m_B}{2}\right) = \gcd(t_1, m_B/2) = p.$$

□

情形 6.2： $m_A = 2$，m_B 是偶数，且 $m_B \neq 2$。那么存在 $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$ 使得$\varphi(a_2) = \delta_B^{t_1} b_1^{t_2}$。

证明。 由于 a_2 与 a_1可交换，因此 $\varphi(a_2)$ 与 $\varphi(a_2) = b_1$可交换。于是，根据引理 2.4 存在 $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$使得 $\varphi(a_2) = \delta_B^{t_1} b_1^{t_2}$。 □

情形 7： m_A 是偶数（包括 $m_A = 2$），且 $m_B = 2$。那么 $\varphi(a_2)$ 可以是 B中的任意元素。

证明。 设 $\beta \in B$ 为任意元素。由于 B 是阿贝尔的，且 m_A 是偶数，我们总有

$$\Pi(b_1, \beta, m_A) = \Pi(\beta, b_1, m_A),$$

因此总是存在一个同态 φ： $A \to B$，使得

$$\varphi(a_1) = b_1 \quad \text{and} \quad \varphi(a_2) = \beta.$$

□

3 刻画 抛物可缩阿廷群

下面的引理将在证明定理 1.1时起核心作用。

引理 3.1。 设 A_S 为一个阿廷群。则当且仅当对每个 $X \subseteq S$ 和每个 $x \in X$，子群 A_X 都可收缩到 $A_{X\setminus\{x\}}$时， A_S 是抛物可缩的。

证明。 首先假设 A_S 是抛物可缩的。特别地，对任意子集 $X \subseteq S$和任意 $x \in X$，都存在一个收缩映射 φ： $A_S \to A_{X\setminus\{x\}}$。 将 φ 限制到 A_X ，即可得到所需的收缩映射 $\varphi|_{A_X} : A_X \to A_{X\setminus\{x\}}$。

反之，假设对每个 $X \subseteq S$ 和每个 $x \in X$，子群 A_X 都可收缩到 $A_{X\setminus\{x\}}$。我们对 $k = |S \setminus X|$ 使用归纳法，证明对于所有子集$X \subseteq S$， A_S都可收缩到 A_X。

当 $k = 0$时，该命题显然成立，因为恒等映射给出了一个收缩映射 $A_S \to A_S$。现在假设只要 $|S\setminus X| = k$， A_S就可收缩到 A_X。设 $X' \subseteq S$且 $|S\setminus X'| = k+1$。选取 $x \in S \setminus X'$并设 $X := X' \cup \{x\}$。则 $|S \setminus X| = k$，因此由归纳假设，存在一个收缩映射 $A_S \to A_X$。根据假设， A_X 可收缩到 $A_{X'}$。复合这两个收缩映射即可得到所需的收缩映射 $A_S \to A_{X'}$。 □

引理 3.2. 假设 A_S是一个抛物可缩回阿廷群。设 a、 b、 $c \in S$两两不同。若$m_{a,b}$ 和$m_{a,c}$ 都是奇数，则$m_{b,c}$ 也为奇数。

证明。反设$m_{b,c}$ 是偶数或无穷大。由于 A_S 是抛物可缩的，存在一个收缩映射 φ: $A_{\{a,b,c\}} \to A_{\{b,c\}}$ ，满足 $\varphi(b) = b$ 且 $\varphi(c) = c$。

将定理 2.1(2)应用于 φ 在 $A_{\{a,b\}}$上的限制，可推出 $\varphi(a) = b$。另一方面，将定理 2.1(2)应用于在 $A_{\{a,c\}}$ 上的限制，必有 $\varphi(a) = c$，这就产生了矛盾。因此$m_{b,c}$ 必为奇数。 □

引理 3.3. 假设 A_S是一个抛物可缩回阿廷群。设 a、 b、 $c \in S$两两不同。若$m_{a,b}$ 为奇数且$m_{a,c}$ 为偶数，则$m_{b,c}$ 为偶数。

证明。 根据引理 3.2，标签 $m_{b,c}$ 不可能是奇数。反之，假设 $m_{b,c} = \infty$。由于A_S 是抛物可缩的，因此存在一个收缩映射 φ: $A_{\{a,b,c\}} \to A_{\{b,c\}}$ ，满足 $\varphi(b) = b$ 且$\varphi(c) = c$。

