arXiv:2603.15316v1 [math.AP] 16 Mar 2026

与带漂移的格鲁申算子相关的黎斯变换

Nishta Garg 和 Rahul Garg

Abstract. 我们研究关于一种具有指数增长测度对称的带漂移的格鲁申算子。对于相应的黎斯变换，我们研究强型 (p,p), $1<p<\infty$ 及弱型 $(1,1)$ 有界性。

1. 引言 Introduction

本文研究作用于 $\mathbb{R}^{n+m}$上的格鲁申算子。这些次椭圆算子于 1970年 在 [Gru70]on $\mathbb{R}^2$ 中首次引入。格鲁申算子G 诱导出 $\mathbb{R}^{n+m}$ 上的次黎曼度量 d ； 根据[RS08] 的研究，众所周知，空间 $(\mathbb{R}^{n+m}, d, dx)$ 是 Coifman–Weiss 意义下的齐次型空间[CW71], ，也就是说，它是一个倍增度量测度空间。过去十年左右，围绕格鲁申算子的各种问题已有大量研究。尤其是，其谱乘子已在一系列研究中得到系统探讨[JST13,MS12, MM14, DM20, DM22, DM23], ，这些研究也推动了关于伪乘子的一些密切相关工作 [BBGG23, BBGG24b, BBGG24a]。

已有多位作者研究了与 Grushin 算子 G相关的黎斯变换。下面回顾这一领域的一些重要成果。在$m=1$这一有限情形下，Jotsaroop 等人 [JST13]首次证明了这些算子在 $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$上的有界性，其中 $1<p<\infty$。不久之后，Sanjay–Thangavelu [ST14] 证明了它们具有无维数依赖的有界性。后来，Robinson–Sikora [RS16] 在更一般的框架下证明了这些黎斯变换的 L^p有界性（ $1<p<\infty$ ）以及弱型 $(1,1)$ 。他们工作的关键思路是将这些黎斯变换与适当幂零李群对应的黎斯变换联系起来，并据此运用 Coifman–Weiss 传递技巧 [CW76]展开论证。 [MS12, DJ16]中的研究也成功采用了这一方法。我们还想提及 [DS21] ，该文进一步发展了这一优美技巧，并展示了它在研究一大类例子时的作用。

本文旨在考察带漂移的格鲁申算子。该算子关于一个具有指数增长的测度是对称的。我们将研究与之相关的一阶及高阶 Riesz 变换的强型 $(p,\ p)$ 和弱型 $(1,\ 1)$ 有界性。在介绍本文的设定和结果之前，我们先简要回顾相关文献，尤其是关于欧几里得空间上带漂移的拉普拉斯算子的研究。

给定一个非零 向量 $\nu=(\nu_1,\ \ldots,\ \nu_n)\in\mathbb{R}^n$，考虑由下式给出的带漂移的拉普拉斯算子

$$\Delta_\nu=-\Delta-2\,\nu\cdot\nabla=-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}-2\sum_{j=1}^{n}\nu_j\frac{\partial}{\partial x_j}.$$

2020年 数学主题分类。 主要分类：42B20。次要分类：22E25，58J35。关键词和短语。 黎斯变换，热半群，Grushin 算子，Heisenberg-Reiter 群。

众所周知， Δ_ν是正定的，并且在 $L^2(\mathbb{R}^n,\ d\mu_\nu)$ 上本质自伴，其中 $d\mu_\nu(x) = e^{2\nu\cdot x}\,dx$。显然，测度 $d\mu_\nu$具有指数体积增长，因此经典的 Calder´on–Zygmund 理论不直接适用于研究相应的黎斯变换 $R_\alpha = \nabla^\alpha(\Delta_\nu)^{-|\alpha|/2}$。

此类 Riesz 变换最早由 Lohou´e–Mustapha [LM04]研究´。事实上，Lohoue–Mustapha 的工作处于更一般的背景下，即可 amenable 群。将讨论范围限定在欧几里得空间的设定中，他们得到如下结果。

定理 1.1 (Lohou´e–Mustapha [LM04])。 对于任意 $1 < p < \infty$ 和 $\alpha \in \mathbb{N}^n$ 满足 $|\alpha| \geqslant 1$的，*Riesz* 变换 $R_\alpha = \nabla^\alpha(\Delta_\nu)^{-|\alpha|/2}$在 $L^p(\mathbb{R}^n$上有界，$d\mu_\nu)$.

端点情形，即关于 $p = 1$ 的有界性性质，最早由 Li–Sj¨ogren–Wu [LSW16] 研究，随后 Li–Sj¨ogren [LS21]进一步加强了相关结果。令 $R_D = D(\Delta_\nu)^{-k/2}$ 为一个 k^{th} 阶 Riesz 变换，其中 D 是一个次数为 $k \geqslant 1$ 的齐次微分算子，且具有常系数。可以将 D 改写为沿 ν 及其正交补方向的导数之和。据此，Li–Sj¨ogren [LS21，定理 1.1]证明了：R_D 相对于 $d\mu_\nu$ 是弱型 $(1,1)$，当且仅当沿 ν 方向的导数的最高阶数至多为 2。继续讨论之前，值得一提的是，近年来其他背景下的相关问题也取得了一些进展。例如，参见 [LS17、LS22、BFnRM25、GG25]。

回到格鲁申算子 G，我们回顾一下， G 是一个二阶亚椭圆偏微分算子，定义如下：

$$G = -\sum_{j=1}^{n} X_j^2 - \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} X_{j,k}^2,$$

其中，将 $\mathbb{R}^{n+m}$ 中的点写作 $x = (x',\ x'')$，其中 $x' = (x'_1,\ x'_2,\ \ldots,\ x'_n) \in \mathbb{R}^n$，且 $x'' = (x''_1,\ x''_2,\ \ldots,\ x''_m) \in \mathbb{R}^m$，一阶向量场定义为

$$X_j = \frac{\partial}{\partial x'_j} \qquad \text{and} \qquad X_{j,k} = x'_j\,\frac{\partial}{\partial x''_k}, \tag{1.1}$$

其中 $1 \leqslant j \leqslant n$ 和 $1 \leqslant k \leqslant m$.

记 $X = (X',\ X'') = (X_1,\ \ldots,\ X_n,\ X_{1,\,1},\ \ldots,\ X_{n,\,m})$.。那么，给定一个非零向量 $\nu = (a,\ b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{nm}$，我们将带漂移的格鲁申算子 G_ν 定义为

$$G_\nu = G - 2\,a\cdot X' - 2\,b\cdot X''. \tag{1.2}$$

事实证明（见命题 2.3），带漂移的格鲁申算子 G_ν 关于正测度 μ （定义在 $\mathbb{R}^{n+m}$ 上）对称，当且仅当 $b = 0$；且相差一个标量因子，测度 μ 由 $d\mu = d\mu_a = e^{2a\cdot x'}\,dx$给出，其中 dx 表示 $\mathbb{R}^{n+m}$上的勒贝格测度。今后，我们将带漂移的格鲁申算子记作

$$G_a = G - 2\,a\cdot X' = G - 2\,a\cdot\nabla_{x'}$$

其中， a $\mathbb{R}^n$ 中的一个非零向量。事实证明，算子 G_a 相对于测度 $d\mu_a = e^{2a\cdot x'}\,dx$ 本质上是自伴的。

本文研究与 G_a相关的任意阶黎斯变换 $k \geqslant 1$，现定义如下。给定多重指标 $\alpha \in \mathbb{N}^{n+nm}$，使得 $|\alpha| = k \geqslant 1$，定义

阶数为 k 的黎斯变换 $R_{\alpha,\,a}$ 定义为

$$R_{\alpha,a} = X^{\alpha} G_a^{-k/2}.$$

我们有以下 关于这些 Riesz 变换的 L^p-有界性结果 .

定理 1.2. 对于任意多重指标 α，满足 $|\alpha| = k \geqslant 1$ 和 $1 < p < \infty$，*Riesz* 变换 $R_{\alpha,\,a}$ 在 $L^p(\mathbb{R}^{n+m}, d\mu_a)$上有界，且关于 a一致。

并且，对于端点情形 $p = 1$，我们有以下两个结果。

定理 1.3. 在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上，即对于 $m = 1$，一阶 *Riesz* 变换是关于 $d\mu_a$的弱型$(1,1)$，且关于 a一致。

定理 1.4。 对于任意 $k \geqslant 3$，并非所有 k 阶黎斯变换相对于 $d\mu_a$都是弱型 $(1,1)$。

论文结构： 在第2节中，我们首先回顾有关 Grushin 算子、某些 Heisenberg-Reiter 群上的次拉普拉斯算子的基础知识，以及它们之间关系的一些事实。随后，我们讨论带漂移的格鲁申算子、与之相关的 Riesz 变换，以及相应球体积的渐近行为，内容见小节2.4。在小节 2.5中，我们将说明，利用伸缩和旋转论证，只需研究单位向量 e_1的情形。

我们将在第 1.2 节和 1.3 节中证明定理 3。这些结果的证明主要基于 Coifmann-Weiss转移技巧 [CW76]，并紧密沿用 [RS16]中提出的方法。通过这种方式，我们将根据 Heisenberg-Reiter 群上带漂移的次拉普拉斯算子的已知结果（定理 2.1 和 2.2），推导出带漂移的格鲁申算子的相应结果。

我们将在命题 4.1 中证明：经过适当的欧几里得平移和伸缩共轭后，带有（缩放后的）漂移的 Grushin 算子的 Riesz 变换逐点收敛到 $\mathbb{R}^{n+m}$上的带漂移的拉普拉斯算子的 Riesz 变换。由此可以轻易证明，带漂移的 Grushin 算子的 Riesz 变换有界性蕴含 $\mathbb{R}^{n+m}$ 上带漂移的拉普拉斯算子的 Riesz 变换有界性，进而由 1.4 中的定理 1.1 可知，定理 [LS 21]成立。

2. Preliminaries and Basic results

2.1. Grushin 算子。 记任意的 $x \in \mathbb{R}^{n+m}$ 为 $x = (x',\ x'')$，其中 $x' = (x'_1,\ x'_2,\ \ldots\ldots,\ x'_n) \in \mathbb{R}^n$ 且 $x'' = (x''_1,\ x''_2,\ \ldots\ldots,\ x''_m) \in \mathbb{R}^m$。据此，$\mathbb{R}^{n+m}$ 上的 Grushin 算子 G 定义为

$$G = -\Delta_{x'} - |x'|^2 \Delta_{x''} = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j'^2} - |x'|^2 \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial x_k''^2}. \tag{2.1}$$

显然，算 子 G 是以下向量场平方和的负值:

$$X_j = \frac{\partial}{\partial x'_j} \quad \text{and} \quad X_{j,k} = x'_j \frac{\partial}{\partial x''_k}, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n,\ 1 \leqslant k \leqslant m.$$

为便于后续讨论，记

$$X = (X',\, X'') = (X_1, \ldots, X_n,\, X_{1,1}, \ldots, X_{n,m}). \tag{2.2}$$

容易验证，次椭圆算子 G 关于非各向同性膨胀族 $\delta_r(x', x'') = (rx', r^2x'')$, $r > 0$是 2 次齐次的。

˜控制距离 $d(x, y)$ Grushin 算子具有以下渐近行为（参见 [RS08，命题 51]）：

$$\tilde{d}(x,y) \sim d(x,y) := |x'-y'| + \begin{cases} \frac{|x''-y''|}{|x'|+|y'|}, & \text{if } |x''-y''|^{1/2} \leqslant |x'|+|y'| \\ |x''-y''|^{1/2}, & \text{if } |x''-y''|^{1/2} \geqslant |x'|+|y'|. \end{cases} \tag{2.3}$$

从现在起，我们将 $d(x, y)$ 称为 Grushin 度量。令 $B(x, r)$ 表示以 x 为中心、半径为 r的球，即 $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^{n+m} : d(x, y) < r\}$。已知$B(x, r)$ 的勒贝格测度具有以下渐近行为（同样参见 [RS08，命题 51]）：

$$|B(x,r)| \sim r^{n+m} \max\{r, |x'|\}^m \sim r^{n+m}(r+|x'|)^m. \tag{2.4}$$

˜由（2.4）可立即得到，$(\mathbb{R}^{n+m}, d, dx)$ 是一个齐次维数为 Q 的倍增度量测度空间$= n + 2m$。

Grushin 算子与缩放 Hermite 算子 $H(\lambda) = -\Delta_{x'} + |\lambda|^2|x'|^2$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上的关系密切，具体如下。对于定义在 $\mathbb{R}^{n+m}$上的 Schwartz 类函数 f，可以对 x''变量应用欧几里得傅里叶反演公式，得到

$$Gf(x) = (2\pi)^{-m} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-i\lambda\cdot x''} H(\lambda) f^\lambda(x')\, d\lambda, \tag{2.5}$$

where $f^\lambda(x') = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^m} f(x', x'') e^{i\lambda\cdot x''}\, dx''$.

算子 G 在$L^2(\mathbb{R}^{n+m})$ 上生成一个对称扩散半群（热半群）$(e^{-tG})_{t>0}$。利用关系式（2.5），可以用算子 $H(\lambda)$ 在 $\mathbb{R}^n$上的热核来表示其热核$k_{t,\,\lambda}(x, y)$。更确切地说，

$$H_t(x,y) = (2\pi)^{-m} \int_{\mathbb{R}^m} k_{t,\lambda}(x', y')\, e^{-i\lambda\cdot(x''-y'')}\, d\lambda, \tag{2.6}$$

其核 $k_{t,\,\lambda}(x', y')$ 由下式给出：

$$\left(\frac{|\lambda|}{2\pi \sinh(2|\lambda|t)}\right)^{n/2} \exp\left(-\frac{|\lambda|}{2}\coth(2|\lambda|t)\,|x'-y'|^2 - |\lambda|\tanh(|\lambda|t)\, x'\cdot y'\right). \tag{2.7}$$

众所周知，Grushin 算子的热核满足高斯上界，即存在常数 b, $C > 0$ 使得

$$|H_t(x,y)| \leqslant C|B(x,\sqrt{t})|^{-1} \exp(-b\, d(x,y)^2/t).$$

关于上述估计的更多细节，参见 [RS08] 中的推论 6.6。

2.2. **Heisenberg-Reiter 群**。Grushin 算子与某个 Heisenberg-Reiter 群的次拉普拉斯算子密切相关，正如我们将在下一小节中看到的。

我们简要回顾一些与 Grushin 算子的研究相关的特定 Heisenberg-Reiter 群的事实；有关详情，请参阅 [MS12，Lop86]及其中的参考文献。

令 $\mathbb{R}^{n\times m}$ 表示所有实数项 $n\times m$ 矩阵的集合。令 $\mathbb{H}_{n,\,m}$ 表示半直积 $\mathbb{R}^{n\times m}\rtimes(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m)$，其群运算为

$$(u,v,s)\cdot(u',v',s')=(u+u',v+v',s+s'+(u'^{T}v-u^{T}v')/2).$$

群$\mathbb{H}_{n,\,m}$是 Heisenberg-Reiter 群的一个例子。

设$\{X_{1,\,1},\ \ldots\ldots,\ X_{n,\,m},\ Y_1,\ \ldots\ldots,\ Y_n,\ T_1,\ \ldots\ldots,\ T_m\}$是$\mathbb{H}_{n,\,m}$的李代数的一组标准基。利用这组定义在$\mathbb{H}_{n,\,m}$上的左不变向量场，齐次次拉普拉斯算子$\mathcal{L}$ 在$\mathbb{H}_{n,\,m}$ 上定义为

$$\tilde{\mathcal{L}}=-\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\tilde{X}_{j,k}^{2}-\sum_{j=1}^{n}\tilde{Y}_{j}^{2}. \tag{2.8}$$

