arXiv:2603.15385v1 [math.RA] 16 Mar 2026

POINT Koszul 代数的簇与点正合性

HAIGANG HU、WENCHAO WU 和 YU YE

Abstract. 本文为 Koszul 代数 A 引入点精确条件，该条件有助于刻画 Mori 意义下的 (G1) 条件。设 $B = A/(f)$，其中$f \in A_2$ 是正则正规元。我们证明，若 A 满足 (G1) 条件，且在次数不超过 $\ell \geq 2$ 的范围内点正合，则 B 也满足 (G1) 条件，且在次数不超过 ℓ的范围内点正合。此外，我们证明斜多项式代数满足点精确条件。

Contents

1. 引言 1 2. 预备知识 3 3. 点精确条件 5 4. 极小分解 8 5. 主要结果 14 6. 斜多项式代数 16 7. 附录：光滑 ± 1-斜二次曲面 19 参考文献 21

1. Introduction

在非交换代数几何中，量子多项式代数和非交换二次超曲面的研究与分类是两项重要课题。在 Artin、Tate 和 Van den Bergh 的奠基性工作中 [2], ，他们为连通分次代数引入了点簇，这是三维量子多项式代数的重要几何不变量 A。他们证明 A 是非退化的（或等价地， A 满足 (G1) 条件；见定义 2.8），这意味着其点簇与某个射影簇上一个自同构的图像重合 $E \subset \mathbb{P}^2$，并且 E 要么是射影平面 $\mathbb{P}^2$ ，要么是 $\mathbb{P}^2$中的一条三次曲线。这个结果使三维量子多项式代数的分类格外简洁优美，并极大地推动了这一研究领域的发展。尤其是，高维量子多项式的点簇研究仍是一个活跃的研究方向[3, 6, 17]。

Key words and phrases. Koszul 代数、点簇、点精确条件。*2020 MSC*: 16E65,16S38, 16W50。

设 A 是一个 n维量子多项式代数，且 f_1，……， $f_r \in A_2$ 是一个正则正规序列。商代数 $B = A/(f_1$，……， $f_r)$称为一个非交换二次完全交（嵌入于一个量子 $\mathbb{P}^{n-1}$）。特别地，当 $r = 1$ 时， B 称为非交换二次超曲面。近期研究表明，点簇和 (G1) 条件在研究 Calabi-Yau 圆锥曲线（即， A 是一个三维 Calabi-Yau 量子多项式代数，且 $r = 1$） [5], 以及 Clifford 二次完全交（即， A 是一个 Clifford 量子多项式代数） [6]方面也非常有用。

请注意，上述所有代数都是 Koszul 代数。因此，本文旨在回答一个非常自然的问题。

问题 1.1. 设 A 是一个 Koszul 代数， $f \in A_2$ 是一个正则正规元，且 $B = A/(f)$。如果A 满足 (G1) 条件，是否意味着 B 也满足 (G1) 条件?

为回答这个问题，我们引入 Koszul 代数的点正合性概念 A（见定义 3.5）。沿着 [2], 的思路，我们证明 A 满足 (G1) 条件，当且仅当 A 是半标准的，且在次数 1 处点正合（见引理 3.8）。关键步骤是根据 $\Bbbk_A$的线性分解，显式构造 $\Bbbk_B$ 的线性分解。事实上，我们在第 4节考虑了更一般的情形，如下述定理所述。

定理 1.2 （定理 4.5）。 设 A 是一个连通分次代数， $f \in A_m$ 是一个次数为 $m \geq 1$ 的正则正规元，并且 $B = A/$（f）。设 $P_\bullet \xrightarrow{\sim} \Bbbk_A$ 是一个极小分解。序列 $T_\bullet$在（*4.3*）中定义，它由 $P_\bullet$ 构造而成，是 $\Bbbk_B$的一个自由分解。如果另外 A 是 *Koszul* 代数且 $m \geq 2$，那么 $T_\bullet \xrightarrow{\sim} \Bbbk_B$ 是一个极小分解。

设 A 和 B 如问题 1.1中所述。假设 A 在次数 $\ell \geq 2$ 之前点正合，并利用定理 $\Bbbk_B$ 的线性分解（见定理 1.2），我们对问题 1.1 作出肯定回答。

定理 1.3 （定理5.5）。 沿用问题 *1.1*中的记号。如果 A 满足（*G1*）条件，并且在次数 $\ell \geq 2$ 之前点正合，那么 B 也满足（*G1*）条件，并且在次数 ℓ之前点正合。

此外，我们证明以下代数满足点精确条件（即它们在每个次数 ≥ 1 上都是点正合的）：

(1) 2 维和 3 维量子多项式代数（命题3.11）；(2) 满足 (G1) 条件的 4 维量子多项式代数（命题3.11）；(3) 维数为 ≥ 2 的斜多项式代数（定义 6.1，定理 6.4）。

因此，根据定理1.3 和注2.9，若 B 是嵌入在由上述某个代数定义的量子 $\mathbb{P}^{n-1}$ 中的非交换二次完全交，则 B 满足 (G1) 条件和点精确条件。特别地，多项式代数 $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$是维数为 n的斜多项式代数的一个特例，因此二次完全交 $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]/(f_1, \ldots, f_r)$ 满足点精确条件。

致谢。H. Hu 得到国家自然科学基金委员会资助（项目编号：12501054 和 12371042）。Y. Ye 得到国家重点研发计划（项目编号：2024YFA1013802）、国家自然科学基金委员会（项目编号：12131015 和 12371042）以及量子科学与技术—国家科技重大专项（项目编号：2021ZD0302902）的部分资助。

2. Preliminaries

本文中，我们始终在特征为 0 的代数闭域 $\Bbbk$ 上工作。所考虑的所有代数和向量空间均定义在 $\Bbbk$上，且所有分次代数均为 $\mathbb{Z}$-分次。

设 A 为分次代数。我们用 $\mathrm{GrMod}\, A$ 表示右分次 A-模组成的范畴，其态射为保次数的右 A-模同态；用 $\mathrm{grmod}\, A$ 表示由有限生成模组成的满子范畴。$\mathrm{GrMod}\, A$ 中的态射按从右到左的顺序复合，也就是说，$f\colon X \to Y$与 $g\colon Y \to Z$ 的复合记为 $gf = g \circ f\colon X \to Z$。对于$M \in \mathrm{GrMod}\ A$和 $n \in \mathbb{Z}$，我们定义移位 $M(n)$，其新分次为 $M(n) = M_{n+i}$。对于$M,\ N \in \mathrm{GrMod}\ A$和 $i \in \mathbb{N}$，我们定义

$$\underline{\mathrm{Ext}}^i_A(M,N) := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{Ext}^i_{\mathrm{GrMod}\, A}(M, N(n)).$$

对于分次代数 $A = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} A_i$，若 A 满足 $A_0 = \Bbbk$ 且对所有 $i < 0$都有 $A_i = 0$，则称其为连通分次；若对所有 $i \in \mathbb{Z}$都有 $\dim_{\Bbbk} A_i < \infty$，则称 A 为局部有限。若 A 是局部有限分次代数且 $M \in \mathrm{grmod}\ A$，则定义 M的希尔伯特级数为 $H_M(t) := \sum_{i\in\mathbb{Z}} (\dim_{\Bbbk} M_i) t^i \in \mathbb{Z}[[t, t^{-1}]]$。

设 σ 是连通分次代数 A的分次自同构。则 σ 在 $\mathrm{GrMod}\ A$上诱导一个自等价：对于 $M \in \mathrm{GrMod}\ A$，M^σ 作为向量空间等于 M，并赋予新的右 A-作用 $*$，其定义为 $m * a = m\sigma(a)$，对所有 $m \in M^\sigma$、$a \in A$成立。对于 $\mathrm{GrMod}\ A$中的态射$\varphi\colon M \to N$。态射 $\varphi^\sigma\colon M^\sigma \to N^\sigma$定义为 $\varphi^\sigma(m) = \varphi(m)$，对所有$m \in M^\sigma$成立。等价 $(-)^\sigma$ 与分次移位函子可交换。

设 A为连通分次代数，$F_0,\ F_1$为分次模范畴 A中的自由对象。我们通常将元素 $x \in F_0$ 视为 A上的列向量，并将分次模范畴 A 中的态射 $\varphi\colon F_0 \to F_1$ 视为 A上的矩阵，即 $\varphi = (\varphi_{ij}) \in \mathbb{M}_{s_1\times s_0}(A)$，其中秩 ${}_A F_i = s_i$，对于 $i = 0,\ 1$。此外，对于 A 的分次自同构 σ，我们定义 $\sigma \cdot \varphi := (\sigma(\varphi_{ij})) \in \mathbb{M}_{s_1\times s_0}(A)$。

定义 2.1。设 A 为分次代数，且 $f \in A_m$。

(1) 若对每个 $a \in A,\ af = 0$ 或 $fa = 0$ 蕴含 $a = 0$，则称 f 为正则。(2) 若 $Af = fA$，则称 f 为正规。

我们指出，f 是正则且正规，当且仅当存在唯一的（分次）环自同构 σ of A，使得对 $a \in A,\ fa = \sigma(a)f$。我们称 σ 为 f的正规化自同构。

2.1. 向量空间上的矩阵。 设 V 是一个 n维向量空间，其基为$\{x_1, \ldots, x_n\}$。令 $M = (m_{ij}) \in \mathbb{M}_{s\times r}(V)$。我们将 M的每个子式视为 $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$中的一个（齐次）多项式。

设 $t \in \mathbb{N}$，我们将 X_M^t 定义为射影簇

$$X_M^t := \mathcal{Z}(\{t\text{-minors of } M\}) \subset \mathbb{P}(V^*).$$

注意，如果 $t > \min\{s, r\}$，则 $X_M^t = \mathbb{P}(V^*)$。为方便起见，如果 $t = n$，我们将在 X_M^t 中省略上标 t。

对于 $p = (p_1 : \cdots : p_n) \in \mathbb{P}(V^*)$，将 M_p 定义为这样一个 $\Bbbk$ 上的矩阵：用 p_i 替换 x_i，其中$i = 1$、.....、 n。那么 M_p 在相差一个标量的意义下是良定义的。我们也可以按通常意义定义秩$_{\Bbbk} M_p$，显然，当且仅当 $p \in X_M^t$ 时，秩$_{\Bbbk} M_p < t$。

以下是秩-零化度定理的一个简单应用。

引理 2.2。 设 $M \in \mathbb{M}_{s\times r}(V)$、 $N \in \mathbb{M}_{r\times l}(V)$ 以及 p、 $q \in \mathbb{P}(V^*)$ 满足 $M_pN_q = 0$。

(1) 若对于某个 $t \le \min\{s, r\}$，秩$_{\Bbbk} M_p \ge t$，则 秩$_{\Bbbk} N_q \le r - t$，因此 $q \in X_N^{r-t+1}$。

(2) 若对于某个 $t \le \min\{r, l\}$，秩$_{\Bbbk} N_q \ge t$，则 秩$_{\Bbbk} M_p \le r - t$，因此 $p \in X_M^{r-t+1}$。

2.2. 垃圾桶 ul 代数。 设 V 是有限维向量空间，且 $T(V)$ 是张量代数 ra.