将定理 2.1(2)应用于 φ 在 $A_{\{a,b\}}$ 上的限制，得到 $\varphi(a) = b$。同时，将定理 2.1(4)应用于在 $A_{\{a,c\}}$ 上的限制，推出对于某个 $t \in \mathbb{Z}$， $\varphi(a) = c^t$ 。这些条件互不相容，因而产生矛盾。因此，$m_{b,c}$ 必为偶数。 □

引理 3.4。 设 A_S是一个抛物可缩回阿廷群。令 a、 b、 $c \in S$两两不同，且$m_{a,b}$、$m_{a,c}$以及$m_{b,c}$ 均为奇数。那么$m_{b,c}$ 整除$m_{a,b}$ 或$m_{a,c}$。

证明。 由于 A_S 是抛物可缩的，因此存在一个收缩映射 φ: $A_{\{a,b,c\}} \to A_{\{b,c\}}$ ，满足$\varphi(b) = b$ 且 $\varphi(c) = c$。

根据 定理 2.1(3)，将 φ 限制到 $A_{\{a,b\}}$ 可得两种可能：

(b.1) $\varphi(a) = b$;

(b.2) $m_{b,c}$ 整除 $m_{a,b}$，且存在 $t_1 \in \mathbb{Z}$ 满足 $\varphi(a) = b^{t_1} c b^{-t_1}$。

同样，将范围限制为 $A_{\{a,c\}}$ 可得：

(c.1) $\varphi(a) = c$;

(c.2) $m_{b,c}$ 整除 $m_{a,c}$，且存在 $t_2 \in \mathbb{Z}$ 使得 $\varphi(a) = c^{t_2} b c^{-t_2}$。

情形 (b.1) 和 (c.1) 互不相容，因此 (b.2) 或 (c.2) 至少有一个成立。于是，$m_{b,c}$ 整除 $m_{a,b}$ 或$m_{a,c}$。 □

引理 3.5。假设 A_S 是一个抛物可缩回阿廷群。设 a、b、$c \in S$ 两两不同，且 $m_{a,b}$、$m_{a,c}$和 $m_{b,c}$ 均为奇数。那么，在置换 a、b、c后，我们有$m_{a,b} = m_{a,c}$ 且 $m_{b,c} \mid m_{a,b}$。

证明。根据引理 3.4 应用于三个有序对后，三个奇数中的每一个都整除 ers

$$x := m_{b,c}, \qquad y := m_{a,c}, \qquad z := m_{a,b}$$

整除 另外两个中至少有一个。无妨设 $x \le y \le$ z.

由 z 的整除条件可知，$z \mid x$ 或 $z \mid y$。由于 z 是三者中最大的，因此无论哪种情况，都会推出 $z \le x$ 或 $z \le y$，进而得到 $z = x$ 或 $z = y$。两种情形下，我们都可得出结论 $y = z$。

现在应用 x 的整除条件：我们有 $x \mid y$ 或 $x \mid z$。由于 $y = z$，可得出$x \mid y$。换言之，$m_{a,\,b} = m_{a,\,c}$ 以及 $m_{b,\,c} \mid m_{a,\,b}$，这正是所要证明的（a，b，c的排列除外）。 □

引理 3.6. 设 A_S 是一个抛物可缩回阿廷群。令 a、b、$c \in S$ 两两不同。若 $m_{a,\,b}$ 和 $m_{a,\,c}$ 为偶数，且 $m_{b,\,c}$ 为奇数，则 $m_{a,\,b} = m_{a,\,c}$。

证明。我们将证明 $m_{a,\,c}$ 整除 $m_{a,\,b}$。由对称性，同样的论证表明 $m_{a,\,b}$ 整除 $m_{a,\,c}$，因此 $m_{a,\,b} = m_{a,\,c}$。注意，若 $m_{a,\,c} = 2$，则结论显然成立，因为 2 整除每个偶数。因此，我们可以假设 $m_{a,\,c} > 2$。

