arXiv:2603.15324v1 [math.CA] 16 Mar 2026

关于次可加拟算术平均

ZSOLT PÁLES 和 PAWEŁ PASTECZKA

摘要。设 $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ 是一个连续且严格单调的函数。在本文的主要结果中，我们证明，对于固定的 $n \geq 2$，由下式定义的 n 元变量平均数 $\mathcal{A}_f\colon \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+$

$$\mathcal{A}_f(x_1, \ldots, x_n) := f^{-1}\left(\frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n}\right)$$

当且仅当 f 可微，且其一阶导数连续半可微且不为零，并且存在一个 $\alpha \in [0, \infty]$ 使得 $f'_+ := (f')'_+$ 在 $(0, \alpha)$ 上为正，在 $[\alpha, \infty)$ 上为 $f'_+ = 0$ 时，才是次可加的；此外，$\frac{f'}{f'_+}$ 在 $(0, \alpha)$ 上递增且超可加。

1. 引言

我们首先回顾拟算术平均数的若干基本事实。给定一个连续且严格单调的函数 $f\colon I \to \mathbb{R}$，拟算术平均数 拟算术平均数 $\mathcal{A}_f\colon \bigcup_{n=1}^{\infty} I^n \to I$ 定义为

$$\mathcal{A}_f(x) := f^{-1}\left(\frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n}\right), \qquad \text{where } n \in \mathbb{N},\ x = (x_1, \ldots, x_n) \in I^n.$$

Knopp [9] 观察到，对于 $I = \mathbb{R}_+$ 以及函数 $\pi_p(x)\colon = x^p$ $(p \neq 0)$ 和 $\pi_0(x)\colon = \ln x$，准算术平均数 $\mathcal{A}_{\pi_p}$ 与 p-次幂平均数 $\mathcal{P}_p$重合。准算术平均数类在20世纪30年代 [6, 10, 14]被公理化。众所周知，齐次准算术平均数恰好就是幂平均数。

这一族中一个特别重要的子类（尤其包含幂平均数）由 $\mathcal{C}^2$ 一阶导数处处不为零的函数生成的平均数构成。应用詹森不等式，可以直接验证，对于 f，g 具有这一正则性时，比较不等式 $\mathcal{A}_f \leq \mathcal{A}_g$ 等价于

$$\frac{f''}{f'} \leq \frac{g''}{g'},$$

也就是说，等价于两个单变量函数的逐点可比性。关于这种联系的详细论述，参见 Mikusiński [13]。算子 $f \mapsto \frac{f''}{f'}$ 也曾在多个背景下被 Pasteczka [15–18]采用。

多位作者曾在拟算术平均的背景下研究闵可夫斯基型和 Hölder 型不等式，参见 Beck [1], Beckenbach–Bellmann [2], Grünwald–Páles [7], Hardy– Littlewood–Pólya [8], Losonczi [12], Páles [19, 21]。最近，我们扩展了拟算术平均数的概念 [26]，并在随后的一篇论文中 [25], 刻画了这一更一般背景下闵可夫斯基型和 Hölder 型不等式成立的条件。

作者最初在 [22]中研究了拟算术平均的凸性问题，以获得拟算术平均的哈代型不等式的充分条件。随后，

2020 数学主题分类。主要分类 26D15；次要分类 26E60，39B62。关键词和短语。平均数、准算术平均数、闵可夫斯基不等式、次可加平均数。

Chudziak–Głazowska–Jarczyk–Jarczyk [5]对加权拟算术均值的凸性与凹性进行了全面研究。最后，作者在 [23]中得到的结果确立了拟算术平均凸性的最终刻画。

定理 A。 令 $n \geq 2$ 为固定的，且 $f\colon\ I \to \mathbb{R}$ 为连续且严格单调的。则 n元平均数 $\mathcal{A}_f|_{I^n}$ 是詹森凸的，当且仅当 f 二阶连续可微，具有处处不为零的一阶导数，并且满足以下条件之一：f''在 I上恒等于零，或 f''处处不为零，且f'/f''在 I上为正且凸。

更一般的平均数（例如 Bajraktarević 平均和拟偏差平均）的凸性已在 [24] 中得到刻画。

这一结果的一个令人惊讶之处在于，拟算术平均数的凸性会对其生成函数施加非常强的正则性。此外，平均数的凸性等价于某个单变量函数的凸性。

受这一结果启发，本文的主要目标是说明，拟算术平均数的次可加性同样会给生成函数带来很强的正则性。此外，我们证明，这一性质等价于某个单变量函数的超可加性。

2. 半可微性、单调性与凸性

设 $(X, \|\cdot\|)$ 和 $(Y, \|\cdot\|)$ 是实赋范空间，且 $D \subseteq X$ 非空且为开集。给定函数 $f\colon D \to Y$，若对所有 $u \in X$，以下单侧极限存在，我们称其为 f 在 x 沿方向 u的方向导数；若此极限存在，则称 f 在 $x \in D$ 半可微：

$$f'(x;u) := \lim_{t \to 0+} \frac{f(x+tu) - f(x)}{t}.$$

若 f 在 x 半可微，且映射 $u \mapsto f'(x; u)$ 是线性的，则称 f在 x 可微，并将如此定义的线性映射记为 $f'(x)$。

本段我们考虑 $X = \mathbb{R}$ 的特殊情形，并引入一些进一步的概念。在此情形下，可以验证，f 在 $x \in D$ 半可微，当且仅当由下式定义的 $x \in D$ 处的左导数和右导数

$$f'_-(x) := -f'(x;-1) = \lim_{t \to 0-} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \quad \text{and} \quad f'_+(x) := f'(x;1) = \lim_{t \to 0+} \frac{f(x+t) - f(x)}{t}$$

存在。于是，我们有

$$f'(x;u) = f'_+(x)u \quad (u \geq 0) \qquad \text{and} \qquad f'(x;u) = f'_-(x)u \quad (u \leq 0). \tag{2.1}$$