定义 2.3。 若商代数 $A = T(V)/(R)$ 中的元素在 V 中次数为 1，且 $R \subset V^{\otimes 2}$，则称其为二次代数 。

定义 2.4。 若连通分次代数 A 的典范模 $\Bbbk_A = A/A_{\ge 1}$ 存在线性分解 $P_\bullet = (P_i,\ d_i)$，则称其为$Koszul$ 代数。也就是说，存在一个正合列

$$\cdots \to P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \to \Bbbk_A \to 0$$

其中 P_i 是投射的，并由其次数为 i 的分量生成，即 $P_i = (P_i)_i A$。

命题 2.5。 设 A 是 *Koszul* 代数。则以下陈述成立。

(1) A 是二次的 [4, 推论 2.3。3]。(2)相反代数 A^{op} 是 *Koszul* 代数 [4, 命题 2.2。1]。

(3) 设 $f \in A_2$ 是一个正则正规元。则 $A/(f)$ 是 *Koszul* 代数 [14, 定理 1。2]。

定义 2.6 ([1])。 诺特连通分次代数 A 称为维数为 量子多项式代数 n，如果

(1) $\operatorname{gldim} A = n < \infty$,

(2) $\underline{\operatorname{Ext}}_A^i(\Bbbk, A) \cong \underline{\operatorname{Ext}}_{A^{op}}^i(\Bbbk, A) \cong \begin{cases} 0 & i \ne n \\ \Bbbk(n) & i = n \end{cases}$,

(3) $H_A(t) = (1 - t)^{-n}$.

Zhang 证明了每个量子多项式代数都是 Koszul [13,定理 5.11] .

2.3. **点簇**。 设 $A = T(V)/I$ 是一个由次数 1 的元素有限生成的连通分次代数。那么，$I_i \subset V^{\otimes i}$ 中的每个元素都定义一个多重线性形式 $(V^*)^{\times i} \to \Bbbk$. 定义与 I_i 相关的射影概形如下:

$$\mathcal{V}(I_i) := \{(p_1, \ldots, p_i) \in \mathbb{P}(V^*)^{\times i} \mid f(p_1, \ldots, p_i) = 0,\ \forall f \in I_i\}.$$

记 $\Gamma_i = \mathcal{V}(I_i)$。对于 $j \geq i$，令 $p_i^j : \Gamma_j \to \Gamma_i$ 为投影 $\mathbb{P}(V^*)^{\times j} \to \mathbb{P}(V^*)^{\times i}$ 到前 i 个因子的限制。于是 $\{\Gamma_i, p_i^j\}$ 成为一个概形的逆系统。

定义 2.7 ([2])。 点概形 A 定义为逆极限 $\Gamma := \varprojlim \Gamma_i$。若只考虑 Γ的既约结构，我们称其为点簇。

本文主要考虑二次代数。以下定义有助于刻画二次代数的点簇。

定义 2.8 ([7])。 我们称二次代数 $A = T(V)/(R)$ 满足*(G1)* 条件，如果存在一对 (E, σ)，其中 $E \subset \mathbb{P}(V^*)$ 是一个射影簇，且 $\sigma \in \mathrm{Aut}_{\Bbbk} E$，使得

$$\mathcal{V}(R) = \{(p, \sigma(p)) \in \mathbb{P}(V^*) \times \mathbb{P}(V^*) \mid p \in E\}.$$

若 A 满足 (G1) 条件，则称这对 (E, σ) 为 A 的几何对 。

我们指出，交换二次代数 $A = \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]/I$ 总是满足 (G1) 条件，其几何对为 $(E = \mathcal{Z}(I)$ $\sigma = \mathrm{id})$ [5, 引理 2.5]。

若二次代数 A 满足 (G1) 条件，且其几何对为 (E, σ)，则其点簇 $\Gamma \cong E$ 由 [2] （另见 [18, 引理 4.1]）。

注 2.9。 以下代数满足 (G1) 条件:

(1) 2 维和 3 维量子多项式代数 [2, 定理 1]; (2) Calabi-Yau 圆锥曲线 [5,命题 4.5]; (3) Auslander 正则 4 维量子多项式代数 [15,定理 1.4]; (4) 斜多项式代数（维数为 ≥ 2） [18, 命题 4.2] （另见 [3]）; (5) Clifford 量子多项式代数（维数为 ≥ 2）以及 Clifford 二次完全交 [6, 定理 1.4]。

3. Point-exact conditions

在本节中， $A = T(V)/(R) = \Bbbk\langle x_1, \ldots, x_n\rangle/(f_1, \ldots, f_r)$ 是一个 Koszul 代数。我们可以写成

$$f_i = \sum_{j=1}^{n} x_j f_{ji} = \sum_{j=1}^{n} g_{ij} x_j$$

对于每个 $1 \leq i \leq r$。那么 $\Bbbk_A$ 具有线性分解

$$P_\bullet : \quad \cdots \to A(-i)^{\oplus s_i} \xrightarrow{d_i} \cdots \to A(-2)^{\oplus s_2} \xrightarrow{d_2} A(-1)^{\oplus s_1} \xrightarrow{d_1} A \to 0 \tag{3.1}$$

其中 $s_1 = n,\ \ s_2 = r,\ \ d_1 = (x_1,\ \ldots,\ x_n)$，以及 $d_2 = (f_{ij}) \in \mathbb{M}_{n\times r}(V)$。类似地，根据命题 2.5 (2)，${}_A\Bbbk$ 具有线性分解

$$Q_\bullet:\quad \cdots \to A(-i)^{\oplus s_i} \xrightarrow{h_i} \cdots \to A(-2)^{\oplus s_2} \xrightarrow{h_2} A(-1)^{\oplus s_1} \xrightarrow{h_1} A \to 0 \tag{3.2}$$

其中 $h_1 = (x_1,\ \ldots,\ x_n)^t$ 且 $h_2 = (g_{ij}) \in \mathbb{M}_{r\times n}(V)$。我们定义

$$X_A := X_{d_2} = \mathcal{Z}(\{n\text{-minors of } d_2\}),\ {}_AX := X_{h_2} = \mathcal{Z}(\{n\text{-minors of } h_2\}) \subset \mathbb{P}^{n-1}.$$

我们指出，若 $X_A = {}_AX = \mathbb{P}^{n-1}$，则 $n > r$。

注 3.1。设 $P'_\bullet$ 是 $\Bbbk_A$ 的另一个线性分解。由线性分解在同构意义下的唯一性，存在一个链同构 $\varphi = (\varphi_i)_{i\geq 0}: P_\bullet \to P'_\bullet$，使得对所有 $i \geq 0$，均有 $\varphi_i \in \mathbb{M}_{s_i}(\Bbbk)$。因此，$X_A$ 对于 A 是良定义的。同样地，${}_AX$ 对于 A 也是良定义的。

以下结果由 $P_\bullet$ 和 $Q_\bullet$ 的构造得出。

引理 3.2。我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(R) &= \{(p,q) \in \mathbb{P}(V^*)\times\mathbb{P}(V^*) \mid (d_1)_p(d_2)_q = 0\}\\ &= \{(p,q) \in \mathbb{P}(V^*)\times\mathbb{P}(V^*) \mid (h_2)_p(h_1)_q = 0\}.\end{aligned}$$

这意味着以下条件等价。

(1) $\mathcal{V}(R) = \emptyset$。
(2) $X_A = \emptyset$。
(3) ${}_AX = \emptyset$。

注 3.3. 本文只关注 $\mathcal{V}(R) \neq \emptyset$ 的情形。因此，我们总是假设 X_A 和 ${}_AX$ 非空。

定义 3.4. 我们称 A 是 半标准 的，若 $X_A = {}_AX$。

定义 3.5. (1) 对于 $i \geq 1$，我们称 A 在 次数 i 处右点正合，若

$$\operatorname{rank}_{\Bbbk}(d_i)_p + \operatorname{rank}_{\Bbbk}(d_{i+1})_p = \operatorname{rank}_A P_i = s_i,\ \forall p \in X_A. \tag{3.3}$$

(2) 对于 $\ell \geq 1$，我们称 A 在次数不超过 ℓ 时右点正合，若它对所有 $1 \leq i \leq \ell$ 都在次数 i 处右点正合。(3) 我们称 A 满足右点正合条件，若它在每个次数 ≥ 1 处都右点正合。

上述定义的左版本与此类似。若 A 在 i 次上是点正合的（分别地，直到次），即其在 i 次上（分别地，直到 ℓ次）满足右点正合和左点正合，则称之为点正合。此外，若 A同时满足右点精确条件和左点精确条件，则称其满足点精确条件。

注释 3.6。右（左）点精确条件的定义与注释 3。1中的推理相同。

引理 3.7。 以下各项等价。

(1) A 在次数不超过 $\ell \geq 1$ 时右点正合。(2) 秩$_{\Bbbk}(d_i)_p = \sum_{j=1}^{i}(-1)^{j+1}$秩$_{\Bbbk} P_{i-j}$, $\forall p \in X_A$, 其中 $1 \leq i \leq \ell+1$。

我们将以下引理的证明归功于 [2]。

引理 3.8。 以下条件等价。

(1) A满足 ***(G1)*** 条件。(2) A是半标准的，且在次数 1 处点正合。

此外，若 A 满足上述等价条件，则 $r+1 \geq n$，且与 A 相关联的几何对(E, σ) 由 $E = X_A = {}_AX$ 给出，并且 σ： $E \to E$, $p \mapsto q$ 使得 $(d_1)_p(d_2)_q = 0$（或等价地 $(h_2)_p(h_1)_q = 0$）。