由于 A_S 是抛物可缩的，存在一个收缩映射

$$\varphi\colon A_{\{a,b,c\}} \longrightarrow A_{\{a,c\}}$$

使得 $\varphi(a) = a$ 且 $\varphi(c) = c$。

将 φ 限制到 $A_{\{b,c\}}$，定理 2.1(2) 表明 $\varphi(b) = c$。将 φ 改为限制到$A_{\{a,b\}}$，定理 2.1(6) 得出两种可能：

(a.1) 存在 t_1，$t_2 \in \mathbb{Z}$ 使得

$$\varphi(b) = \delta_{a,c}^{t_1} a^{t_2},$$

其中$\delta_{a,\,c}$ 表示 $A_{\{a,c\}}$中的中心生成元；

(a.2) 存在 $\beta \in A_{\{a,c\}}$ 和 $t \in \mathbb{Z}$ 使得

$$\varphi(b) = a^{-1} \beta (ac)^t \beta^{-1},$$

且若 $p =$ 最大公约数$(t, \frac{m_{a,\,c}}{2})$ 且 $q = \frac{m_{a,\,c}}{2p}$，则 $q \mid \frac{m_{a,\,b}}{2}$。

我们断言情形 (a.1) 不可能。考虑同态

$$\xi : A_{\{a,c\}} \longrightarrow \mathbb{Z}, \qquad \xi(a) = 0,\ \xi(c) = 1.$$

这是定义良好的，因为$m_{a,\ c}$ 是偶数。由于 $\varphi(b) = c$，我们应有 $\xi(\varphi(b)) = 1$。然而，

$$\xi\left(\delta_{a,c}^{t_1} a^{t_2}\right) = t_1 \cdot \frac{m_{a,c}}{2},$$

它是 $m_{a,\ c}/2 > 1$的倍数。因此，情形 (a.1) 不可能出现。

因此，我们必定处于情形 (a.2)。特别地，

$$c = \varphi(b) = a^{-1}\beta(ac)^t\beta^{-1}.$$

应用 ξ 可得

$$1 = \xi(c) = \xi(a^{-1}\beta(ac)^t\beta^{-1}) = t.$$

因此，$p = \gcd(t, m_{a,\ c}/2) = 1$，所以 $q = m_{a,\ c}/2$。条件 q 整除 $m_{a,\ b}/2$ 意味着$m_{a,\ c}$整除$m_{a,\ b}$，正如所需。 □

下面的引理给出了 定理 1.2 中的一个蕴含。

引理 3.7。 设 A_S 是一个抛物可缩回阿廷群。那么它对应的考克斯特矩阵 M 是抛物可缩回相容的。

Pro。 回顾一下，若存在一个划分 M，则称其为抛物可缩回相容的 n

$$S = T_1 \sqcup \cdots \sqcup T_k$$

使得:

1. 对每个 $i \in \{1, \ldots, k\}$，子矩阵 M_{T_i}都是收缩相容的；也就是说，其所有元素都是奇数，并且对于任意三元组 $a, b, c \in T_i$，都有 $m_{b,c}$整除 $m_{a,b} = m_{a,c}$（允许置换）。

2. 对于每一对 $i, j \in \{1, \ldots, k\}$，若满足 $i \neq j$，则存在 n_{ij}，它要么是偶数，要么是 ∞，使得对所有 $(a, b) \in T_i \times T_j$，都有 $m_{a,b} = n_{ij}$。

为构造所需的划分，考虑 A_S 的考克斯特图 Γ，并定义一个新图 Γ_{odd}，它与 Γ具有相同的顶点集，其边恰好是标记为奇数的边。设 $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$为 Γ_{odd}的连通分支，并将 T_i定义为 Γ_i的顶点集。

由 引理 3.2可知，每个 Γ_i 都是一个完全奇数考克斯特图，即 M_{T_i} 中的所有标记都是奇数。此外，由 引理 3.5可知，每个 M_{T_i} 都具有收缩相容性。因此，条件 (1) 成立。

接下来只需验证条件 (2)。设 $i \neq j$，并选取 $a \in T_i$、 $b \in T_j$。我们已经知道，$m_{a,\ b}$ 必为偶数或 ∞。

若 $m_{a,\ b} = \infty$，则对于任意 $x \in T_i$， $y \in T_j$，也必有 $m_{x,\ y} = \infty$，否则引理 3.3将会被违背。