容易看出，若 f 在 x处半可微，则 f 在 x处连续。显然， f 在 x处可微，当且仅当$f'_-(x) = f'_+(x)$。若 f在 D上每一点 $x \in D$处都半可微，且满足$f'_-(x) \neq f'_+(x)$的点 $x \in D$构成的集合至多可数，则称 f在上近似可微。若 f 在 D 上半可微，且对所有 $x \in D$，则称 f 在上连续半可微。

$$f'_-(x) = \lim_{u \to x-} f'_-(u) = \lim_{u \to x-} f'_+(u) \qquad \text{and} \qquad f'_+(x) = \lim_{u \to x+} f'_-(u) = \lim_{u \to x+} f'_+(u).$$

显然，若 f 在 D上可微，则当且仅当 f' 在 D上连续时，它才在 D 上连续半可微；也就是说， f 在 D 上连续可微。

引理 2.1。 设$(Y, \|\cdot\|)$ 是一个实赋范空间，且 $D \subseteq \mathbb{R}$ 非空且为开集，并设$f: D \to Y$ 在 D上连续半可微。则 f 在 D 上近似可微且局部利普希茨，即对所有 $p \in D$，存在 $r > 0$ 和 $L \geq 0$，使得 $[p-r, p+r] \subseteq D$ 且

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L|x - y| \qquad (x, y \in [p-r, p+r]) \tag{2.2}$$

成立。

证明。 注意，对于所有 $\varepsilon > 0$，集合 $\{x \in D: \ |f'_-(x) - f'_+(x)| \geq \varepsilon\}$是离散的，因此是可数的。因此，集合 $\{x \in D: \ f'_-(x) \neq f'_+(x)\}$也是可数的，故 f是近似可微的。

接下来，我们证明 f'_-和 f'_+在 D上局部有界。为此，取 $p \in D$，并选择$r > 0$，使闭区间 $I := [p-r, p+r]$ 包含于 D。我们将验证 f'_- 在 I 上有界。反设 f'_- 在此区间上无界。那么，对每个 $k \in \mathbb{N}$，都存在一点 $x_k \in I$，使得 $\|f'_-(x_k)\| \geq k$。我们可以从 (x_k) 中抽取一个单调子序列 $(y_\ell) = (x_{k_\ell})$。由于 I的紧性，该子序列收敛到一个极限点 $y_0 \in I$。我们有 $\|f'_-(y_\ell)\| \geq k_\ell$，因此，序列 $(\|f'_-(y_\ell)\|)$ 趋于$+\infty$。这表明，对所有 $\ell \in \mathbb{N}$，都有 $y_\ell \neq y_0$。如果 (y_ℓ) 递增，那么对所有 $\ell \in \mathbb{N}$，都有 $y_\ell < y_0$；因此，由于 f连续且半可微，我们得到

$$\lim_{\ell \to \infty} \|f'_-(y_\ell)\| = \|f'_-(y_0)\|.$$

同样，如果（y_ℓ）是递减的，那么我们可以看出

$$\lim_{\ell \to \infty} \|f'_-(y_\ell)\| = \|f'_+(y_0)\|.$$

因此，两种情况下我们都得到了矛盾，这就证明了 f'_- 在 I 上有界；又由于 $p \in D$ 是任意的， f'_- 在 D 上局部有界。

f'_+ 局部有界性的证明完全类似。

为证明 f 是局部利普希茨的，设 $p \in D$，并选取 $r > 0$ 使得 $I := [p-r, p+r] \subseteq D$。令 L 表示 f 在 I 上两个单侧导数的公共上界。我们将证明不等式 (2.2) 成立。

反过来，假设 (2.2) 不成立。那么，存在 x_1， $y_1 \in I$，满足 $x_1 < y_1$ 和 $\varepsilon > 0$，使得

$$\|f(y_1) - f(x_1)\| > (L + \varepsilon)(y_1 - x_1).$$

使用归纳法 n，我们构造满足 $[x_{n+1}, y_{n+1}] \subseteq [x_n, y_n]$ 的序列 (x_n) 和 (y_n) ，

$$\|f(y_n) - f(x_n)\| > (L + \varepsilon)(y_n - x_n) \tag{2.3}$$

and

$$y_n - x_n = 2^{-n+1}(y_1 - x_1) \tag{2.4}$$

对所有 $n \in \mathbb{N}$ 均成立。

显然，(2.3) 和 (2.4) 对 $n = 1$ 成立。假设对于某个 $n \in \mathbb{N}$ 和 x_n， $y_n \in I$，(2.3) 和 (2.4) 成立。那么，利用三角不等式，我们很容易看出

$$\|f(y_n) - f(\tfrac{x_n+y_n}{2})\| > (L+\varepsilon)\tfrac{y_n-x_n}{2} \qquad \text{or} \qquad \|f(\tfrac{x_n+y_n}{2}) - f(x_n)\| > (L+\varepsilon)\tfrac{y_n-x_n}{2}.$$

（事实上，如果两个不等式的左边都不大于（$L+\varepsilon$）$^{\frac{y_n-x_n}{2}}$，那么根据三角不等式，我们就会得到

$$\|f(y_n) - f(x_n)\| \leq \|f(y_n) - f(\tfrac{x_n+y_n}{2})\| + \|f(\tfrac{x_n+y_n}{2}) - f(x_n)\| \leq 2(L+\varepsilon)\tfrac{y_n-x_n}{2}$$

这与（2.3）矛盾。）

现在，若第一个不等式成立，则设 $(x_{n+1}, y_{n+1}) := (\frac{x_n+y_n}{2}, y_n)$；否则设 $(x_{n+1}, y_{n+1}) := (x_n, \frac{x_n+y_n}{2})$。于是可见，将 n 替换为 $n+1$ 后，(2.3) 仍成立。此外，我们有 $y_{n+1} - x_{n+1} = \frac{1}{2}(y_n - x_n) = 2^{-n}(y_1 - x_1)$，这表明将 n 替换为 $n+1$ 后，(2.4) 也成立。由构造可知，包含关系 $[x_{n+1}, y_{n+1}] \subseteq [x_n, y_n]$ 也显然成立。