该系统

$$\tilde{X}=(\tilde{X}_{1,1},\ldots,\tilde{X}_{n,m},\,\tilde{Y}_1,\ldots,\tilde{Y}_n)$$

满足 Hörmander 条件。因此，若以 ϱ 表示上的 Carnot-Carathéodory 距离，$\mathbb{H}_{n,\,m}$，并记 $\varrho(g)=\varrho(g,\ e)$，其中 e 是$\mathbb{H}_{n\text{的单位元},\,m}$，则有：热半群的核 p_t 及其梯度满足以下高斯上界（参见 $(e^{-t\mathcal{L}})_{t>0}$ VSCC 中的定理 IV.4.2）：对于任意多重指标 [VSCC92]以及 γ，存在常数 $\kappa>0,\ \kappa>0$，使得对所有 $g\in\mathbb{H}_{n,\,m}$ 和 $t>0$，

$$|\tilde{X}^{\gamma}p_t(g)|\leqslant C\,t^{-|\gamma|/2}\,V(\sqrt{t})^{-1}\,e^{-\frac{\varrho(g)^2}{(4+\kappa)t}}. \tag{2.9}$$

这里 $V(\sqrt{t})$ 表示半径为 $\sqrt{t}$的球体积。

在 [HMM05], 中，Hebisch 等人研究了连通李群上带漂移的次拉普拉斯算子的谱乘子。特别地，给定 $\nu=(a,\ b)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{nm}$群$\mathbb{H}_{n,\,m}$ 上的带漂移 $\mathcal{L}_\nu$ 的次拉普拉斯算子定义为

$$\tilde{\mathcal{L}}_\nu=\tilde{\mathcal{L}}-2\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}b_{j,k}\tilde{X}_{j,k}-2\sum_{j=1}^{n}a_j\tilde{Y}_j. \tag{2.10}$$

在 [HMM05] 中证明了，算子 $\mathcal{L}_\nu$是正定的，并且在$L^2(\mathbb{H}_{n,\,m},\ d\mu'_\nu)$上本质自伴，其中 $d\mu'_\nu(u,\ v,\ s)=e^{2(b,\,a)\cdot(u,\,v)}\,du\,dv\,ds$。

正如 Hebisch 等人 [HMM05在第 906], 页所指出的，算子 $\mathcal{L}_\nu$ 在群 $\mathbb{H}_{n,\,m}$. 上生成了一个概率测度的卷积半群。因此，根据 Hunt 定理 [Hun56]，$\tilde{\mathcal{L}}_\nu$生成了一个对称扩散半群$(e^{-t\tilde{\mathcal{L}}_\nu})_{t>0}$，其作用于$(\mathbb{H}_{n,\,m},\ d\mu'_\nu)$. 令$p_{t,\,\nu}$表示半群$(e^{-t\mathcal{L}_\nu})_{t>0}$的积分核，即

$$e^{-t\tilde{\mathcal{L}}_\nu}f(g)=\int_{\mathbb{H}_{n,m}}p_{t,\nu}(g,g')\,f(g')\,d\mu'_\nu(g').$$

利用 [HMM05], 中的公式（3.6）很容易验证

$$p_{t,\nu}(g,g')=e^{-t|\nu|^2}\,e^{-(b,a)\cdot(u,v)}\,e^{-(b,a)\cdot(u',v')}\,p_t(g'^{-1}g),$$

其中 $g=(u,\ v,\ s),\ \ g'=(u',\ v',\ s')\in\mathbb{H}_{n,\,m}$。

现在，对于任意满足 $|\gamma| = k \geqslant 1$ 的多重指标 γ，可以通过函数演算定义 Riesz 变换 $R_{\gamma,\,\nu}$，如下所示：

$$\tilde{R}_{\gamma,\nu} = \tilde{X}^{\gamma}(\tilde{\mathcal{L}}_{\nu})^{-k/2} = \frac{1}{\Gamma(k/2)} \int_0^{\infty} t^{\frac{k}{2}-1}\, \tilde{X}^{\gamma} e^{-t\,\tilde{\mathcal{L}}_{\nu}}\, dt.$$

以下结果可由 [LM04，定理 2] 得出。

定理 2.1 (Lohou´e–Mustapha [LM04])。 对于任意 $1 < p < \infty$ 以及满足 $|\gamma| = k \geqslant 1$ 的多重指标 γ，*Riesz* 变换 $\tilde{R}_{\gamma,\nu} = \tilde{X}^{\gamma}(\tilde{\mathcal{L}}_{\nu})^{-k/2}$ 在 $L^p(\mathbb{H}_{n,m},\, d\mu'_{\nu})$ 上有界。

在 $m = 1$ 的特殊情形下，Heisenberg-Reiter 群$\mathbb{H}_{n,\,1}$ 就是海森堡群。最近，Li–Sj¨ogren 研究了 $p = 1$ 在 $\mathbb{H}_{n,1}$ 上的端点情形。他们证明了以下结果。

定理 2.2 (Li–Sj¨ogren [LS22])。 在海森堡群 $\mathbb{H}_{n,1}$ 上，一阶 *Riesz* 变换 $\tilde{X}(\tilde{\mathcal{L}}_{\nu})^{-1/2}$ 关于 $d\mu'_{\nu}$ 是 $(1,1)$ 弱型，并且相对于 ν 一致。

在 [LS22], 中还证明了，在$\mathbb{H}_{n,\,1}$上，对于任意三阶或更高阶，黎斯变换并非全部都是弱型 $(1,\ 1)$ 据我们所知，二阶Riesz变换是否为弱型 $(1,\ 1)$ 仍是一个悬而未决的问题。

2.3. **Grushin 算子与次拉普拉斯算子之间的关系。** 在本小节中，我们回顾一下：Grushin 算子的梯度向量场可以看作 Heisenberg-Reiter 群的梯度向量场$\mathbb{H}_{n,\,m}$ 在一个酉表示下的像。这种关系已知在分析若干有趣的算子时非常有用，包括 Grushin 算子，正如 [MS12、DJ16、RS16、DS21]中所示。这里我们回顾一些有用的事实（不作解释）；有关细节请参阅[MS12、DJ16]。

群 $\mathbb{H}_{n,m}$ 通过平移作用于 $\mathbb{R}^{n+m}$

$$\tau_{(u,v,s)}(x', x'') = (x' - v,\ x'' - u^T x' - s + u^T v/2),$$

这诱导出 σ 的酉表示 $\mathbb{H}_{n,m}$，作用在 $L^2(\mathbb{R}^{n+m})$ 上，定义为

$$\sigma_{(u,v,s)} f(x', x'') = f \circ \tau^{-1}_{(u,v,s)}(x', x'') = f\left(x' + v,\ x'' + u^T x' + s + u^T v/2\right). \tag{2.11}$$

事实证明，

$$d\sigma(\tilde{X}_{j,k}) = X_{j,k}, \quad d\sigma(\tilde{Y}_j) = X_j, \quad \text{and therefore} \quad d\sigma(\tilde{\mathcal{L}}) = G. \tag{2.12}$$

酉表示 σ 以自然的方式进一步在函数空间 $L^1(\mathbb{H}_{n,m})$ 上诱导出一个表示：对于任意 $F \in L^1(\mathbb{H}_{n,m})$，定义

$$\sigma(F) f(x) = \int_{\mathbb{H}_{n,m}} F(u,v,s)\, \sigma_{(u,v,s)} f(x)\, du\, dv\, ds = \int_{\mathbb{R}^{n+m}} \sigma(F)(x,y)\, f(y)\, dy,$$

其中

$$\sigma(F)(x,y) = \int_{\mathbb{R}^{n\times m}} F\left(u,\ y' - x',\ y'' - x'' - u^T(x' + y')/2\right)\, du.$$

由此，Grushin 算子的热核可以通过 Heisenberg-Reiter 群的热核得到：

$$H_t(x,y) = \sigma(p_t)(x,y). \tag{2.13}$$

在继续之前，我们指出，令 $\{\tilde{X}_{1,1}^R,\dots,\tilde{X}_{n,m}^R,\tilde{Y}_1^R,\dots,\tilde{Y}_n^R,\tilde{T}_1^R,\dots,\tilde{T}_m^R\}$表示 $\mathbb{H}_{n,m}$ 上的典范右不变梯度向量场组，则还有

$$d\sigma(\tilde{X}_{j,k})_x\,\sigma(F)(x,y)=-\sigma(\tilde{X}_{j,k}^R F)(x,y), \tag{2.14}$$
$$\text{and}\qquad d\sigma(\tilde{Y}_j)_x\,\sigma(F)(x,y)=-\sigma(\tilde{Y}_j^R F)(x,y).$$

˜2.4. **带漂移的 Grushin 算子**。 由于 $G=d\sigma(\mathcal{L})$，将带漂移的 Grushin 算子定义为 $\mathbb{H}_n$ 上带漂移的次拉普拉斯算子在 $d\sigma$ 表示下的像是自然的. $_m$ 。更确切地说，给定一个非零向量 $\nu=(a,\ b)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{nm}$，我们将带漂移的 Grushin 算子 G_ν 定义为

$$G_\nu=d\sigma(\tilde{\mathcal{L}}_\nu), \tag{2.15}$$

˜其中 $\mathcal{L}_\nu$ 如（2.10）所示。

由（2.12）中的恒等式，算子 G_ν 具有如下自然表达式：

$$G_\nu=G-2\,\nu\cdot X,$$

其中向量场 X 由（2.2）给出。

有趣的是，事实证明，要使 G_ν 关于 $\mathbb{R}^{n+m}$ 上的某个正测度对称，必须有 $b=0$。这一点（以及更多内容）将在下面的命题中证明；该命题可视为 [HMM05] 中命题 3.1 的一个类比。

命题 2.3。 带漂移的格鲁申算子 G_ν 关于正测度 μ 在 $\mathbb{R}^{n+m}$ 上对称，当且仅当 $b=0$，且除一个常数因子外，测度 μ 由 $d\mu=d\mu_a=e^{2a\cdot x'}\,dx$给出。因此，带漂移的格鲁申算子成为 $G_a=G-2a\cdot\nabla_{x'}$，并且关于 $d\mu_a=e^{2a\cdot x'}\,dx$本质自伴。

证明。 设 μ 是 $\mathbb{R}^{n+m}$ 上的正测度，使得 G_ν 关于 μ对称。对任意 $f,\ g\in\mathbb{C}_c^\infty(\mathbb{R}^{n+m})$，进行分部积分后可得

$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}}(G_\nu f)\,\overline{g}\,d\mu=\int_{\mathbb{R}^{n+m}}f\,(\overline{G_\nu g})\,d\mu+F(f,g,\mu). \tag{2.16}$$

在上述表达式中，我们有

$$F(f,g,\mu)=(f,\,g\,(G-V)\mu-2X'g\cdot X'\mu-2X''g\cdot X''\mu+4(a\cdot X'g)\mu+4(b\cdot X''g)\mu)\,,$$

其中 $V=-2\,\nu\cdot X$ 和 $(\cdot,\ \cdot)$ 表示 $\mathbb{R}^{n+m}$上的标准欧几里得内积。

由（2.16）可知，G_ν在 $L^2(\mathbb{R}^{n+m}$上对称，$d\mu)$ 当且仅当 $F(f,\ g,\ \mu)=0$对所有 $f,\ g\in\mathbb{C}_c^\infty(\mathbb{R}^{n+m})$ 成立。但由于梯度向量 X' 和 X'' 是 1 次齐次的（相对于非各向同性膨胀 δ_r），因此必有

$$(G-V)\mu=0. \tag{2.17}$$

¨还要注意，算子 $G-V$ 是亚椭圆的（见 [H67]中的定理 1.1）。因此，恒等式（2.17）表明，测度 μ 必定具有如下形式： $d\mu(x)=h(x)\,dx$ 其中某个正光滑函数 h定义在 $\mathbb{R}^{n+m}$上。

据此，我们回到恒等式（2.16），它变为

$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}}(G_\nu f)\,\overline{g}\,h\,dx=\int_{\mathbb{R}^{n+m}}f\,(\overline{G_\nu g})\,h\,dx, \tag{2.18}$$

对所有 $f,\ g\in\mathbb{C}_c^\infty(\mathbb{R}^{n+m})$。

特别地，取 $f(x) = \phi_1(x')\psi(x'')$ 和 $g(x) = \phi_2(x')\psi(x'')$ 为某些实值、紧支撑的光滑函数 ϕ_1，ϕ_2 和 ψ。将它们代入（2.18），经过简单计算可得

$$\int_{\mathbb{R}^n} \{(\Delta_{x'} + 2a\cdot\nabla_{x'})\,\phi_1(x')\}\,\phi_2(x')\,\Psi(x')\,dx' = \int_{\mathbb{R}^n} \{(\Delta_{x'} + 2a\cdot\nabla_{x'})\phi_2(x')\}\,\phi_1(x')\,\Psi(x')\,dx',$$

其中 $\Psi(x') = \int_{\mathbb{R}^m} \psi(x'')^2 h(x',\ x'')\,dx''$。

上述单位元等式不过是在说明算子 $\Delta_{x'} + 2a\cdot\nabla_{x'}$，也就是带漂移的拉普拉斯算子，在 $\mathbb{R}^n$ 上关于测度 $\Psi(x')\,dx'$是对称的。现在我们可以调用 [HMM05] 中的命题 3.1，得出函数 Ψ 必定是

$$\Psi(x') = C_\psi\, e^{2a\cdot x'},$$

其中 C_ψ 是一个依赖于 ψ 的非负常数。

因此我们有

$$e^{-2a\cdot x'} \int_{\mathbb{R}^m} \psi(x'')^2\, h(x', x'')\,dx'' = C_\psi.$$

对 x' 变量求偏导数，得到

$$\int_{\mathbb{R}^m} \psi(x'')^2 \left\{-2a_j\, e^{-2a\cdot x'}\, h(x', x'') + e^{-2a\cdot x'} \partial_{x'_j}\, h(x', x'')\right\} dx'' = 0,$$

对于每个 $j = 1$、.....、n 以及所有 $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$。

由于上述单位元对所有 $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$均成立，我们得出

$$\partial_{x'_j} h(x', x'') = 2a_j h(x', x'')$$

对于所有 $j = 1$、2、.....、n，这进一步意味着

$$h(x', x'') = e^{2a\cdot x'} K(x'')$$

对于某个定义在 $\mathbb{R}^m$上的正光滑函数 K。

鉴于上述 h的形式，单位元（2.18）变为

$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} (G_\nu f)\,\overline{g}\, e^{2a\cdot x'}\, K(x'')\,dx = \int_{\mathbb{R}^{n+m}} f\,(\overline{G_\nu g})\, e^{2a\cdot x'}\, K(x'')\,dx, \tag{2.19}$$

对于所有 f，$g \in \mathbb{C}_c^\infty(\mathbb{R}^{n+m})$。

现在，考虑实值、紧支撑的光滑函数 f 和 g，它们的形式为 $f(x) = \phi_1(x')\,\psi_1(x'')$ 和 $g(x) = \phi_2(x')\,\psi_2(x'')$。若将它们代入（2.19），则可得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{n+m}} \phi_1(x')\,\phi_2(x')\,\psi_1(x'') \left\{|x'|^2\,\Delta_{x''}\psi_2(x'') + 2b\cdot X''\psi_2(x'')\right\} e^{2a\cdot x'}\, K(x'')\,dx'\,dx'' \\ = \int_{\mathbb{R}^{n+m}} \phi_1(x')\,\phi_2(x')\,\psi_2(x'') \left\{|x'|^2\,\Delta_{x''}\psi_1(x'') + 2b\cdot X''\psi_1(x'')\right\} e^{2a\cdot x'}\, K(x'')\,dx'\,dx''.\end{aligned} \tag{2.20}$$