若 $m_{a,\ b}$ 是偶数，则由同一引理可知，所有满足 $m_{x,\ y}$ 且 $x \in T_i$， $y \in T_j$ 的值也必为偶数。此外，引理 3.6意味着这些偶数值必定全部相同。

因此，对于每一对不同的分支 T_i， T_j，它们之间的所有标签都等于某个 $n_{ij} \in 2\mathbb{N} \cup \{\infty\}$。因此条件 (2) 得到满足，证明也就完成了。 □

下一个引理是一条技术性说明，后面会用到。

引理 3.8。 设 $m, m' \in \mathbb{N}_{\geq 2}$。若 m 整除 m'，且 $\Pi(a,b,m) = \Pi(b,a,m)$，则也有 $\Pi(a,b,m') = \Pi(b,a,m')$。

证明。 令 $m' = km$，其中 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$。

情况 1： m **为偶数**。 于是 m' 为偶数，且

$$\Pi(a,b,m') = \big(\Pi(a,b,m)\big)^k = \big(\Pi(b,a,m)\big)^k = \Pi(b,a,m').$$

情况 2： m **为奇数且** m' **为偶数**。 于是 k 为偶数，且

$$\Pi(a,b,m') = \big(\Pi(a,b,m)\,\Pi(b,a,m)\big)^{k/2} = \big(\Pi(b,a,m)\,\Pi(a,b,m)\big)^{k/2} = \Pi(b,a,m').$$

情况 3： m **为奇数且** m' **为奇数**。 于是 k 为奇数，且

$$\begin{aligned}\Pi(a,b,m') &= \big(\Pi(a,b,m)\,\Pi(b,a,m)\big)^{\frac{k-1}{2}}\,\Pi(a,b,m)\\ &= \big(\Pi(b,a,m)\,\Pi(a,b,m)\big)^{\frac{k-1}{2}}\,\Pi(b,a,m) = \Pi(b,a,m').\end{aligned}$$

在所有情形下，我们都得到 $\Pi(a, b, m') = \Pi(b, a, m')$，如所述。 □

接下来的两个引理明确构造了与可收缩相容考克斯特矩阵相关联的阿廷群的收缩映射。

引理 3.9。 设 M 是一个可收缩相容考克斯特矩阵，令 A_S 为其关联的阿廷群，且 $|S| \geq 2$。对于每个 $x \in S$，存在一个（普通）收缩映射 $\psi_x : A_S \to A_{S\setminus\{x\}}$，使得 $\psi_x(x) \in S \setminus \{x\}$ 非平凡。

证明。 首先，我们证明存在 $y \in S \setminus \{x\}$，使得对于每个$y' \in S \setminus \{x\}$，$m_{x,y}$ 整除$m_{x,y'}$。事实上，取满足 $m_{x,y}$ 的 $y \in S \setminus \{x\}$，并令其最小；也就是说，对于所有 $y' \in S \setminus \{x\}$，都有$m_{x,y} \leq m_{x,y'}$。令 $y' \in S \setminus \{x, y\}$。假设 M 是收缩相容的，将其应用于 $\{x, y, y'\}$ 可推出以下两种情况之一：$m_{x,y} < m_{x,y'}$ 且 $m_{x,y} \mid m_{x,y'}$；或者$m_{x,y} = m_{x,y'}$。

接下来，我们断言，对于每个 $z \in S \setminus \{x, y\}$，值 $m_{y,z}$ 整除 $m_{x,z}$。如果 $m_{x,y} = m_{x,z}$，那么与收缩映射相容性意味着$m_{y,z} \mid m_{x,z}$。否则，由于 $m_{x,y}$ 整除$m_{x,z}$（由 y 的选取可知），且这两个值互不相同，与收缩映射相容性意味着 $m_{x,z} = m_{y,z}$。这就证明了该断言。

现在定义映射 ψ_x 如下

$$\psi_x(z) = z \quad \text{for all } z \in S \setminus \{x\}, \qquad \psi_x(x) = y.$$

It r剩下需要验证 ψ_x 是一个同态。也就是说，我们必须检查 t

$$\forall z \in S \setminus \{x\}, \quad \Pi(\psi_x(x), \psi_x(z), m_{x,z}) = \Pi(\psi_x(z), \psi_x(x), m_{x,z}).$$