证明。 假设 A 满足带有几何对 (E, σ) 的 (G1) 条件。令 $q \in X_A = X_{d_2}$。那么存在 $p \in \mathbb{P}^{n-1}$ 使得

$$(d_1)_p(d_2)_q = (f_1(p,q), \ldots, f_r(p,q)) = 0$$

因为 $\mathrm{rank}_{\Bbbk}(d_2)_q < n$。因此 $(p,q) \in \mathcal{V}(R)$，这意味着 $p, q \in E$ 且根据假设， $\sigma(p) = q$。由此可知， p 由 q唯一确定。因此 $\mathrm{rank}_{\Bbbk}(d_2)_q = n-1$，即 A 在次数1处右点正合。类似的论证表明， A 在次数1处左点正合。另一方面，对于任意的 $(p,q) \in \mathcal{V}(R)$，我们有

$$(h_2)_p(h_1)_q = (f_1(p,q), \ldots, f_r(p,q))^t = 0.$$

由于 $\mathrm{rank}_{\Bbbk}(h_1)_q = 1$，引理 2.2 (2) 得出 $p \in X_{h_2} = {}_AX$。因此 $X_A \subset E \subset {}_AX$。反向包含关系 ${}_AX \subset E \subset X_A$ 的证明类似。

现在假设 A 是半标准的，并且在次数1处点正合。令 π_1， π_2: $\mathbb{P}(V^*) \times \mathbb{P}(V^*) \to \mathbb{P}(V^*)$ 为典范投影。那么限制

$$\pi_1|_{\mathcal{V}(R)} : \mathcal{V}(R) \to {}_AX =: E, \ (p,q) \mapsto p$$

是一个定义良好的簇态射。由于对于任意 $p \in E$， $(h_2)_p(h_1)_q = 0$ 蕴含 q 由 p 唯一确定，因此 $\pi_1|_{\mathcal{V}(R)}$ 是一个同构。类似地， $\pi_2|_{\mathcal{V}(R)} : \mathcal{V}(R) \to X_A = E$ 也是一个同构。于是

$$\mathcal{V}(R) = \{(p, \sigma(p)) \mid p \in E, \sigma = \pi_1|_{\mathcal{V}(R)} \circ (\pi_2|_{\mathcal{V}(R)})^{-1} \in \mathrm{Aut}_{\Bbbk} E\}. \qquad \square$$

例 3.9。 设 $A = k\langle x, y\rangle/(xy - \lambda yx)$ $0 \neq \lambda \in \Bbbk$。那么 A 是一个二维量子多项式代数，并且有线性分解

$$0 \to A(-2) \xrightarrow{d_2} A(-1)^{\oplus 2} \xrightarrow{d_1} A \to \Bbbk_A \to 0$$

其中 $d_1 = (x, y)$、 $d_2 = (y, -\lambda x)^t$，以及

$$0 \to A(-2) \xrightarrow{h_2} A(-1)^{\oplus 2} \xrightarrow{h_1} A \to {}_A\Bbbk \to 0$$

其中 $h_1=(x,\ y)^t$、 $d_2=(-\lambda y,\ x)$。然后 $X_A={}_AX=\mathbb{P}^1$，以及

$$\operatorname{rank}_{\Bbbk}(d_1)_p+\operatorname{rank}_{\Bbbk}(d_2)_p=2=\operatorname{rank}_{\Bbbk}(h_1)_p+\operatorname{rank}_{\Bbbk}(h_2)_p,\ \forall p\in\mathbb{P}^1.$$

因此 A 是半标准的，并且在次数1处点正合。由引理3.8， A 满足带有几何对（$E,\ \sigma$）的 (G1) 条件，其中 $E=\mathbb{P}^1$，且 $\sigma:\ \mathbb{P}^1\to\mathbb{P}^1,\ \ p=(p_1:\ p_2)\mapsto\sigma(p)=(p_1:\ \lambda p_2)$。

下面是一个有趣的观察。

引理 3.10。假设 A 满足带有几何对 （$E,\ \sigma$）的 *(G1)* 条件。那么，对于每个 $p\in E$， A 满足右点正合条件，当且仅当复形

$$\cdots\to\Bbbk^{s_n}\xrightarrow{(d_n)_{\sigma^{n-1}(p)}}\cdots\to\Bbbk^{s_2}\xrightarrow{(d_2)_{\sigma(p)}}\Bbbk^{s_1}\xrightarrow{(d_1)_p}\Bbbk\to 0 \tag{3.4}$$

是正合的。

证明。对于每个3.4中的复形， $p\in E$ 当且仅当

$$\operatorname{rank}_{\Bbbk}(d_i)_p=\sum_{j=1}^{i}(-1)^{j+1}s_{i-j},\ \forall i\geq 1,\forall p\in E.$$

该结果由引理3.7得出。 □

命题 3.11。 下列代数满足点精确条件。

(1) 2维和3维量子多项式代数。(2) 满足 (G1) 条件的 4维量子多项式代数。

证明。 我们证明 (2)。设 A 是满足 (G1) 条件的 4 维量子多项式代数。那么 $\Bbbk_A$ 有一个线性分解

$$0\to A(-4)\xrightarrow{d_4}A(-3)^{\oplus 4}\xrightarrow{d_3}A(-2)^{\oplus 6}\xrightarrow{d_2}A(-1)^{\oplus 4}\xrightarrow{d_1}A\to\Bbbk_A\to 0,$$

其中 $d_1=(x_1,\dots,x_n)$ 和 $d_4=(x_1,\dots,x_n)^t$。通过应用 $\operatorname{Hom}(-,A)$ 和分次移位函子，我们得到 ${}_A\Bbbk$ 的一个线性分解：

$$0\to A(-4)\xrightarrow{d_1}A(-3)^{\oplus 4}\xrightarrow{d_2}A(-2)^{\oplus 6}\xrightarrow{d_3}A(-1)^{\oplus 4}\xrightarrow{d_4}A\to{}_A\Bbbk\to 0.$$

由于 A 满足 (G1) 条件， $X_{d_2}=X_A={}_AX=X_{d_3}$ 和秩$_{\Bbbk}(d_2)_p$ =秩$_{\Bbbk}(d_3)_p=3$对每个 $p\in X_A$ 由引理 3.8可知。于是 A 由引理 3.7是点正合的。 □

4. Minimal resolutions

在本节中， A 是一个连通分次代数， $f\in A_m$ 是一个正则正规元，满足$m\geq 1$，且 $B=A/(f)$。设 $P_\bullet=(P_i,\ d_i)\xrightarrow{\varepsilon}\Bbbk_A\to 0$ 是一个极小分解。我们将通过推广交换情形下的 Shamash 方法[12]，由 $P_\bullet$ 构造一个自由分解 $T_\bullet\xrightarrow{\sim}\Bbbk_B$。

设 σ 为 f 的正规化自同构，并令 $\tau := \sigma^{-1}$。该正规化自同构诱导一个同构 $\tilde{\sigma}: A \to A^{\sigma}$, $a \mapsto \sigma(a)$，它属于分次模范畴 A。我们还定义 $\gamma: A^{\sigma}(-m) \to A, a \mapsto af$，这是分次模范畴 A中的一个态射。

设 F_0、 F_1是 GrMod A中的自由对象，且 $\varphi: F_0 \to F_1$是 GrMod A中的一个态射。回忆一下，我们将 $\tau \cdot \varphi = (\tau(\varphi_{ij}))$定义为把 $\varphi = (\varphi_{ij})$视为$\mathbb{M}_{\mathrm{rank}_A F_1 \times \mathrm{秩}_A F_0}(A)$中的一个矩阵。于是有如下交换图

$$\begin{array}{ccccc} F_0(-m) & \xrightarrow{\tilde{\sigma}_0} & F_0^{\sigma}(-m) & \xrightarrow{\gamma_0} & F_0 \\ {\scriptstyle \tau\cdot\varphi}\downarrow & & {\scriptstyle \varphi^{\sigma}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ F_1(-m) & \xrightarrow{\tilde{\sigma}_1} & F_1^{\sigma}(-m) & \xrightarrow{\gamma_1} & F_1, \end{array} \tag{4.1}$$

其中 $\tilde{\sigma}_i$和 γ_i是分别由 $\tilde{\sigma}$ 和 γ逐坐标诱导的态射，对 $i = 0$，1成立。由于 $\gamma \circ \sigma$是由 f左乘得到的，因此有

$$\gamma_i \circ \tilde{\sigma}_i = fI_{\mathrm{rank}_A F_i} \in \mathbb{M}_{\mathrm{rank}_A F_i}(A),$$

其中 $I_{\mathrm{rank}_A F_i}$ 是单位矩阵。

设 $n \in \mathbb{Z}$。记 $P_\bullet(-n)$为复形

$$\cdots \to P_i(-n) \xrightarrow{d_i} \cdots \to P_2(-n) \xrightarrow{d_2} P_1(-n) \xrightarrow{d_1} P_0(-n) \to 0,$$

而 $P_\bullet[-n]$ 为移位复形： $P_\bullet[-n]_i = P_{i+n}$ ，其微分为$(-1)^n d$。定义一个序列

$$\tau^n P_\bullet: \quad \cdots \to P_i \xrightarrow{\tau^n \cdot d_i} \cdots \to P_2 \xrightarrow{\tau^n \cdot d_2} P_1 \xrightarrow{\tau^n \cdot d_1} P_0 \to 0$$

在分次模范畴 A中。

利用（4.1）中的交换图，我们得到如下交换图:

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & P_{i+1}(-m) & \xrightarrow{\tau\cdot d_{i+1}} & P_i(-m) & \xrightarrow{\tau\cdot d_i} & P_{i-1}(-m) & \longrightarrow & \cdots \\ & & {\scriptstyle \tilde{\sigma}_{i+1}}\downarrow & & {\scriptstyle \tilde{\sigma}_i}\downarrow & & {\scriptstyle \tilde{\sigma}_{i-1}}\downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & P_{i+1}^{\sigma}(-m) & \xrightarrow{(d_{i+1})^{\sigma}} & P_i^{\sigma}(-m) & \xrightarrow{(d_i)^{\sigma}} & P_{i-1}^{\sigma}(-m) & \longrightarrow & \cdots \\ & & {\scriptstyle \gamma_{i+1}}\downarrow & & {\scriptstyle \gamma_i}\downarrow & & {\scriptstyle \gamma_{i-1}}\downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & P_{i+1} & \xrightarrow{d_{i+1}} & P_i & \xrightarrow{d_i} & P_{i-1} & \longrightarrow & \cdots. \end{array} \tag{4.2}$$

在上图中，由于底行的序列 $P_\bullet$ 是 $\Bbbk_A$的极小分解，因此，中间行的序列是 $\Bbbk_A^{\sigma}(-m) = \Bbbk_A(-m)$的极小分解；该序列可通过将等价$(-)^{\sigma}$ 应用于$P_\bullet(-m)$得到。此外，由于对每个 $i \in \mathbb{Z}$，由 $\tilde{\sigma}$ 诱导的 $\tilde{\sigma}_i$ 都是同构，因此顶行的序列 $\tau P_\bullet(-m)$是$\Bbbk_A(-m)$的极小分解。由此我们证明了以下结果。