通过定义以下常数（它们依赖于 a、ϕ_1 和 ϕ_2）：

$$C = \int_{\mathbb{R}^n} \phi_1(x')\,\phi_2(x')\,|x'|^2 e^{2a\cdot x'}\,dx' \quad \text{and} \quad C_{j,k} = 2\int_{\mathbb{R}^n} \phi_1(x')\,\phi_2(x')\,x'_j\, e^{2a\cdot x'}\,dx', \tag{2.21}$$

单位元（2.20）可改写为

(2.22)
$$C\int_{\mathbb{R}^m}\psi_1(x'')\,\Delta_{x''}\psi_2(x'')\,K(x'')\,dx''+\sum_{j,k}b_{j,k}\,C_{j,k}\int_{\mathbb{R}^m}\psi_1(x'')\,\partial_{x''_k}\psi_2(x'')\,K(x'')\,dx''$$
$$=C\int_{\mathbb{R}^m}\psi_2(x'')\,\Delta_{x''}\psi_1(x'')\,K(x'')\,dx''+\sum_{j,k}b_{j,k}\,C_{j,k}\int_{\mathbb{R}^m}\psi_2(x'')\,\partial_{x''_k}\psi_1(x'')\,K(x'')\,dx''.$$

现在，对（2.22）左端进行分部积分，可得

(2.23)
$$\int_{\mathbb{R}^m}\psi_2(x'')\left\{\psi_1(x'')\,\Theta_1(x'')+2\sum_k\partial_{x''_k}\psi_1(x'')\,\Theta_{2,k}(x'')\right\}dx''=0,$$

其中

(2.24)
$$\Theta_1(x'')=C\,\Delta_{x''}K(x'')-\sum_{j,k}b_{j,k}\,C_{j,k}\,\partial_{x''_k}K(x'')$$
$$\text{and}\quad\Theta_{2,k}(x'')=C\,\partial_{x''_k}K(x'')-\sum_j b_{j,k}\,C_{j,k}\,K(x'').$$

由于恒等式（2.23）对所有 $\psi_2\in\mathbb{C}_c^\infty(\mathbb{R}^m)$均成立，因此可得

$$\psi_1(x'')\,\Theta_1(x'')+2\sum_k\partial_{x''_k}\psi_1(x'')\,\Theta_{2,k}(x'')=0.$$

但是，由于该恒等式对所有 $\psi_1\in\mathbb{C}_c^\infty(\mathbb{R}^m)$均成立，我们可以利用每个偏导数 $\partial_{x''_k}$ 是 **1** 次齐次的这一事实，从而得到 $\Theta_1=\Theta_{2,\,k}=0$ 对所有 k均成立。

请记住，出现在（ C 和 $C_{j,\,k}$ 中的常数）由（2.24）给出，并且借助 a 以及任意实值函数 ϕ_1， $\phi_2\in\mathbb{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$定义。在此阶段，我们具体选取一些特定函数 ϕ_1 和 ϕ_2 如下。选取并固定一个非零实值偶函数 $A\in C_c^\infty(\mathbb{R})$。现在，对于固定的 $l\in\{1,\ 2,\ \ldots,\ m\}$，考虑

$$\phi_1(x')=\prod_{j=1}^n A(x'_j)\quad\text{and}\quad\phi_2(x')=x'_l\,e^{-2a\cdot x'}\prod_{j=1}^n A(x'_j).$$

注意，对于这些特定函数，我们有 $C=0$，并且对于所有 k，都有 $C_{j,\,k}=0$对每个 $j\neq l$ 和 $C_{l,\,k}>0$均成立。但由于 $\Theta_{2,\,k}=0$，于是得到

$$b_{l,k}\,C_{l,k}\,K=0.$$

但是，函数 K 并非平凡函数。因此，必有 $b_{l,\,k}\,C_{l,\,k}=0$，从而 $b_{l,\,k}=0$.于是得到 $b=0$。

继续，可以很容易地选取函数 ϕ_1 和 ϕ_2 使得 $C\neq0$。对于任意这样的常数 C，若将 $b=0$ 代入（2.22），则得到

$$\int_{\mathbb{R}^m}\psi_1(x'')\,\Delta_{x''}\psi_2(x'')\,K(x'')\,dx''=\int_{\mathbb{R}^m}\psi_2(x'')\,\Delta_{x''}\psi_1(x'')\,K(x'')\,dx'',$$

对于所有 $\psi_1,\ \psi_2\in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$.

采用与上述类似的方法论证，可以证明函数 K 必须是一个（正）常数。

综上所述，我们已经证明，如果带漂移的格鲁申算子 G_ν 关于 $\mathbb{R}^{n+m}$ 上的正测度 μ 是对称的，那么必有 $b=0$，也就是说，

$$G_\nu = -\Delta_{x'} - |x'|^2\Delta_{x''} - 2a\cdot\nabla_{x'} = G - 2a\cdot\nabla_{x'},$$

我们将其记为 G_a，而测度 μ 必须是 μ_a 或其正标量倍数，其中 $d\mu_a = e^{2a\cdot x'}\,dx$。

反过来，通过直接计算可得

$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} (G_a f)\,\overline{g}\;d\mu_a = \int_{\mathbb{R}^{n+m}} \left\{\nabla_{x'}f\cdot\overline{\nabla_{x'}g} + |x'|^2\,\nabla_{x''}f\cdot\overline{\nabla_{x''}g}\right\} d\mu_a,$$

对于任意 $f,\ g\in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n+m})$，这意味着定义在 $C_c^\infty(\mathbb{R}^{n+m})$ 上的 G_a 在 $L^2(\mathbb{R}^{n+m},\ d\mu_a)$. 上是正定且对称的

最后，给定一个非零向量 $a\in\mathbb{R}^n$，考虑定义在 $L^2(\mathbb{R}^{n+m},\ dx)$ 上的算子 U_a，其定义为 $U_af(x',\ x'') = e^{-a\cdot x'}f(x',\ x'')$。显然，$U_a$ 是从 $L^2(\mathbb{R}^{n+m},\ dx)$ 到 $L^2(\mathbb{R}^{n+m},\ d\mu_a)$ 的等距映射。容易验证

$$G_a = U_a\,(G + |a|^2 I)\,U_a^{-1}. \tag{2.25}$$

由于 G 在 $L^2(\mathbb{R}^{n+m},\ dx)$ 上是正定且本质自伴的，因此 G_a 在 $L^2(\mathbb{R}^{n+m},\ d\mu_a)$ 上也是正定且本质自伴的。□

注意，算子 G_a 生成一个对称热扩散半群 $(e^{-tG_a})_{t>0}$，其表达式为

$$e^{-tG_a}f(x) = \int_{\mathbb{R}^{n+m}} H_{t,a}(x,y)\,f(y)\,e^{2a\cdot y'}\,dy,$$

其中 $H_{t,\ a}(x,\ y) = e^{-|a|^2t}\,e^{-a\cdot(x'+y')}\,H_t(x,\ y)$ 且 $H_t(x,\ y)$ 由式（2.6）给出。利用关系式（2.13）、（2.25）以及 $\mathcal{L}_\nu$ 生成概率测度卷积半群这一事实（见第 2.2 小节），可以验证上述积分形式，并证明 $(e^{-tG_a})_{t>0}$ 是一个对称扩散半群。~

给定一个多重指标 $\alpha\in\mathbb{N}^n\times\mathbb{N}^{nm}$，满足 $|\alpha| = k\geqslant 1$，通过函数演算，我们定义 k^{th} 阶 Riesz 变换 $R_{\alpha,\ a}$ 为

$$R_{\alpha,a} = X^\alpha G_a^{-k/2} = \frac{1}{\Gamma(k/2)}\int_0^\infty t^{\frac{k}{2}-1}\,X^\alpha e^{-tG_a}\,dt. \tag{2.26}$$

众所周知，关于 Grushin 度量 d，$r)$ 相应的球 $B(x,$ 的勒贝格测度渐近行为已广为人知（见式（2.4））。现在我们将计算这些球相对于当前指数测度的测度的类似渐近估计。

引理 2.4。对于 $d\mu_a = e^{2a\cdot x'}\,dx$，有

$$\mu_a(B(x,r)) \sim \begin{cases} e^{2a\cdot x'}\,r^{n+m}\,(r+|x'|)^m, & if\ r\leqslant 1/|a| \\ |a|^{-(n+1)/2-m}\,e^{2(a\cdot x'+|a|r)}\,r^{\frac{n-1}{2}}\,(r+|x'|)^m, & if\ r>1/|a|. \end{cases} \tag{2.27}$$

证明。我们仅证明 $a=e_1$ 的情形。借助标准的旋转和伸缩方法，即可推出其他非零向量 a 的情形。

我们将使用由 d 给出的 Grushin 度量（2.3），以及（2.4）中所述的球体积估计。给定 $x=(x',\ x''\in\mathbb{R}^{n+m}$ 和 $r>0$，考虑球 $B=B(x,\ r)$。

当 $r \leqslant 1$时，所声称的估计（2.27）可由（2.4）轻易推出。为此，注意若 $r \leqslant 1$，则有

$$\mu_{e_1}(B) = \int_B e^{2y_1'} dy'\, dy'' = e^{2x_1'} \int_B e^{2(y_1'-x_1')}\, dy'\, dy'' \sim e^{2x_1'} \int_B dy'\, dy'' \sim e^{2x_1'}\, r^{n+m}\, (r+|x'|)^m.$$

现在我们将在 2.27 中证明 $r > 1$ 的情形。对于任意 $0 < h < 2r$，考虑集合

$$E_h = \{(y', y'') \in B : y_1' - x_1' = r - h\}$$

并令

$$E_h^1 = E_h \cap A \qquad \text{and} \qquad E_h^2 = E_h \cap (B \backslash A),$$

其中 $A = \{(y',\ y'') \in B :\ |x'' - y''|^{\frac{1}{2}} \leqslant |x'| + |y'|\}$。于是，

$$\mu_{e_1}(B) = e^{2x_1'} \int_B e^{2(y_1'-x_1')}\, dy'\, dy'' = e^{2x_1'} \int_0^{2r} e^{2(r-h)} |E_h|\, dh \tag{2.28}$$

$$= e^{2x_1'} \int_0^{2r} e^{2(r-h)} (|E_h^1| + |E_h^2|)\, dh,$$

其中 $|\cdot|$ 表示集合的 $(n+m-1)$ 维勒贝格测度。

当 $n \geqslant 2$ 时，我们用 $y' = (y_1',\ y_\perp')$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的点；否则 $y' = y_1'$，并且可以对下述论证作适当理解。于是有

$$|x' - y'| - |x_1' - y_1'| = \frac{|x' - y'|^2 - |x_1' - y_1'|^2}{|x' - y'| + |x_1' - y_1'|} \geqslant \frac{|x_\perp' - y_\perp'|^2}{2|x' - y'|}.$$

我们将逐一证明 (2.27) 中的上界和下界 e.

步骤 I（证明 $\lesssim$ 中的估计 (2.27)）： 注意，对于任意 $y = (y',\ y'') \in E_h$，有$d(x, y) - |x_1' - y_1'| < r - |r - h| \leqslant h$。

现在，若 $y \in E_h^1$，则 $d(x,\ y) - |x' - y'| = \frac{|x''-y''|}{|x'|+|y'|}$ 意味着

$$h \geqslant d(x,y) - |x_1' - y_1'| \geqslant \frac{|x'' - y''|}{|x'| + |y'|} + \frac{|x_\perp' - y_\perp'|^2}{2|x' - y'|}.$$

特别地，我们有

$$\frac{|x'' - y''|}{|x'| + |y'|} \leqslant h \qquad \text{and} \qquad \frac{|x_\perp' - y_\perp'|^2}{2|x' - y'|} \leqslant h,$$

这意味着

$$|x'' - y''| \leqslant h(|x'| + |y'|) \leqslant h(|x'| + |y' - x'| + |x'|) < 2h(r + |x'|)$$

and

$$|x_\perp' - y_\perp'|^2 \leqslant 2h|x' - y'| < 2hr.$$

由上可知

$$|E_h^1| \lesssim h^{\frac{n-1}{2}+m}\, r^{\frac{n-1}{2}}\, (r+|x'|)^m. \tag{2.29}$$

另一方面，若 $y \in E_h^2$，则 $d(x,\ y) - |x' - y'| = |x'' - y''|^{1/2}$ 意味着

$$h \geqslant d(x,y) - |x_1' - y_1'| \geqslant |x'' - y''|^{1/2} + \frac{|x_\perp' - y_\perp'|^2}{2|x' - y'|}.$$

特别地，我们有

$$|x''-y''|^{\frac{1}{2}} \leqslant h \qquad \text{and} \qquad |x'_\perp - y'_\perp|^2 \leqslant 2h|x'-y'| < 2hr.$$

由这些估计可得

$$|E_h^2| \lesssim h^{\frac{n-1}{2}+2m} r^{\frac{n-1}{2}} \lesssim h^{\frac{n-1}{2}+m} r^{\frac{n-1}{2}} (r+|x'|)^m. \tag{2.30}$$

利用（2.29）和（2.30），由（2.28）可得

$$\begin{aligned}
\mu_{e_1}(B) &= e^{2x'_1} \int_0^{2r} e^{2(r-h)} (|E_h^1| + |E_h^2|)\, dh \\
&\lesssim e^{2x'_1} \int_0^{2r} e^{2(r-h)}\, h^{\frac{n-1}{2}+m}\, r^{\frac{n-1}{2}}\, (r+|x'|)^m\, dh \\
&\leqslant r^{\frac{n-1}{2}}\, (r+|x'|)^m\, e^{2(x'_1+r)} \int_0^{\infty} e^{-2h}\, h^{\frac{n-1}{2}+m}\, dh \\
&\lesssim r^{\frac{n-1}{2}}\, (r+|x'|)^m\, e^{2(x'_1+r)},
\end{aligned}$$

这正是所述估计（2.27）中的上界。

步骤 II（证明估计 $\gtrsim$（(2.27)））： 只需证明存在一个常数 $C>0$ 使得

$$|E_h^1| \geqslant C\, r^{\frac{n-1}{2}} (r+|x'|)^m, \tag{2.31}$$

对所有 $\frac{1}{4} \leqslant h \leqslant \frac{1}{2}$。

为说明这一点，注意若有（2.31），则由（2.28）可得

$$\begin{aligned}
\mu_{e_1}(B) &= e^{2x'_1} \int_0^{2r} e^{2(r-h)} (|E_h^1| + |E_h^2|)\, dh \\
&\geqslant C\, e^{2(x'_1+r)}\, r^{\frac{n-1}{2}}\, (r+|x'|)^m \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} e^{-2h}\, dh \sim e^{2(x'_1+r)}\, r^{\frac{n-1}{2}}\, (r+|x'|)^m,
\end{aligned}$$

这就是所需的下界估计。

对于 $\frac{1}{4} \leqslant h \leqslant \frac{1}{2}$，我们将分两种情形分别证明（2.31）：$|x'|>r$ 和 $|x'| \leqslant r$。

首先考虑 $|x'|>r$ 的情形，并定义以下集合：

$$\widetilde{E_{h,1}^1} := \left\{ y \in \mathbb{R}^{n+m} : |x'_\perp - y'_\perp|^2 < \frac{r}{16}, \quad |x''-y''| < \frac{|x'|}{16} \quad \text{and} \quad y'_1 - x'_1 = r-h \right\}.$$