根据上面的断言，$m_{y,z}$ 整除 $m_{x,z}$，且根据 引理 3.8，

$$\Pi(\psi_x(x), \psi_x(z), m_{x,z}) = \Pi(y, z, m_{x,z}) = \Pi(z, y, m_{x,z}) = \Pi(\psi_x(z), \psi_x(x), m_{x,z}),$$

至此证明完成。 □

引理 3.10。 设 M 是一个抛物型收缩相容的 *Coxeter* 矩阵， A_S 是其关联的 *Artin* 群。那么，对于每个 $x \in S$，都存在一个普通收缩映射

$$\varphi_x : A_S \to A_{S\setminus\{x\}}.$$

证明。 我们有一个划分 $S = T_1 \sqcup \cdots \sqcup T_k$，使得:

1. 对所有 $i \in \{1, \ldots, k\}$， M_{T_i} 都是收缩相容的。

2. 对于每一对 i， $j \in \{1, \ldots, k\}$ 且满足 $i \neq j$，都存在 n_{ij}，它是一个偶数或 ∞，使得对于所有 $(a,\ b) \in T_i \times T_j$，都有 $m_{a,\ b} = n_{ij}$。

不失一般性，假设 $x \in T_1$。我们分两种情形讨论:

- **情况 1:** $T_1 = \{x\}$。定义

$$\varphi_x(z) = z \quad \text{for } z \in S \setminus \{x\}, \qquad \varphi_x(x) = 1.$$

根据抛物型收缩相容性，这一定义是良定义的，因为 x 与其他生成元之间只有偶数关系或 ∞ 关系。因此，如果 $m_{x,\ z} \neq \infty$,

$$\Pi(\varphi_x(x), \varphi_x(z), m_{x,z}) = z^{\frac{m_{x,z}}{2}} = \Pi(\varphi_x(z), \varphi_x(x), m_{x,z}).$$

- **情况 2:** $|T_1| \geq 2$。根据引理 3.9，存在一个普通收缩映射

$$\psi_x : A_{T_1} \to A_{T_1\setminus\{x\}}$$

使得 $\psi_x(x) = y \in T_1 \setminus \{x\}$。定义

$$\varphi_x(z) = \begin{cases} \psi_x(z) & \text{if } z \in T_1, \\ z & \text{otherwise.} \end{cases}$$

To 验证 φ_x 是一个同态，考虑带有 $m_{x,\ z} \neq \infty$的 $z \in S \setminus \{x\}$：

– 若 $m_{x,\ z}$ 是奇数，则 $z \in T_1$，且由于 ψ_x 是一个同态，有

$$\begin{aligned} \Pi(\varphi_x(x), \varphi_x(z), m_{x,z}) &= \Pi(\psi_x(x), \psi_x(z), m_{x,z}) \\ &= \Pi(\psi_x(z), \psi_x(x), m_{x,z}) \\ &= \Pi(\varphi_x(z), \varphi_x(x), m_{x,z}). \end{aligned}$$

– 若 $m_{x,\ z}$ 是偶数，则对某个 $j \neq 1$有 $z \in T_j$，且 $m_{x,\ z} = n_{1,\ j} = m_{y,\ z}$。因此，

$$\Pi(\varphi_x(x), \varphi_x(z), m_{x,z}) = \Pi(y, z, m_{y,z}) = \Pi(z, y, m_{y,z}) = \Pi(\varphi_x(z), \varphi_x(x), m_{x,z}).$$

□

现在我们可以证明主要定理了。

证明定理 *1.2*。一个方向由引理 3.7得出。

现在，假设 M 是抛物可缩回相容的。注意， M中对应于 A_S 的任意标准抛物子群的子矩阵仍然是抛物可缩回相容的。根据 引理 3.10，对于任意 $X \subseteq S$ 和任意 $x \in X$，存在一个收缩映射

$$A_X \to A_{X\setminus\{x\}}.$$

然后，应用引理 3.1，我们得出 A_S 是抛物可缩的 e. □

定理 *1.1* 的证明。 如果 A_S 是抛物可缩的，那么根据 引理 3.1，每个子群$A_{a、b、c}$ 都收缩到$A_{b、c}$。

接下来，我们证明这样一个事实：每个 $A_{a、b、c}$ 都是抛物可缩的（这等价于定理中陈述的条件），这意味着与 A_S 相关联的考克斯特矩阵 M 是抛物可缩回相容的。一旦证实这一点，定理 1.2 便意味着 A_S 是抛物可缩的。