根据该包含关系和 (2.4)，可见 (x_n) 递增，而 (y_n) 递减；这两个序列 (x_n) 和 (y_n) 都收敛到共同极限 $z \in I$。

现在考虑三种情况。若对某个 $n_0 \in \mathbb{N}$ 有 $x_{n_0} = z$，则对所有 $n \geq n_0$ 都有 $x_n = z < y_n$；由不等式 (2.3)，对所有 $n \geq n_0$，可得

$$\left\| \frac{f(y_n) - f(z)}{y_n - z} \right\| > L + \varepsilon.$$

令 $n \to \infty$ 取极限，可得 $\|f'_+(z)\| \geq L + \varepsilon$，这就产生了矛盾。同理，若对某个 $n_0 \in \mathbb{N}$ 有 $y_{n_0} = z$，则可得 $\|f'_-(z)\| \geq L + \varepsilon$，这同样产生了矛盾。

在 fi 终情形中，即当 $x_n < z < y_n$ f 对所有 $n \in \mathbb{N}$，由 (2.3) 可得

$$\begin{aligned} \|f(y_n) - f(z)\| + \|f(z) - f(x_n)\| &\geq \|f(y_n) - f(x_n)\| > (L+\varepsilon)(y_n - x_n) \\ &= (L+\varepsilon)((y_n - z) + (z - x_n)) \qquad (n \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

因此，对无限多个 $n \in \mathbb{N}$，有 $\|f(y_n) - f(z)\| \geq (L+\varepsilon)(y_n - z)$；或者，对无限多个 $n \in \mathbb{N}$，有 $\|f(z) - f(x_n)\| \geq (L+\varepsilon)(z - x_n)$。取一个子序列后，这种情况便可归结为前述某一种情况。□

以下两个引理用单侧导数刻画单调性和凸性。

引理 2.2。设 I 是非空开实区间，设 $f: I \to \mathbb{R}$，并假设 f 在 I 上连续且左可微（分别为右可微）。那么，f 递增，当且仅当 f'_-（分别为 f'_+）在 I 上非负。

证明请参阅 [4, 第 13] 页。

引理2.3。设 I 是非空开实区间，设 $f: I \to \mathbb{R}$。那么，f 在 I 上为凸，当且仅当它在 I 上连续半可微，且 f 的左导数（或等价地，右导数）是递增函数。

F 或参见 [4, 第 29–30] 页，或参见 [11,第 168–174]页以了解证明。

在随后的结果中，我们将刻画向量变量函数的凸性。

引理 2.4。设 $(X, \|\cdot\|)$ 为实赋范空间，$D \subseteq X$ 为非空开凸集，且 $f: D \to \mathbb{R}$ 为连续可微函数，并假设 $f': D \to X^*$ 在 D 上半可微。那么，当且仅当对所有 $x \in D, u \in X$，f 是凸的，

$$\langle (f')'(x;u), u \rangle \geq 0. \tag{2.5}$$

证明。函数 函数 f 是凸的，当且仅当对所有 p，$q \in D$，实变量函数

$$\varphi(s) := f((1-s)p + sq) = f(p + s(q-p)) \qquad (s \in (0,1))$$

是凸的。由于 f 连续可微，我们有 φ 在 (0,1) 上也连续可微，并且

$$\varphi'(s) = \langle f'(p + s(q-p)), q - p \rangle \qquad (s \in (0,1)).$$

注意到

$$\begin{aligned}(\varphi')'_+(s) &= \lim_{t\to 0+}\frac{\varphi'(s+t)-\varphi'(s)}{t}\\ &= \lim_{t\to 0+}\left\langle \frac{f'((p+s(q-p))+t(q-p))-f'(p+s(q-p))}{t}, q-p\right\rangle\\ &= \left\langle \lim_{t\to 0+}\frac{f'((p+s(q-p))+t(q-p))-f'(p+s(q-p))}{t}, q-p\right\rangle\\ &= \big\langle (f')'(p+s(q-p);q-p), q-p\big\rangle.\end{aligned}$$

函数 φ 是凸的，当且仅当 φ' 是递增的。根据引理 2.2，这又当且仅当 $(\varphi')'_+$ 在 $(0,\ 1)$ 上非负，即对所有 $p,\ q\in D, s\in\in(0,\ 1)$,

$$\big\langle (f')'(p+s(q-p);q-p), q-p\big\rangle \geq 0.$$

映射 $u\to\langle (f')'(p+s(q-p);\ u)\ u\rangle$ 是二次正齐次的，因此，上述不等式等价于 (2.5) 对所有 $x\in D$ 和 $u\in X$ 均成立。□

最后，我们可以得到一个关于上述半可微性的链式法则 .