我们将证明 $E_{h,1}^1 \subseteq E_h^1$。为此，首先注意到，由于 $|x'|>r>1$，我们有 $|x'|^{1/2} < |x'|$。因此，若 $y \in \widetilde{E_{h,1}^1}$，则 $|x''-y''|^{1/2} < \frac{|x'|^{1/2}}{4} \leqslant |x'|+|y'|$。此外，

$$\begin{aligned}
d(x,y) - |x'_1 - y'_1| &= \frac{|x''-y''|}{|x'|+|y'|} + |x'-y'| - |x'_1-y'_1| \\
&= \frac{|x''-y''|}{|x'|+|y'|} + \frac{|x'_\perp - y'_\perp|^2}{|x'-y'| + |x'_1-y'_1|} \\
&\leqslant \frac{|x'|/16}{|x'|} + \frac{r/16}{|x'_1-y'_1|}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{16} + \frac{r}{16(r-h)} < \frac{1}{16} + \frac{1}{8} < \frac{1}{4} \leqslant h,$$

这里我们用到了 $r-h > r/2$，它可直接由 $h \leqslant 1/2 < r/2$推出。

因此，我们得到 $d(x,\ y) < h + |x_1' - y_1'| = h + (r-h) = r$，从而 $y \in E_h^1$。因此，$\widetilde{E_{h,\ 1}^1} \subseteq E_h^1$，这意味着 $|E_h^1| \geqslant \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{n-1}{2}+m} r^{\frac{n-1}{2}} |x'|^m \sim r^{\frac{n-1}{2}} (r + |x'|)^m$。

On t另一方面，当 $|x'| \leqslant r$时，考虑以下集合：

$$\widetilde{E_{h,2}^1} := \left\{ y \in \mathbb{R}^{n+m} : |x_\perp' - y_\perp'|^2 < \frac{r}{16},\quad |x'' - y''| < \frac{r}{16} \quad \text{and} \quad y_1' - x_1' = r - h \right\}.$$

我们将证明$E_{h,\ 2}^1 \subseteq E_h^1$。为此，首先注意，若$y \in \widetilde{E_{h,\ 2}^1}$，则

$$|x'' - y''|^{1/2} < \frac{r^{1/2}}{4} < r - h = y_1' - x_1' \leqslant |y' - x'| \leqslant |x'| + |y'|.$$

因此，

$$\begin{aligned} d(x,y) - |x_1' - y_1'| &= \frac{|x'' - y''|}{|x'| + |y'|} + \frac{|x_\perp' - y_\perp'|^2}{|x' - y'| + |x_1' - y_1'|} \\ &\leqslant \frac{r/16}{r/2} + \frac{r/16}{|x_1' - y_1'|} \\ &= \frac{1}{8} + \frac{r}{16(r-h)} < \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4} \leqslant h, \end{aligned}$$

其中我们用到了 $|x'| + |y'| \geqslant |x' - y'| \geqslant |x_1' - y_1'| = r - h > r/2$。

由上述内容，我们再次得到 $d(x,\ y) < h + |x_1' - y_1'| = h + (r-h) = r$，这意味着 $y \in E_h^1$。因此，$\widetilde{E_{h,\ 2}^1} \subseteq E_h^1$，所以 $|E_h^1| \geqslant \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{n-1}{2}+m} r^{\frac{n-1}{2}} r^m \sim r^{\frac{n-1}{2}} (r + |x'|)^m$. 引理 2.4 的证明至此完成。□

2.5. **旋转与伸缩**。在开始证明主要结果之前，我们先讨论旋转和伸缩对黎斯变换 $R_{\alpha,\ a}$（定义见（2.26））的影响。由此，我们通常只需考虑漂移向量 $a = e_1$，这在技术上也更为方便。

回顾方程（2.6），可知

$$H_t((x', x''), (y', y'')) = (2\pi)^{-m} \int_{\mathbb{R}^m} k_{t,\lambda}(x', y')\, e^{-i\lambda\cdot(x''-y'')}\, d\lambda,$$

其中 $k_{t,\ \lambda}$ 由（2.7）给出。

2.5.1. 旋转。 设 $A = (a_{ij})$ 为一个 $n \times n$ 正交矩阵。由 $k_{t,\lambda}(Ax', Ay') = k_{t,\lambda}(x', y')$ 可得

$$H_t((Ax', x''), (Ay', y'')) = H_t((x', x''), (y', y'')).$$

现在，如果我们将 $Ax = (Ax', x'')$ 定义为 A 在 $\mathbb{R}^{n+m}$ 上的作用，那么很容易验证

$$H_{t,Aa}(Ax, Ay) = H_{t,a}(x, y),$$

利用这一点，我们得到

$$\begin{aligned}(G_{Aa})^{-k/2}(Ax,Ay) &= \frac{1}{\Gamma(k/2)}\int_0^\infty t^{\frac{k}{2}-1}H_{t,Aa}(Ax,Ay)\,dt\\ &= \frac{1}{\Gamma(k/2)}\int_0^\infty t^{\frac{k}{2}-1}H_{t,a}(x,y)\,dt = (G_a)^{-k/2}(x,y).\end{aligned}$$

现在，我们先考虑一阶黎斯变换 $R_{\alpha,a}$，其中 $\alpha = e_j$ for some$j \in \{1,2,\dots,n\}$。我们有

$$\begin{aligned}R_{e_j,a}(x,y) &= \partial_{x'_j}(G_a)^{-1/2}(x,y)\\ &= \partial_{x'_j}\left\{(G_{Aa})^{-k/2}(Ax,Ay)\right\}\\ &= \sum_{l=1}^n a_{lj}(\partial_{x'_l}(G_{Aa})^{-1/2})(Ax,Ay) = \sum_{l=1}^n a_{lj}R_{e_l,Aa}(Ax,Ay).\end{aligned} \tag{2.32}$$

另一方面，如果 $\alpha = e_i$for some $i \in \{n+1,\dots,n+nm\}$，那么对于相应的配对 $(j,k) \in \{1,\dots,n\}\times\{1,\dots,m\}$，我们有

$$\begin{aligned}R_{e_i,a}(x,y) &= R_{e_{(j,k)},a}(x,y) = x'_j\partial_{x''_k}(G_a)^{-1/2}(x,y)\\ &= x'_j\partial_{x''_k}\left\{(G_{Aa})^{-k/2}(Ax,Ay)\right\}\\ &= \sum_{l=1}^n a_{lj}(x'_l\partial_{x''_k}(G_{Aa})^{-1/2})(Ax,Ay) = \sum_{l=1}^n a_{lj}R_{e_{(l,k)},Aa}(Ax,Ay).\end{aligned} \tag{2.33}$$

关系（2.32）和（2.33）表明，如何将漂移向量 a 对应的一阶黎斯变换表示为漂移向量Aa对应的一阶黎斯变换的有限线性组合。递归地，可以写出漂移向量 a 和 Aa对应的高阶黎斯变换之间的关系。

给定一个非零向量 a，总可以选取一个 $n\times n$ 正交矩阵 A 使得$Aa = |a|e_1$。另请注意，根据关系式（2.32）和（2.33）（其高阶类似关系也同样成立），右侧求和中的系数是正交矩阵的矩阵元素，并且一致有界。因此，在证明黎斯变换的各种有界性时，只需考虑单位向量 e_1的数乘。

2.5.2. 伸缩。回顾一下，在 Grushin 算子的背景下，非各向同性膨胀定义为 $\delta_s(x) = \delta_s(x', x'') = (sx', s^2x'')$，其中 $s>0$。现在，

$$\begin{aligned}H_{s^2t}(\delta_s x,\,\delta_s y) &= (2\pi)^{-m}\int_{\mathbb{R}^m} k_{s^2t,\lambda}(sx',sy')\,e^{-i\lambda\cdot(s^2x''-s^2y'')}\,d\lambda\\ &= (2\pi)^{-m}s^{-n}\int_{\mathbb{R}^m} k_{t,s^2\lambda}(x',y')\,e^{-is^2\lambda\cdot(x''-y'')}\,d\lambda\\ &= (2\pi)^{-m}s^{-n-2m}\int_{\mathbb{R}^m} k_{t,\lambda}(x',y')\,e^{-i\lambda\cdot(x''-y'')}\,d\lambda = s^{-n-2m}\,H_t(x,y),\end{aligned}$$

利用这一点可以很容易地验证

$$H_{t,\,se_1}(x,y) = s^{n+2m}H_{s^2t,e_1}(\delta_s x,\,\delta_s y),$$

因此

$$\begin{aligned}(G_{se_1})^{-k/2}(x,y) &= \frac{1}{\Gamma(k/2)}\int_0^\infty t^{\frac{k}{2}-1}H_{t,se_1}(x,y)\,dt\\ &= \frac{1}{\Gamma(k/2)}\int_0^\infty t^{\frac{k}{2}-1}s^{n+2m}H_{s^2t,e_1}(\delta_s x,\,\delta_s y)\,dt\\ &= \frac{s^{n+2m-k}}{\Gamma(k/2)}\int_0^\infty t^{\frac{k}{2}-1}H_{t,e_1}(\delta_s x,\,\delta_s y)\,dt\\ &= s^{n+2m-k}(G_{e_1})^{-k/2}(\delta_s x,\,\delta_s y).\end{aligned}$$

因此，Riesz 变换的核满足

$$\begin{aligned}R_{\alpha,se_1}(x,y) &= X^\alpha(G_{se_1})^{-k/2}(x,y)\\ &= s^{n+2m-k}X^\alpha\left\{(G_{e_1})^{-k/2}(\delta_s x,\,\delta_s y)\right\}\\ &= s^{n+2m}(X^\alpha(G_{e_1})^{-k/2})(\delta_s x,\,\delta_s y)\\ &= s^{n+2m}R_{\alpha,e_1}(\delta_s x,\,\delta_s y),\end{aligned}$$

这里我们利用了一个基本事实：所有向量场 X_j 和 $X_{j,\,k}$ 都是对应于非各向同性伸缩的 1 次齐次向量场。

因此，我们有

$$R_{\alpha,se_1}f(x) = R_{\alpha,e_1}F(\delta_s x), \tag{2.34}$$

其中 $f(x) = F(\delta_s x)$。

关系式 (2.34) 表明，对于任意 $1 \leqslant p < \infty$，我们有

$$\begin{aligned}&\|R_{\alpha,se_1}\|_{L^p(d\mu_{se_1})\to L^p(d\mu_{se_1})} = \|R_{\alpha,e_1}\|_{L^p(d\mu_{e_1})\to L^p(d\mu_{e_1})}\\ \text{and}\quad &\|R_{\alpha,se_1}\|_{L^p(d\mu_{se_1})\to L^{p,\infty}(d\mu_{se_1})} = \|R_{\alpha,e_1}\|_{L^p(d\mu_{e_1})\to L^{p,\infty}(d\mu_{e_1})}.\end{aligned} \tag{2.35}$$

给定一个漂移向量 a，我们只需选择 $s = |a|$，然后根据关系式（2.35），只需研究漂移向量 e_1。

3. Regularized Riesz transforms and a transference principle

受 [RS16], 中所采用方法的启发，本节定义与 G_{e_1} 在 $\mathbb{R}^{n+m}$ 上以及与 $\mathcal{L}_{e_1}$ 在 $\mathbb{H}_{n,\,m}$ 上相关联的正则化 Riesz 变换。可以证明，对于 $\mathcal{L}_{e_1}$，正则化 Riesz 变换的~弱范数和强 L^p-范数均由相应 Riesz 变换的范数一致控制。

定义这些正则化 Riesz 变换的主要原因是，它们可以表示为具有可积核的积分形式（见命题 3.2 和引理 3.3），据此我们可以应用一个转移原理（见命题 3.4），其灵感来自 [CW76]中的转移原理。利用这些结果，我们在小节 1.2 和1.3中证明定理 3.3。

3.1. 正则化 Riesz 变换。 给定 $0 < \epsilon,\ \delta < 1$，我们来考虑与 G_{e_1} 相关的正则化 Riesz 变换，其定义如下：

$$R_{\alpha,e_1,\epsilon,\delta} = X^{\alpha}(\delta I + G_{e_1})^{-k/2}(I + \epsilon G_{e_1})^{-N},$$

对于满足 $\alpha \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^{nm}$ $|\alpha| = k$ 的情形。这里，N 是一个较大的自然数，将根据需要在后文选定；在各种记号的下标中，我们不保留 N。

类似地，在 Heisenberg-Reiter 群上，我们将与 $\mathcal{L}_{e_1}$ 相关的正则化 Riesz 变换˜定义为

$$\tilde{R}_{\tilde{\alpha},e_1,\epsilon,\delta} = \tilde{X}^{\tilde{\alpha}}(\delta I + \tilde{\mathcal{L}}_{e_1})^{-k/2}(I + \epsilon\tilde{\mathcal{L}}_{e_1})^{-N},$$

其中 $\tilde{\alpha} = (\alpha_{n+1},\ \ldots\ldots,\ \alpha_{nm},\ \alpha_1,\ \ldots\ldots,\ \alpha_n)$ 当 $\alpha = (\alpha_1,\ \ldots\ldots,\ \alpha_n,\ \alpha_{n+1},\ \ldots\ldots,\ \alpha_{nm})$。

˜事实证明，每个正则化 Riesz 变换 $R_{\tilde{\alpha},\ e_1,\ \epsilon,\ \delta}$ 的算子范数˜都不超过相应 Riesz 变换 $R_{\tilde{\alpha},\ e_1}$的算子范数。更确切地说，

命题 3.1。 对于任意 $N \geqslant 1$ 和 $1 \leqslant p < \infty$，存在一个常数 $C_p > 0$（还取决于 k、N、m 和 n），使得

$$\|\tilde{R}_{\tilde{\alpha},e_1,\epsilon,\delta}\|_{L^p(d\mu'_{e_1})\to L^p(d\mu'_{e_1})} \leqslant C_p\,\|\tilde{R}_{\tilde{\alpha},e_1}\|_{L^p(d\mu'_{e_1})\to L^p(d\mu'_{e_1})},$$
$$\textit{and}\quad \|\tilde{R}_{\tilde{\alpha},e_1,\epsilon,\delta}\|_{L^p(d\mu'_{e_1})\to L^{p,\infty}(d\mu'_{e_1})} \leqslant C_p\,\|\tilde{R}_{\tilde{\alpha},e_1}\|_{L^p(d\mu'_{e_1})\to L^{p,\infty}(d\mu'_{e_1})}.$$

我们省略上述命题的证明，因为只需重复 [RS16] 第465页中的论证（几乎逐字重复）即可。

现在我们将证明正则化 Riesz 变换是积分算子。为此，考虑

$$B_{\epsilon,\delta,k}(t) = e^{-t}\int_0^t h^{N-1}\,e^{-h/\epsilon}\,(t-h)^{\frac{k}{2}-1}\,e^{-\delta(t-h)}\,dh, \tag{3.1}$$

并定义核

$$K_{\epsilon,\delta}(g) = \sum_{\substack{\tilde{\gamma}\leqslant\tilde{\alpha}\\ \gamma_j=\alpha_j\,\forall j\neq 1}} M_\gamma\,e^{-v_1}\int_0^\infty B_{\epsilon,\delta,k}(t)\,\tilde{X}^{\tilde{\gamma}}p_t(g)\,dt, \tag{3.2}$$

其中，p_t 表示 Heisenberg-Reiter 群的热核，并且我们使用了记号 $g = (u、\ v、\ s) \in \mathbb{H}_{n、m}$ 以及常数 $M_\gamma = \binom{\alpha_1}{\gamma_1}\dfrac{(-1)^{\alpha_1-\gamma_1}\,\epsilon^{-N}}{\Gamma(N)\Gamma(k/2)}$。