论证本质上与引理 3.7证明中的论证相同。考虑 Γ 的考克斯特图 A_S，并定义一个新图 Γ_{odd}，其顶点集与 Γ相同，且边恰好是标记为奇数的边。设 Γ_1、.....、 Γ_k是 Γ_{odd}的连通分支，并将 T_i定义为 Γ_i的顶点集。我们有一个划分 $S = T_1 \sqcup \cdots \sqcup T_k$，并且再次根据 引理 3.2，每个 Γ_i 都是完全考克斯特图，即 M_{T_i} 中的所有标签都是奇数。

如果 $m_{a、b}$、 $m_{a、c}$和 $m_{b、c}$全都是奇数，那么根据 引理 3.5，不妨对 a、 b、 c进行置换，使得

$$m_{a,b} = m_{a,c} \quad \text{and} \quad m_{b,c} \mid m_{a,b}.$$

这保证每个 M_{T_i} 都是收缩相容的，满足抛物型收缩相容性的第一个条件。

对于第二个条件，引理 3.3表明，连接 T_i 与 T_j 的顶点之间要么没有边，要么 T_i 的所有顶点都通过标记为偶数的边与 T_j 的所有顶点相连。然后，根据 引理 3.6，所有这些标记为偶数的边必定具有相同的标记，这满足抛物型收缩相容性的第二个条件。 □

定理 *1.3* 的证明。 假设 A_S 是一个抛物可缩回阿廷群。根据 引理 3.7，相应的考克斯特矩阵 M 是抛物型收缩相容的。我们将为每个子集 $X \subseteq S$ 构造一个普通收缩。

记 $X = S \setminus \{x_1, \ldots, x_p\}$。由于 M 中对应于标准抛物子群的任何子矩阵仍然是抛物型收缩相容的，引理 3.10保证，对于每个 $k = 1$、.....、 p，都存在一个普通收缩映射

$$\varphi_k : A_{S\setminus\{x_1,\ldots,x_{k-1}\}} \to A_{S\setminus\{x_1,\ldots,x_k\}}.$$

复合这些收缩映射，所需的收缩映射为 $\varphi_p \circ \cdots \circ \varphi_1$。 □

参考文献

Y. Antol´ın 和 A. Minasyan。图积的蒂茨替代定理。代数期刊 ¨纯粹与应用数学杂志。 *[*克雷尔杂志*]*, 704:55–83，2015年。

Y. Antol´ın 和 I. Foniqi。FC型偶 Artin 群中抛物子群的交。爱丁堡数学会会刊，65(4):938–957，2022年。Y. Antol´ın 和 I. Foniqi。偶 Artin 群的子群。群论期刊，28(2):431–462，2025年。E. Brieskorn 和 K. Saito。Artin群与Coxeter群。数学发明，17:245–271，1972年。R. Charney 和 M. W. Davis。与无限反射群相关的超平面补集的 $K(\pi,\ 1)$ 问题。美国数学会期刊，8(3):597– 627，1995年。B. A. Cisneros de la Cruz、M. Cumplido 和 I. Foniqi。论存在收缩映射到抛物子群的阿廷群。国际群论期刊，15(2):71–92，2026年。M. Cumplido、V. Gebhardt、J. Gonz´ález-Meneses 和 B. Wiest。球面型 Artin–Tits 群的抛物子群。数学进展，352:572–610，2019年。L. Paris。阿廷群的抛物子群。代数期刊，196(2):369–399，1997年。L. Paris。阿廷群的 $K(\pi,\ 1)$ 猜想。图卢兹科学学院年刊 ´数学 ´学，第6辑，23(2):361–415，2014年。M. Salvetti。阿廷群的同伦型。数学研究快报，1(5): 565–577，1994年。J.-P. Serre。树、*amalgams*、SL_2, 第46卷，$Ast´erisque$。法国数学会，Paris，1977年。J. Tits。环面的正规化子。I. 扩张的Coxeter群。代数期刊，4: 96–116，1966年。H. Van der Lek。复超平面补集的同伦型。博士论文，奈梅亨天主教大学，1983年。