Lemm4.1. 对于任意 $n \in$，序列 $\tau^n P_\bullet = （P_i, \tau^n \cdot d_i）$都是 $\Bbbk_A$的极小分解 $\mathbb{Z}.$

令 $s_i = \mathrm{秩}_A P_i$，并令 $I_{s_i} \in \mathbb{M}_{s_i}(A)$ 为单位矩阵。该映射

$$\zeta^1 := (\zeta_i^1)_{i\in\mathbb{Z}} = (fI_{s_i})_{i\in\mathbb{Z}} = (\gamma_i \circ \tilde{\sigma}_i)_{i\in\mathbb{Z}} : \tau P_\bullet(-m) \to P_\bullet$$

是关于左乘法 $f\cdot$ 的复形映射链映射: $\Bbbk_A \to \Bbbk_A,\quad a \mapsto fa = 0$。也就是说，我们有一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \tau P_\bullet(-m) & \xrightarrow{\zeta^1} & P_\bullet \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Bbbk_A & \xrightarrow{0} & \Bbbk_A \end{array}$$

其中竖直映射是增广映射。因此 ζ^1 根据比较定理同伦于零 [9, 定理 6。16]。因此存在一列态射 $c^1 = (c_i^1 :\quad P_i(-m) \to P_{i+1})_{i\in\mathbb{Z}}$在分次模范畴中 A，使得 $\zeta_i^1 = c_{i-1}^1(\tau\cdot d_i) + d_{i+1}c_i^1$。

引理 4.2。 态射序列

$$\zeta^2 := (\zeta_i^2)_{i\in\mathbb{Z}} = (-c_{i+1}^1(\tau\cdot c_i^1))_{i\in\mathbb{Z}} : \tau^2 P_\bullet(-2m) \to P_\bullet[-2]$$

是一个复形映射。

证明。我们有

$$\begin{aligned} c_{i+1}^1(\tau\cdot c_i^1)(\tau^2\cdot d_{i+1}) &= c_{i+1}^1\left(\zeta_{i+1}^1 - (\tau\cdot d_{i+2})(\tau\cdot c_{i+1}^1)\right) \\ &= c_{i+1}^1\zeta_{i+1}^1 - \left(\zeta_{i+2}^1 - d_{i+3}c_{i+2}^1\right)(\tau\cdot c_{i+1}^1) \\ &= \left(c_{i+1}^1\zeta_{i+1}^1 - \zeta_{i+2}^1(\tau\cdot c_{i+1}^1)\right) + d_{i+3}c_{i+2}^1(\tau\cdot c_{i+1}^1) \\ &= d_{i+3}c_{i+2}^1(\tau\cdot c_{i+1}^1). \end{aligned}$$

最后一个等式由交换图（4.1）推出。 □

考虑由交换图诱导的映射 ζ_0^2: 余核$(\tau^2\cdot d_1) \to$ 余核(d_3)

$$\begin{array}{ccc} \tau^2 P_\bullet(-2m)_1 & \xrightarrow{\zeta_1^2} & P_\bullet[-2]_1 \\ {\scriptstyle \tau^2\cdot d_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d_3} \\ \tau^2 P_\bullet(-2m)_0 & \xrightarrow{\zeta_0^2} & P_\bullet[-2]_0. \end{array}$$

由引理 4.2， ζ_0^2 是零映射。因此，$(\zeta_i^2)_{i\geq 0}$ 是关于 $\zeta_0^2 = 0$的链映射，接着由比较定理，存在一列态射 $c^2 = (c_i^2 :\ \tau^2 P_\bullet(-2m)_i \to P_\bullet[-2]_{i+1})_{i\in\mathbb{Z}}$，它们属于分次模范畴 A，且 $c_i^2 = 0$ 对 $i < 0$成立，使得 $\zeta_i^2 = c_{i-1}^2(\tau^2\cdot d_i) + d_{i+1}c_i^2$对所有 $i \in \mathbb{Z}$成立。

引理 4.3。 对任意整数 $n \geq 1$，存在链映射 $\zeta^n :\ \tau^n P_\bullet(-nm) \to P_\bullet[-2n+2]$，以及态射序列 $c^i = (c_l^i :\ \tau^i P_\bullet(-im)_l \to P_\bullet[-2i+2]_{l+1})_{l\in\mathbb{Z}}$，它们属于分次模范畴 A，对 $1 \leq i \leq n$满足

$$\zeta^n = \begin{cases} (fI_{s_i})_{i\in\mathbb{Z}} = c^1(\tau\cdot d) + dc^1 & \text{if } n = 1 \\ -\sum_{0<i<n} c^i(\tau^i\cdot c^{n-i}) = c^n(\tau^n\cdot d) + dc^n & \text{if } n > 1 \end{cases}$$

其中 $s_i =$ 秩$_A P_i$。

证明。我们已经讨论了情况 $n=1$，2。接下来将通过归纳法证明其余部分。

假设链映射 $\zeta^j\colon \tau^j P_\bullet(-jm) \to P_\bullet[-2j+2]$，以及态射序列

$$c^i=(c^i_l:\tau^iP_\bullet(-im)_l\to P_\bullet[-2i+2]_{l+1})_{l\in\mathbb{Z}}$$

已对所有 $1<j<n, 1\le i<n$ 定义，其中 $n>2$，使得

$$\zeta^j=-\sum_{0<i<j}c^i\circ(\tau^i\cdot c^{j-i})=c^j\circ(\tau^j\cdot d)+d\circ c^j.$$

令 $\zeta^n:=-\sum_{0<i<n}c^i\circ(\tau^i\cdot c^{n-i})$。则

$$\begin{aligned}
d\zeta^n&=-\sum_{0<i<n}dc^i(\tau^i\cdot c^{n-i})=\sum_{0<i<n}\big(c^i(\tau^i\cdot d)(\tau^i\cdot c^{n-i})-\zeta^i(\tau^i\cdot c^{n-i})\big)\\
&=\sum_{0<i<n}\big(c^i(\tau^i\cdot\zeta^{n-i})-c^i(\tau^i\cdot c^{n-i})(\tau^n\cdot d)-\zeta^i(\tau^i\cdot c^{n-i})\big)\\
&=\sum_{0<i<n}\big(c^i(\tau^i\cdot\zeta^{n-i})-\zeta^i(\tau^i\cdot c^{n-i})\big)-\sum_{0<i<n}c^i(\tau^i\cdot c^{n-i})(\tau^n\cdot d)\\
&=\sum_{0<i<n}\big(c^i(\tau^i\cdot\zeta^{n-i})-\zeta^i(\tau^i\cdot c^{n-i})\big)+\zeta^n(\tau^n\cdot d).
\end{aligned}$$

另一方面，

$$\begin{aligned}
&\sum_{0<i<n}\big(c^i(\tau^i\cdot\zeta^{n-i})-\zeta^i(\tau^i\cdot c^{n-i})\big)=\sum_{0<i<n}c^i(\tau^i\cdot\zeta^{n-i})-\sum_{0<i<n}\zeta^i(\tau^i\cdot c^{n-i})\\
=&\sum_{0<i<n-1}c^i(\tau^i\cdot\zeta^{n-i})-\sum_{1<i<n}\zeta^i(\tau^i\cdot c^{n-i})+\big(c^{n-1}(\tau^{n-1}\cdot\zeta^1)-\zeta^1(\tau\cdot c^{n-1})\big)\\
=&\sum_{0<i<n-1}c^i(\tau^i\cdot\zeta^{n-i})-\sum_{1<i<n}\zeta^i(\tau^i\cdot c^{n-i})\qquad\text{(by (4.1))}\\
=&-\sum_{0<i<n-1}\sum_{0<t<n-i}c^i(\tau^i\cdot c^t)(\tau^{t+i}\cdot c^{n-i-t})+\sum_{1<i<n}\sum_{0<l<i}c^l(\tau^l\cdot c^{i-l})(\tau^i\cdot c^{n-i})\\
=&0.
\end{aligned}$$

因此 $\zeta^n\colon \tau^nP_\bullet(-nm)\to P_\bullet[-2n+2]$ 是一个链映射，因此 $(\zeta^n_i)_{i\ge0}$ 是一个关于$\zeta^n_0=0$ 的链映射：$\mathrm{Coker}(\tau^n\cdot d_1)\to\mathrm{Coker}(d_{2n-1})$，它由交换图诱导

$$\begin{array}{ccc}
\tau^nP_\bullet(-nm)_1 & \xrightarrow{\zeta^n_1} & P_\bullet[-2n+2]_1\\
\downarrow{\scriptstyle \tau^n\cdot d_1} & & \downarrow{\scriptstyle d_{2n-1}}\\
\tau^nP_\bullet(-2m)_0 & \xrightarrow{\zeta^n_0} & P_\bullet[-2n+2]_0.
\end{array}$$

那么，根据比较定理，存在一列态射 $c^n=(c^n_l\colon \tau^nP_\bullet(-nm)_l\to P_\bullet[-2n+2]_{l+1})_{l\in\mathbb{Z}}$ 使得 $\zeta^n=c^n(\tau^n\cdot d)+dc^n$。□

引理 4.4。 沿用引理 *4.3*中的记号。对于 $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{0\le i\le n} c^i(\tau^i \cdot c^{n-i}) = \begin{cases} 0, & \text{if } n \ge 2, \\ \zeta^1, & \text{if } n = 1. \end{cases}$$

证明。 情形 $n = 1$ 是显然的。如果 $n \ge 2$, 则由引理 4.3, 我们有

$$-\sum_{0<i<n} c^i(\tau^i \cdot c^{n-i}) = c^n(\tau^n \cdot d) + dc^n,$$

因此 $\sum_{0\le i\le n} c^i(\tau^i \cdot c^{n-i}) = 0$。 □

对于 $l \ge 0$, 令 e_l 表示自由 B-B-双模 Be_l 的一个生成元, 并且对于 $l \ne t$, Be_l 将被视为不同于 Be_t。 置 $c^0 = d$。定义一个序列

$$T_\bullet : \quad \cdots \to T_i \xrightarrow{\partial_i} \cdots \to T_2 \xrightarrow{\partial_2} T_1 \xrightarrow{\partial_1} T_0 \to 0, \tag{4.3}$$