˜**命题 3.2。** 正则化 *Riesz* 变换 $R_{\alpha、\ e_1、\ \epsilon、\ \delta}$ 和 $R_{\tilde{\alpha}、\ e_1、\ \epsilon、\ \delta}$ 满足

$$R_{\alpha,e_1,\epsilon,\delta} = \int_{\mathbb{H}_{n,m}} K_{\epsilon,\delta}(g)\,\sigma_{g^{-1}}\,dg \quad \textit{and} \quad \tilde{R}_{\tilde{\alpha},e_1,\epsilon,\delta} = \int_{\mathbb{H}_{n,m}} K_{\epsilon,\delta}(g)\,R(g^{-1})\,dg \tag{3.3}$$

其中 R 表示定义为 $R(g')f(g) = f(gg')$，而 σ 是$\mathbb{H}_{n在m}$ 上的酉表示 $L^2(\mathbb{R}^{n+m})$，如(2.11)所示。

证明。我们先考虑算子 $(\delta I + \tilde{\mathcal{L}}_{e_1})^{-k/2}(I + \epsilon\tilde{\mathcal{L}}_{e_1})^{-N}$。该算子的核由下式给出（如 [BtER94] 第 2 节中所述）

$$\frac{\epsilon^{-N}}{\Gamma(N)\Gamma(k/2)}\int_0^\infty\int_0^t p_{t,e_1}(g,g')\,h^{N-1}\,e^{-h/\epsilon}\,(t-h)^{\frac{k}{2}-1}\,e^{-\delta(t-h)}\,dh\,dt. \tag{3.4}$$

由（3.4），可得

$$\begin{aligned}
&\tilde{R}_{\tilde{\alpha},e_1,\epsilon,\delta}f(g)=\int_{\mathbb{H}_{n,m}}\tilde{R}_{\tilde{\alpha},e_1,\epsilon,\delta}(g,g')\,f(g')\,e^{2v_1'}\,dg'\\
&=\int_{\mathbb{H}_{n,m}}\left\{\frac{\epsilon^{-N}}{\Gamma(N)\Gamma(k/2)}\int_0^\infty\int_0^t\tilde{X}^{\tilde{\alpha}}p_{t,e_1}(g,g')\,h^{N-1}\,e^{-h/\epsilon}(t-h)^{\frac{k}{2}-1}\,e^{-\delta(t-h)}\,dh\,dt\right\}f(g')\,e^{2v_1'}\,dg'\\
&=\sum_{\substack{\tilde{\gamma}\leqslant\tilde{\alpha}\\ \gamma_j=\alpha_j\ \forall j\neq 1}}M_\gamma\int_{\mathbb{H}_{n,m}}e^{-v_1-v_1'}\left\{\int_0^\infty B_{\epsilon,\delta,k}(t)\,(\tilde{X}^{\tilde{\gamma}}p_t)(g'^{-1}g)\,dt\right\}f(g')\,e^{2v_1'}\,dg'\\
&=\sum_{\substack{\tilde{\gamma}\leqslant\tilde{\alpha}\\ \gamma_j=\alpha_j\ \forall j\neq 1}}M_\gamma\int_{\mathbb{H}_{n,m}}e^{-v_1'}\left\{\int_0^\infty B_{\epsilon,\delta,k}(t)\,(\tilde{X}^{\tilde{\gamma}}p_t)(g')\,dt\right\}f(gg'^{-1})\,dg'\\
&=\int_{\mathbb{H}_{n,m}}K_{\epsilon,\delta}(g')\,R(g'^{-1})f(g)\,dg',
\end{aligned}$$

~这就完成了关于算子$R_{\tilde{\alpha},\ e_1,\ \epsilon,\ \delta}$的论证部分。

另一方面，我们来考虑

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{H}_{n,m}}K_{\epsilon,\delta}(g)\,\sigma_{g^{-1}}F(x',x'')\,dg\\
&=\sum_{\substack{\tilde{\gamma}\leqslant\tilde{\alpha}\\ \gamma_j=\alpha_j\ \forall j\neq 1}}M_\gamma\int_{\mathbb{H}_{n,m}}e^{-v_1}\left\{\int_0^\infty B_{\epsilon,\delta,k}(t)\,(\tilde{X}^{\tilde{\gamma}}p_t)(g)\,dt\right\}\sigma_{g^{-1}}F(x',x'')\,dg\\
&=\sum_{\substack{\tilde{\gamma}\leqslant\tilde{\alpha}\\ \gamma_j=\alpha_j\ \forall j\neq 1}}M_\gamma\int_{\mathbb{H}_{n,m}}e^{-v_1}\left\{\int_0^\infty B_{\epsilon,\delta,k}(t)\,(\tilde{X}^{\tilde{\gamma}}p_t)(g)\,dt\right\}\\
&\qquad\qquad F\left(x'-v,\,x''-s-u^Tx'+\frac{u^Tv}{2}\right)\,du\,dv\,ds\\
&=\sum_{\substack{\tilde{\gamma}\leqslant\tilde{\alpha}\\ \gamma_j=\alpha_j\ \forall j\neq 1}}M_\gamma\int_{\mathbb{H}_{n,m}}e^{v_1-x_1'}\left\{\int_0^\infty B_{\epsilon,\delta,k}(t)\,(\tilde{X}^{\tilde{\gamma}}p_t)\left(u,x'-v,x''-s-\frac{u^Tx'}{2}-\frac{u^Tv}{2}\right)dt\right\}\\
&\qquad\qquad F(v,s)\,du\,dv\,ds\\
&=\sum_{\substack{\tilde{\gamma}\leqslant\tilde{\alpha}\\ \gamma_j=\alpha_j\ \forall j\neq 1}}M_\gamma\int_{\mathbb{R}^{n+m}}e^{-v_1-x_1'}\left\{\int_{\mathbb{R}^{nm}}\int_0^\infty(\tilde{X}^{\tilde{\gamma}}p_t)\left(u,x'-v,x''-s-\frac{u^Tx'}{2}-\frac{u^Tv}{2}\right)\right.\\
&\qquad\qquad\left.B_{\epsilon,\delta,k}(t)\,dt\,du\right\}F(v,s)\,e^{2v_1}\,dv\,ds,
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
&R_{\alpha,e_1,\epsilon,\delta}((x',x''),(v,s))\\
&=\frac{\epsilon^{-N}}{\Gamma(N)\Gamma(k/2)}\int_0^\infty\int_0^t X^\alpha H_{t,e_1}((x',x''),(v,s))\,h^{N-1}\,e^{-h/\epsilon}\,(t-h)^{\frac{k}{2}-1}\,e^{-\delta(t-h)}\,dh\,dt
\end{aligned}$$

$$= \sum_{\substack{\gamma\leqslant\alpha \\ \gamma_j=\alpha_j\ \forall j\neq 1}} M_\gamma\, e^{-v_1-x_1'} \int_0^\infty B_{\epsilon,\delta,k}(t)\, X^\gamma H_t((x',x''),(v,s))\, dt$$

$$= \sum_{\substack{\tilde\gamma\leqslant\tilde\alpha \\ \gamma_j=\alpha_j\ \forall j\neq 1}} (-1)^{|\gamma|} M_\gamma\, e^{-v_1-x_1'} \int_0^\infty \left\{ \int_{\mathbb{R}^{nm}} ((\tilde X^R)^{\tilde\gamma} p_t) \left(u, v-x', s-x''-\frac{u^T x'}{2}-\frac{u^T v}{2} \right) du \right\}$$

$$B_{\epsilon,\delta,k}(t)\, dt$$

$$= \sum_{\substack{\tilde\gamma\leqslant\tilde\alpha \\ \gamma_j=\alpha_j\ \forall j\neq 1}} M_\gamma\, e^{-v_1-x_1'} \int_0^\infty \left\{ \int_{\mathbb{R}^{nm}} (\tilde X^{\tilde\gamma} p_t) \left(u, x'-v, x''-s-\frac{u^T x'}{2}-\frac{u^T v}{2} \right) du \right\} B_{\epsilon,\delta,k}(t)\, dt,$$

其中在第三步中我们使用了（2.14）。

上述两个单位元等式共同推出

$$R_{\alpha,e_1,\epsilon,\delta} F(x) = \int_{\mathbb{H}_{n,m}} K_{\epsilon,\delta}(g)\, \sigma_{g^{-1}} F(x)\, dg,$$

这就得到了所需的积分形式。 □

接下来，我们将证明（3.2）中给出的核 $K_{\epsilon,\delta}$ 是可积的。当我们使用传递原理时，这一点将很有用；我们将在下一小节讨论该原理。[RS16] 中已经指出了这一点（参见 [RS16] 中围绕不等式（4）的讨论）：其核$k_{\alpha;\nu,\epsilon} \in L^1(G)$。正如其中所述，$(I+\epsilon H)^{-n}$ 项有助于保证在单位元处的可积性，而引入 ν 项则保证了无穷远处的可积性。在我们的语境中，证明对于任意 $1 \leqslant p < \infty$，$K_{\epsilon,\delta} \in L^1(\mathbb{H}_{n,m},\, e^{2v_1/p}\, dg)$，这一事实同样是初等的；为方便读者，下面给出详细证明。

引理 3.3。设 $K_{\epsilon,\delta}$ 如 (3.2) 中所述，其中 $N \geqslant \frac{Q}{2}+1$ 且 $0<\epsilon、\ \delta<1$。那么，对于任意 $1 \leqslant p < \infty$，有 $K_{\epsilon,\delta} \in L^1(\mathbb{H}_{n,m、}\ e^{2v_1/p}\, dg)$。

证明。回顾（3.2）可知，$K_{\epsilon、\,\delta}$ 可以写成以 $\tilde\gamma$ 为指标的有限和，使得$\tilde\gamma \leqslant \tilde\alpha$ 且 $\gamma_j = \alpha_j$ 对所有 $j \neq 1$均成立。为方便技术处理，在以下所有计算中，我们始终只取 $\tilde\gamma$中的一个任意项；从证明中可以看出，这样做不失一般性。此外，我们将利用（2.9）给出的界，其中 $0<\eta<1/2$ 足够小，且满足 $(2+\eta)^2 = 4+\kappa$ 使得 $\delta - 4\eta > 0$。我们还将使用记号 $B(r,\ s)$ 表示标准的贝塔函数 $\int_0^1 h^{r-1}(1-h)^{s-1}\, dh$，显然对所有 r均有限，$s>0$。

我们有

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{H}_{n,m}} |K_{\epsilon,\delta}(g)| e^{2v_1/p}\, dg \\
&\lesssim_{k,N,\epsilon} \int_{\mathbb{H}_{n,m}} \left| \int_0^\infty \int_0^t e^{-t}\, e^{-v_1}\, \tilde X^{\tilde\gamma} p_t(g)\, h^{N-1}\, e^{-h/\epsilon}\, (t-h)^{\frac{k}{2}-1}\, e^{-\delta(t-h)}\, dh\, dt \right| e^{2v_1/p}\, dg \\
&\lesssim_\eta \int_{\mathbb{H}_{n,m}} \int_0^\infty e^{-t}\, e^{\left(\frac{2}{p}-1\right)v_1}\, t^{-\frac{|\tilde\gamma|}{2}-\frac{Q}{2}}\, e^{-\frac{\varrho(g)^2}{(2+\eta)^2 t}}\, e^{-\delta t} \left(\int_0^t h^{N-1}\, (t-h)^{\frac{k}{2}-1}\, dh \right) dt\, dg \\
&\leqslant B(N,k/2) \int_{\mathbb{H}_{n,m}} \int_0^\infty e^{-t}\, e^{\varrho(g)}\, t^{\frac{k}{2}-\frac{|\tilde\gamma|}{2}+N-\frac{Q}{2}-1}\, e^{-\frac{\varrho(g)^2}{(2+\eta)^2 t}}\, e^{-\delta t}\, dt\, dg
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\lesssim_{k,N} \int_{\mathbb{H}_{n,m}} \int_0^{\infty} t^{\frac{k}{2}+N-\frac{|\tilde{\gamma}|}{2}-\frac{Q}{2}-1} e^{\frac{\eta\,\varrho(g)}{(2+\eta)}}\, e^{-\frac{1}{t}\left(\frac{\varrho(g)}{(2+\eta)}-t\right)^2} e^{-\delta t}\, dt\, dg \\
&= \int_{\mathbb{H}_{n,m}} \int_0^{\frac{\varrho(g)}{2(2+\eta)}} t^{\frac{k}{2}+N-\frac{|\tilde{\gamma}|}{2}-\frac{Q}{2}-1} e^{\frac{\eta\,\varrho(g)}{(2+\eta)}}\, e^{-\frac{1}{t}\left(\frac{\varrho(g)}{(2+\eta)}-t\right)^2} e^{-\delta t}\, dt\, dg \\
&\quad + \int_{\mathbb{H}_{n,m}} \int_{\frac{\varrho(g)}{2(2+\eta)}}^{\infty} t^{\frac{k}{2}+N-\frac{|\tilde{\gamma}|}{2}-\frac{Q}{2}-1} e^{\frac{\eta\,\varrho(g)}{(2+\eta)}}\, e^{-\frac{1}{t}\left(\frac{\varrho(g)}{(2+\eta)}-t\right)^2} e^{-\delta t}\, dt\, dg \\
&=: I_1 + I_2.
\end{aligned}
$$

如下所示，对 I_1 和 I_2 的分析都是初等的。

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\mathbb{H}_{n,m}} \int_0^{\frac{\varrho(g)}{2(2+\eta)}} t^{\frac{k}{2}+N-\frac{|\tilde{\gamma}|}{2}-\frac{Q}{2}-1} e^{\frac{\eta\,\varrho(g)}{(2+\eta)}}\, e^{-\frac{1}{t}\left(\frac{\varrho(g)}{(2+\eta)}-t\right)^2} e^{-\delta t}\, dt\, dg \\
&\lesssim \int_{\mathbb{H}_{n,m}} \int_0^{\frac{\varrho(g)}{2(2+\eta)}} t^{\frac{k}{2}+N-\frac{|\tilde{\gamma}|}{2}-\frac{Q}{2}-1} e^{\frac{\eta\,\varrho(g)}{(2+\eta)}}\, e^{-\frac{\varrho(g)}{2(2+\eta)}} e^{-\delta t}\, dt\, dg \\
&= \int_{\mathbb{H}_{n,m}} \int_0^{\frac{\varrho(g)}{2(2+\eta)}} t^{\frac{k}{2}+N-\frac{|\tilde{\gamma}|}{2}-\frac{Q}{2}-1} e^{-\frac{(1-2\eta)}{2(2+\eta)}\varrho(g)}\, e^{-\delta t}\, dt\, dg \\
&< \infty,
\end{aligned}
$$

and

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_{\mathbb{H}_{n,m}} \int_{\frac{\varrho(g)}{2(2+\eta)}}^{\infty} t^{\frac{k}{2}+N-\frac{|\tilde{\gamma}|}{2}-\frac{Q}{2}-1} e^{\frac{\eta\,\varrho(g)}{(2+\eta)}}\, e^{-\frac{1}{t}\left(\frac{\varrho(g)}{(2+\eta)}-t\right)^2} e^{-\delta t}\, dt\, dg \\
&\leqslant \int_{\mathbb{H}_{n,m}} \int_{\frac{\varrho(g)}{2(2+\eta)}}^{\infty} t^{\frac{k}{2}+N-\frac{|\tilde{\gamma}|}{2}-\frac{Q}{2}-1} e^{\frac{\eta\,\varrho(g)}{(2+\eta)}}\, e^{-\delta t}\, dt\, dg \\
&\leqslant \int_{\mathbb{H}_{n,m}} \int_{\frac{\varrho(g)}{2(2+\eta)}}^{\infty} t^{\frac{k}{2}+N-\frac{|\tilde{\gamma}|}{2}-\frac{Q}{2}-1} e^{-\frac{(\delta-4\eta)}{4(2+\eta)}\varrho(g)}\, e^{-\frac{\delta}{2}t}\, dt\, dg \\
&< \infty.
\end{aligned}
$$