引理 2.5. 设 $(X,\|\cdot\|)$、$(Y,\|\cdot\|)$ 和 $(Z,\|\cdot\|)$ 为实赋范空间，$D\subseteq X$ 和 $E\subseteq Y$ 为非空开集。设 $f\colon D\to E$ 在 $x\in D$ 处半可微，且 $g\colon E\to Z$ 局部利普希茨并在 $f(x)$ 处半可微。那么 $g\circ f$ 在 $x\in D$ 处半可微，且

$$(g\circ f)'(x;u) = g'(f(x);f'(x;u)) \qquad (u\in X). \tag{2.6}$$

证明。利用 g 在 $f(x)$ 处的局部利普希茨性质，我们可以找到 $r>0$ 和 $L\geq 0$，使得

$$\|g(y)-g(z)\|\leq L\|y-z\| \qquad (y,z\in B(f(x),r):=\{w\in Y\colon \|w-f(x)\|\leq r\}).$$

固定 $u\in X$。于是，我们可以选择 $\tau>0$，使得

$$f(x+tu), f(x)+tf'(x;u)\in B(f(x),r) \qquad (t\in(0,\tau)).$$

因此，

$$\begin{aligned}\limsup_{t\to 0+}\left\|\frac{g(f(x+tu))-g(f(x)+tf'(x;u))}{t}\right\| &= \limsup_{\tau>t\to 0+}\left\|\frac{g(f(x+tu))-g(f(x)+tf'(x;u))}{t}\right\|\\ &\leq \limsup_{\tau>t\to 0+} L\left\|\frac{f(x+tu)-f(x)}{t}-f'(x;u)\right\| = 0,\end{aligned}$$

由此可得

$$\lim_{t\to 0+}\frac{g(f(x+tu))-g(f(x)+tf'(x;u))}{t}=0.$$

因此，

$$\begin{aligned}(g\circ f)'(x;u) &= \lim_{t\to 0+}\frac{g(f(x+tu))-g(f(x))}{t}\\ &= \lim_{t\to 0+}\left(\frac{g(f(x+tu))-g(f(x)+tf'(x;u))}{t}+\frac{g(f(x)+tf'(x;u))-g(f(x))}{t}\right)\\ &= \lim_{t\to 0+}\frac{g(f(x)+tf'(x;u))-g(f(x))}{t} = g'(f(x);f'(x;u)).\end{aligned}$$

这就完成了式 (2.6) 中所述链式法则的证明。 □

3. 一般平均数次可加性的一个必要条件

若 $\mathcal{M}^{[n]}\colon I^n \to I$ 是一个 n 元平均数，且 σ 是集合 $\{1,\dots,n\}$的一个排列，则平均数 $\mathcal{M}_\sigma^{[n]}\colon I^n \to I$ 定义为

$$\mathcal{M}_\sigma^{[n]}(x_1,\dots,x_n) := \mathcal{M}^{[n]}(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)}) \quad (x_1,\dots,x_n \in I).$$

若对指标集 $\{1,\dots,n\}$的所有循环排列 σ，均有 $\mathcal{M}^{[n]} = \mathcal{M}_\sigma^{[n]}$，则称 $\mathcal{M}^{[n]}\colon I^n \to I$ 是循环对称的。

定理 3.1. 设 $n \geq 2$，且 $\mathcal{M}^{[n]}\colon \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+$ 是一个循环对称的次可加（超可加） n 元平均数。则 $\mathcal{A}^{[n]} \leq \mathcal{M}^{[n]}$ （分别为 $\mathcal{M}^{[n]} \leq \mathcal{A}^{[n]}$）。

证明。假设 $\mathcal{M}^{[n]}$ 是次可加的，并令 $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}_+^n$。利用 $\mathcal{M}^{[n]}$ 是循环对称的这一性质，再利用 $\mathcal{M}$的次可加性，可得

$$\begin{aligned} n\mathcal{M}^{[n]}(x_1,\dots,x_n) &= \sum_{\sigma\in \mathrm{Cyc}_n} \mathcal{M}_\sigma^{[n]}(x_1,\dots,x_n) = \sum_{\sigma\in \mathrm{Cyc}_n} \mathcal{M}^{[n]}(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)}) \\ &\geq \mathcal{M}^{[n]}\Bigg(\sum_{\sigma\in \mathrm{Cyc}_n} x_{\sigma(1)},\dots,\sum_{\sigma\in \mathrm{Cyc}_n} x_{\sigma(n)}\Bigg) \\ &= \mathcal{M}^{[n]}(x_1+\cdots+x_n,\dots,x_1+\cdots+x_n) = x_1+\cdots+x_n. \end{aligned}$$

这意味着 $\mathcal{A}^{[n]}(x) \leq \mathcal{M}^{[n]}(x)$。由于 $(x_1, \dots..., x_n) \in \mathbb{R}_+^n$ 是任意选取的，我们可以得出$\mathcal{A}^{[n]} \leq \mathcal{M}^{[n]}$ 成立。□

4. 拟算术平均的次可加性

在下一个结果中，我们将给出拟算术平均的次可加性的完整刻画。为简化记号，对于给定的可微函数 $f\colon D \to \mathbb{R}$ 且其导数为半可微函数，我们将分别用 f'_-和 f'_+表示 $(f')'_-$ 和 $(f')'_+$。

定理 4.1。设 $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ 是连续的严格递增函数。则以下断言彼此等价。

(i) 对于所有 $n \in \mathbb{N}$，n 元平均数 $\mathcal{A}_f^{[n]}$ 是次可加的；
(ii) 2 元平均数 $\mathcal{A}_f^{[2]}$ 是次可加的；*(iii)* 由下式定义的映射
$\Phi_f\colon f(\mathbb{R}_+)^2 \to \mathbb{R}$

$$\Phi_f(u,v) := f\big(f^{-1}(u)+f^{-1}(v)\big)$$

是凹的。
(iv) 函数 f 可微且具有正导数，映射 $\Psi_f\colon \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$ 定义为

$$\Psi_f(x,y) := \frac{f(x)-f(y)}{f'(y)}$$

是次可加的；

(v) 函数 f 可微且具有正导数，其导数连续半可微，并且存在一个 $\alpha \in [0,\infty]$，使得 f''_+在（0, α）上为正，而在 $[\alpha,\infty)$ 上为 $f''_+ = 0$；此外，$\frac{f'}{f''_+}$在（0, α）上递增且超可加，即，

$$\frac{f'}{f''_+}(x+y) \geq \frac{f'}{f''_+}(x) + \frac{f'}{f''_+}(y) \qquad (x,y>0,\, x+y<\alpha). \tag{4.1}$$