其中 $T_i = \bigoplus_{0\le k\le \lfloor \frac{i}{2} \rfloor} P_{i-2k}(-km) \otimes_A Be_{2k}$, 以及

$$\partial_i = \begin{pmatrix} c_i^0 \otimes \theta_{00} & c_{i-2}^1 \otimes \theta_{10} & c_{i-4}^2 \otimes \theta_{20} & c_{i-6}^3 \otimes \theta_{30} & \cdots & c_{i-2t_i}^{t_i} \otimes \theta_{t_i 0} \\ 0 & (\tau \cdot c_{i-2}^0) \otimes \theta_{11} & (\tau \cdot c_{i-4}^1) \otimes \theta_{21} & (\tau \cdot c_{i-6}^2) \otimes \theta_{31} & \cdots & (\tau \cdot c_{i-2t_i}^{t_i-1}) \otimes \theta_{t_i 1} \\ 0 & 0 & (\tau^2 \cdot c_{i-4}^0) \otimes \theta_{22} & (\tau^2 \cdot c_{i-6}^1) \otimes \theta_{32} & \cdots & (\tau^2 \cdot c_{i-2t_i}^{t_i-2}) \otimes \theta_{t_i 2} \\ 0 & 0 & 0 & (\tau^3 \cdot c_{i-6}^0) \otimes \theta_{33} & \cdots & (\tau^3 \cdot c_{i-2t_i}^{t_i-3}) \otimes \theta_{t_i 3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}$$

其中 $t_i = \lfloor \frac{i}{2} \rfloor$ 和 $\theta_{l_1 l_2} : Be_{2l_1} \to Be_{2l_2}$, $e_{2l_1} \mapsto e_{2l_2}$。

Let

$$\vartheta = (\vartheta_k)_{k\ge 0} = (v_k \otimes e_{2k})_{k\ge 0} \in T_i = \bigoplus_{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor \ge k \ge 0} P_{i-2k}(-km) \otimes_A Be_{2k}.$$

那么, $\vartheta_k = 0$ 属于 $P_{i-2k}(-km) \otimes_A Be_{2k}$ 当且仅当存在 $v' \in P_{i-2k}(-km)$使得 $v_k = v'f$。我们将 ϑ 的支撑定义为 $\mathrm{supp}(\vartheta) := \{j \in \mathbb{N} \mid \vartheta_j \ne 0\}$。那么, 当且仅当其支撑为空时, $\vartheta = 0$ 成立。

定理 4.5. 设 A 是一个连通分次代数, $f \in A_m$ 是一个满足$m \ge 1$的正则正规元, 且 $B = A/(f)$。设 $P_\bullet = (P_i, d_i) \xrightarrow{\sim} \Bbbk_A$ 是一个极小分解。那么, 序列$T_\bullet = (T_i, \partial_i)$ 由 *(4.3)* 定义, 是 $\Bbbk_B$的一个自由分解。若进一步有 A 是 *Koszul* 的, 且 $m \ge 2$, 那么 $T_\bullet \xrightarrow{\sim} \Bbbk_B$ 是一个极小分解。

证明。 我们将证明分为 3 个步骤。

(i) 由引理4.4可验证, 对于 $\partial_i \circ \partial_{i+1} = 0$, $i \ge 1$。因此, $T_\bullet$ 是一个复形。(ii) 现证明, 对于$\partial_i =$, $\ker \partial_{i+1}$ im $i \ge 1$。设 $\vartheta = (v_k \otimes e_{2k})_{k\ge 0} \in T_i$, 使得 $\partial_i(\vartheta) = 0$。令 $l =$为 $\mathrm{supp}(\vartheta)$ 的最大值。于是需要讨论以下两种情形:

情形 1. i 为奇数, 或者 i 为偶数且 $l \le \frac{i}{2} - 1$。那么 $\partial_i(\vartheta) = 0$ 意味着

$$\Big((\tau^l \cdot d_{i-2l})(v_l)\Big) \otimes e_{2l} = 0$$

在 $P_{i-2l-1}(-lm)\otimes_A Be_{2l}$ 中。由此可知，存在 $v'\in P_{i-2l-1}(-lm)$，使得 $(\tau^l\cdot d_{i-2l})(v_l)=v'f$。然后

$$\begin{aligned}(\tau^l\cdot d_{i-2l-1})(v')f=&(\tau^l\cdot d_{i-2l-1})(v'f)\\=&(\tau^l\cdot d_{i-2l-1})\circ(\tau^l\cdot d_{i-2l})(v_l)\\=&(\tau^l\cdot(d_{i-2l-1}d_{i-2l}))(v_l)=0\end{aligned}$$

在 $P_{i-2l-2}(-lm)$ 中。因此 $(\tau^l\cdot d_{i-2l-1})(v')=0$。由于 $P_\bullet(-lm)$ 是一个极小分解，存在 $v''\in P_{i-2l}(-lm)$，使得 $(\tau^l\cdot d_{i-2l})(v'')=v'$。由此可得 $(\tau^l\cdot d_{i-2l})(v_l-v''f)=0$，因此存在 $x\in P_{i-2l+1}(-lm)$，使得 $(\tau^l\cdot d_{i-2l+1})(x)=v_l-v''f$。令 $\omega=(w_k)_{k\geq 0}\in T_{i+1}$，其中

$$w_k=\begin{cases}x\otimes e_{2l} & \text{if } k=l,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

那么 $\max\operatorname{supp}(\vartheta-\partial_{i+1}(\omega^l))<l_0:=l$。类似地，我们可以构造 $\omega^{l_1}\in T_{i+1}$，使得 $\vartheta-\partial_{i+1}(\omega_0^l)-\partial_{i+1}(\omega^{l_1})$ 的最大值更小。归纳地，我们有 ω^{l_0}，……，$\omega^{l_s}\in T_{i+1}$，使得 $\vartheta-\sum_{j=1}^s\partial_{i+1}(\omega^{l_j})=\vartheta-\partial_{i+1}\left(\sum_{j=1}^s\omega^{l_j}\right)=0$。

情形 2. i 为偶数且$l=\frac{i}{2}$。-那么 $\partial_i(\vartheta)=0$ 意味着

$$\begin{aligned}&((\tau^{l-1}\cdot d_{i-2(l-1)})(v_{l-1}))\otimes e_{2(l-1)}+((\tau^{l-1}\cdot c^1_{i-2l})(v_l))\otimes e_{2(l-1)}\\=&((\tau^{l-1}\cdot d_2)(v_{l-1})+(\tau^{l-1}\cdot c_0^1)(v_l))\otimes e_{i-2}=0.\end{aligned}$$

在 $P_1(-(l-1)m)\otimes_A Be_{i-2}$中。这里，$v_{l-1}$可能为 0。那么，对于某个 $v'\in P_1(-(l-1)m)$，有 $(\tau^{l-1}\cdot d_2)(v_{l-1})+(\tau^{l-1}\cdot c_0^1)(v_l)=v'f$。由此进一步得到

$$(\tau^{l-1}\cdot d_1)(v')f=(\tau^{l-1}\cdot d_1)\circ(\tau^{l-1}\cdot c_0^1)(v_l)=\tau^{l-1}\cdot(d_1c_0^1)(v_l)=(\tau^{l-1}\cdot\zeta_0^1)(v_l)=fv_l.$$

因此 $v_l=(\tau^l\cdot d_1)(v')$。令 $\mu=(u_k)_{k\geq 0}\in T_{i+1}$，其中

$$u_k=\begin{cases}v'\otimes e_l & \text{if } k=l,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

那么 $\max\operatorname{supp}(\vartheta-\partial_{i+1}(\mu))<l$。因此，我们可以使用情形 1 中的方法构造 $\omega\in T_{i+1}$，使得 $\vartheta-\partial_{i+1}(\mu)-\partial_{i+1}(\omega)=\vartheta-\partial_{i+1}(\mu+\omega)=0$.

（iii）将 $-\otimes_A Be_0$ 应用于正合列 $P_1\xrightarrow{d_1}P_0\xrightarrow{\varepsilon}\Bbbk_A\to 0$，我们得到一个正合列

$$T_1\xrightarrow{\partial_1}T_0\xrightarrow{\widetilde{\varepsilon}}k_B\to 0$$

whe关于 $\widetilde{\varepsilon}=\varepsilon\otimes_A Be_0$。因此，$T_\bullet$ 是 $\Bbbk_B$ 的一个自由分解，其增广映射为 $\widetilde{\varepsilon}$：$T_\bullet\to\Bbbk_B$。

此外，若 A 是 Koszul 且 $m\geq 2$，则 $-im-j<(-2i+2)-(j+1)=-2i-j+1$。这意味着，对于所有 i,j，c_j^i：$\tau^iP_\bullet(-im)_j\to P_\bullet[-2i+2]_{j+1}$ 是一个系数属于 $A_{\geq 1}$ 的矩阵。因此，$T_\bullet$ 是一个极小分解。□

如果 A 不是 Koszul，或者 $m=1$，定理 4.5 给出的 $T_\bullet$ 关于 $\Bbbk_B$ 的自由分解可能不是极小的。

例 4.6. 令 $A=\Bbbk[x]$ 满足 $\deg x=m\geq 1$，且 $B=A/(x)=\Bbbk$。我们有一个自由分解

$$\cdots\to\Bbbk(-2m)\xrightarrow{1}\Bbbk(-2m)\xrightarrow{0}\Bbbk(-m)\xrightarrow{1}\Bbbk(-m)\xrightarrow{0}\Bbbk\to\Bbbk_B\to 0$$

由定理 4.5给出。对于每个 $m\in\mathbb{N}$，此分解并非最小分解。

5. Main results

本节中，$A=\Bbbk\langle x_1,\dots,x_n\rangle/(f_1,\dots,f_r)$ 是一个 Koszul 代数，并且 $B=A/(f)$，其中 $f\in A_2$ 是一个正则正规元。那么 B 也是一个 Koszul 代数。

根据定理 4.5，从 $P_\bullet=(P_i,d_i)$ 的一个线性分解 $\Bbbk_A$出发，我们得到 $\Bbbk_B$ 的一个线性分解：

$$T_\bullet:\quad \cdots\to T_i\xrightarrow{\partial_i}\cdots\to T_2\xrightarrow{\partial_2}T_1\xrightarrow{\partial_1}T_0=B\to 0.$$

为方便起见，我们记

$$\partial_i=\begin{pmatrix} d_i & c_{i-2}^1 & c_{i-4}^2 & \cdots & c_{i-2t_i}^{t_i}\\ 0 & \tau\cdot d_{i-2} & \tau\cdot c_{i-4}^1 & \cdots & \tau\cdot c_{i-2t_i}^{t_i-1}\\ 0 & 0 & \tau^2\cdot d_{i-4} & \cdots & \tau^2\cdot c_{i-2t_i}^{t_i-2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

其中 $t_i=\lfloor\frac{i}{2}\rfloor$，$\tau$是 f 的正规化自同构的逆，而映射 c_l^s定义如第 4 节所述。类似地，由线性分解 $Q_\bullet=(Q_i,\ h_i)\xrightarrow{\sim}{}_A\Bbbk$可得到线性分解 $K_\bullet=(K_i,\ \delta_i)\xrightarrow{\sim}{}_B\Bbbk$。

备注 5.1。 对于任意 $s\in\mathbb{Z}$，$\tau^sP_\bullet$根据引理 $\Bbbk_A$ 4.1，也是 4.1 的一个线性分解。因此，存在链同构 $(\phi_i)_{i\in\mathbb{Z}}$：$\tau^sP_\bullet\to P_\bullet$。于是，秩$_\Bbbk(\tau^s\cdot d_i)_p$ =等于秩$_\Bbbk(d_i)_p$，$\forall p\in\mathbb{P}^{n-1}$.