因此，$K_{\epsilon,\,\delta} \in L^1(\mathbb{H}_{n,\,m},\ \ e^{2v_1/p}\,dg)$. □

3.2. **传递原理**。 在本小节中，我们证明一个迁移结果（命题 3.4），借此我们可以运用第 3.1 小节中的结果，从而借助 Heisenberg-Reiter 群上的次拉普拉斯算子的相关结果，得到关于格鲁申算子的结果 $\mathbb{H}_{n,\,m}$。

还要注意，测度 $d\mu_a(x) = e^{2a\cdot x'}\,dx$ 在 $\mathbb{R}^{n+m}$ 上对应于 $d\mu'_a =$ $d\mu'_{(a\,0)} = e^{2a\cdot v}\,dg$ $\mathbb{H}_{n\,m}$ 上的测度 . . 。需要指出的是，我们在此给出的结果，即命题 3.4，其证明大部分是对 [CW76]，中定理 2.4 和 2.6 的重现；但由于 [CW76] 中的上述结果仅涉及某些可 amenable 群上的 Haar测度，因此我们决定在本文的语境下写出详细证明。

命题 3.4. 设 $k \in L^1(\mathbb{H}_{n,\,m},\ \ e^{2\,a\cdot v/p}\,dg)$ 对于某个 $1 \leqslant p < \infty$，并且 σ 如 (2.11)所述。对于 $f \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^{n+m})$，定义

$$
Tf(x) = \int_{\mathbb{H}_{n,m}} k(g)\, \sigma_{g^{-1}} f(x)\, dg.
$$

另外，对于 $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{H}_{n,\ m})$，定义

$$S\phi(g') = \int_{\mathbb{H}_{n,m}} k(g)\, R(g^{-1})\, \phi(g')\, dg,$$

其中， R 表示定义为 $R(g')f(g) = f(gg')$ 的右平移。于是， T 的强（分别为弱）算子范数不超过 S的强（分别为弱）算子范数。更确切地说，我们有

(i) $\|T\|_{L^p(\mathbb{R}^{n+m},\ d\mu_a)\to L^p(\mathbb{R}^{n+m},\ d\mu_a)} \leqslant \|S\|_{L^p(\mathbb{H}_{n,\ m},\ d\mu'_a)\to L^p(\mathbb{H}_{n,\ m},\ d\mu'_a)}$,

(ii) $\|T\|_{L^p(\mathbb{R}^{n+m},\ d\mu_a)\to L^{p,\ \infty}(\mathbb{R}^{n+m},\ d\mu_a)} \leqslant \|S\|_{L^p(\mathbb{H}_{n,\ m},\ d\mu'_a)\to L^{p,\ \infty}(\mathbb{H}_{n,\ m},\ d\mu'_a)}$,

其中 $d\mu_a(x) = e^{2a\cdot x'}\, dx$ 在 $\mathbb{R}^{n+m}$ 和 $d\mu'_a(g) = e^{2a\cdot v}\, dg$ 关于 $\mathbb{H}_{n,\ m}$。

证明。注意到，给定关于 k 的可积性条件，即 $k \in L^1(\mathbb{H}_{n,m},\, e^{2\,a\cdot v/p}\, dg)$,两个算子 T 和 S 均定义良好；事实上，它们分别在相应的 L^p 空间上有界，且其算子范数不超过 $\|k\|_{L^1(\mathbb{H}_{n,m},\ e^{2\,a\cdot v/p}\, dg)}$。这是闵可夫斯基积分不等式的直接推论。

我们只证明 $a = e_1$ 的命题，而任意 a 的证明方法类似。我们只对紧支撑函数 $k \in L^1(\mathbb{H}_{n,m},\, e^{2v_1/p}\, dg)$ 证明所述估计。任意 k 的情形可由标准的稠密性论证得到。

令 K 表示函数 k 的支撑。给定 $\epsilon > 0$，取 V 为 $0 \in \mathbb{H}_{n,m}$ 的一个邻域，使其测度有限且为正，并满足

$$\frac{|VK^{-1}|}{|V|} \leqslant 1 + \epsilon,$$

其中 $|\cdot|$ 表示 $\mathbb{H}_n$ 上的 *Haar*测度，m (参见 [CW76] 中的 (2.1)。)

(i) 记作 $s_1 = \|S\|_{L^p(\mathbb{H}_{n,m},d\mu'_{e_1})\to L^p(\mathbb{H}_{n,m},\, d\mu'_{e_1})}$。现在，考虑

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{n+m}} |\sigma_{g'} Tf(x)|^p\, d\mu_{e_1}(x) &= \int_{\mathbb{R}^{n+m}} \left| Tf\left(x' + v', x'' + s' + u'^T x' + \frac{u'^T v'}{2}\right)\right|^p d\mu_{e_1}(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n+m}} |Tf(x', x'')|^p\, e^{-2v'_1}\, d\mu_{e_1}(x),\end{aligned}$$

这意味着

$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} |Tf(x', x'')|^p\, d\mu_{e_1}(x) = e^{2v'_1} \int_{\mathbb{R}^{n+m}} |\sigma_{g'} Tf(x)|^p\, d\mu_{e_1}(x).$$

对上述单位元两边在 $g' \in V$ 上积分，可得

$$\begin{aligned}\|Tf\|^p_{L^p(\mathbb{R}^{n+m},\, d\mu_{e_1})} &= \frac{1}{|V|}\int_V e^{2v'_1} \int_{\mathbb{R}^{n+m}} |\sigma_{g'} Tf(x)|^p\, d\mu_{e_1}(x)\, dg' \\ &= \frac{1}{|V|}\int_V e^{2v'_1} \int_{\mathbb{R}^{n+m}} \left|\int_{\mathbb{H}_{n,m}} k(g)\, \sigma_{g'g^{-1}} f(x)\, dg\right|^p d\mu_{e_1}(x)\, dg' \\ &= \frac{1}{|V|}\int_{\mathbb{R}^{n+m}} \int_V \left|\int_{\mathbb{H}_{n,m}} k(g)\, \sigma_{g'g^{-1}} f(x)\, dg\right|^p e^{2v'_1}\, dg'\, d\mu_{e_1}(x) \\ &= \frac{1}{|V|}\int_{\mathbb{R}^{n+m}} \int_{\mathbb{H}_{n,m}} \left|\int_{\mathbb{H}_{n,m}} k(g)\, \sigma_{g'g^{-1}} f(x)\, \chi_{VK^{-1}}(g'g^{-1})\, dg\right|^p e^{2v'_1}\, dg'\, d\mu_{e_1}(x)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \frac{s_1^p}{|V|}\int_{\mathbb{R}^{n+m}}\int_{\mathbb{H}_{n,m}} |\sigma_g f(x)\,\chi_{VK^{-1}}(g)|^p\, e^{2v_1}\,dg\,d\mu_{e_1}(x)\\
&= \frac{s_1^p}{|V|}\int_{\mathbb{H}_{n,m}} |\chi_{VK^{-1}}(g)|\int_{\mathbb{R}^{n+m}} |\sigma_g f(x)|^p\,d\mu_{e_1}(x)\,e^{2v_1}\,dg\\
&= \frac{s_1^p}{|V|}\int_{\mathbb{H}_{n,m}} |\chi_{VK^{-1}}(g)|\int_{\mathbb{R}^{n+m}} |f(x)|^p\,d\mu_{e_1}(x)\,dg\\
&= \frac{s_1^p}{|V|}\,|VK^{-1}|\,\|f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^{n+m},\,d\mu_{e_1})}\\
&\leqslant s_1^p\,\|f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^{n+m},\,d\mu_{e_1})}\,(1+\epsilon).
\end{aligned}
$$

由于 ϵ 是任意的，可得

$$\|Tf\|_{L^p(\mathbb{R}^{n+m},\,d\mu_{e_1})} \leqslant s_1\,\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^{n+m},\,d\mu_{e_1})},$$

这就证明了 **(i)** 部分。

(**ii**) 令 $s_2 = \|S\|_{L^p(\mathbb{H}_{n,m},\,d\mu'_{e_1})\to L^{p,\infty}(\mathbb{H}_{n,m},\,d\mu'_{e_1})}$。现在定义以下集合:

$$A(\lambda) = \left\{x\in\mathbb{R}^{n+m} : |Tf(x)| > \lambda\right\},$$

$$\text{and}\quad A_{g'}(\lambda) = \left\{x\in\mathbb{R}^{n+m} : \left|\int_{\mathbb{H}_{n,m}} k(g)\,\sigma_{g'g^{-1}}f(x)\,dg\right| > \lambda\right\}.$$

显然， $A(\lambda) = A_e(\lambda)$, 其中 e 是 $\mathbb{H}_{n,m}$. 的单位元

此外，记

$$F(\lambda) = \left\{(g',x)\in V\times\mathbb{R}^{n+m} : \left|\int_{\mathbb{H}_{n,m}} k(g)\sigma_{g'g^{-1}}f(x)\,dg\right| > \lambda\right\}.$$

注意到 $\mu_{e_1}(A(\lambda)) = e^{2v'_1}\mu_{e_1}(A_{g'}(\lambda))$.因此，在 $g'\in V$, 上对两边积分，可得

$$
\begin{aligned}
\mu_{e_1}(A(\lambda)) &= \frac{1}{|V|}\int_V e^{2v'_1}\,\mu_{e_1}(A_{g'}(\lambda))\,dg'\\
&= \frac{1}{|V|}\int_{\mathbb{H}_{n,m}} e^{2v'_1}\left(\int_{\mathbb{R}^{n+m}}\chi_{F(\lambda)}(g',x)\,d\mu_{e_1}(x)\right)dg'\\
&= \frac{1}{|V|}\int_{\mathbb{R}^{n+m}}\left(\int_{\mathbb{H}_{n,m}} e^{2v'_1}\,\chi_{F(\lambda)}(g',x)\,dg'\right)d\mu_{e_1}(x)\\
&= \frac{1}{|V|}\int_{\mathbb{R}^{n+m}}\mu'_{e_1}\left(\left\{g'\in V : \left|\int_{\mathbb{H}_{n,m}} k(g)\,\sigma_{g'g^{-1}}f(x)\,dg\right| > \lambda\right\}\right)d\mu_{e_1}(x)\\
&\leqslant \left(\frac{s_2}{\lambda}\right)^p\frac{1}{|V|}\int_{\mathbb{R}^{n+m}}\left(\int_{VK^{-1}}|\sigma_g f(x)|^p\,e^{2v_1}\,dg\right)d\mu_{e_1}(x)\\
&= \left(\frac{s_2}{\lambda}\right)^p\frac{1}{|V|}\int_{VK^{-1}}\left(\int_{\mathbb{R}^{n+m}}|\sigma_g f(x)|^p\,d\mu_{e_1}(x)\right)e^{2v_1}\,dg\\
&= \left(\frac{s_2}{\lambda}\right)^p\frac{1}{|V|}\int_{VK^{-1}}\left(\int_{\mathbb{R}^{n+m}}|f(x)|^p\,d\mu_{e_1}(x)\right)dg
\end{aligned}
$$

$$= \left(\frac{s_2}{\lambda}\right)^p \frac{|VK^{-1}|}{|V|} \|f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^{n+m}, d\mu_{e_1})}$$
$$\leqslant \left(\frac{s_2}{\lambda}\right)^p \|f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^{n+m}, d\mu_{e_1})} (1+\epsilon).$$

由于这对每个 $\epsilon > 0$, 都成立，因此我们有

$$\sup_{\lambda>0} \lambda\, \mu_{e_1}(A(\lambda))^{1/p} \leqslant s_2 \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^{n+m}, d\mu_{e_1})},$$

这就证明了 **(ii)** 部分。

□

3.3. **定理 1.2 和 1.3 的证明。** 现在，我们准备借助第 1.2 节和第1.3 节中讨论的传递原理，来证明定理 3.2 ，并将其应用于第 3.1 节中的正则化黎斯变换3.1。

定理 *1.2* 的证明。 取定 $N \geqslant \frac{Q}{2} + 1$。由此可得 –

$$\|R_{\alpha,e_1,\epsilon,\delta}\|_{L^p(d\mu_{e_1})\to L^p(d\mu_{e_1})} \leqslant \|\tilde{R}_{\tilde{\alpha},e_1,\epsilon,\delta}\|_{L^p(d\mu'_{e_1})\to L^p(d\mu'_{e_1})}$$
$$\leqslant C_p \|\tilde{R}_{\tilde{\alpha},e_1}\|_{L^p(d\mu'_{e_1})\to L^p(d\mu'_{e_1})} \leqslant C_{\alpha,p} < \infty, \tag{3.5}$$

其中，第一个不等式由命题 3.4 （根据引理 3.3 和命题3.2）得出，第二个不等式由命题 3.1得出，而第三个不等式则直接源于 Heisenberg-Reiter 群上的黎斯变换是 L^p-有界的（对$1 < p < \infty$ 而言，见定理 2.1）。

现在注意到，对任意 $f \in \bigcap_\alpha D(X^\alpha)$，我们可以写成

$$X^\alpha f = R_{\alpha,e_1,\epsilon,\delta}(I + \epsilon G_{e_1})^N (\delta I + G_{e_1})^{\frac{k}{2}} f,$$

因此，我们可以利用（3.5）得出

$$\|X^\alpha f\|_{L^p(d\mu_{e_1})} \leqslant C_{\alpha,p} \|(I + \epsilon G_{e_1})^N (\delta I + G_{e_1})^{\frac{k}{2}} f\|_{L^p(d\mu_{e_1})}.$$

令右侧趋于极限 $\epsilon \to 0$ ，则由上述不等式可得

$$\|X^\alpha f\|_{L^p(d\mu_{e_1})} \leqslant C_{\alpha,p} \|(\delta I + G_{e_1})^{k/2} f\|_{L^p(d\mu_{e_1})}. \tag{3.6}$$

由于（3.6）中的估计对所有充分小的 $\delta > 0$ 都成立，因此自然可以预期，当$\delta \to 0$ 时，应有

$$\|X^\alpha f\|_{L^p(d\mu_{e_1})} \leqslant C_{\alpha,p} \|G^{k/2}_{e_1} f\|_{L^p(d\mu_{e_1})},$$

正如我们在此处说明的，这确实成立。

只需证明

$$\lim_{\delta\to 0} \|(\delta I + G_{e_1})^\gamma f - G^\gamma_{e_1} f\|_{L^p(d\mu_{e_1})} = 0$$

对所有 $\gamma > 0$ 均成立。

显然，只要 γ 是正整数，上述单位元等式就成立，因此只需验证 $\gamma \in (0,\ 1)$ 的情形。事实上，可以证明

$$\lim_{\delta\to 0} \|(\delta I + G_{e_1})^\gamma - G^\gamma_{e_1}\|_{L^p(d\mu_{e_1})\to L^p(d\mu_{e_1})} = 0$$

对每个 $\gamma \in (0,\ 1)$我们按照以下思路进行证明，这些思路来自 [tERS97]<style id='13'}和 [Rob91]中引理 4.2 的证明以及第 II.3.2 节。