证明。 拟算术平均理论表明，前三个断言等价，这一点众所周知。蕴含关系 $(i) \Rightarrow (ii)$显然成立。假设(ii)成立，并进行一些简单的代换，便可推出 Φ_f具有詹森凹性。利用连续性，即可得出其凹性。最后，由 Φ_f的凹性，可得到 Φ_f的 n 变量詹森不等式，再经过一些显然的代换，便可推出第一个断言。

现在假设等价断言(i)、(ii)和(iii)中的任意一个成立。将定理3.1应用于二元平均数 $\mathcal{A}_f^{[2]}$，可得 $\mathcal{A}^{[2]} \leq \mathcal{A}_f^{[2]}$。根据拟算术平均的著名比较定理，该不等式意味着 f 是凸函数。因此，f 连续半可微，且函数 f'_-和 f'_+均为正且递增。

应用关于拟偏差平均数的一些一般结果（参见 [20, 定理 11]），可以证明，当且仅当存在两个函数 a, b: $\mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$ 使得 $\mathcal{A}_f$ 为次可加的

$$f(x+y) - f(u+v) \leq a(u,v)(f(x)-f(u)) + b(u,v)(f(y)-f(v)) \tag{4.2}$$

对所有 x, y, u, $v \in I$均成立。

对于满足 $y=v$ 的 $x>u$，我们得到

$$\frac{f(x+v)-f(u+v)}{x-u} \leq a(u,v)\cdot\frac{f(x)-f(u)}{x-u}.$$

令 $x \searrow u$取极限，可得

$$f'_+(u+v) \leq a(u,v) f'_+(u).$$

因此

$$\frac{f'_+(u+v)}{f'_+(u)} \leq a(u,v).$$

同理，我们得到

$$a(u,v) \leq \frac{f'_-(u+v)}{f'_-(u)},$$

这意味着双重不等式

$$\frac{f'_+(u+v)}{f'_+(u)} \leq a(u,v) \leq \frac{f'_-(u+v)}{f'_-(u)}. \tag{4.3}$$

任取 $x \in \mathbb{R}_+$。由于 f 是凸函数，我们知道 $f'_-(x) \leq f'_+(x)$。利用 f 近似可微这一点，可以取 $u \in (0,\ x)$，使得 f 在 u 处可微。于是，(4.3) 中令 $v := x-u$ 后可简化为

$$\frac{f'_+(x)}{f'(u)} \leq \frac{f'_-(x)}{f'(u)}$$

这意味着 $f'_+(x) \leq f'_-(x)$。因此，f 在 x 处可微。由于 f 是凸函数，我们得到 $f \in \mathcal{C}^1(I)$，其中 $f' > 0$。接着，结合 (4.3) 以及函数 b 满足的类似不等式，可以得出

$$a(u,v) = \frac{f'(u+v)}{f'(u)}, \qquad b(u,v) = \frac{f'(u+v)}{f'(v)} \qquad (u,\, v \in \mathbb{R}_+).$$

现在，条件 (4.2) 可以等价地改写为

$$\frac{f(x+y)-f(u+v)}{f'(u+v)} \leq \frac{f(x)-f(u)}{f'(u)} + \frac{f(y)-f(v)}{f'(v)} \qquad (x,y,u,v \in \mathbb{R}_+). \tag{4.4}$$

这意味着函数 Ψ_f 在 $\mathbb{R}_+$ 上是次可加的，并完成了断言 (iv) 的证明。现在假设断言 (iv) 成立，即 f 可微、具有正导数，并满足不等式 (4.4)。因此，对于所有 $x,\ y,\ u,\ v \in \mathbb{R}_+$，

$$f(x+y)-f(u+v) \leq \frac{f'(u+v)}{f'(u)}(f(x)-f(u)) + \frac{f'(u+v)}{f'(v)}(f(y)-f(v)).$$

将 $(x,\ y)$ 与 $(u,\ v)$ 的作用互换，我们得到

$$f(u+v)-f(x+y) \leq \frac{f'(x+y)}{f'(x)}(f(u)-f(x)) + \frac{f'(x+y)}{f'(y)}(f(v)-f(y)).$$

将上述不等式逐项相加，我们可以得出

$$0 \leq \left(\frac{f'(u+v)}{f'(u)} - \frac{f'(x+y)}{f'(x)}\right)(f(x)-f(u)) + \left(\frac{f'(u+v)}{f'(v)} - \frac{f'(x+y)}{f'(y)}\right)(f(y)-f(v)). \tag{4.5}$$

现在将 $v := y$ 代入 (4.5)。于是得到

$$0 \leq \left(\frac{f'(u+y)}{f'(u)} - \frac{f'(x+y)}{f'(x)}\right)(f(x)-f(u)) \qquad (x,y,u \in \mathbb{R}_+).$$

由于 f 的严格单调递增性，这个不等式表明，对于所有 $y \in \mathbb{R}_+$，映射

$$\mathbb{R}_+ \ni x \mapsto \frac{f'(x+y)}{f'(x)}$$

是递减的。因此，对于所有 $x,\ y \in \mathbb{R}_+$，我们得到

$$\frac{f'(x+y)}{f'(x)} \geq \frac{f'((x+y)+y)}{f'(x+y)}$$

Let $x < u$ 任意。于是，令 $y := \frac{u-x}{2}$，上述不等式推出 t

$$\left(f'\left(\frac{x+u}{2}\right)\right)^2 \geq f'(x)f'(u) \qquad (x,u \in \mathbb{R}_+).$$

这个不等式表明，函数 $g := \log \circ f'$ 是詹森凹的。由于 f' 是博雷尔可测的，因此 g 也是博雷尔可测的。根据 Sierpiński [27], 对 Bernstein–Doetsch 定理的推广（参见 [3]），我们可以得出结论：g 是凹的。因此，g 是连续半可微的，且 g 的左导数和右导数递减，此外，我们有

$$\frac{f''_-}{f'} = g'_- \geq g'_+ = \frac{f''_+}{f'}. \tag{4.6}$$

因此， $f' = \exp \circ g$ 也是连续半可微的。由于 f 是凸的，我们有 f' 是递增的，因此， $f'_- \geq f'_+ \geq 0$，这意味着 $g'_- \geq g'_+ \geq 0$。