下面的引理显然成立。

引理 5.2。 以下结论成立。

(1) $\operatorname{rank}_B T_i=\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{i}{2}\rfloor}\operatorname{rank}_A P_{i-2j}$, *for* $i\geq 0$.

(2) $\operatorname{rank}_\Bbbk(\partial_i)_p\geq\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{i-1}{2}\rfloor}\operatorname{rank}_\Bbbk(d_{i-2j})_p$, $\forall p\in\mathbb{P}^{n-1}$, *for* $i\geq 0$.

此外，若 A 直到次数 $\ell\geq 1$ 都是右点正合的，则

$$\operatorname{rank}_\Bbbk(\partial_i)_p\geq\sum_{j=1}^{i}(-1)^{j+1}\operatorname{rank}_B T_{i-j},\ \forall p\in X_A$$

其中 $0\leq i\leq\ell+1$。

命题5.3。 如果 A 在次数2以内是半标准且点正合的，那么 B 满足*(G1)* 条件。

证明。 由引理3.8， A 满足(G1) 条件，并且 $r+1 \geq n$。令(E, σ)为 A的几何对。只需证明 B 在次数1时是半标准且点正合的。

设 $q \in X_{\partial_2}$，则存在 $p \in \mathbb{P}^{n-1}$ 使得

$$(\partial_1)_p (\partial_2)_q = (f_1(p,q), \ldots, f_r(p,q), f(p,q)) = 0.$$

由于 $X_{\partial_2} \subset X_{d_2} = E$，我们有 $p \in X_{h_2} = E$ 使得 $\sigma(p) = q$。于是 $(\delta_3)_p (\delta_2)_q = 0$ 因为 $\delta_3 \delta_2 = 0$ 作为一个以 B为系数的矩阵。另一方面，由引理5.2（左版本）可得，

$$\operatorname{rank}_{\Bbbk} (\delta_2)_q \geq \operatorname{rank}_B K_1 - \operatorname{rank}_B K_0 = n-1,$$

$$\operatorname{rank}_{\Bbbk} (\delta_3)_p \geq \operatorname{rank}_B K_2 - \operatorname{rank}_B K_1 + \operatorname{rank}_B K_0.$$

于是由引理2.2可得

$$\operatorname{rank}_{\Bbbk} (\delta_2)_q \leq \operatorname{rank}_B K_2 - (\operatorname{rank}_B K_2 - \operatorname{rank}_B K_1 + \operatorname{rank}_B K_0) = n-1.$$

由此可得 $\operatorname{rank}_{\Bbbk} (\delta_2)_q = n-1$。由于 $\delta_2 \in \mathbb{M}_{(r+1)\times n}(B_1)$ 且 $r+1 \geq n$, $q \in X_{\delta_2}$，因此$X_{\partial_2} \subset X_{\delta_2}$。类似地，我们可以证明 $X_{\delta_2} \subset X_{\partial_2}$，并且对于所有 $p \in X_{\delta_2}$，都有 $\operatorname{rank}_{\Bbbk} (\partial_2)_p = n-1$。结论得证。□

注5.4。 设 A和 B如命题 5.3所述，并设 (E, σ) 和 (E_B, σ_B) 分别是 A 和 B 的几何对。则 $E_B \subset E$，且 $\sigma_B = \sigma|_{E_B}$。

定理 5.5。 若 A 是半标准的，并且在次数 $\ell \geq 2$以内点正合，则 B 也具有半标准性，并且在次数 ℓ以内点正合。

证明。 由引理 3.8 和命题 5.3， A 和 B 都满足 (G1) 条件，因此 B 在次数1处是半标准的且点正合。设 (E, σ) 和 (E_B, σ_B) 分别是 A和 B 的几何对。我们证明 B 在次数 ℓ以内是右点正合的。左版本的证明类似。

设 $p \in E_B$。由引理 5.2，有

$$\operatorname{rank}_{\Bbbk} (\partial_i)_p \geq \sum_{j=1}^{i} (-1)^{j+1} \operatorname{rank}_B T_{i-j}, \text{ where } 0 \leq i \leq \ell+1.$$

由于 $\partial_{i-1}\partial_i = 0$ 作为 B上的一个矩阵，我们有 $(\partial_{i-1})_{\sigma_B^{-1}(p)} (\partial_i)_p = 0$。于是由引理 2.2，

$$\operatorname{rank}_{\Bbbk} (\partial_i)_p \leq \operatorname{rank}_B T_{i-1} - \left(\sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{j+1} \operatorname{rank}_B T_{(i-1)-j} \right) = \sum_{j=1}^{i} (-1)^{j+1} \operatorname{rank}_B T_{i-j}.$$

因此，秩$_{\Bbbk}(\partial_i)_p = \sum_{j=1}^{i} (-1)^{j+1}$秩$_B T_{i-j}$。由引理 3.7，所需结论成立。 □

若 $f \in A_2$ 不是正则正规元，则 $B = A/(f)$ 不一定是半标准的 .

例5.6. 设 $A = k\langle x, y, z\rangle/(f_1, f_2, f_3)$ 其中

$$f_1 = xy + yx + 2z^2,\ f_2 = yz + zy + 2x^2,\ f_3 = zx + xz + 2y^2.$$

则 A 是一个 3 维量子多项式代数。设 $f = xy \in A_2$，它不是正规元，且 $B = A/(f)$。则 $(f_1, f_2, f_3, f) = (x, y, z)M = N(x, y, z)^t$，其中

$$M = \begin{pmatrix} y & 2x & z & y \\ x & z & 2y & 0 \\ 2z & y & x & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} y & x & 2z \\ 2x & z & y \\ z & 2y & x \\ 0 & x & 0 \end{pmatrix}.$$

这意味着

$$X_B = X_M^3 = \mathcal{Z}(10xyz - 2(y^3 + x^3 + z^3), y(xy - 2z^2), y(zx - 2y^2), y(x^2 - 4yz)) \subset \mathbb{P}^2$$

and

$${}_BX = X_N^3 = \mathcal{Z}(10xyz - 2(y^3 + x^3 + z^3), x(xy - 2z^2), x(yz - 2x^2), x(4xz - y^2)) \subset \mathbb{P}^2.$$

我们可以看到 $(1: 0: -1) \in X_B$，但 $(1: 0: -1) \notin {}_BX$。由此可得 $X_B \neq {}_BX$，因此 B 不是半标准的。

6. Skew polynomial algebras

如下定义的斜多项式代数构成了一类重要的量子多项式代数 [3, 8, 18]。

定义 n 6.1. 二次代数 A称为维数为 n 的斜多项式代数，如果

$$A = \Bbbk\langle x_1, \ldots, x_n\rangle/(x_jx_i - q_{ij}x_ix_j)_{1\leq i,j\leq n}$$

且 $\deg x_i = 1$，并且 $\mathcal{Q} = (q_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\Bbbk)$ 的所有元素均非零，满足 $q_{ii} = 1$ 和 $q_{ji} = q_{ij}^{-1}$。

设 A 是由矩阵 $\mathcal{Q} = (q_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\Bbbk)$ 定义的一个 n 维斜多项式代数。设

$$\mathbf{q} = \left(q_{1(n+1)}, \ldots, q_{n(n+1)}\right)^t \in \mathbb{M}_{n\times 1}(\Bbbk)$$

其中 $q_{i(n+1)} \neq 0$ 当 $i = 1, \ldots\ldots, n$时。设

$$\mathcal{Q}^{\wedge,\mathbf{q}} := \begin{pmatrix} \mathcal{Q} & \mathbf{q} \\ \tilde{\mathbf{q}} & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{(n+1)\times(n+1)}(\Bbbk)$$

其中

$$\tilde{\mathbf{q}} := \left(q_{1(n+1)}^{-1}, \ldots, q_{n(n+1)}^{-1}\right) \in \mathbb{M}_{1\times n}(\Bbbk).$$

那么存在一个（$n+1$）维斜多项式代数 $A^{\wedge,\mathbf{q}}$，它由矩阵 $Q^{\wedge,\mathbf{q}}$定义，并可实现为 Ore 扩张 $A^{\wedge,\mathbf{q}} = A[x_{n+1}; \mu^{\mathbf{q}}]$，其中

$$\mu^{\mathbf{q}} := \operatorname{diag}\{q_{1(n+1)}, \ldots, q_{n(n+1)}\} \in \operatorname{Aut} A.$$

设 $P_\bullet = (P_i, d_i) \xrightarrow{\sim} \Bbbk_A$ 是一个线性分解。由于 A 是一个 n维量子多项式代数，因此我们有 $P_i = A(-i)^{\oplus C_i^n}$，其中 $C_i^n = \binom{n}{i}$ 是二项式系数。根据

将 $-\otimes_A A^{\wedge,\mathbf{q}}$ 应用于 $P_\bullet$，可得一个自由分解 $Z_\bullet \xrightarrow{\sim} \Bbbk[x_{n+1}]_{A^{\wedge,\mathbf{q}}}$。设 $\varphi\colon\ Z_\bullet(-1) \to Z_\bullet$是关于左乘法的链映射

$$x_{n+1}\cdot : \Bbbk[x_{n+1}]_{A^{\wedge,\mathbf{q}}}(-1) \to \Bbbk[x_{n+1}]_{A^{\wedge,\mathbf{q}}}.$$

那么，对于 $i>n$，$\varphi_0 = x_{n+1}$ 和 $\varphi_i = 0$。我们称 φ 为 $P_\bullet$ 的 $\mathbf{q}$-扩张映射。