固定一个 $\gamma \in (0,\ 1)$，并记常数为 $C_\gamma^{-1} = \int_0^\infty s^{-\gamma}(1+s)^{-1}\,ds$。于是，根据函数演算，我们有

$$\begin{aligned}
&(\delta I + G_{e_1})^\gamma - G_{e_1}^\gamma \\
&= C_\gamma \int_0^\infty s^{-\gamma} \left\{ (\delta I + G_{e_1})(I + s(\delta I + G_{e_1}))^{-1} - G_{e_1}(I + sG_{e_1})^{-1} \right\} ds \\
&= C_\gamma \int_0^\infty s^{-\gamma-1} \left\{ (\delta I + G_{e_1})(s^{-1} I + (\delta I + G_{e_1}))^{-1} - G_{e_1}(s^{-1} I + G_{e_1})^{-1} \right\} ds \\
&= C_\gamma \int_0^\infty s^{-\gamma-2} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{s}} \left\{ (1 - e^{-t(\delta I + G_{e_1})}) - (1 - e^{-tG_{e_1}}) \right\} dt\, ds \\
&= C_\gamma \int_0^\infty s^{-\gamma-2} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{s}} \left(1 - e^{-t\delta}\right) e^{-tG_{e_1}}\, dt\, ds \\
&= C_\gamma \int_0^\infty s^{-\gamma-1} \int_0^\infty e^{-r} (1 - e^{-rs\delta}) e^{-rsG_{e_1}}\, dr\, ds.
\end{aligned}$$

由于上确界为 $\sup_{s>0} \|e^{-sG_{e_1}}\|_{L^p(d\mu_{e_1}) \to L^p(d\mu_{e_1})} \leqslant 1$，我们得到

$$\begin{aligned}
&\|(\delta I + G_{e_1})^\gamma - G_{e_1}^\gamma\|_{L^p(d\mu_{e_1}) \to L^p(d\mu_{e_1})} \\
&\leqslant C_\gamma \int_0^\infty s^{-\gamma-1} \int_0^\infty e^{-r} (1 - e^{-rs\delta}) \left\| e^{-rsG_{e_1}} \right\|_{L^p(d\mu_{e_1}) \to L^p(d\mu_{e_1})} dr\, ds \\
&\leqslant C_\gamma \int_0^\infty s^{-\gamma-1} \int_0^\infty e^{-r} (1 - e^{-rs\delta})\, dr\, ds \\
&= C_\gamma \int_0^\infty s^{-\gamma-1} \left(1 - \frac{1}{1 + s\delta}\right) ds \\
&= C_\gamma\, \delta \int_0^\infty s^{-\gamma} (1 + s\delta)^{-1}\, ds \\
&= C_\gamma\, \delta^\gamma \int_0^\infty s^{-\gamma} (1 + s)^{-1}\, ds \\
&= \delta^\gamma,
\end{aligned}$$

这意味着

$$\lim_{\delta \to 0} \|(\delta I + G_{e_1})^\gamma - G_{e_1}^\gamma\|_{L^p(d\mu_{e_1}) \to L^p(d\mu_{e_1})} = 0.$$

因此，我们证明了

$$\|X^\alpha f\|_{L^p(d\mu_{e_1})} \leqslant C_{\alpha,p} \|G_{e_1}^{k/2} f\|_{L^p(d\mu_{e_1})},$$

将 f 替换为 $G_{e_1}^{-k/2} f$, 后，定理的结论即得。 □

定理1.3 的证明与前一个证明所采用的论证类似。

定理 *1.3* 的证明。我们需要证明，当 $m = 1$ 时，一阶 Riesz 变换是弱型 $(1,\ 1)$。再次可以利用从海森堡群的传递 $\mathbb{H}_{n,\ 1}$ 来证明这一点。为此，注意到对于 $p = 1$，我们有与式（3.5）类似的估计：

$$\|R_{\alpha,e_1,\epsilon,\delta}\|_{L^1(d\mu_{e_1}) \to L^{1,\infty}(d\mu_{e_1})} \leqslant \|\tilde{R}_{\tilde{\alpha},e_1,\epsilon,\delta}\|_{L^1(d\mu'_{e_1}) \to L^{1,\infty}(d\mu'_{e_1})}$$

$$\lesssim \|\tilde{R}_{\tilde{\alpha},e_1}\|_{L^1(d\mu'_{e_1})\to L^{1,\infty}(d\mu'_{e_1})} < \infty,$$

此处最后一个不等式由定理 2.2 得出。

利用上述估计，基本上可以重复定理 1.2证明的其余部分，从而得出一阶黎斯变换 R_{α,e_1} 在 $|\alpha|=1$ 的条件下，相对于 $d\mu_{e_1}$ 是弱型 $(1,1)$。□

4. Proof of Theorem 1.4

本节将通过适当的传递，由1.4推出 [LS21] 定理 1.1。为此，我们将证明，对于任意 $f\in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n+m})$，经过适当缩放的黎斯变换 $\partial_{x'_1}^k\,(G_{e_1/R})^{-k/2}f$ 逐点收敛到黎斯变换 $\partial_{x'_1}^k\,(\Delta_{e_1})^{-k/2}\,f$。这里，$\Delta_{e_1}$ 表示作用在 $\mathbb{R}^{n+m}$上的带漂移的标准拉普拉斯算子 e_1。

固定 $(\xi',\xi'')\in\mathbb{R}^{n+m}$，使得 $|\xi'|=|\xi''|=1,$，并考虑将 $\mathbb{R}^{n+m}$ 上的适当函数按 (ξ',ξ'') 作欧几里得平移，定义如下：

$$Uf(x',x'')=f(x'+\xi',x''+\xi'').$$

显然，$U^{-1}f(x',\ x'')=f(x'-\xi',\ x''-\xi'').$

此外，对于任意 $R>0,$ 令 Λ_R 表示 $\mathbb{R}^{n+m}$上的标准（各向同性）伸缩，即

$$\Lambda_R\,f(x',x'')=f(Rx',Rx'').$$

显然，$\Lambda_R^{-1}\,f(x',\ x'')=f\left(R^{-1}x',\ R^{-1}x''\right).$

命题 4.1. 对于任意 $k\geqslant 1$ 和 $f\in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n+m})$，以下逐点收敛成立：

$$\lim_{R\to 0^+}(\Lambda_R\,U)\left(\partial_{x'_1}^k\,(G_{e_1/R})^{-k/2}\right)(\Lambda_R\,U)^{-1}\,f(x',x'')=\partial_{x'_1}^k\,(\Delta_{e_1})^{-k/2}\,f(x',x''),\tag{4.1}$$

其中 Δ_{e_1} 表示欧几里得空间 $\mathbb{R}^{n+m}$上的带漂移的拉普拉斯算子。

之前 在证明命题 4.1时，我们来看看如何利用它证明定理 1。 4. 定理 *1.4*的证明。 如前所述，借助旋转和伸缩论证，只需考虑漂移向量为 e_1的情形。我们将证明，对于任意 $k\geqslant 3$，Riesz 变换 $R_{ke_1,\ e_1}=\partial_{x'_1}^k(G_{e_1})^{-k/2}$ 相对于 $d\mu_{e_1}$不是弱型 $(1,1)$。为此，我们将用到 Li–Sj¨ogren [LS21 的定理 11]关于欧几里得空间的结果$\mathbb{R}^{n+m}$，该结果保证 $\partial_{x'_1}^k(\Delta_{e_1})^{-k/2}$ 相对于 $d\mu_{e_1}$ 是弱型 $(1,\ 1)$ 当且仅当 $k\leqslant 2.$

反设存在某个 $k\geqslant 3$，使得 Riesz 变换 $R_{ke_1,\ e_1}=\partial_{x'_1}^k(G_{e_1})^{-k/2}$ 相对于 $d\mu_{e_1}$是弱型 $(1,1)$。还要回顾一下恒等式（2.34）可得

$$R_{ke_1,e_1/R}=\delta_R^{-1}\,R_{ke_1,e_1}\,\delta_R.$$

取本节开头所定义的 $\xi=(\xi',\ \xi'')\in\mathbb{R}^{n+m}$ 以及算子 U 和 Λ_R，则对任意 $f\in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n+m})$，有

$$\begin{aligned}
&\mu_{e_1}\left\{x\in\mathbb{R}^{n+m}:\left|\left((\Lambda_R\,U)\,R_{ke_1,e_1/R}\,(U^{-1}\Lambda_R^{-1})f\right)(x)\right|>s\right\}\\
&\quad=\mu_{e_1}\left\{x\in\mathbb{R}^{n+m}:\left|\left(\Lambda_R\,U\,\delta_R^{-1}\right)\,R_{ke_1,e_1}\,\left(\delta_R\,U^{-1}\,\Lambda_R^{-1}\right)f(x)\right|>s\right\}\\
&\quad=e^{-\frac{2\xi'_1}{R}}\,R^m\,\mu_{e_1}\left\{x\in\mathbb{R}^{n+m}:\left|R_{ke_1,e_1}\left(\delta_R\,U^{-1}\,\Lambda_R^{-1}f\right)(x)\right|>s\right\}
\end{aligned}$$

$$\lesssim e^{-\frac{2\xi_1'}{R}}\frac{R^m}{s}\int_{\mathbb{R}^{n+m}}\left|\delta_R\,U^{-1}\,\Lambda_R^{-1}f(x)\right|e^{2x_1'}\,dx'\,dx''$$
$$=\frac{1}{s}\|f\|_{L^1(d\mu_{e_1})}.$$

但随后，利用命题 4.1 和 Fatou引理，可得

$$\begin{aligned}&\mu_{e_1}\{x\in\mathbb{R}^{n+m}:|\partial_{x_1'}^k(\Delta_{e_1})^{-k/2}f(x)|>s\}\\&=\mu_{e_1}\left\{x\in\mathbb{R}^{n+m}:\left|\lim_{R\to0}\left(\left(\Lambda_R\,U\right)R_{ke_1,e_1/R}\left(U^{-1}\Lambda_R^{-1}\right)f\right)(x)\right|>s\right\}\\&\leqslant\liminf_{R\to0}\mu_{e_1}\left\{x\in\mathbb{R}^{n+m}:\left|\left(\left(\Lambda_R\,U\right)R_{ke_1,e_1/R}\left(U^{-1}\Lambda_R^{-1}\right)f\right)(x)\right|>s\right\}\\&\lesssim\frac{1}{s}\|f\|_{L^1(d\mu_{e_1})},\end{aligned}$$

这与 [LS21], 的定理 1.1 相矛盾，因此定理1.4的证明至此完成。□

现在只剩下命题4.1中的断言需要证明，我们将在下文给出证明。

命题*4.1*的证明。 为方便起见，我们将使用记号 t_h 和 c_h 分别表示双曲正切和双曲余切。更准确地说，$t_h(s):=$ 双曲正切(s) 和 $c_h(s):=$ 双曲余切(s)。

令 $f\in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n+m})$ 固定，并回忆

$$\begin{aligned}\partial_{x_1'}^k\left(G_{e_1/R}\right)^{-k/2}f(x)&=\frac{1}{\Gamma(k/2)}\int_0^\infty t^{\frac{k}{2}-1}\,\partial_{x_1'}^k\,e^{-t\,G_{e_1/R}}f(x)\,dt\\&=\frac{R^k}{\Gamma(k/2)}\int_0^\infty t^{\frac{k}{2}-1}\,\partial_{x_1'}^k\,e^{-tR^2\,G_{e_1/R}}f(x)\,dt,\end{aligned}\tag{4.2}$$

因此我们将分析 $e^{-tR^2\,G_{e_1/R}}$ 对 f 的作用。

Le我们记作 $\phi_{R,\xi}(y',y'')=e^{y_1'}\,\Lambda_RUf(y',y'')=e^{y_1'}\,f(Ry'+\xi',Ry''+\xi'')$。现在，

$$\begin{aligned}&e^{-tR^2\,G_{e_1/R}}\,f(x)\\&=\int_{\mathbb{R}^{n+m}}H_{tR^2,e_1/R}(x,y)\,f(y)\,e^{\frac{2y_1'}{R}}\,dy\\&=\int_{\mathbb{R}^{n+m}}e^{\frac{2\xi_1'}{R}}\,H_{tR^2,e_1/R}(x,y+\xi)\,f(y+\xi)\,e^{\frac{2y_1'}{R}}\,dy\\&=R^{n+m}\int_{\mathbb{R}^{n+m}}e^{\frac{2\xi_1'}{R}}\,H_{tR^2,e_1/R}(x,(Ry'+\xi',Ry''+\xi''))\,f(Ry'+\xi',Ry''+\xi'')\,e^{2y_1'}\,dy\\&=R^{n+m}\int_{\mathbb{R}^{n+m}}e^{\frac{\xi_1'}{R}}\,e^{-t}\,e^{\frac{-x_1'}{R}}\,H_{tR^2}(x,(Ry'+\xi',Ry''+\xi''))\,\phi_{R,\xi}(y',y'')\,dy\\&=(2\pi R)^{-m}\int_{\mathbb{R}^{n+m}}\int_{\mathbb{R}^m}e^{\frac{\xi_1'}{R}}\,e^{-t}\,e^{\frac{-x_1'}{R}}\,e^{i\lambda''\cdot\left(\frac{y''}{R}-\frac{x''}{R^2}+\frac{\xi''}{R^2}\right)}\left(\frac{|\lambda''|}{2\pi\sinh\left(2t|\lambda''|\right)}\right)^{n/2}\phi_{R,\xi}(y',y'')\\&\quad\exp\left(-\frac{|\lambda''|\,c_h(2t|\lambda''|)}{2}\left|\frac{x'-\xi'}{R}-y'\right|^2\right)\exp\left(-|\lambda''|\,t_h(t|\lambda''|)\,\frac{x'}{R}\cdot\left(y'+\frac{\xi'}{R}\right)\right)d\lambda''\,dy,\end{aligned}$$

沿用关于 (2.6) 的讨论中所采用的记号和公式。

在最终表达式中，对 $\mathbb{R}^m$ 中的 y'' 变量应用欧几里得傅里叶变换，并对 $\mathbb{R}^n$ 中的 y' 变量应用欧几里得帕塞瓦尔恒等式，可以推得

$$\begin{aligned}
&e^{-tR^2\,G_{e_1/R}}\,f(x)\\
&=(2\pi)^{-m}\int_{\mathbb{R}^{n+m}} e^{\frac{\xi_1'}{R}}\,e^{-t}\,e^{\frac{-x_1'}{R}}\,e^{-i\lambda''\cdot\left(\frac{x''-\xi''}{R}\right)}\,(\cosh\left(2tR|\lambda''|\right))^{-n/2}\,e^{2\pi i\frac{x'-\xi'}{R}\cdot\lambda'}\\
&\qquad\widehat{\phi_{R,\xi}}\left(\lambda',\frac{-\lambda''}{2\pi}\right)\exp\left(-\frac{|\lambda''|\,t_h(tR|\lambda''|)}{R}\left(1-\frac{t_h(tR|\lambda''|)}{2\,c_h(2tR|\lambda''|)}\right)|x'|^2\right)\\
&\qquad\exp\left(\frac{-2\pi^2|\lambda'|^2}{R\,|\lambda''|\,c_h(2tR|\lambda''|)}\right)\exp\left(-2\pi i\,\frac{t_h(tR|\lambda''|)}{R\,c_h(2tR|\lambda''|)}\,x'\cdot\lambda'\right)d\lambda.
\end{aligned}$$

现在，将上述表达式代入单位元（4.2）后，导数 $\partial_{x_1'}^k$的作用涉及莱布尼茨法则，因此我们得到 $\partial_{x_1'}^k\,(G_{e_1/R})^{-k/2}\,f(x)$ 可以表示为以下类型项的有限线性组合：