取 $\alpha \in [0, \infty]$，使得 g'_+ 在 $(0, \alpha)$ 上为正，在 (α, ∞) 上为 $g'_+ = 0$。因此，由 (4.6) 可知，f''_+ 在 $(0, \alpha)$ 上为正，在 (α, ∞) 上为 $f''_+ = 0$。由于 f 连续半可微，我们得到 $f''_+(\alpha) = 0$ 也成立。利用 g 的左导数和右导数递减这一性质，由 (4.6) 可知，函数 $\frac{f''_-}{f'}$ 和 $\frac{f''_+}{f'}$ 递减，因此函数 $\frac{f'}{f''_-}$ 和 $\frac{f'}{f''_+}$ 在 $(0, \alpha)$ 上递增。

现在回到不等式 (4.5)。固定 $(x, y), (w, z) \in \mathbb{R}^2_+$，并将 $u := x + tw$ 和 $v := y + tz$ 代入 (4.5)，其中 $t > 0$。于是得到

$$\begin{aligned} 0 \geq & \left(\frac{f'(x + y + t(u + v))}{f'(x + tw)} - \frac{f'(x + y)}{f'(x)} \right) (f(x + tw) - f(x)) \\ & + \left(\frac{f'(x + y + t(u + v))}{f'(y + tz)} - \frac{f'(x + y)}{f'(y)} \right) (f(y + tz) - f(y)). \end{aligned} \tag{4.7}$$

根据 f 的可微性，我们有

$$\lim_{t \to 0+} \frac{f(x + tw) - f(x)}{t} = f'(x) w, \qquad \lim_{t \to 0+} \frac{f(y + tz) - f(y)}{t} = f'(y) z.$$

另一方面，由于 f' 处处右可微，我们可以看出，映射 $t \mapsto f'(x + tw)$ 和 $t \mapsto f'(x + y + t(u + v))$ 在 $t = 0$ 处右可微，因此可得

$$\lim_{t \to 0+} \frac{1}{t} \left(\frac{f'(x + y + t(u + v))}{f'(x + tw)} - \frac{f'(x + y)}{f'(x)} \right) = \frac{f''_+(x + y)(u + v) \cdot f'(x) - f'(x + y) \cdot f''_+(x) w}{f'(x)^2}.$$

同理，我们可以得到

$$\lim_{t \to 0+} \frac{1}{t} \left(\frac{f'(x + y + t(u + v))}{f'(y + tz)} - \frac{f'(x + y)}{f'(y)} \right) = \frac{f''_+(x + y)(u + v) \cdot f'(y) - f'(x + y) \cdot f''_+(y) z}{f'(y)^2}.$$

现在将不等式 (4.7) 除以 t^2，然后令 $t \to 0+$，取极限，可得

$$\begin{aligned} 0 \geq & \frac{f''_+(x + y)(u + v) \cdot f'(x) - f'(x + y) \cdot f''_+(x) w}{f'(x)^2} f'(x) w \\ & + \frac{f''_+(x + y)(u + v) \cdot f'(y) - f'(x + y) \cdot f''_+(y) z}{f'(y)^2} f'(y) z. \end{aligned}$$

将该不等式两边分别除以 $f'(x + y)$，可化简为

$$0 \geq \frac{f''_+(x + y)}{f'(x + y)} (u + v)^2 - \frac{f''_+(x)}{f'(x)} w^2 - \frac{f''_+(y)}{f'(y)} z^2.$$

现在假设 $x, y > 0$ 且 $x + y < \alpha$。那么 f''_+ / f' 在 x, y 处为正，且 $x + y$。定义 $(w, z) = \left(\frac{f''_+(y) f'(y) - f''_+(x) f'(x)}{} \right)$。那么上述不等式可得

$$\frac{f''_+(x + y)}{f'(x + y)} \left(\frac{f''_+(x)}{f'(x)} + \frac{f''_+(y)}{f'(y)} \right)^2 \leq \frac{f''_+(x)}{f'(x)} \left(\frac{f''_+(y)}{f'(y)} \right)^2 + \frac{f''_+(y)}{f'(y)} \left(\frac{f''_+(x)}{f'(x)} \right)^2$$

这可简化为

$$\frac{f_+''(x+y)}{f'(x+y)}\left(\frac{f_+''(x)}{f'(x)}+\frac{f_+''(y)}{f'(y)}\right)\leq\frac{f_+''(x)}{f'(x)}\frac{f_+''(y)}{f'(y)}.$$

因此,

$$\frac{f'(x)}{f_+''(x)}+\frac{f'(y)}{f_+''(y)}\leq\frac{f'(x+y)}{f_+''(x+y)},$$

这表明 f'/f_+'' 在 $(0,\ \alpha)$ 上超可加。至此，便完成了蕴含关系 $(iv)\ \Rightarrow(v)$ 的证明。

在证明的最后一步，我们证明断言 (v) 蕴含 (iii)。函数 Φ_f 连续可微，因此，我们可以应用引理 2.4 来验证其凹性。为此，我们首先需要计算 Φ_f' 的方向导数。

经过简单计算可得，对所有 $(X,\ Y)\in f(\mathbb{R}_+)^2,$，都有

$$\partial_1\Phi_f(X,Y)=\frac{f'(f^{-1}(X)+f^{-1}(Y))}{f'(f^{-1}(X))},\qquad\partial_2\Phi_f(X,Y)=\frac{f'(f^{-1}(X)+f^{-1}(Y))}{f'(f^{-1}(Y))},$$