定义 $P^{\wedge,\mathbf{q}}_\bullet = (P^{\wedge,\mathbf{q}}_i,\ d^{\wedge,\mathbf{q}}_i)$ 为 φ 的映射锥，即

$$P_i^{\wedge,\mathbf{q}} = (A^{\wedge,\mathbf{q}})(-i)^{\oplus C^n_{i-1}} \oplus (A^{\wedge,\mathbf{q}})(-i)^{\oplus C^n_i} = (A^{\wedge,\mathbf{q}})(-i)^{\oplus C^{n+1}_i},\ d_i^{\wedge,\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} -d_{i-1} & 0 \\ \varphi_{i-1} & d_i \end{pmatrix} \tag{6.1}$$

对于 $i\in\mathbb{Z}$。那么 $P^{\wedge,\mathbf{q}}_\bullet \xrightarrow{\sim} \Bbbk_{A^{\wedge,\mathbf{q}}}$ 是一个极小分解（[11, 引理 2.4]）。我们称复形 $P^{\wedge,\mathbf{q}}_\bullet$ 为 $P_\bullet$ 的 锥扩张，其扩张阶数为 $\mathbf{q}$。

考虑与 A 相关联的矩阵 $\mathcal{Q}=(q_{ij})$。令

$$\mathbf{q}_i = \big(q_{1(i+1)}, \dots q_{i(i+1)}\big)^t \in \mathbb{M}_{(i+1)\times 1}(\Bbbk),\ 1\le i\le n-1,$$

and

$$C_\bullet :\quad 0\to \Bbbk[x_1](-1) \xrightarrow{x_1\cdot} \Bbbk[x_1]\to 0$$

$\Bbbk_R$ 的极小分解，其中 $R=\Bbbk[x_1]$。那么迭代锥扩张

$$\widetilde{P}_\bullet := (((C_\bullet^{\wedge,\mathbf{q}_1})^{\wedge,\mathbf{q}_2})\dots)^{\wedge,\mathbf{q}_{n-1}}$$

是 $\Bbbk_A$的线性分解。我们将 $\widetilde{P}_\bullet \xrightarrow{\sim} \Bbbk_A$ 称为典范分解。

引理 6.2。 沿用上述记号。若 $P_\bullet = \widetilde{P}_\bullet \xrightarrow{\sim} \Bbbk_A$ 是典范分解，则 $\varphi\colon\ Z_\bullet(-1)\to Z_\bullet$ 的$\mathbf{q}$-扩张映射 $P_\bullet$ 具有一个与 x_{n+1}相关联的对角表示，也就是说，

$$\varphi_i = x_{n+1}\,\mathrm{diag}\{a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{iC_i^n}\},\ 0\le i\le n,$$

其中，对所有 i、j，$0\neq a_{ij}\in\Bbbk$。

证明。 我们对斜多项式代数的维数进行归纳。

若 $n=1$，则

$$P_\bullet :\quad 0\to \Bbbk[x_1](-1)\xrightarrow{x_1\cdot}\Bbbk[x_1]\to 0. \tag{6.2}$$

且$\mathbf{q}=(q_{12})$，其中 $0\neq q_{12}\in\Bbbk$。于是 $A^{\wedge,\mathbf{q}} = \Bbbk\langle x_1,\ x_2\rangle/(x_2x_1 - q_{12}x_1x_2)$，并且

$$Z_\bullet :\quad 0\to A^{\wedge,\mathbf{q}}(-1)\xrightarrow{x_1\cdot} A^{\wedge,\mathbf{q}}\to 0.$$

映射 $\varphi\colon\ Z_\bullet(-1)\to Z_\bullet$ 由 $\varphi_0 = x_2$ 和 $\varphi_1 = q_{12}x_2$给出，显然具有所需的对角线。

假设该引理对所有维数小于 n 的斜多项式代数均成立。考虑由 $\mathcal{Q}$ 中阶数为 $n-1$ 的顺序主子矩阵 $\mathcal{Q}^\vee$ 定义的 $(n-1)$ 维斜多项式代数 $A^\vee$，即

$$A^\vee = \Bbbk\langle x_1,\dots,x_{n-1}\rangle/(x_jx_i - q_{ij}x_ix_j)_{1\le i,j\le n-1}.$$

令 $P_\bullet^\vee \xrightarrow{\sim} \Bbbk_{A^\vee}$ 为典范分解，并令

$$\psi : (P_\bullet^\vee \otimes_{A^\vee} A)(-1) \to P_\bullet^\vee \otimes_{A^\vee} A$$

是 $P_\bullet^\vee$ 的$\mathbf{q}_{n-1}$-扩张映射，其中$\mathbf{q}_{n-1} = \big(q_{1n}, \ \ldots q_{(n-1)n}\big)^t$。于是 $A = A^\vee[x_n; \ \mu^{\mathbf{q}_{n-1}}]$，且$P_\bullet = (P_\bullet^\vee)^{\wedge, \ \mathbf{q}_{n-1}}$。根据归纳假设， ψ 有与 x_n 相关联的对角表示。现在令

$$\mathbf{k} = \big(q_{1(n+1)}, \ldots, q_{(n-1)(n+1)}\big)^t \in \mathbb{M}_{(n-1)\times 1}(\Bbbk),$$

并定义 $B := A^\vee[x_{n+1}; \mu^{\mathbf{k}}]$ （注意变量）。那么，$\mathbf{k}$-扩张映射

$$\theta : (P_\bullet^\vee \otimes_{A^\vee} B)(-1) \to P_\bullet^\vee \otimes_{A^\vee} B$$

$P_\bullet^\vee$ 的映射是关于左乘法 $x_{n+1}\cdot : \Bbbk[x_{n+1}]_B \to \Bbbk[x_{n+1}]_B$ 的链映射。根据归纳假设， θ 也有与 x_{n+1} 相关联的对角表示。

定义一个态射序列 $\varphi = (\varphi_i)_{i\in\mathbb{Z}} : Z_\bullet(-1) \to Z_\bullet$，如下：

$$\varphi_i := \begin{pmatrix} q_{n(n+1)}\theta_{i-1} \otimes_B A^{\wedge,\mathbf{q}} & 0 \\ 0 & \theta_i \otimes_B A^{\wedge,\mathbf{q}} \end{pmatrix}$$

对于 $0 \le i \le n$。由于 θ 是链映射，并且

$$(\theta \otimes_B A^{\wedge,\mathbf{q}}) \circ (\psi \otimes_A A^{\wedge,\mathbf{q}}) = q_{n(n+1)}(\psi \otimes_A A^{\wedge,\mathbf{q}}) \circ (\theta \otimes_B A^{\wedge,\mathbf{q}}),$$

映射 φ 是链映射。此外， $\varphi_0 = x_{n+1}$ 表明 φ 是左乘法 $x_{n+1}\cdot$ 上的链映射：$\Bbbk[x_{n+1}]_{A^{\vee,\ \mathbf{q}}}(-1) \to \Bbbk[x_{n+1}]_{A^{\vee,\ \mathbf{q}}}$。因此， $\varphi : Z_\bullet(-1) \to Z_\bullet$ 是一个 $P_\bullet$的$\mathbf{q}$-扩张映射，它具有与 x_{n+1}相关联的对角表示。□

注 6.3。设 A 是一个 n维斜多项式代数，且 $P_\bullet = (P_i, \ d_i) \xrightarrow{\sim} \Bbbk_A$ 为典范分解。根据（6.1）和引理 6.2，对于每个 i， d_i 的各项都是单项式；对于每个变量 x_j，存在 $0 \ne c \in \Bbbk$ 使得 cx_j 作为 d_i的一项出现。

定理 推论 6.4. 维数为 ≥ 2 的斜多项式代数满足点正合条件 n.

证明. 我们对斜多项式代数的维数使用归纳法。对于 $n = 2,3,4$，由命题3.11 可得结论（见例 3.9）。

假设对于所有维数小于 n 的斜多项式代数，结论均成立。设 $A,A^\vee$, $P_\bullet = (P_i, d_i) \xrightarrow{\sim} \Bbbk_A$, $P_\bullet^\vee = (P_i^\vee, d_i^\vee) \xrightarrow{\sim} \Bbbk_{A^\vee}$ 如引理 6.2 的证明中所述。则$A = A^\vee[x_n; \ \mu^{\mathbf{q}_{n-1}}]$ 且 $P_\bullet = (P_\bullet^\vee)^{\wedge,\mathbf{q}_{n-1}}$ 其中 $\mathbf{q}_{n-1} = \big(q_{1n}, \ldots q_{(n-1)n}\big)^t$。特别地，我们有

$$d_i = \begin{pmatrix} -d_{i-1}^\vee & 0 \\ \psi_{i-1} & d_i^\vee \end{pmatrix}$$

对于 $i \in \mathbb{Z}$，其中 $\psi = (\psi)_{i\in\mathbb{Z}}$ 是 $P^\vee$ 的$\mathbf{q}_{n-1}$-扩张映射，该映射具有与 x_n相关联的对角表示。

根据注记 2.9， A 和 $A^!$ 均满足 (G1) 条件。令 (E_A, σ_A) 和 $(E_{A^!}, \sigma_{A^!})$ 分别为 A 和 $A^!$ 的几何对。令

$$V = \langle x_1, \dots, x_n \rangle,\ V' = \langle x_1, \dots, x_{n-1} \rangle.$$

取一点 $p = (p_1 : \cdots : p_n) \in E_A \subset \mathbb{P}(V^*)$，并令 $q = \sigma_A(p) = (q_1 : \cdots : q_n)$。

若 $p = (0 : \cdots : 0 : 1)$，则由于 ψ 是一个链映射，我们有

$$0 = (d_1^!)_p(\psi_1)_q = (\psi_0)_p(d_1^!)_q = (x_n)_p(d_1^!)_q = (d_1^!)_q.$$

根据备注 6.3，$(d_1^!)_q = 0$ 意味着 $q = p$。由于 ψ 具有一个与x_n相关联的对角表示，我们有

$$\operatorname{rank}_{\Bbbk}(d_i)_p = \operatorname{rank}_{\Bbbk} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (\psi_{i-1})_p & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rank}_{\Bbbk}(\psi_{i-1})_p = C_{i-1}^{n-1}$$

对所有 $i \geq 1$均成立。

现在设对于某个 $1 \leq i \leq n-1$有 $p_i \neq 0$，则根据上述讨论，对于某个 $1 \leq i \leq n-1$ 有 $q_i \neq 0$。令

$$p' = (p_1 : \cdots : p_{n-1}), q' = (q_1 : \cdots : q_{n-1}) \in \mathbb{P}(V'^*)$$