(4.3)

$$\begin{aligned}
&\frac{(2\pi)^{-m}\,R^k}{\Gamma(k/2)}\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^{n+m}} t^{\frac{k}{2}-1}\,e^{\frac{\xi_1'}{R}}\,e^{-t}\,e^{\frac{-x_1'}{R}}\,e^{-i\lambda''\cdot\left(\frac{x''-\xi''}{R}\right)}\,e^{2\pi i\frac{x'-\xi'}{R}\cdot\lambda'}\,(\cosh\left(2tR|\lambda''|\right))^{-n/2}\\
&\widehat{\phi_{R,\xi}}\left(\lambda',\frac{-\lambda''}{2\pi}\right)\exp\left(-\frac{|\lambda''|\,t_h(tR|\lambda''|)}{R}\left(1-\frac{t_h(tR|\lambda''|)}{2\,c_h(2tR|\lambda''|)}\right)|x'|^2\right)\exp\left(\frac{-2\pi^2|\lambda'|^2}{R|\lambda''|\,c_h(2tR|\lambda''|)}\right)\\
&\exp\left(-2\pi i\frac{t_h(tR|\lambda''|)}{R\,c_h(2tR|\lambda''|)}x'\cdot\lambda'\right)\left(-\frac{2|\lambda''|\,t_h(tR|\lambda''|)}{R}\left(1-\frac{t_h(tR|\lambda''|)}{2\,c_h(2tR|\lambda''|)}\right)\right)^{k_2}\\
&\left(-\frac{1-2\pi i\lambda_1'}{R}-\frac{2|\lambda''|\,t_h(tR|\lambda''|)}{R}\left(1-\frac{t_h(tR|\lambda''|)}{2\,c_h(2tR|\lambda''|)}\right)x_1'-2\pi i\frac{t_h(tR|\lambda''|)\lambda_1'}{R\,c_h(2tR|\lambda''|)}\right)^{k_1}d\lambda\,dt,
\end{aligned}$$

其中 $k_1+k_2\leqslant k$ 和 $2k_2\leqslant k$。此外，在上述有限线性组合中，首项（对于 $k_1=k$ 和 $k_2=0$）前的常数系数恰好等于 1。这一点尤为重要，因为稍后令 $R\to 0$ 趋于极限时，我们将会看到这一点。

为了说明在积分号下求导确实有效，只需注意，由于 $t_h(s)\leqslant 1$ 对所有 $s>0$均成立，因此很容易看出，式（4.3）求和中出现的所有项都被以下表达式控制：

$$e^{\frac{(\xi_1'-x_1')}{R}}\,R^{k-(k_1+k_2)}\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^{n+m}} t^{\frac{k}{2}-1}\,e^{-t}\,\left(1+|\lambda'|^{k_1}+|\lambda''|^{k_1}\,|x_1'|^{k_1}\right)|\lambda''|^{k_2}\left|\widehat{\phi_{R,\xi}}\left(\lambda',\frac{-\lambda''}{2\pi}\right)\right|d\lambda\,dt,$$

并且由于 $f\in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n+m})$，该积分绝对收敛。

因此，鉴于（4.3），我们可知 $(\Lambda_R\,U)\left(\partial_{x_1'}^k\,(G_{e_1/R})^{-k/2}\right)(\Lambda_R\,U)^{-1}\,f(x',x'')$可以表示为以下类型项的有限线性组合：

(4.4)

$$\begin{aligned}
&\frac{(2\pi)^{-m}}{\Gamma(k/2)}\,R^{k-k_1-k_2}\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^{n+m}} t^{\frac{k}{2}-1}e^{-t}e^{-x_1'}e^{-i\lambda''\cdot x''}\,e^{2\pi ix'\cdot\lambda'}\,(\cosh\left(2tR|\lambda''|\right))^{-n/2}\\
&\widehat{F}\left(\lambda',\frac{-\lambda''}{2\pi}\right)\exp\left(-R|\lambda''|\,t_h(tR|\lambda''|)\left(1-\frac{t_h(tR|\lambda''|)}{2\,c_h(2tR|\lambda''|)}\right)\left|x'+\frac{\xi'}{R}\right|^2\right)
\end{aligned}$$

$$\exp\left(\frac{-2\pi^2|\lambda'|^2}{R|\lambda''|\,c_h(2tR|\lambda''|)}\right)\exp\left(-2\pi i\frac{t_h(tR|\lambda''|)}{R\,c_h(2tR|\lambda''|)}(Rx'+\xi')\cdot\lambda'\right)$$
$$\left(-1+2\pi i\lambda_1'-2|\lambda''|\,t_h(tR|\lambda''|)\left(1-\frac{t_h(tR|\lambda''|)}{2\,c_h(2tR|\lambda''|)}\right)(Rx_1'+\xi_1')-2\pi i\frac{t_h(tR|\lambda''|)\lambda_1'}{c_h(2tR|\lambda''|)}\right)^{k_1}$$
$$\left(-2|\lambda''|\,t_h(tR|\lambda''|)\left(1-\frac{t_h(tR|\lambda''|)}{2\,c_h(2tR|\lambda''|)}\right)\right)^{k_2}d\lambda\,dt,$$

其中 $F(x',\ x'')=f(x',\ x'')\,e^{x_1'}$；如前所述，在该有限线性组合中，首项（对于 $k_1=k$ 和 $k_2=0$）的常数系数恰好等于 $\mathbf{1}$。

现在，我们令 $R\to 0$在 (4.4) 中取极限，并将极限移入积分号内，这是允许的；利用标准的广义控制收敛定理也可以验证这一点。另请注意，当 $R\to 0$时，(4.4) 中与 $k_1<k$ 对应的各项被积函数都将趋于 0，因此可得

$$\begin{aligned}&\lim_{R\to0}(\Lambda_R\,U)\left(\partial_{x_1'}^k\,(G_{e_1/R})^{-k/2}\right)(\Lambda_R\,U)^{-1}\,f(x',x'')\\&=\frac{(2\pi)^{-m}}{\Gamma(k/2)}\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^{n+m}}t^{\frac{k}{2}-1}\,e^{-t}\,e^{-x_1'}\,e^{-i\lambda''\cdot x''}\,e^{2\pi i x'\cdot\lambda'}\,e^{-|\lambda''|^2t}\,e^{-4t\pi^2|\lambda'|^2}\,(-1+2\pi i\lambda_1')^k\\&\qquad\widehat{F}\,(\lambda',-\lambda''/(2\pi))\,d\lambda\,dt\\&=\frac{1}{\Gamma(k/2)}\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^{n+m}}t^{\frac{k}{2}-1}\,e^{-t}\,e^{-x_1'}\,e^{2\pi i x\cdot\lambda}\,e^{-4t\pi^2|\lambda|^2}\,\widehat{F}(\lambda)\,(-1+2\pi i\lambda_1')^k\,d\lambda\,dt.\end{aligned}\tag{4.5}$$

(4.5) 中的最终表达式恰好是 $\partial_{x_1'}^k(\Delta_{e_1})^{-k/2}f(x',x'')$，下面将对此进行说明。为此，注意到当 $F(y'、\ y'')=f(y'、\ y'')\,e^{y_1'}$时，我们有

$$\begin{aligned}e^{-t\Delta_{e_1}}f(x)&=(4\pi t)^{-(n+m)/2}\int_{\mathbb{R}^{n+m}}e^{-t}\,e^{-x_1'-y_1'}\,\exp\left(-|x-y|^2/(4t)\right)f(y)\,e^{2y_1'}\,dy\\&=\int_{\mathbb{R}^{n+m}}e^{-t}\,e^{-x_1'}e^{2\pi i x\cdot\lambda}\,e^{-4\pi^2t|\lambda|^2}\,\widehat{F}(\lambda)\,d\lambda,\end{aligned}$$

这意味着

$$\partial_{x_1'}^k(\Delta_{e_1})^{-k/2}f(x)=\frac{1}{\Gamma(k/2)}\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^{n+m}}t^{\frac{k}{2}-1}\,e^{-t}e^{-x_1'}\,e^{2\pi i x\cdot\lambda}e^{-4\pi^2t|\lambda|^2}\,\widehat{F}(\lambda)\,(-1+2\pi i\lambda_1')^k\,d\lambda\,dt,$$

因此，由 (4.5) 可得

$$\lim_{R\to0}(\Lambda_R\,U)\left(\partial_{x_1'}^k\,(G_{e_1/R})^{-k/2}\right)(\Lambda_R\,U)^{-1}\,f(x',x'')=\partial_{x_1'}^k(\Delta_{e_1})^{-k/2}f(x',x'').$$

命题 4.1的证明至此完成。 □

Acknowledgments

第一作者感谢博帕尔印度科学教育与研究学院提供高级研究奖学金。

References

[BBGG23] Sayan Bagchi、Riju Basak、Rahul Garg 和 Abhishek Ghosh，《与 Grushin 算子相关的伪乘子的稀疏界》，I，J. Fourier Anal. Appl. 29 (2023), no. 3, Paper No. 27, 38. MR 4585471[BBGG24a] ，《与 Grushin 算子相关的算子值傅里叶伪乘子》，J. Math. Anal. Appl. 539 (2024), no. 1, Paper No. 128498, 34. MR 4749406[BBGG24b] ，《与 Grushin 算子相关的伪乘子的稀疏界》，II，J. Geom. Anal. 34 (2024), no. 2, Paper No. 34, 49. MR 4675196[BFnRM25] Jorge J. Betancor、Juan C. Fari˜na 和 Lourdes Rodr´ıguez-Mesa，《欧几里得空间中由带漂移的拉普拉斯算子的预解式定义的某些调和分析算子的 L^p-有界性》，Math. Nachr. 298 (2025), no. 3, 849–870. MR 4877611[BtER94] Robert J. Burns、A. F. M. ter Elst 和 Derek W. Robinson，《李群上次椭圆算子的 L_p-正则性》，J. Operator Theory 31 (1994), no. 1, 165–187. MR 1316990[CW71] Ronald R. Coifman 和 Guido Weiss，《某些齐性空 `间上的非交换调和分析》，Lecture Notes in Mathematics, Vol. 242, Springer-Verlag, Berlin-New York, ´1971, Etude de certaines int´egrales singuli`eres. MR 0499948[CW76] ，《分析中的转移方法》，Conference Board of the Mathematical Sciences Regional Conference Series in Mathematics, vol. No. 31, American Mathematical Society, Prov- idence, RI, 1976. MR 481928[DJ16] Jacek Dziuba´nski 和 K. Jotsaroop，《Grushin 算子的 Hardy 空间与 BMO 空间》，J. Fourier Anal. Appl. 22 (2016), no. 4, 954–995. MR 3528406[DM20] Gian Maria Dall'Ara 和 Alessio Martini，《一种针对 Grushin 算子尖锐乘子定理的稳健方法》，Trans. Amer. Math. Soc. 373 (2020), no. 11, 7533–7574. MR 4169667[DM22] ，《平面上 Grushin 算子的最优乘子定理，II》，J. Fourier Anal. Appl. 28 (2022), no. 2, Paper No. 32, 29. MR 4402142[DM23] ，《平面上 Grushin 算子的最优乘子定理，I》，Rev. Mat. Iberoam. 39 (2023), no. 3, 897–974. MR 4603640[DS21] Jacek Dziuba´nski 和 Adam Sikora，《Grushin 算子的李群方法》，J. Lie Theory 31 (2021), no. 1, 1–14. MR 4161530[GG25] Nishta Garg 和 Rahul Garg，《与带漂移的扭曲拉普拉斯算子相关的 Riesz 变换》，J. Fourier Anal. Appl. 31 (2025), no. 4, Paper No. 47. MR 4921605[Gru70] V. V. Gruˇsin，《某类拟椭圆算子》，Mat. Sb. (N.S.) 83(125) (1970), 456–473. MR 279436[H¨67] Lars H¨ormander，《拟椭圆二阶微分方程》，Acta Math. 119 (1967), 147– 171. MR 222474[HMM05] Waldemar Hebisch、Giancarlo Mauceri 和 Stefano Meda，《李群上带漂移次拉普拉斯算子的谱乘子》，Math. Z. 251 (2005), no. 4, 899–927. MR 2190149[Hun56] G. A. Hunt，《李群上的测度半群》，Trans. Amer. Math. Soc. 81 (1956), 264– 293. MR 79232[JST13] K. Jotsaroop、P. K. Sanjay 和 S. Thangavelu，《Grushin 算子的 Riesz 变换与乘子》，J. Anal. Math. 119 (2013), 255–273. MR 3043153[LM04] No¨el Lohou´e 和 Sami Mustapha，《带漂移的拉普拉斯算子情形下的 Riesz 变换》，Trans. Amer. Math. Soc. 356 (2004), no. 6, 2139–2147. MR 2048512 ´Lop[J. F. Torres Lopera，《Heisenberg-Reiter 幂零流形的上同调与几何》，Differ- ential geometry, Pe86] n˜ıscola 1985, Lecture Notes in Math., vol. 1209, Springer, Berlin, 1986, pp. 292–301. MR 863764´LS[Hong-Quan Li 和 Peter Sj17] ogren，《与实双曲空间上带漂移的拉普拉斯算子相关的某些算子的弱型 ¨, (1界》，Potential Anal. 46 (2017), no. 3, 463–484. MR 3630404 1) LS[《欧几里得空间中与带漂移的拉普拉斯算子相关的某些算子的尖锐端点估计》，Canad. J. Math. 73 (2021), no. 5, 1278–1304. MR 432586621] ,LS[《Heisenberg 群中带漂移次拉普拉斯算子相关算子的估计》，J. Fourier Anal. Appl. 28 (2022), no. 1, Paper No. 10, 29. MR 4358294

[LSW16] Hong-Quan Li、Peter Sj¨ogren 和 Yurong Wu，某些带漂移拉普拉斯算子相关算子的弱型 (1, 1)，《数学杂志》**282** （2016年），第3–4期，623–633页。MR 3473634[MM14] Alessio Martini 和 Detlef M¨uller，任意维数下 *Grushin* 算子的尖锐乘子定理，《伊比利亚数学评论》**30** （2014年），第4期，1265–1280页。MR 3293433[MS12] Alessio Martini 和 Adam Sikora，*Grushin* 算子的加权普朗歇尔估计与尖锐谱乘子，《数学研究快报》**19** （2012年），第5期，1075–1088页。MR 3039831[Rob91] Derek W. Robinson，椭圆算子与李群，牛津数学专著，克拉伦登出版社、牛津大学出版社，纽约，1991年，牛津科学出版物。MR 1144020[RS08] Derek W. Robinson 和 Adam Sikora，*Grushin* 型退化椭圆算子的分析，《数学杂志》**260** （2008年），第3期，475–508页。MR 2434466[RS16] ，*Grushin* 算子、黎斯变换与幂零李群，《数学杂志》**282**（2016年），第1–2期，461–472页。MR 3448390[ST14] ~~P. K.~~ Sanjay 和 S. Thangavelu，*Grushin* 算子的黎斯变换的维数无关有界性，《美国数学会会刊》**142**（2014年），第11期，3839–3851页。MR 3251724[tERS97] A. F. M. ter Elst、Derek W. Robinson 和 Adam Sikora，幂零李群上的热核与黎斯变换，《数学集刊》**74** （1997年），第2期，191–218页。MR 1477562[VSCC92] N. Th. Varopoulos、L. Saloff-Coste 和 T. Coulhon，群上的分析与几何，剑桥数学丛书第100卷，剑桥大学出版社，剑桥，1992年。MR 1218884

(N.Garg) Department of Mathematics, Indian Institute of Science Education and Research Bhopal, Bhopal–462066, Madhya Pradesh, India.电子邮箱: nishta21@iiserb.ac.in

(R.Garg) Department of Mathematics, Indian Institute of Science Education and Research Bhopal, Bhopal–462066, Madhya Pradesh, India.电子邮箱: rahulgarg@iiserb.ac.in