由于 f' 是局部利普希茨的，我们可以应用引理 2.5 中确立的链式法则。于是，对所有 $(X,\ Y)\in f(\mathbb{R}_+)^2$ 以及 $(U,\ V)\in\mathbb{R}^2$，我们得到

$$\begin{aligned}(\partial_1\Phi_f)'((X,Y),(U,V))=&\frac{\left[(f')'\left(f^{-1}(X)+f^{-1}(Y);\frac{U}{f'(f^{-1}(X))}+\frac{V}{f'(f^{-1}(Y))}\right)\right]\cdot f'(f^{-1}(X))}{f'(f^{-1}(X))^2}\\&-\frac{f'(f^{-1}(X)+f^{-1}(Y))\cdot(f')'\left(f^{-1}(X);\frac{U}{f'(f^{-1}(X))}\right)}{f'(f^{-1}(X))^2}.\end{aligned}$$

因此，代入 $(X,Y):=(f(x)\ f(y))$ 和 $(U,V):=(uf'(x)\ vf'(y))$，其中 $x,y\in\mathbb{R}_+$ 和 $u,v\in\mathbb{R}$，可得

$$(\partial_1\Phi_f)'((f(x),f(y)),(uf'(x),vf'(y)))=\frac{(f')'(x+y;u+v)\cdot f'(x)-f'(x+y)\cdot(f')'(x;u)}{f'(x)^2}.$$

类似的论证可得

$$(\partial_2\Phi_f)'((f(x),f(y)),(uf'(x),vf'(y)))=\frac{(f')'(x+y;u+v)\cdot f'(y)-f'(x+y)\cdot(f')'(y;v)}{f'(y)^2}.$$

根据引理 2.4，要证明 Φ_f 在 $f(\mathbb{R}_+)^2,$ 上是凹的，我们需要证明，对于所有$x,y\in\mathbb{R}_+$和 $u,v\in\mathbb{R}$,

$$\left\langle(\Phi_f')'\big((f(x),f(y));(uf'(x),vf'(y))\big),(uf'(x),vf'(y))\right\rangle\leq0.$$

等价地，我们需要证明，对于所有 $x,y\in\mathbb{R}_+$和 $u,v\in\mathbb{R}$,

$$(\partial_1\Phi_f)'((f(x),f(y)),(uf'(x),vf'(y)))\cdot uf'(x)+(\partial_2\Phi_f)'((f(x),f(y)),(uf'(x),vf'(y)))\cdot vf'(y)\leq0.$$

利用我们已经证明的结果，需要验证

$$\begin{aligned}&\frac{(f')'(x+y;u+v)\cdot f'(x)-f'(x+y)\cdot(f')'(x;u)}{f'(x)^2}\cdot uf'(x)\\&+\frac{(f')'(x+y;u+v)\cdot f'(y)-f'(x+y)\cdot(f')'(y;v)}{f'(y)^2}\cdot vf'(y)\leq0.\end{aligned}$$

等价地,

$$\frac{(f')'(x+y;u+v)}{f'(x+y)}\cdot(u+v)-\frac{(f')'(x;u)}{f'(x)}\cdot u-\frac{(f')'(y;v)}{f'(y)}\cdot v\le 0. \tag{4.8}$$

首先，我们将证明不等式

$$\frac{f''_+}{f'}(x+y)\cdot(u+v)^2\le\frac{f''_+}{f'}(x)\cdot u^2+\frac{f''_+}{f'}(y)\cdot v^2\qquad(u,v\in\mathbb{R},\,x,y\in\mathbb{R}_+). \tag{4.9}$$

若 $x+y\ge\alpha$，则左边等于 0，因此该不等式显然成立。

现在假设 x，$y\in\mathbb{R}_+$且 $x+y<\alpha$。那么，根据 f'/f''_+在 (0，α) 上的超可加性，我们得到

$$\frac{f''_+}{f'}(x+y)=\frac{1}{\frac{f'}{f''_+}(x+y)}\le\frac{1}{\frac{f'}{f''_+}(x)+\frac{f'}{f''_+}(y)}=\frac{\frac{f''_+}{f'}(x)\cdot\frac{f''_+}{f'}(y)}{\frac{f''_+}{f'}(x)+\frac{f''_+}{f'}(y)}.$$

显然的不等式

$$\left(\frac{f''_+}{f'}(x)\cdot u-\frac{f''_+}{f'}(y)\cdot v\right)^2\ge 0\qquad(u,v\in\mathbb{R},\,x,y\in\mathbb{R}_+,\;x+y<\alpha)$$

立即推出

$$\frac{\frac{f''_+}{f'}(x)\cdot\frac{f''_+}{f'}(y)}{\frac{f''_+}{f'}(x)+\frac{f''_+}{f'}(y)}\cdot(u+v)^2\le\frac{f''_+}{f'}(x)\cdot u^2+\frac{f''_+}{f'}(y)\cdot v^2\qquad(u,v\in\mathbb{R}).$$

这就完成了对 (4.9) 的证明。

将 (2.1) 中的等式应用于 f' 而不是 f，得到

$$(f')'(z;w)=\begin{cases}f''_+(z)\cdot w & \text{if } w\ge 0,\\ f''_-(z)\cdot w & \text{if } w<0.\end{cases}\qquad(z\in\mathbb{R}_+,\;w\in\mathbb{R}).$$

另一方面，由于 f' 是连续半可微的，我们还可以得到

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}f''_+(z+\varepsilon w)=\begin{cases}f''_+(z) & \text{if } w\ge 0,\\ f''_-(z) & \text{if } w<0\end{cases}\qquad(z\in\mathbb{R}_+,\;w\in\mathbb{R}). \tag{4.10}$$

因此,

$$(f')'(z;w)=\lim_{\varepsilon\to 0^+}f''_+(z+\varepsilon w)\cdot w\qquad(z\in\mathbb{R}_+,\;w\in\mathbb{R}).$$