分别是 p, q 的截断。由于 $(d_1)_p(d_2)_q = 0$，我们有 $(d_1^!)_{p'}(d_2^!)_{q'} = 0$。因此， $p' \in E_{A^!}$ 且 $q' = \sigma_{A^!}(p')$。根据假设，我们有

$$\begin{aligned} \text{秩}_{\Bbbk}(d_i)_p + \text{秩}_{\Bbbk}(d_{i+1})_q &\geq \text{秩}_{\Bbbk}(d_i^!)_{p'} + \text{秩}_{\Bbbk}(d_{i-1}^!)_{p'} + \text{秩}_{\Bbbk}(d_{i+1}^!)_{q'} + \text{秩}_{\Bbbk}(d_i^!)_{q'} \\ &= C_{i-1}^{n-1} + C_i^{n-1} \\ &= C_i^n \end{aligned}$$

对所有 $i \geq 1$ 都成立。另一方面，由于 $(d_i)_p(d_{i+1})_q = 0$，$\text{秩}_{\Bbbk}(d_i)_p + \text{秩}_{\Bbbk}(d_{i+1})_q \leq C_i^n$。因此，对所有 $i \geq 1$，$\text{秩}_{\Bbbk}(d_i)_p + \text{秩}_{\Bbbk}(d_{i+1})_q = C_i^n$。由此可知， A 满足右点正合条件。左点精确条件的验证方法类似。 □

7. Appendix: Smooth ±1-skew quadric surfaces

设 A 是一个诺特连通分次代数，并令 tors A 为 grmod A 中由有限维模构成的全子范畴。定义商范畴 qgr $A :=$ grmod $A/$ tors A。沿用 [16], 的说法，若 gldim(qgr A) $< \infty$，则称 qgr A 光滑。

若一个分次代数 $B = A/(f)$ 满足以下条件，则称其为 ±1-扭曲二次曲面

$$A = \Bbbk\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle / (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)$$

是由矩阵定义的四维斜多项式代数 $\mathcal{Q} = (q_{ij}) \in \mathbb{M}_4(\Bbbk)$，其中 $q_{ij} = \pm 1$对所有 i， j，并且 $f \in A_2$ 是一个正则正规元。根据命题 2.9、定理 5.5 和定理 6.4， B 满足（G1）条件和点精确条件。接下来，我们考虑形式为 ±1的 - 斜二次曲面 $B = A/(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)$。

命题 7.1 ([10])。 对于形式为 ± 1的 - 斜二次曲面 $B = A/(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)$，以下陈述成立。

(1) 分次模的商范畴 B 是光滑的。(2) 导出范畴 D^{b}(分次模的商范畴 B) 等价于以下范畴中的恰好一个：情形 1. D^{b}(分次模的商范畴 $\Bbbk[x_1, x_2, x_3, x_4]/(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)$)。情形 2. D^{b}(分次模的商范畴 $A/(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)$) 其中 A 定义为

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{7.1}$$

情形 3. D^{b}(分次模的商范畴 $A/(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)$) 其中 A 定义为 $\mathcal{Q} = (q_{ij}) \in \mathbb{M}_4(\Bbbk)$ 其中 $q_{ij} = -1$对所有 $i \neq j$均成立。

(3) 对于任意 B 和 B'，以下条件等价：

(a) 分次模范畴 $B \cong$分次模范畴 B'。
(b) 分次模的商范畴 $B \cong$分次模的商范畴 B'。(c) D^{b}(分次模的商范畴 B) $\cong \mathrm{D}^{\mathrm{b}}$(分次模的商范畴 B')。

我们计算定理 E_B 中所述代数 B 的点簇7.1 (2)。

情形 1。 $B = \Bbbk[x_1, x_2, x_3, x_4]/(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)$。由于 B 是交换的，根据 [5, 引理 2。5], 我们有 $E_B = \mathcal{Z}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) \subset \mathbb{P}^3$。

情形 2。 $B = A/(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)$，其中 A 由 $\mathcal{Q}$ 定义，如(7.1)所示。则$(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f) = (x_1, x_2, x_3, x_4)M$其中

$$M = \begin{pmatrix} x_2 & x_3 & -x_4 & 0 & 0 & 0 & x_1 \\ x_1 & 0 & 0 & x_3 & x_4 & 0 & x_2 \\ 0 & x_1 & 0 & x_2 & 0 & x_4 & x_3 \\ 0 & 0 & x_1 & 0 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}.$$

M 的非零且彼此不同（相差一个标量倍数的除外）的 4 阶子式为

$$2x_1^2x_2x_3, -2x_1x_2^2x_3, -2x_1x_2x_3^2, -2x_2^2x_3x_4, -2x_2x_3^2x_4, 2x_2x_3x_4^2, 2x_1x_2x_3x_4,$$
$$-x_1^4 + x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 - x_1^2x_4^2, -x_1^2x_2^2 + x_2^4 - x_2^2x_3^2 - x_2^2x_4^2,$$
$$x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2 - x_3^4 + x_3^2x_4^2, -x_1^2x_4^2 + x_2^2x_4^2 + x_3^2x_4^2 - x_4^4,$$
$$x_1^3x_4 - x_1x_2^2x_4 - x_1x_3^2x_4 + x_1x_4^3,$$
$$-x_1^3x_2 + x_1x_2^3 + x_1x_2x_3^2 - x_1x_2x_4^2, x_1^3x_2 - x_1x_2^3 + x_1x_2x_3^2 + x_1x_2x_4^2,$$
$$-x_1^3x_3 + x_1x_2^2x_3 + x_1x_3^3 - x_1x_3x_4^2, -x_1^3x_3 - x_1x_2^2x_3 + x_1x_3^3 - x_1x_3x_4^2,$$

$$-x_1^2x_2x_3+x_2^3x_3-x_2x_3^3+x_2x_3x_4^2, x_1^2x_2x_3+x_2^3x_3-x_2x_3^3-x_2x_3x_4^2,$$
$$x_1^2x_2x_4-x_2^3x_4-x_2x_3^2x_4+x_2x_4^3, x_1^2x_2x_4-x_2^3x_4+x_2x_3^2x_4+x_2x_4^3,$$
$$x_1^2x_3x_4-x_2^2x_3x_4-x_3^3x_4+x_3x_4^3, -x_1^2x_3x_4-x_2^2x_3x_4+x_3^3x_4-x_3x_4^3.$$

通过直接计算并利用引理3.8，我们得到

$$E_B = X_M = \{(0:1:\pm1:0)\} \cup \mathcal{Z}(F_1) \cup \mathcal{Z}(F_2) \subset \mathbb{P}^3$$

其中 $F_1 = \{x_2, -x_1^2+x_3^2-x_4^2\}$, $F_2 = \{x_3, -x_1^2+x_2^2-x_4^2\}$。

情形 3。 $B = A/(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)$，其中 A 由 $Q = (q_{ij}) \in \mathbb{M}_4(\Bbbk)$定义，且对所有 $i \neq j$都有 $q_{ij} = -1$ 。通过与情形 2 类似的直接计算，我们得到

$$E_B = \left\{ \begin{matrix} (1:0:0:\pm1),\ (0:1:0:\pm1),\ (0:0:1:\pm1), \\ (1:0:\pm1:0),\ (0:1:\pm1:0),\ (1:\pm1:0:0) \end{matrix} \right\}.$$

推论 7.2。 对于光滑的 ±1-扭曲二次曲面 $B = A/(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)$、 $B' = A'/(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)$，以下各项等价:

(1) 分次模范畴 $B \cong$ 分次模范畴 B'。
(2) 分次模的商范畴 $B \cong$ 分次模的商范畴 B'。(3) D^{b}(分次模的商范畴 B) $\cong \mathrm{D}^{\mathrm{b}}$(分次模的商范畴 B')。
(4) $E_B \cong E_{B'}$。

References

[1] M. Artin 和 W. Schelter，《整体维数为 3 的分次代数》， *Adv. Math.*，66（1987），171–216。[2] M. Artin、J. Tate 和 M. Van den Bergh，《与椭圆曲线自同构相关的一些代数》，载于：《格罗滕迪克纪念文集 1》，1990，33–85。[3] P. Belmans、K. De Laet 和 L. Le Bruyn，《量子多项式环的点簇》， *J. Algebra*，463（2016），10–22。[4] A. Beilinson、V. Ginzburg 和 W. Soergel，《表示论中的 Koszul 对偶模式》， *J. Am. Math.Soc.*，9（2）（1996），473–527。[5] H. Hu、M. Matsuno 和 I. Mori，《Calabi-Yau量子射影平面中的非交换圆锥曲线》， *J. Algebra*，620（2023），194–224。[6] H. Hu 和 I. Mori，《Clifford 二次完全交》， *Math. Z.*，308（2024），第 30 期。[7] I. Mori，《非交换射影概形与点概形》，《代数、环及其表示》，World Scientific，新泽西州哈肯萨克，2006，215–239。[8] D. Rogalski，《非交换射影几何导论》，2014，arXiv:1403.3065。[9] J. Rotman，《同调代数导论》，Springer纽约，2009。[10] K. Ueyama，《斜二次超曲面的导出范畴》， *Israel J. Math.*，253（2023），205–247。[11] Y. Shen 和 Y.Guo，《Koszul-Artin-Schelter正则代数的分次Ore扩张的中山自同构》， *J. Algebra*，579（2021），114–151。[12] J. Shamash，《局部环的庞加莱级数 I》， *J. Algebra*，12（1969），453–470。[13] S. P. Smith，《一些与椭圆曲线相关的有限维代数》，载于《代数表示论及相关主题》，《CMS会议论文集》，19（1996），315–348。

[14] B. Shelton 和 G. Tingey, 《关于 Koszul 代数及一种构造Artin-Schelter正则代数的新方法》, *J. Algebra* 241 （2001）, 789–798。[15] B. Shelton 和 M. Vancliff, 《将量子三阶二次曲面嵌入量子 $\mathbb{P}^3$》, *Comm. Algebra*, 27（1999）, 2877–2904。[16] S. P. Smith 和 M. Van den Bergh, 《非交换二次曲面》, *J. Noncommut. Geom.*, 7（2013）, 817–856。[17] D. R. Stephenson 和 M. Vancliff, 《构造具有有限多个点的 Clifford 量子 $\mathbb{P}^3$》, *J. Algebra*, 312（2007）, 86–110。[18] J. Vitoria, 《非交换射影空间的等价》, arXiv:1001.4400, 2010。

Hu: School of Mathematical Sciences,
University of Science and Technology of China, Hefei, Anhui 230026, China*Email address*: huhaigang@ustc.edu.cnWu: School of Mathematical Sciences,
University of Science and Technology of China, Hefei, Anhui 230026, China*Email address*: wuwch20@mail.ustc.edu.cnYe: School of Mathematical Sciences,
University of Science and Technology of China, Hefei, Anhui 230026, Chinaand
Hefei National Laboratory, University of Science and Technology of China, Hefei 230088, China*Email address*: yeyu@ustc.edu.cn