现在设 x，$y\in\mathbb{R}_+$, u，$v\in\mathbb{R}$，并选择 $\varepsilon_0>0$，使得对于所有 $\varepsilon\in$(0，ε_0)，都有 $x+\varepsilon u$, $y+\varepsilon v>$0。然后，将 (4.9) 中的 x，y替换为 $x+\varepsilon u$，$y+\varepsilon v$，得到

$$\frac{f''_+}{f'}(x+y+\varepsilon(u+v))\cdot(u+v)^2\le\frac{f''_+}{f'}(x+\varepsilon u)\cdot u^2+\frac{f''_+}{f'}(y+\varepsilon v)\cdot v^2\qquad(\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)).$$

取极限 $\varepsilon\to 0^+$，并利用 f' 的连续性以及等式 (4.10) 对点对 (z，w) $\in\{$(x，u)，(y，v)，($x+y$，$u+v$)$\}$成立，我们可以得出 (4.8) 成立。因此，Φ_f 凹性的证明，以及由此最终蕴含关系 (v) $\Rightarrow$(iii) 的证明，至此完成。□

参考文献

[1]E. Beck。《Über Ungleichungen von der Form $f(M_\phi(x;\alpha), M_\psi(y;\alpha)) \geqq M_\chi(f(x,y);\alpha)$》。Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz.，第 320–328 期：1–14，1970。[2] E. F. Beckenbach 和 R. Bellman。《不等式》。Springer-Verlag，柏林，1961。[3] F. Bernstein 和 G. Doetsch。《Zur Theorie der konvexen Funktionen》。Math. Ann.，76(4)：514–526，1915。[4] N. Bourbaki。《实变函数》。数学原理（柏林）。Springer-Verlag，柏林，2004。基础理论，译自 1976 年法文原版 [MR0580296]，译者 Philip Spain。[5] J. Chudziak、D. Głazowska、J. Jarczyk 和 W. Jarczyk。关于凸的加权拟算术均值。Math. Inequal. Appl.，22(4)：1123–1136，2019。[6] B. de Finetti。《Sul concetto di media》。Giornale dell' Instituto, Italiano degli Attuarii，2：369–396，1931。[7] R. Grünwald 和 Zs. Páles。非对称广义 Bajraktarević均值的局部和整体 Hölder 型与 Minkowski 型不等式。J. Math. Anal. Appl.，535(2)：论文编号 128214，共 22 页，2024。[8] G. H. Hardy、J. E. Littlewood 和 G. Pólya。《不等式》。剑桥大学出版社，剑桥，1934 年（第一版），1952 年（第二版）。[9] K. Knopp。《Über Reihen mit positiven Gliedern》。J. London Math. Soc.，3：205–211，1928。[10] A. N. Kolmogorov。《Sur la notion de la moyenne》。Rend. Accad. dei Lincei (6)，12：388–391，1930。[11] M. Kuczma。《函数方程与不等式理论导论》，卡托维兹西里西亚大学科学论文集第 489 卷。Państwowe Wydawnictwo Naukowe — Uniwersytet Śląski，华沙–克拉科夫–卡托维兹，1985。第 2 版（A. Gilányi 编），Birkhäuser，巴塞尔，2009。[12] L. Losonczi。Hölder 型不等式。载于 E. F. Beckenbach 和 W. Walter 编，《一般不等式》第 3 卷（奥伯沃尔法赫，1981），数值数学国际丛书第 64 卷，第 91–106 页。Birkhäuser，巴塞尔，1983。[13] Jan G. Mikusiński。《Sur les moyennes de la forme $\psi^{-1}[\sum q\psi(x)]$》。Studia Math.，10：90–96，1948。[14] M. Nagumo。《Über eine Klasse der Mittelwerte》。Japanese J. Math.，7：71–79，1930。[15] P. Pasteczka。何时广义均值族构成一个尺度？Real Anal. Exchange，38(1)：193–209，2012/13。[16]P. Pasteczka。拟算术平均数之差的新估计。Math. Inequal. Appl.，18(4)：1321–1327，2015。[17]P. Pasteczka。拟算术平均数之差的下界估计。Aequationes Math.，92(1)：7–24，2018。[18] P. Pasteczka。均值的 Hardy 性质的弱化。Bull. Aust. Math. Soc.，101(1)：118–129，2020。[19] Zs. Páles。拟算术平均数的 Hölder 型不等式。Acta Math. Hungar.，47(3-4)：395–399，1986。[20] Zs. Páles。拟偏差平均的一般不等式。Aequationes Math.，36(1)：32–56，1988。[21] Zs. Páles。拟算术平均数的强 Hölder 不等式和 Minkowski 不等式。Acta Sci. Math. (Szeged)，65：493–503，1999。[22] Zs. Páles 和 P. Pasteczka。拟算术平均数与齐次偏差均值的最佳 Hardy 常数。Math. Inequal. Appl.，21(2)：585–599，2018。[23] Zs. Páles 和 P. Pasteczka。均值的 Jensen 凸包络与 Jensen 凹包络。Arch. Math.，116(4)：423–432，2021。[24] Zs. Páles 和 P. Pasteczka。拟偏差均值与 Bajraktarević 均值的 Jensen 凸性。Aequationes Math.，97(5-6)：1201–1219，2023。[25] Zs. Páles 和 P. Pasteczka。广义拟算术均值的 Hölder 型与 Minkowski 型不等式。arXiv.org，(2511.05411)，2025。[26] Zs. Páles 和 P. Pasteczka。广义拟算术均值的相等性与比较。Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat. RACSAM，120(1)：论文编号 19，2026。[27] W. Sierpiński。《Sur les fonctions convexes mesurables》。Fund. Math.，1：125–128，1920。

匈牙利德布勒森4002邮政信箱400号，德布勒森大学数学研究所电子邮箱：pales@science.unideb.hu

波兰热舒夫35-310 Pigonia 1号，热舒夫大学数学研究所电子邮箱：ppasteczka@ur.edu.pl